www.e-rara.ch

Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia

Saccheri, Girolamo

Mediolanum, 1733

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5569

Persistent Link: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-10433

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

234

~~74734~~ Ra
Rar 5569

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.

AUCTORE

HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.

OPUSCULUM

EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

EIDGEN. POLYTECHN. SCHULE BIBLIOTHEK

EX.^{MO} SENATUI
MEDIOLANENSI

Hieronymus Saccherius e Soc. Jesu

F.

EUclidem ab omni nævo vindicatum, ſupplicem vobis ſiſto, PP. Sapientiſſimi; quibus nempe quotidiano veluti uſu compertiſſimum eſt, quanti in unaquaque diſciplinâ interſit, earum prima quædam dogmata inconcuſſa, atque immota conſiſtere, ne tota ſuperextructæ inquiſitionis machina, inopino caſu, funditùs evertatur. Id enim in ipsâ Divini, Humanique Juris ſcientiâ, quæ Ampliſſimi Ordinis Veſtri præcipuum decus eſt, rerumque maxima-rum arbitra, ac moderatrix sedet, perspectum satis habere potestis. Hæc enim nisi æquissimis Principum Legibus, Sapientiumque Responsis, quæ vim legis, ac pondus ipsâ humani generis approbatione meruerunt, quibusdam veluti basibus niteretur, quanta emergeret in jure dicendo nunquam vincenda perplexitas, quot in Foro inextricabiles tenebræ, quàm infelix perturbatio publicæ felicitatis! Et hæc quidem cautio, cum in omni disciplinarum genere locum habet, tum præcipuè in Mathematicis diligentiùs adhibenda est, unde omne opinandi arbitrium exulat, soloque principiorum, ac consecutionum inseparabili nexu elicitur manifesta, ac compertissima veritas. Eâ de causâ insignes Geometræ, tum prioribus illis, tum etiam ad hanc usque ætatem nostram consequentibus sæculis, Matheseos Elementa ad exactissimæ firmitatis leges redigere studuerunt; eo tamen conatu, qui & mihi (absit verbo invidia) exercendi ingenii, pro muneris mei ratione, facultatem reliquerit, ac excitaverit voluntatem. Quo successu, Eruditorum judicium erit. Me certè, si audire quempiam in re suâ decet, non pœnitet laboris mei; qui ut latiùs promanaret, atque exciperetur libentiùs, cui nisi Excelso Ordini Vestro, PP. Amplissimi, sacran-

dus

dus erat, qui Vestri Nominis gloriam splendore sanguinis, Doctrinæ eminentiâ, virtutum merito superatis? Hoc itaque alterum, post Neostaticam, summi in vos obsequii mei, pignus, ac monumentum excipite; quodque caput est: Authorem ipsum habete, quamdiu vivet, vobis Addictissimum.

dus erat, qui Vestri Nominis gloriam splendore ingeniis, Vestra eminentia, virtutum merito superatis? Hoc itaque alterum, post Neo-[illegible], summi in vos obsequii mei, pignus; ac monumentum excipite; quodque caput est: Authorem ipsum habete, quamdiu vivet, vobis Addictissimum.

IGNATIUS VICECOMES
SOCIETATIS JESU
In Provincia Mediolanensi Præpositus Provincialis.

CUm librum, cui titulus *Euclides ab omni nævo vindicatus* a P. Hieronymo Saccherio nostræ Societatis Sacerdote conscriptum, aliquot ejusdem Societatis Theologi recognoverint, & in lucem edi posse probaverint; facultate nobis a R. P. Nostro Præposito Generali Francisco Retz communicata, concedimus ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat, ita videbitur: Cujus rei gratiâ has litteras manu nostra subscriptas, sigilloque nostro munitas dedimus. Mediolani 16. Augusti 1733.

IGNATIUS VICECOMES.

Loco ✠ Sigilli.

DOn Gaſpar a Baſilica-Petri Sacræ Theologiæ, ac Juris utriuſque Doctor, S. Offitii Reviſor, ex juſſu Reverendiſſimi Patris Magiſtri Sylveſtri Martini Inquiſitoris Generalis Mediolani, vidi, & attentè legi Librum, cui titulus, Euclides ab omni nævo vindicatus, Auctore Hieronymo Saccherio Societatis Jesu &c. nihilque in eo reperi contra Fidem Orthodoxam ; neque contra bonos mores, ac ideo poſſe prælo mandari cenſeo &c.

Die 13. Julii 1733.

IMPRIMATUR

F. Sylveſter Martini Ord. Præd. Inquiſitor Generalis Mediol.

Franciſcus Curionus S. Euſebii Archipresb. pro Eminentiſs. & Reverendiſs. D. D. Card. Odeſcalco Archiep.

Carlius pro Excellentiſſimo Senatu.

PROŒMIUM AD LECTOREM.

Q*Uanta ſit Elementorum Euclidis præſtantia, ac dignitas, nemo omnium, qui Mathematicas diſciplinas noverint, ignorare poteſt. Lectiſſimos hanc in rem teſtes adhibeo Archimedem, Apollonium, Theodoſium, alioſque penè innumeros, ad hæc uſque noſtra tempora rerum Mathematicarum Scriptores, qui non aliter hæc Euclidis Elementa uſurpant, niſi ut principia jam diu ſtabilita, ac penitus inconcuſſa. Verùm tanta hæc nominis celebritas vetare non potuit, quin multi ex Antiquis pariter, ac Recentioribus, iique Magni Geometræ nævos quoſdam a ſe depræhenſos cenſuerint in his ipſis pulcherrimis, nec unquam ſatis laudatis Elementis. Tres autem hujuſmodi nævos deſignant, quos ſtatim ſubnecto.*

Primus reſpicit definitionem parallelarum, & ſub ea Axioma, quod apud Clavium eſt decimumtertium Libri primi, ubi Euclides ſic pronunciat: Si in duas rectas lineas, in eodem plano exiſtentes recta incidens linea duos ad eaſdem partes internos angulos minores duobus rectis cum eiſdem efficiat, duæ illæ rectæ lineæ ad eas partes in infinitum protractæ inter ſe mutuò incident. *Porrò nemo eſt, qui dubitet de veritate expoſiti Pronunciati; ſed in eo unicè Euclidem accuſant, quòd nomine Axiomatis uſus fuerit, quaſi nempè ex ſolis terminis ritè perſpectis ſibi ipſi faceret fidem. Inde autem non pauci (retentâ cæteroquin Euclidæâ parallelarum definitione) illius demonſtrationem aggreſſi ſunt ex iis ſolis Propoſitionibus Libri primi Euclidæi, quæ præcedunt vigeſimam nonam, ad quam ſcilicet uſui eſſe incipit controverſum Pronunciatum.*

Sed rursum; quoniam antiquorum in hanc rem conatus visi non sunt adamussim scopum attingere; factum idcircò est, ut multi proximiorum temporum eximii Geometræ, idem pensum aggressi, necessariam censuerint novam quandam parallelarum definitionem. Itaque; cum Euclides parallelas rectas lineas definiat, quæ in eodem plano existentes, si in utramque partem in infinitum producantur, nunquam inter se mutuò incidunt; *postremis expositæ definitionis vocibus has alias substituunt*: Semper inter se æquidistant; *adeò ut nempè singulæ perpendiculares ab uno quolibet unius illarum puncto ad alteram demissæ æquales inter se sint.*

At nova rursum hinc oritur scissura. Nam aliqui, & ii sanè acutiores, demonstrare conantur parallelas rectas lineas prout sic definitas, unde utique gradum faciant ad demonstrandum sub ipsis Euclidæis vocibus controversum Pronunciatum, cui nimirum ab eâ vigesimâ nonâ Libri primi Euclidæi (pauculis quibusdam exceptis) universa innititur Geometria. Alii verò (non sine magno in rigidam Logicam peccato) eas tales rectas lineas parallelas, nimirum æquidistantes, *assumunt tanquam datas, ut inde gradum faciant ad reliqua demonstranda.*

Et hæc quidem satis sunt ad præmonendum Lectorem super iis, quæ materiam exhibebunt Libro priori hujus mei Opusculi: Nam uberior prædictorum omnium explicatio habebitur in Scholiis post Prop. vigesimam primam enunciati Libri, quem dividam in duas veluti partes. In priore imitabor antiquiores illos Geometras, nihil propterea sollicitus de naturâ, aut nomine illius lineæ, quæ omnibus suis punctis a quadam suppositâ rectâ lineâ æquidistet: Sed unicè in id incumbam, ut controversum Euclidæum Axioma citra omnem petitionem principii clarè demonstrem; nunquam idcircò adhibens ex ipsis prioribus Libri primi Euclidæi Propositionibus, non modò vigesimam septimam, aut vigesimam octavam, sed nec ipsas quidem decimam sextam, aut decimam septimam, nisi ubi clarè agatur de triangulo omni

ex

ex parte circumscripto. Tum in posteriore parte, ad novam ejusdem Axiomatis confirmationem demonstrabo non nisi rectam lineam esse posse, quæ omnibus suis punctis a quadam supposità rectà lineà æquidistet. Horum autem occasione prima ipsa universæ Geometriæ Principia rigido examini subjicienda hìc esse nullus est, qui non videat.

Transeo ad alios duos nævos Euclidi objectos. Prior respicit definitionem sextam Libri quinti super æquè proportionalibus: Posterior Definitionem quintam Libri sexti super compositione rationum. Hic autem erit secundi mei Libri unicus scopus, ut dilucidè explicem præfatas Euclidæas Definitiones, simulque ostendam non æquo jure hac in parte Euclidis nomen vexatum fuisse.

Prodest tamen rursum præmonere, demonstratum a me iri hac occasione unum quoddam Axioma, quod tutissimè per omnem Geometriam versetur, sine indigentià illius Postulati, *sub nomine Axiomatis ab interpretibus (ut reor) intrusi, cujus usus incipit ad* 18. *quinti.*

INDICIS LOCO

Addenda censeo, quæ sequuntur.

1. IN I. & II. Propos. Lib. primi duo jaciuntur principia, ex quibus in III. & IV. demonstratur, angulos interiores ad rectam jungentem extremitates æqualium perpendiculorum, quæ ex duobus punctis alterius rectæ, veluti basis, versùs easdem partes (in eodem plano) erigantur, non modò fore inter se æquales, sed præterea aut rectos, aut obtusos, aut acutos, prout illa jungens æqualis fuerit, aut minor, aut major prædictâ basi: Atque ita vicissim. *a pag.* 1

2. Hinc sumitur occasio secernendi tres diversas hypotheses, unam anguli recti, alteram obtusi, tertiam acuti: circa quas in V. VI. & VII. demonstratur, unam quamlibet harum hypothesium fore semper unicè veram, si nimirum depræhendatur vera in uno quolibet casu particulari. *a pag.* 5

3. Tum verò; post interpositas tres alias necessarias Propositiones; demonstratur in XI. XII. ac XIII. universalis veritas noti Axiomatis, respectu habito ad priores duas hypotheses, unam anguli recti, & alteram obtusi; ac tandem in XIV. ostenditur absoluta falsitas hypothesis anguli obtusi. Atque hinc incipit diuturnum prælium adversùs hypothesin anguli acuti, quæ sola renuit veritatem illius Axiomatis. *a pag.* 10

4.

4. Itaque in XV. ac XVI. demonstratur stabilitum iri hypotheses aut anguli recti, aut obtusi, aut acuti, ex quolibet triangulo rectilineo, cujus tres simul anguli æquales sint, aut majores, aut minores duobus rectis; ac similiter ex quolibet quadrilatero rectilineo, cujus quatuor simul anguli æquales sint, aut majores, aut minores quatuor rectis. *a pag.* 20

5. Sequuntur quinque aliæ Propositiones, in quibus demonstrantur alia indicia pro secernenda vera hypothesi a falsis. *a pag.* 23

6. Accedunt quatuor principalia Scholia; in quorum postremo exhibetur figura quædam geometrica, ad quam fortasse respexit Euclides, ut suum illud Pronunciatum assumeret tanquam per se notum. In tribus prioribus ostenditur non valuisse ad intentum præcedentes insignium Geometrarum conatus. Sed quia controversum Axioma exactissimè demonstratur ex duabus præsuppositis rectis lineis *æquidistantibus*; monet ibi Auctor contineri in eo præsupposito manifestam petitionem *Principii*. Quòd si provocari hìc velit ad communem persuasionem, atque item exploratissimam *praxim*; rursum monet provocari non debere ad experientiam, quæ respiciat puncta infinita, cum satis esse possit unica experientia uni cuivis puncto affixa. Quo loco tres ab ipso afferuntur invictissimæ Demonstrationes Physico-Geometricæ. *a pag.* 29

7. Supersunt duodecim aliæ Propositiones,

ciones, quæ primæ Parti hujus Libri finem imponunt. Non expono particularia assumpta, quia nimis implexa. Solùm dico ibi tandem manifestæ falsitatis redargui inimicam hypothesim anguli acuti, utpotè quæ duas rectas agnoscere deberet, quæ in uno eodemque puncto commune reciperent in eodem plano perpendiculum: Quod quidem naturæ lineæ rectæ repugnans esse demonstratur per quinque Lemmata, in quibus concluduntur quinque principalia Geometriæ Axiomata, quæ respiciunt lineam rectam, ac circulum, cum suis correlativis Postulatis. *a pag.* 43

8. Secunda pars continet sex Propositiones. Ibi autem; post expensam (juxta hypothesim anguli acuti) naturam illius lineæ, quæ omnibus suis punctis a quadam præsuppositâ rectâ lineâ æquidistet; multis modis ostenditur, eam fore æqualem contrapositæ basi, unde infertur prænunciatæ hypothesis certissima falsitas. Quare tandem in ultima Propos. quæ est XXXIX. exactissimè demonstratur celebre illud Euclidæum Axioma, cui nempe (ut omnes sciunt) universa Geometria innititur. *a pag.* 87

9. Secundus Liber digeri commodè non potuit in Propositiones, etiamsi locis opportunis plura intermista sint utilissima Theoremata, ac Problemata. Meretur nihilominus expressè notari unum quoddam Axioma, cujus ibi demonstratur non modò veritas, verùm etiam universalis utilitas

pro

pro omni Geometria, sine indigentia alterius parum decori Postulati, quod ab interpretibus censeri potest intrusum sub nomine Axiomatis, cujus nempe usus incipit ad 18. quinti. Et id quidem pro prima Parte hujus Libri, in qua vindicatur Def. sexta quinti Euclidæi. *a pag.* 102

10. Tum in secunda Parte; præter nonnulla alia opportunè addita, ad tuendas reliquas Definitiones ejusdem Quinti circa magnitudines proportionales; demonstratur priore loco (respectu habito ad magnitudines commensurabiles) quinta Definitio Sexti, etiamsi recipi ea deberet in *quid rei*, veluti Axioma: Sed rursum multis exemplis, ex ipso Euclide petitis, ostenditur nullius demonstrationis indigam eam esse, quia Definitionem *puri nominis*. Atque ita, post opportunam additam Appendicem, huic Operi finis imponitur. *a pag.* 132

ERRATA CORRIGE

Pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE
11.	5.	tefpectivè	refpectivè
20.	9.	mauifeftum	manifeftum
26.	9.	*punctum* D	*punctum* B
28.	11.	Jnngantur	Jungantur
28.	14.	pu ctum	punctum
30.	17.	Infiftentis	Infiftenti
40.	10.	prætet	præter
46.	29.	ratioue	ratione
65.	16.	fuppofita ri	fuppofitam
72.	30.	unâ *ABX* rectâ	unâ *ADX* rectâ
73.	1.	intelligantur	intelligatur
73.	5.	cum eâdem rectâ *ABX*	cum eâdem rectâ *ADX*
75.	penult.	fita	fit a
85.	1.	exactiffimæ	exactiffimè
97.	ult.	Ipfi	ipfi
109.	ult.	*IBC*	*ABC*
136.	16.	habet	fe habet

Reliqua errata leviora, ac præfertim circa frequentem immutationem literarum n & u, f & ſ, r & t fapiens Lector condonabit.

EUCLIDIS
AB OMNI NÆVO VINDICATI
LIBER PRIMUS:

In quo demonſtratur: duas quaslibet in eodem plano exiſtentes rectas lineas, in quas recta quæpiam incidens duos ad eaſdem partes internos angulos efficiat duobus rectis minores, ad eas partes aliquando invicem coituras, ſi in infinitum producantur.

PARS PRIMA

PROPOSITIO I.

SI duæ æquales rectæ (*fig.* 1.) AC, BD, *æquales ad eaſdem partes efficiant angulos cum recta* AB: *Dico angulos ad junctam* CD *æquales invicem fore.* Tab. I.

Demonſtratur. Jungantur *AD*, *CB*. Tum conſiderentur triangula *CAB*, *DBA*. Conſtat (ex quarta primi) æquales fore baſes *CB*, *AD*. Deinde conſiderentur triangula *ACD*, *BDC*. Conſtat (ex octava primi) æquales fore angulos *ACD*, *BDC*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

MAnente uniformi quadrilatero ABDC, *latera* AB, CD, *biſariam dividantur* (*fig.* 2.) *in punctis* M, & H. *Di-*

eo angulos ad junctam MH *fore hinc inde rectos*.

Demonstratur. Jungantur *AH*, *BH*, atque item *CM*, *DM*. Quoniam in eo quadrilatero anguli *A*, & *B* positi sunt æquales, atque item (ex præcedente) æquales sunt anguli *C*, & *D*; constat ex quarta primi (cum aliàs nota sit æqualitas laterum) æquales fore in triangulis *CAM*, *DBM*, bases *CM*, *DM*; atque item, in triangulis *ACH*, *BDH*, bases *AH*, *BH*. Quare; collatis inter se triangulis *CHM*, *DHM*, ac rursum inter se triangulis *AMH*, *BMH*; constabit (ex octava primi) æquales invicem fore, atque ideo rectos angulos hinc inde ad puncta *M*, & *H*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

SI *duæ æquales rectæ* (*fig.* 3.) AC, BD, *perpendiculariter insistant cuivis rectæ* AB: *Dico junctam* CD *æqualem fore, aut minorem, aut majorem ipsâ* AB, *prout anguli ad eandem* CD *fuerint aut recti, aut obtusi, aut acuti*.

Demonstratur prima pars. Existente recto utroque angulo *C*, & *D*; sit, si fieri potest, alterutra ipsarum, ut *DC*, major alterâ *BA*. Sumatur in *DC* portio *DK* æqualis ipsi *BA*, jungaturque *AK*. Quoniam igitur super *BD* perpendiculariter insistunt æquales rectæ *BA*, *DK*, æquales erunt (ex prima hujus) anguli *BAK*, *DKA*. Hoc autem absurdum est; cum angulus *BAK* sit ex constructione minor supposito recto *BAC*; & angulus *DKA* sit ex constructione externus, atque ideo (ex decimasexta primi) major interno, & opposito *DCA*, qui supponitur rectus. Non ergo alterutra prædictarum rectarum, *DC*, *BA*, est altera major, dum anguli ad junctam *CD* sint recti; ac propterea æquales invicem sunt. Quod erat primo loco demonstrandum.

Demon-

Demonſtratur ſecunda pars. Si autem obtuſi fuerint anguli ad junctam *CD*, dividantur bifariam *AB*, & *CD*, in punctis *M*, & *H*, jungaturque *MH*. Quoniam ergo ſuper recta *MH* perpendiculariter inſiſtunt (ex præcedente) duæ rectæ *AM*, *CH*, poniturque ad junctam *AC* angulus rectus in *A*, non erit (ex prima hujus) recta *CH* æqualis ipſi *AM*, cum deſit angulus rectus in *C*. Sed neque erit major: cæterùm ſumptâ in *HC* portione *KH* æquali ipſi *AM*, æquales forent (ex prima hujus) anguli ad junctam *AK*. Hoc autem abſurdum eſt, ut ſupra. Nam angulus *MAK* eſt minor recto; & angulus *HKA* eſt (ex decimaſexta primi) major obtuſo, qualis ſupponitur internus, & oppoſitus *HCA*. Reſtat igitur, ut *CH*, dum anguli ad junctam *CD* ponantur obtuſi, minor ſit ipsâ *AM*; ac propterea prioris dupla *CD* minor ſit poſterioris duplâ *AB*. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

Demonſtratur tertia pars. Tandem verò, ſi acuti fuerint anguli ad junctam *CD*, ductâ pariformiter (ex præcedente) perpendiculari *MH*, ſic proceditur. Quoniam ſuper recta *MH* perpendiculariter inſiſtunt duæ rectæ *AM*, *CH*, poniturque ad junctam *AC* angulus rectus in *A*, non erit (ut ſuprà) recta *CH* æqualis ipſi *AM*, cum deſit angulus rectus in *C*. Sed neque erit minor: cæterùm; ſi in *HC* protractâ ſumatur *HL* æqualis ipſi *AM*; æquales forent (ut ſuprà) anguli ad junctam *AL*. Hoc autem abſurdum eſt. Nam angulus *MAL* eſt ex conſtructione major ſuppoſito recto *MAC*; & angulus *HLA* eſt ex conſtructione internus, & oppoſitus, atque ideo minor (ex decimaſexta primi) externo *HCA*, qui ſupponitur acutus. Reſtat igitur, ut *CH*, dum anguli ad junctam *CD* ſint acuti, major ſit ipsâ *AM*, atque ideo prioris dupla *CD* major ſit poſterioris duplâ *AB*. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

Itaque conſtat junctam *CD* æqualem fore, aut minorem, aut majorem ipsâ AB, prout anguli ad eandem CD fuerint aut recti, aut obtusi, aut acuti. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

Hinc in omni quadrilatero continente tres quidem angulos rectos, & unum obtusum, aut acutum, latera adjacentia illi angulo non recto minora sunt, alterum altero, lateribus contrapositis, si ille angulus sit obtusus, majora autem, si sit acutus. Id enim demonstratum jam est de latere CH relatè ad contrapositum latus AM; similique modo ostenditur de latere AC relatè ad contrapositum latus MH. Cum enim rectæ AC, MH, perpendiculares sint ipsi AM, nequeunt (ex prima hujus) esse invicem æquales, propter inæquales angulos ad junctam CH. Sed neque (in hypothesi anguli obtusi in C) potest quædam AN, portio ipsius AC, æqualis esse ipsi MH, qua nimirum major sit prædicta AC: cæterùm (ex eadem prima) æquales forent anguli ad junctam HN; quod est absurdum, ut suprà. Rursum verò (in hypothesi anguli acuti in eo puncto C) si velis quandam AX, sumptam in AC protractâ, æqualem ipsi MH, qua nimirum minor sit modò dicta AC; jam eodem titulo æquales erunt anguli ad HX; quod utique absurdum itidem est, ut supra. Restat igitur, ut in hypothesi quidem anguli obtusi in eo puncto C, latus AC minus sit contraposito latere MH; in hypothesi autem anguli acuti sit eodem majus. Quod erat intentum.

COROLLARIUM II.

Multò autem magis erit CH major portione qualibet ipsius AM, ut putà PM, ad quam nempe juncta

CP acutiorem adhuc angulum efficiat cum ipsa *CH* versùs partes pnncti *H*, & obtusum (ex decimasexta primi) cum ea *PM* versùs partes puncti *M*.

COROLLARIUM III.

Rursum constat prædicta omnia æquè procedere, sive assumpta perpendicula *AC*, & *BD*, fuerint certæ cujusdam apud nos longitudinis, sive sint, aut supponantur infinitè parva. Quod quidem notari opportunè debet in reliquis sequentibus Propositionibus.

PROPOSITIO IV.

Vicissim autem (manente figura præcedentis Propositionis) anguli ad junctam CD *erunt aut recti, aut obtusi, aut acuti, prout recta* CD *æqualis fuerit, aut minor, aut major contrapositâ* AB.

Demonstratur. Si enim recta *CD* æqualis sit contrapositæ *AB*, & nihilominus anguli ad eandem sint aut obtusi, aut acuti; jam ipsi tales anguli eam probabunt (ex præcedente) non æqualem, sed minorem, aut majorem contrapositâ *AB*; quod est absurdum contra hypothesim. Idem uniformiter valet circa reliquos casus. Stat igitur angulos ad junctam *CD* esse aut rectos, aut obtusos, aut acutos, prout recta *CD* æqualis fuerit, aut minor, aut major contrapositâ *AB*. Quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES.

Quandoquidem (ex prima hujus) recta jungens extremitates æqualium perpendiculorum eidem rectæ (quam vocabimus basim) insistentium, æquales efficit

ficit angulos cum ipsis perpendiculis; tres idcirco distinguendæ sunt hypotheses circa speciem horum angulorum. Et primam quidem appellabo hypothesim anguli recti; secundam verò, & tertiam appellabo hypothesim anguli obtusi, & hypothesim anguli acuti.

PROPOSITIO V.

Hypothesis anguli recti, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera.

Demonstratur. Efficiat juncta *CD* (fig. 4.) angulos rectos cum duobus quibusvis æqualibus perpendiculis *AC*, *BD*, uni cuivis *AB* insistentibus. Erit *CD* (ex tertia hujus) æqualis ipsi *AB*. Sumantur in *AC*, & *BD* protractis duæ *CR*, *DX*, æquales ipsis *AC*, *BD*; jungaturque *RX*. Facilè ostendemus junctam *RX* æqualem fore ipsi *AB*, & angulos ad eandem rectos. Et primò quidem per superpositionem quadrilateri *ABDC* super quadrilaterum *CDXR*, adhibitâ communi basi *CD*. Deinde elegantiùs sic proceditur. Jungantur *AD*, *RD*. Constat (ex quarta primi) æquales fore in triangulis *ACD*, *RCD*, bases *AD*, *RD*, atque item angulos *CDA*, *CDR*, ac propterea æquales reliquos ad unum rectum, nimirum *ADB*, *RDX*. Quare rursum (ex eadem quarta primi) æqualis erit, in triangulis *ADB*, *RDX*, basis *AB*, basi *RX*. Igitur (ex præcedente) anguli ad junctam *RX* erunt recti, ac propterea persistemus in eadem hypothesi anguli recti.

Quoniam verò augeri similiter potest longitudo perpendiculorum in infinitum, sub eadem basi *AB*, consistente semper hypothesi anguli recti, demonstrandum est eandem hypothesim semper mansuram in casu cujusvis imminutionis eorundem perpendiculorum; quod quidem ita evincitur.

Suman-

Sumantur in *AR*, & *BX* duo quælibet æqualia perpendicula *AL*, *BK*, jungaturque *LK*. Si anguli ad junctam *LK* recti non sint, erunt tamen (ex prima hujus) invicem æquales. Erunt igitur ex una parte, ut putà versùs *AB* obtusi, & versùs *RX* acuti, ut nimirum anguli hinc inde ad utrunque illorum punctorum æquales sint (ex decimatertia primi) duobus rectis. Constat autem æqualia etiam invicem esse perpendicula *LR*, *KX*, ipsi *RX* insistentia. Igitur (ex tertia hujus) erit *LK* major quidem contrapositâ *RX*, & minor contrapositâ *AB*.

Hoc autem absurdum est; cum *AB*, & *RX* ostensæ sint æquales. Non ergo mutabitur hypothesis anguli recti sub quacunque imminutione perpendiculorum, dum consistat semel posita basis *AB*.

Sed neque immutabitur hypothesis anguli recti, sub quacunque imminutione, aut majori amplitudine basis; cum manifestum sit considerari posse ut basim quodvis perpendiculum *BK*, aut *BX*, atque ideo considerari vicissim ut perpendicula ipsam *AB*, & rectam æqualem contrapositam *KL*, aut *XR*.

Constat igitur hypothesim anguli recti, si vel in uno casu sit vera, semper in omni casu illam solam esse veram. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Hypothesis anguli obtusi, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera.

Demonstratur. Efficiat juncta *CD* (fig. 5.) angulos obtusos cum duobus quibusvis æqualibus perpendiculis *AC*, *BD*, uni cuivis rectæ *AB* insistentibus. Erit *CD* (ex tertia hujus) minor ipsâ *AB*. Sumantur in *AC*, *BD* protractis duæ quælibet invicem æquales portiones *CR*,

DX

DX; jungaturque *RX*. Jam quæro de angulis ad junctam *RX*, qui utique (ex prima hujus) æquales invicem erunt. Si obtusi sunt, habemus intentum. At recti non sunt; quia sic unum haberemus casum pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex præcedente) relinqueret locum pro hypothesi anguli obtusi. Sed neque acuti sunt. Nam sic esset *RX* (ex tertia hujus) major ipsâ *AB*; ac propterea multò major ipsâ *CD*. Hoc autem subsistere non posse sic ostenditur. Si quadrilaterum *CDXR* intelligatur impleri rectis abscindentibus ab ipsis *CR*, *DX*, portiones invicem æquales, implicat transiri a recta *CD*, quæ minor est ipsâ *AB*, ad *RX* eâdem majorem, quin transeatur per quandam *ST* ipsi *AB* æqualem. Hoc autem absurdum esse in hac hypothesi ex eo constat; quia sic (ex quarta hujus) unus haberetur casus pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex præcedente) relinqueret locum hypothesi anguli obtusi. Igitur anguli ad junctam *RX* debent esse obtusi.

Deinde, sumptis in *AC*, *BD*, æqualibus portionibus *AL*, *BK*; simili modo ostendemus angulos ad junctam *LK* nequire esse acutos versùs ipsam *AB*; quia sic illa foret major, quàm *AB*, ac propterea multò major rectâ *CD*. Hinc autem reperiri deberet, ut suprà, quædam intermedia inter *CD* minorem, & *LK* majorem ipsâ *AB*; intermedia, inquam, æqualis ipsi *AB*, quæ utique, ex jam notis, omnem locum auferret hypothesi anguli obtusi. Tandem propter hanc ipsam causam recti esse nequeunt anguli ad junctam *LK*; ergo erunt obtusi. Igitur sub eadem basi *AB*, auctis, aut imminutis ad libitum perpendiculis, manebit semper hypothesis anguli obtusi.

Sed debet idem demonstrari sub assumpta qualibet basi. Eligatur (fig. 6.) pro basi quodlibet ex prædictis perpendiculis, ut putà *BX*. Dividantur bifariam in punctis

M,

M, & H ipsæ AB, RX; jungaturque MH. Erit MH (ex secunda hujus) perpendicularis ipsis AB, RX. Est autem angulus ad punctum B rectus ex hypothesi; & obtusus, ex jam demonstratis, ad punctum X. Fiat igitur angulus rectus BXP versùs partes ipsius MH. Occurret XP ipsi MH in quodam puncto P inter puncta M, & H constituto; cum ex una parte angulus BXH sit obtusus; & ex altera, si jungatur XM, angulus BXM (ex decimaseptima primi) sit acutus. Tum verò; quoniam quadrilaterum $XBMP$ tres continet angulos rectos ex jam notis, & unum obtusum (ex decimasexta primi) in puncto P, quia est externus relatè ad internum, & oppositum rectum angulum in puncto H trianguli PHX; erit latus XP (ex Cor. I. post tertiam hujus) minus contraposito BM. Quare; assumptâ in BM portione BF æquali ipsi XP; erunt (ex prima hujus) anguli ad junctam PF invicem æquales, nimirum obtusi, cum angulus BFP (ex decimasexta primi) sit obtusus propter rectum angulum internum, & oppositum FMP. Igitur sub qualibet basi BX consistit hypothesis anguli obtusi.

Consistet autem, ut suprà, eadem hypothesis sub eadem basi BX, quamvis æqualia perpendicula ad libitum augeantur, aut minuantur. Itaque constat hypothesim anguli obtusi, si vel in uno casu sit vera, semper in omni casu illam solam esse veram. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Hypothesis anguli acuti, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera.

Demonstratur facillimè. Si enim hypothesis anguli acuti permittat aliquem casum alterutrius hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, jam (ex duabus præcedentibus)

tibus) nullus relinquetur locus ipsi hypothesi anguli acuti; quod est absurdum. Itaque hypothesis anguli acuti, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Dato quovis triangulo (fig. 7.) ABD *, rectangulo in* B *, protrahatur* DA *usque ad aliquod punctum* X *, & per* A *erigatur ipsi* AB *perpendicularis* HAC *, existente puncto* H *ad partes anguli* XAB *. Dico angulum externum* XAH *æqualem fore, aut minorem, aut majorem interno, & opposito* ADB *, prout vera sit hypothesis anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti: Et vicissim.*

Demonstratur. Sumatur in *HC* portio *AC* æqualis ipsi *BD*, jungaturque *CD*. Erit *CD*, in hypothesi anguli recti, æqualis (ex tertia hujus) ipsi *AB*. Quare angulus *ADB* æqualis erit (ex octava primi) angulo *DAC*, sive ejus æquali (ex decimaquinta primi) angulo *XAH*. Quod erat primo loco demonstrandum.

Tum, in hypothesi anguli obtusi, erit *CD* (ex eadem tertia hujus) minor ipsâ *AB*. Quare in triangulis *ADB*, *DAC* erit (ex vigesimaquinta primi) angulus *DAC*, sive (ipsi ad verticem) *XAH*, minor angulo *ADB*. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Tandem, in hypothesi anguli acuti, erit *CD* (ex eadem tertia hujus) major contrapositâ *AB*. Quare in prædictis triangulis, erit (ex eadem vigesimaquinta primi) angulus *DAC*, sive (ipsi ad verticem) *XAH*, major angulo *ADB*. Quod erat tertio loco demonstrandum.

Vicissim autem: si angulus *CAD*, sive ejus ad verticem *XAH*, æqualis sit interno, & opposito *ADB*; erit (ex quarta primi) juncta *CD* æqualis ipsi *AB*, ac propte-

rea

tea (ex quarta hujus) vera erit hypothesis anguli recti.

Sin verò angulus *CAD*, sive ejus ad verticem *XAH*, minor sit, aut major interno, & opposito *ADB*; erit etiam (ex vigesimaquarta primi) juncta *CD* minor, aut major ipsâ *AB*; ac propterea (ex quarta hujus) vera erit respectivè hypothesis aut anguli obtusi, aut anguli acuti. Quæ omnia erant demonstranda.

PROPOSITIO IX.

Cujusvis trianguli rectanguli reliqui duo acuti anguli simul sumpti æquales sunt uni recto, in hypothesi anguli recti; majores uno recto, in hypothesi anguli obtusi; minores autem in hypothesi anguli acuti.

Demonstratur. Si enim angulus *XAH* (manente figura superioris Propositionis) æqualis est (nimirum, ex præcedente, in hypothesi anguli recti) angulo *ADB*; jam angulus *ADB* duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, prout eos efficit (ex decimatertia primi) prædictus angulus *XAH* cum eodem angulo *HAD*. Quare, dempto recto angulo *HAB*, æquales manebunt uni recto duo simul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat primum.

Tum verò; si angulus *XAH* minor est (nimirum, ex præcedente, in hypothesi anguli obtusi) angulo *ADB*, jam angulus *ADB* plusquam duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, cum quo duos efficit rectos (ex prædicta decimatertia primi) angulus *XAH*. Quare, dempto angulo *HAB*, majores erunt uno recto duo simul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat secundum.

Tandem, si angulus *XAH* major sit (nimirum, ex præcedente, in hypothesi anguli acuti) angulo *ADB*; jam angulus *ADB* minus quàm duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, cum quo duos efficit rectos (ex eadem decima

 tertia

tertia primi) angulus *XAH*. Quare, dempto angulo recto *HAB*, minores erunt uno recto duo simul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat tertium.

PROPOSITIO X.

SI recta DB(*fig*. 8.) *perpendiculariter insistat cuidam* ABM, *sitque juncta* DM *major junctâ* DA, *etiam basis* BM *major erit basi* BA. *Et vicissim*.

Demonstratur. Et primò quidem non erunt illæ bases invicem æquales. Cæterùm (ex quarta primi) æquales forent, contra hypothesim, ipsæ *AD*, *DM*. Sed neque erit *BA* major quàm *BM*. Cæterùm, sumptâ in *BA* portione *BS* æquali ipsi *BM*, junctâque *SD*, æquales forent (ex eadem quarta primi) anguli *BSD*, *BMD*: Est autem angulus *BSD* (ex decimasexta primi) major angulo *BAD*. Ergo eodem major foret angulus *BMD*. Hoc autem est contra decimamoctavam primi; cum latus *DM* in triangulo *MDA* supponatur majus latere *DA*. Restat igitur, ut basis *BM* major sit basi *BA*. Quod erat primo loco demonstrandum.

Deinde si alterutra basis, ut putâ *BA* (ne immutetur figura) fingatur major alterâ *BM*; tunc juncta *DS*, quæ ex *BA* abscindat portionem *SB* æqualem ipsi *BM*, æqualis erit (ex quarta primi) junctæ *DM*. Rursum obtusus erit (ex decimasexta primi) angulus *DSA*, & acutus (ex decimaseptima ejusdem primi) angulus *DAS*. Quare (ex decimaoctava ejusdem) erit juncta *DA* major junctâ *DS*, ejusque suppositâ æquali junctâ *DM*. Quod erat secundo loco demonstrandum. Itaque constant proposita.

PROPOSITIO XI.

RECta AP (*quantælibet longitudinis*) *secet duas rectas* PL, AD (*fig.* 9.) *priorem quidem sub recto angulo in* P, *posteriorem verò in* A *sub quovis acuto angulo convergente ad partes ipsius* PL. *Dico rectas* AD, PL (*in hypothesi anguli recti*) *in aliquo puncto, & quidem ad finitam, seu terminatam distantiam, tandem coituras, si protrahantur versùs illas partes, ad quas cum subjecta* AP *duos angulos efficiunt duobus rectis minores.*

Demonstratur. Protrahatur *DA* versùs alias partes usque ad aliquod punctum *X*, & per *A* erigatur ipsi *AP* perpendicularis *HAC*, existente puncto *H* ad partes anguli *XAP*. Tum in *AD* protractâ versùs partes ipsius *PL* sumantur duo æqualia intervalla *AP*, *DF*, demittanturque ad subjectam *AP* perpendiculares *DB*, *FM*, quæ utique cadent, propter decimamseptimam primi, ad partes anguli acuti *DAP*; jungaturque *DM*. Ostendere debeo junctam *DM* æqualem fore ipsi *DF*, sive *DA*.

Et primò quidem nequit *DM* major esse ipsâ *DF*. Cæterùm enim angulus *DMF* minor foret (ex decimaoctava primi) angulo *DFM*, sive ejus æquali (ex octava hujus, in hypothesi anguli recti) angulo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare (cum anguli *CAM*, *FMA* ponantur æquales, utpote recti) reliquus angulus *DMA* major foret reliquo angulo *DAM*. Hoc autem absurdum est (contra decimamoctavam primi) si nempe *DM* ponatur major ipsâ *DF*, sive *DA*.

Sed neque erit *DM* minor ipsâ *DF*. Cæterùm angulus *DMF* major foret (ex eadem decimaoctava primi) angulo *DFM*, sive ejus æquali (ex prædicta octava hujus, in hypothesi anguli recti) angulo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare rursum, ut suprà, reliquus angulus

DMA

DMA non major, sed minor foret reliquo angulo *DAM*. Hoc autem absurdum est (contra eandem decimamoctavam primi) si nempe *DM* ponatur minor ipsâ *DF*, sive *DA*.

Restat igitur, ut juncta *DM* æqualis sit ipsi *DF*, sive *DA*. Quare in triangulo *DAM* æquales erunt (ex quinta primi) anguli ad puncta *A*, & *M*; atque ideo in triangulis *DBA*, *DBM*, rectangulis in *B*, æquales erunt (ex vigesimasexta primi) bases *AB*, *BM*. Quod quidem hoc loco intendebatur.

Quoniam igitur (assumpto in *AD* continuatâ intervallo *AF* duplo intervalli *AD*) perpendicularis *FM* ad subjectam *AP* demissa abscindit ex *AP* versùs *P* basim *AM* duplam illius *AB*, quam abscindit perpendi cular demissa ex puncto *D*; manifestum est tot vicibus fieri posse hanc præcedentis intervalli duplicationem, ut sic in ipsa *AD* continuata deveniatur ad quoddam punctum *T*, ex quo perpendicularis demissa ad continuatam *AP* abscindat quandam *AR* majorem ipsâ quantâlibet finitâ *AP*. Constat autem evenire id non posse, nisi post occursum ipsius continuatæ *AD* in quoddam punctum *L* ipsius *PL*. Si enim punctum *T* consisteret ante illum occursum, deberet ipsa perpendicularis *TR* secare eandem *PL* in quodam puncto *K*. Tunc autem in triangulo *KPR* invenirentur duo anguli recti in punctis *P*, & *R*; quod est absurdum contra decimamseptimam primi. Itaque constat rectas *AD*, *PL* sibi invicem (in hypothesi anguli recti) in aliquo puncto occursuras (& quidem ad finitam, seu terminatam distantiam) si protrahantur versùs illas partes, ad quas cum subjecta *AP* (quantælibet finitæ longitudinis) duos angulos efficiunt duobus rectis minores. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Rursum dico rectam AD *alicubi ad eas partes occursuram rectæ* PL *(& quidem ad finitam, seu terminatam distantiam) etiam in hypothesi anguli obtusi.*

Demonstratur. Nam sumptâ, ut in superiore Propositione, *DF* æquali ipsi *AD*, demissisque jam notis perpendicularibus, ostendere debeo junctam *DM* majorem fore ipsà *DF*, sive *DA*, atque ideo (ex decima hujus) rectam *BM* majorem fore ipsâ *AB*. Et primò non erit *DM* æqualis ipsi *DF*. Cæterùm angulus *DMF* æqualis foret (ex quarta primi) angulo *DFM*, atque ideo major (ex octava hujus in hypothesi anguli obtusi) angulo externo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAF*. Quare (cum anguli *CAM*, *FMA* ponantur æquales utpote recti) reliquus angulus *DMA* minor foret reliquo angulo *DAM*. Quod est absurdum contra quintam primi, si nempe *DM* æqualis sit ipsi *DF*, sive *DA*.

Sed neque ipsa *DM* minor est alterâ *DF*, sive *DA* Cæterùm (ex decimaoctava primi) angulus *DMF* major foret angulo *DFM*, atque ideo (in hac hypothesi anguli obtusi) multò major angulo externo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare rursum, ut suprà, reliquus angulus *DMA* multò minor foret reliquo angulo *DAM*. Hoc autem absurdum est, contra eandem decimamoctavam primi, si nempe *DM* minor sit ipsà *DF*, sive *DA*.

Restat igitur, ut juncta *DM* major sit ipsâ *DF*, sive *DA*, atque ideo (ex decima hujus) ipsa *BM* major sit alterâ *AB*. Quod erat hoc loco intentum.

Quoniam igitur, assumpto in *AD* continuatâ intervallo *AF* duplo intervalli *AD*, perpendicularis *FM* ad subjectam *AP* demissa plus duplo ex eadem abscindit, quàm abscindatur a perpendiculari demissa ex puncto *D*;

multò

multò citiùs in hac hypothesi anguli obtusi, quàm in superiore hypothesi anguli recti, devenietur ad tantum intervallum, ex quo perpendicularis demissa abscindat basim majorem ipsâ quantalibet designatâ *AP*. Hoc autem, ut in superiore Propositione, contingere nequit, nisi post occursum continuatæ *AD* in aliquod punctum ipsius *PL*; & quidem ad finitam, seu terminatam distantiam. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIII.

SI *recta* XA (*quantælibet designatæ longitudinis*) *incidens in duas rectas* AD, XL *efficiat cum eisdem ad easdem partes* (*fig.* 11.) *angulos internos* XAD, AXL *minores duobus rectis: dico, illas duas* (*etiamsi neuter illorum angulorum sit rectus*) *tandem in aliquo puncto ad partes illorum angulorum invicem coituras, & quidem ad finitam, seu terminatam distantiam, dum consistat alterutra hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi.*

Demonstratur. Nam unus prædictorum angulorum, ut putà *AXL*, erit acutus. Itaque ex apice alterius anguli demittatur ad *XL* perpendicularis *AP*, quæ utique (propter decimamseptimam primi) cadet ad partes anguli acuti *AXL*. Quoniam igitur in triangulo *APX*, rectangulo in *P*, duo simul anguli acuti *PAX*, *PXA*, minores non sunt (ex nona hujus) uno recto, in utraque hypothesi aut anguli recti, aut anguli obtusi; si duo isti anguli auferantur a summa angulorum propositorum jam reliquus angulus *PAD* minor erit recto. Itaque erimus in casu duarum præcedentium Propositionum, dum scilicet alterutra hypothesis consistat aut anguli recti, aut anguli obtusi. Quare (ex eisdem) rectæ *AD*, & PL, sive *XL*, in aliquo puncto finitæ, seu terminatæ distantiæ ad notas

partes

partes concurrent, tam ſub una, quàm ſub altera prædictarum hypotheſium. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION I.

UBi obſervare licet notabile diſcrimen ab hypotheſi anguli acuti. Nam in iſta demonſtrari nequiret generalis hujuſmodi rectarum concurſus, quoties recta aliqua in duas incidens, duos ad eaſdem partes efficiat internos angulos duobus rectis minores; nequiret, inquam, directè demonſtrari, etiamſi in eadem hypotheſi admitteretur prædictus generalis concurſus, quoties unus duorum angulorum eſt rectus. Quamvis enim recta *AD* perpendicularis & ipſa foret rectæ *AP*; quo caſu nequiret certè, propter 17. primi, concurrere cum altera perpendiculari *PL*; nihilominus duo ſimul anguli *DAX*, *PXA*, minores forent duobus rectis, juxta hypotheſim prædictam, cum in ea duo ſimul anguli *PAX*, *PXA* minores ſint (ex nona hujus) uno recto. Id autem obſervaſſe operæ pretium fuit.

Qualiter verò ex eo ſolo admiſſo generali concurſu, dum unus angulorum eſt rectus, & quidem ſub aſſignata quantumlibet parva incidente, deſtrui poſſit hypotheſis anguli acuti; docebimus poſt tres ſequentes Propoſitiones.

SCHOLION II.

IN tribus ante jactis theorematis ſtudioſè appoſui illam conditionem, quòd recta incidens *AP*, ſive *XA*, intelligatur eſſe *quantælibet deſignatæ longitudinis*. Si enim, citra omnem rectæ incidentis determinatam menſuram, præcisè agatur de exhibendo, ac demonſtrando duarum rectarum concurſu in apicem cujuſdam trianguli, cujus anguli ad basim sint dati (minores utique duobus rectis) ut putà unus rectus, & alter duobus tantùm gradibus, vel, ut libet, minùs deficiens à recto; quis est tam expers Geometriæ, quin statim rem ipsam demonstrativè exhibeat? Nam supponatur (fig. 12.) datus quilibet angulus *BAP*, ut putà 88. graduum. Si ergo ex quolibet puncto *B* ipsius *AB*, demittatur ad subjectam *AP* (juxta duodecimam primi) perpendicularis *BP*, constat enim verò in eo triangulo *ABP* exhibitum fore demonstrativè concursum optatum in eo puncto *B*.

Tab. II.

Quod si alter angulus ad basim postuletur & ipse minor recto, ut putà 84. graduum, quem nempe exhibeat datus angulus *K*: tunc (juxta 23. primi) efficere poteris versùs partes rectæ *AB* æqualem angulum *APD*, occurrente *PD* ipsi *AB* in quodam ejus intermedio puncto *D*. Quare habebitur rursum demonstrativè concursus optatus in eo puncto *D*.

Tandem vero: si alter angulus postuletur obtusus, sed minor tamen 92. gradibus, ne cum alio dato angulo *BAP* compleantur duo recti: exhibitus hic sit in quodam angulo *R* 91. graduum. Ostendendum est, unum aliquod esse punctum X in ipsa *AP*, ad quod juncta *BX* efficiat angulum *BXA* æqualem dato angulo *R* 91. graduum; adeo ut propterea sub quadam recta incidente *AX* habeatur concursus optatus in prædicto puncto *B*. Sic autem proceditur. Quandoquidem (protractâ *PA* usque in aliquod punctum *H*) angulus externus *BAH* & est (propter decimamtertiam primi) 92. graduum, cum angulus interior *BAP* positus sit 88. graduum; ac rursum, propter decimamsextam primi, major est non solùm angulo recto *BPA*, verùm etiam quibusvis eodem titulo obtusis angulis *BXA*, sumpto puncto X ubilibet intra ipsam *PA*, & quidem, propter eandem decimamsextam primi, semper majoribus, dum punctum X assumitur propius puncto *A*: consequens planè næ est, ut inter istos angulos, unum 90. graduum in puncto P, & alterum 92. graduum in puncto A, unus reperiatur angulus BXA, qui sit 91. graduum, nimirum æqualis dato angulo R.

Nihilominus, omissa postrema hac observatione circa angulum obtusum, cavere diligentissimè oportet, in eo positam esse difficultatem illius pronunciati Euclidæi, quòd velit occursum duarum rectarum; in illam utique partem, ad quam cum recta incidente duos angulos efficiant duobus rectis minores; atque ita quidem prædictum occursum velit, *quantæcunque longitudinis sit incidens assignata*. Cæterùm enim (ut jam monui in præcedente Scholio) demonstrabo generalem istum occursum ex solo admisso occursu ejusmodi, dum unus angulorum sit rectus; & quidem, etiamsi admisso non pro qualibet assignabili finita incidente, sed solùm admisso intra limites cujusdam assignatæ parvissimæ incidentis.

PROPOSITIO XIV.

Hypothesis anguli obtusi est absolutè falsa, quia se ipsam destruit.

Demonstratur. Ex hypothesi anguli obtusi, assumptâ ut verâ, jam elicuimus veritatem illius Pronunciati Euclidæi; quòd duæ rectæ sibi invicem in aliquo puncto ad eas partes occursuræ sint, ad quas recta quædam, easdem secans, duos qualescunque effecerit internos angulos, duobus rectis minores. Stante autem hoc Pronunciato, cui innititur Euclides post vigesimamoctavam sui Libri primi, manifestum est omnibus Geometris, solam hypothesim anguli recti esse veram, nec ullum relinqui locum hypothesi anguli obtusi. Igitur hypothesis anguli obtusi est absolutè falsa, quia se ipsam destruit. Quod erat demonstrandum.

Aliter, ac magis immediatè. Quandoquidem ex hypothesi anguli obtusi demonstravimus (in nona hujus) duos (fig. 11.) acutos angulos trianguli *APX*, rectanguli in *P*, majores esse uno recto; constat talem assumi posse acutum angulum *PAD*, qui simul cum prædictis duobus acutis angulis duos rectos efficiat. Tunc autem recta *AD* deberet (ex præcedente, juxta hypothesim anguli obtusi) aliquando concurrere cum ipsa *PL*, sive *XL*, respectu habito ad secantem, sive incidentem *AP*; quod est manifestum absurdum contra decimamseptimam primi, si respicias ad secantem, sive incidentem *AX*.

Tab. I.

PROPOSITIO XV.

Tab. II.

EX *quolibet triangulo* ABC, *cujus tres simul anguli* (*fig.* 13.) *æquales sint, aut majores, aut minores duobus rectis, stabilitur respectivè hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti.*

Demonstratur. Nam duo saltem illius trianguli anguli, ut putà ad puncta *A*, & *C*, acuti erunt, propter decimamseptimam primi. Quare perpendicularis, ex apice reliqui anguli *B* ad ipsam *AC* demissa, secabit ipsam *AC* (propter eandem decimamseptimam primi) in aliquo puncto intermedio *D*. Si ergo tres anguli ipsius trianguli *ABC* supponantur æquales duobus rectis, constat æquales fore quatuor rectis omnes simul angulos triangulorum *ADB*, *CDB*, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc stante: neutrius modò dictorum triangulorum, ut putà *ADB*, tres simul anguli minores erunt, aut majores duobus rectis; nam sic viceversa alterius trianguli tres simul anguli majores forent, aut minores duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo stabiliretur hypothesis anguli acuti, & ab altero hypothesis anguli obtusi; quod repugnat sextæ, & septimæ hujus. Igitur tres simul anguli utriusque prædictorum triangulorum æquales erunt duobus rectis; ac propterea (ex nona hujus) stabilietur hypothesis anguli recti. Quod erat primo loco demonstrandum.

Sin autem tres anguli propositi trianguli *ABC* ponantur majores duobus rectis; jam duorum triangulorum *ADB*, *CDB* omnes simul anguli majores erunt quatuor rectis, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc stante: neutrius modò dictorum triangulorum tres simul anguli æquales præcisè erunt, aut minores duobus rectis; nam sic viceversâ alterius trianguli tres simul anguli majores forent duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo stabiliretur hypothesis aut anguli recti, aut anguli acuti, & ab altero hypothesis anguli obtusi, quod repugnat quintæ, sextæ, & septimæ hujus. Igitur tres simul anguli utriusque prædictorum triangulorum majores erunt duobus rectis; ac propterea (ex nona hujus) stabilietur hypothesis anguli obtusi. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Tandem verò. Si tres anguli propositi trianguli *ABC* ponantur minores duobus rectis, jam duorum triangulorum *ADB*, *CDB*, omnes simul anguli minores erunt quatuor rectis, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc stante: neutrius modò dictorum triangulorum tres simul anguli æquales erunt, aut majores duobus rectis; nam sic viceversâ alterius rrianguli tres simul anguli minores forent duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo stabiliretur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, & ab altero hypothesis anguli acuti; quod repugnat quintæ, sextæ, & septimæ hujus. Igitur tres simul anguli utriusque prædictorum triangulorum minores erunt duobus rectis; ac propterea (ex

nona

nona hujus) ſtabilietur hypotheſis anguli acuti. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

Itaque ex quolibet triangulo *ABC*, cujus tres ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores duobus rectis, ſtabilitur reſpectivè hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti. Quod erat propoſitum.

COROLLARIUM.

HInc; protracto uno quolibet cujuſvis propoſiti trianguli latere, ut putà *AB* in *H*; erit (ex 13. primi) externus angulus *HBC* aut æqualis, aut minor, aut major reliquis ſimul internis, & oppoſitis angulis ad puncta *A*, & *C*, prout vera fuerit hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti. Et viciſſim.

PROPOSITIO XVI.

E*X quolibet quadrilatero* ABCD, *cujus quatuor ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores quatuor rectis, ſtabilitur reſpectivè hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti.*

Demonſtratur. Jungatur *AC*. Non erunt (fig. 14.) tres ſimul anguli trianguli *ABC* æquales, aut majores, aut minores duobus rectis, quin tres ſimul anguli trianguli *ADC* ſint ipſi etiam reſpectivè æquales, aut majores, aut minores duobus rectis; ne ſcilicet (ex præcedente) ab uno illorum triangulorum ſtabiliatur una hypotheſis, & ab altero altera, contra quintam, ſextam, & ſeptimam hujus. Hoc ſtante: Si quatuor ſimul anguli propoſiti quadrilateri æquales ſint quatuor rectis, conſtat utriuſque modò dictorum triangulorum tres ſimul angulos æquales fore duobus rectis, atque ideo (ex præcedente) ſtabilitum

tum

tum iri hypothesim anguli recti.

Sin verò ejusdem quadrilateri quatuor simul anguli majores sint, aut minores quatuor rectis, debebunt similiter illorum triangulorum tres simul anguli respectivè esse aut unà majores, aut unà minores duobus rectis. Quare ab illis triangulis stabilietur respectivè (ex præcedente) aut hypothesis anguli obtusi, aut hypothesis anguli acuti.

Itaque ex quolibet quadrilatero, cujus quatuor simul anguli æquales sint, aut majores, aut minores quatuor rectis, stabilitur respectivè hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

HInc: protractis versùs easdem partes duobus quibusvis propositi quadrilateri contrapositis lateribus, ut putà *AD* in *H*, & *BC* in *M*; erunt (ex 13. primi) duo simul externi anguli *HDC*, *MCD* aut æquales, aut minores, aut majores duobus simul internis, & oppositis angulis ad puncta *A*, & *B*, prout vera fuerit hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti.

PROPOSITIO XVII.

SI uni, ut libet, cuidam parvæ rectæ AB *insistat* (*fig.* 15.) *ad rectos angulos recta* AH: *Dico subsistere non posse in hypothesi anguli acuti, ut quævis* BD, *efficiens cum* AB *quemlibet angulum acutum versùs partes ipsius* AH, *occursura tandem sit ad finitam, seu terminatam distantiam ipsi* AH *productæ.*

Demonstratur. Jungatur *HB*. Erit (ex 17. primi) acutus angulus *ABH*, propter angulum rectum ad punctum *A*. Jam (ex 23. primi) ducatur quædam *HD* versùs

sùs partes puncti *B*, quæ non secans angulum *AHB* efficiat cum ipsa *HB* angulum acutum æqualem ipsi acuto *ABH*. Deinde ex puncto *B* demittatur ad *HD* perpendicularis *BD*, quæ cadet ad partes prædicti anguli acuti ad punctum *H*. Quoniam igitur latus *HB* opponitur in triangulo *HDB* angulo recto in *D*, atque item in triangulo *BAH* angulo recto in *A*; ac rursum in duobus illis triangulis adjacent eidem lateri *HB* æquales anguli, qui sunt in priore quidem triangulo angulus *BHD*, & in posteriore angulus *HBA*; erit etiam (ex 26. primi) reliquus angulus *HBD* in priore triangulo æqualis reliquo angulo *BHA* in posteriore triangulo. Quare integer angulus *DBA* æqualis erit integro angulo *AHD*.

Jam verò: non erit uterque prædictorum æqualium angulorum obtusus, ne incidamus (ex præcedente) in unum casum jam reprobatæ hypothesis anguli obtusi. Sed neque erit rectus, ne incidamus (ex eadem præcedente) in unum casum pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex 5. hujus) relinqueret locum hypothesi anguli acuti. Uterque igitur illorum angulorum erit acutus. Hoc stante: Quòd recta *BD* protracta occurrere nequeat in quodam puncto *K* ipsi *AH* ad easdem partes productæ, ex eo demonstratur; quia in triangulo *KDH*, præter angulum rectum in *D*, adesset angulus obtusus in *H*, cum angulus *AHD*, in prædicta hypothesi anguli acuti, demonstratus sit acutus. Hoc autem absurdum est, contra 17. primi. Non ergo subsistere potest in ea hypothesi, ut quævis *BD*, efficiens cum una, ut libet parva recta *AB*, quemlibet angulum acutum versùs partes ipsius *AH*, occursura tandem sit ad finitam, seu terminatam distantiam, ipsi *AH* productæ. Quod erat demonstrandum.

Aliter idem, ac faciliùs. Insistant uni cuidam quantumlibet parvæ rectæ *AB* (fig. 16.) duæ perpendiculares

AK,

AK, BM. Demittatur ad AK ex aliquo puncto M ipsius BM perpendicularis MH, jungaturque BH. Constat acutum fore angulum BHM. Est etiam (ex præcedeute) acutus angulus BMH, in hypothesi anguli acuti. Ergo perpendicularis BDX, ex puncto B ad ipsam HM demissa, secabit (ex 17. primi) eam HM in quodam puncto intermedio D. Ergo angulus XBA erit acutus. Constat autem (ex eadem 17. primi) non posse invicem concurrere (saltem ad finitam, seu terminatam distantiam) duas illas utcunque productas AHK, BDX, propter angulos rectos in punctis H, & D. Itaque nequit subsistere in hypothesi anguli acuti, ut quævis BD, efficiens cum una, ut libet, parva recta AB quemlibet angulum acutum versùs partes ipsius AH, eidem AB perpendicularis, occursura tandem sit (ad finitam, seu terminatam distantiam) ipsi AH productæ. Quod erat propositum.

SCHOLION I.

Atque id est, quod spopondi in Scholiis post XIII. hujus, nimirum destructum iri hypothesim anguli acuti (quæ sola obesse jam potest generali illi Pronunciato Euclidæo) ex solo admisso generali duarum rectarum concursu ad eas partes, versùs quas recta quæpiam, quantumlibet parva, in easdem incidens, duos efficiat internos angulos minores duobus rectis; atque ita quidem, etiamsi alteruter illorum angulorum supponi debeat rectus.

SCHOLION II.

Sed rursum meliore loco, post XXV. hujus, ostendam destructum pariter iri hypothesim anguli acuti, dum unus aliquis tenuissimus, ut libet, angulus acutus designari possit; sub quo, si recta quæpiam in alteram incidat, debeat hæc producta (ad finitam, seu terminatam distantiam) aliquando occurrere cuivis ad quantamlibet finitam distantiam excitatæ super ea incidente perpendiculari.

PROPOSITIO XVIII.

Ex *quolibet triangulo* ABC, *cujus angulus* (*fig.* 17.) *ad punctum* D *in uno quovis semicirculo existat, cujus diameter* AC, *stabilitur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, prout nempe angulus ad punctum* B *fuerit aut rectus, aut obtusus, aut acutus.*

Demonstratur. Ex centro *D* jungatur *DB*. Erunt (ex quinta primi) æquales anguli ad basim *AB*, atque item ad basim *BC*, in triangulis *ADB*, *CDB*. Quare, in triangulo *ABC*, duo simul anguli ad basim *AC* æquales erunt toti angulo *ABC*. Igitur tres simul anguli trianguli *ABC* æquales erunt, aut majores, aut minores duobus rectis, prout angulus ad punctum *B* fuerit aut rectus, aut obtusus, aut acutus. Itaque ex quolibet triangulo *ABC*, cujus angulus ad punctum *B* in uno quovis semicirculo existat, cujus diameter *AC*, stabilitur (ex 15. hujus) hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, prout nempe angulus ad punctum *B* fuerit aut rectus, aut obtusus, aut acutus. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIX.

Esto *quodvis triangulum* AHD (*fig.* 18.) *rectangulum in* H. *Tum in* AD *continuatâ sumatur portio* DC *æqualis ipsi* AD; *demittaturque ad* AH *productam perpendicularis* CB. *Dico stabilitum hinc iri hypothesim aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, prout portio* HB *æqualis fuerit,*

rit, aut major, aut minor ipsâ AH.

Demonstratur. Nam juncta *DB* erit (ex 4. primi, & ex 10. hujus) aut æqualis, aut major, aut minor ipsâ *AD*, sive *DC*, pro ut illa portio *HB* æqualis fuerit, aut major, aut minor ipsâ *AH*.

Et primò quidem sit *HB* æqualis ipsi *AH*, ita ut propterea juncta *DB* æqualis sit ipsi *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DB* describatur, transituram per puncta *A*, & *C*. Igitur angulus *ABC*, qui ponitur rectus, existet in eo semicirculo, cujus diameter *AC*. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli recti. Quod erat primo loco demonstrandum.

Sit secundò *HB* major ipsâ *AH*, ita ut propterea juncta *DB* major sit ipsâ *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DA*, sive *DC*, describatur, occursuram ipsi *DB* in aliquo puncto intermedio *K*. Igitur, junctis *AK*, & *CK*, erit angulus *AKC* obtusus, quia major (ex 21. primi) angulo *ABC*, qui ponitur rectus. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli obtusi. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Sit tertiò *HB* minor ipsâ *AH*, ita ut propterea juncta *DB* minor sit ipsâ *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DA*, sive *DC* describatur, occursuram in aliquo puncto *M* ipsius *DB* ulteriùs protractæ. Igitur junctis *AM*, & *CM*, erit angulus *AMC* acutus, quia minor (ex eadem 21. primi) illo angulo *ABC*, qui ponitur rectus. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli acuti. Quod erat tertio loco demonstrandum. Itaque constant omnia proposita.

PROPOSITIO XX.

Esto triangulum ACM (*fig.* 19.) *rectangulum in* C. *Tum ex puncto* B *dividente bifariam ipsam* AM *demittatur ad* AC *perpendicularis* BD. *Dico hanc perpendicularem majorem non fore* (*in hypothesi anguli acuti*) *medietate perpendicularis* MC.

Demonstratur. Continuetur enim *DB* usque ad *DH* duplam ipsius *DB*. Foret igitur *DH*(si *DB* major sit prædicta medietate) major ipsâ *CM*, ac propterea æqualis cuidam continuatæ *CMK*. Jungantur *AH*, *HK*, *HM*, *MD*. Jam sic progredimur. Quoniam in triangulis *HBA*, *DBM*, æqualia ponuntur latera *HB*, *BA*, lateribus *DB*, *BM*; suntque (ex 15. primi) æquales anguli ad punctum *B*; erit etiam (ex quarta ejusdem primi) basis *HA* æqualis basi *MD*. Deinde, propter eandem rationem, æquales erunt in triangulis *HBM*, *DBA*, bases *HM*, *DA*. Quare in triangulis *MHA*, *ADM*, æquales erunt (ex 8. primi) anguli *MHA*, *ADM*. Rursum in triangulis *AHB*, *MDB*, æqualis manebit angulus residuus *MHB* residuo recto angulo *ADB*. Igitur rectus erit angulus *MHB*. At hoc absurdum est, in hypothesi anguli acuti; cum recta *KH* jungens æqualia perpendicula *KC*, *HD*, acutos angulos efficiat (ex tertia hujus) cum eisdem perpendiculis. Non ergo perpendicularis *BD* major est (in hypothesi anguli acuti) medietate perpendicularis *MC*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Iisdem manentibus: Intelligantur in infinitum produci ipsæ AM, & AC. *Dico earundem distantiam majorem fore* (*in utraque hypothesi aut anguli recti, aut anguli acuti*) *qualibet assignabili finita longitudine.*

Demon-

Demonſtratur. In *AM* continuatâ ſumatur *AP* duplâ ipſius *AM*, demittaturque ad *AC* continuatam perpendicularis *PN*. Non erit (ex præcedente) in utrâvis prædictâ hypotheſi perpendicularis *MC* major medietate perpendicularis *PN*. Igitur *PN* ſaltem erit dupla ipſius *MC*, prout *MC* ſaltem eſt dupla alterius *BD*. Atque ita ſemper, ſi in continuata *AM* ſumatur dupla ipſius *AP*, ex ejuſque termino demittatur perpendicularis ad continuatam *AC*. Scilicet perpendicularis, quæ ex *AM* ſemper magis continuatâ demittetur ad continuatam *AC*, multiplex erit determinatæ *BD* ſupra quemlibet finitum aſſignabilem numerum. Igitur prædictarum rectarum diſtantia major erit (in utraque prædicta hypotheſi) qualibet aſſignabili finita longitudine. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

QUoniam verò hypotheſis anguli obtuſi, quæ unicè obeſſe hìc poſſet, demonſtrata jam eſt abſolutè falſa; conſequitur ſanè abſolutè verum eſſe, quod diſtantia unius ab altera prædictarum rectarum, ſi in infinitum producantur, major ſit qualibet finita aſſignabili longitudine.

SCHOLION I.

In quo expenditur conatus Procli.

POſt Theoremata a me huc uſque demonſtrata ſine ulla dependentia ab illo Pronunciato Euclidæo, ad cujus nempe exactiſſimam demonſtrationem omnia conſpirant; operæ pretium facturum me judico, ſi quorundam etiam celebriorum Geometrarum labores in eandem me-tam contendentium diligenter expendam. Incipio a Proclo, cujus est apud Clavium in Elementis post XXVIII. Libri primi sequens assumptum: *Si ab uno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet*. At Proclus demonstrat quidem (ut ibi optimè advertit Clavius) duas rectas (fig. 20.) ut putà *AH*, *AD* ab eodem puncto *A* exeuntes versùs easdem partes, semper magis, in majore distantia ab eo puncto *A*, inter se distare, sed non etiam itaut ea distantia crescat ultra omnem finitum designabilem limitem, prout opus foret ad ipsius intentum. Quo loco præfatus Clavius affert exemplum Conchoidis Nicomedeæ, quæ cum recta *AH* ex eodem puncto *A* versùs easdem partes exiens, ita semper magis ab eadem recedit, ut tamen ipsarum distantia non nisi ad infinitam earundem productionem, æqualis sit cuidam finitæ rectæ *AB* perpendiculariter insistentis ipsis *AH*, *BC*, versùs easdem partes in infinitum protractis. Quid ni ergo, nisi specialis ratio in contrarium cogat, dici idem possit de duabus suppositis rectis lineis *AH*, *AD*?

Neque hìc accusari potest Clavius, quòd Proclo opponat eam Conchoidis proprietatem, quæ nempe demonstrari non potest sine adjumento plurium Theorematum, Pronunciato hìc controverso innixorum. Nam dicò ex hoc ipso confirmari vim redargutionis Clavianæ; quia scilicet ex illo Pronunciato assumpto ut vero manifestè consequitur, duas lineas in infinitum protractas, unam rectam, & alteram inflexam, posse unam ab altera semper magis recedere intra quendam finitum determinatum limitem; unde utique oriri potest suspicio, ne simile quidpiam contingere possit in duabus lineis rectis, nisi aliter demonstretur.

Sed non idcirco; postquam ego in Cor. præcedentis

Pro-

Propofitionis manifeftam jam feci abfolutam veritatem præcitati affumpti; tranfiri ftatim poteft ad afferendum Pronunciatum illud Euclidæum. Nam antea demonftrari etiam oporteret, quòd duæ illæ rectæ AH, BC, quæ cum incidente AB duos ad eafdem partes angulos efficiant duobus rectis æquales, ut putà utrunque rectum, non etiam ipfæ, ad eas partes in infinitum protractæ, femper magis invicem diffiliant ultra omnem finitam affignabilem diftantiam. Quatenus enim partem affirmativam præfumere quis velit; quæ utique veriffima eft in hypothefi anguli acuti; non erit fanè legitimum confequens, quòd recta AD quomodolibet fecans angulum HAB; unde nempe minores fiant duobus rectis duo fimul ad eafdem partes interni anguli DAB, CBA; quòd, inquam, ea recta AD, in infinitum producta coire tandem debeat cum producta BC; etiamfi aliàs demonftratum fit, quòd diftantia duarum AH, AD in infinitum productarum major femper evadat ultra omnem finitum defignabilem limitem.

Quòd autem præfatus Clavius fatis effe judicaverit veritatem illius affumpti ad demonftrandum Pronunciatum hìc controverfum; condonari id debet præconceptæ ab ipfo Clavio opinioni circa rectas lineas æquidiftantes, de quibus in fequente Scholio commodiùs agemus.

SCHOLION II.

In quo expenditur idea Clariffimi Viri Joannis Alphonfi Borellii in fuo Euclide Reftituto.

ACcufat doctiffimus hic Auctor Euclidem, quòd rectas lineas parallelas eas effe definiverit, *quæ in eodem plano exiftentes non concurrunt ad utrafque partes, licèt in infinitum producantur*. Rationem accufationis affert, quòd talis paffio passio ignota sit: *tum quia*, inquit, *ignoramus, an tales lineæ infinitæ non concurrentes reperiri possint in natura: tum etiam quia infiniti proprietates percipere non possumus, & proinde non est evidenter cognita passio ejusmodi.*

Sed pace tanti Viri dictum sit: Numquid reprehendi potest Euclides, quòd *quadratum* (ut unum inter innumera exemplum proferam) definiverit esse *figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam*; cum dubitari possit, an figura ejusmodi locum habeat in natura? Repræhendi, inquam, æquissimè posset; si, ante omnem Problematicam demonstrativam constructionem, figuram prædictam assumpsisset tanquam datam. Hujus autem vitii immunem esse Euclidem ex eo manifestè liquet, quòd nusquam præsumit quadratum a se definitum, nisi post Prop. 46. Libri primi, in qua problematicè docet, ac demonstrat *quadrati prout ab ipso definiti, a data recta linea descriptionem*. Simili igitur modo reprehendi nequit Euclides, quòd rectas lineas parallelas eo tali modo definiverit, cum eas nusquam ad constructionem ullius Problematis assumat tanquam datas, nisi post Prop. 31. lib. primi, in qua Problematicè demonstrat, quo pacto *a dato extra datam rectam lineam puncto duci debeat recta linea eidem parallela*, & quidem juxta definitionem ab eo traditam parallelarum, *ita ut nempe in infinitum protractæ in neutram partem sibi invicem occurrant*: Quodque amplius est; id ipsum demonstrat sine ulla dependentia a Pronunciato hìc controverso. Itaque Euclides sine ulla petitione principii demonstrat *reperiri posse in natura duas tales lineas rectas, quæ* (in eodem plano consistentes) *in utramque partem in infinitum protractæ nunquam concurrant*; ac propterea *cognitam nobis evidenter facit eam passionem*, per quam rectas lineas parallelas definit.

Pergamus porrò, quò nos invitat diligens Euclidis accusator. Parallelas rectas lineas appellat duas quaslibet

rectas

rectas *AC*, *BD*, quæ perpendiculariter ad easdem partes (fig. apud me 21.) insistant uni cuidam rectæ *AB*. Nihil moror, quin definitio ejusmodi exposita sit *per passionem* (ut ipse ait) possibilem, & evidentissimam; cum (ex undecima primi) a quolibet in data recta puncto excitari possit perpendicularis.

Verùm hanc ipsam & possibilitatem, & evidentiam jam demonstravi circa definitionem traditam ab Euclide. Quare unicè restat, ut conferatur notum illud Pronunciatum Euclidæum cum altero itidem Pronunciato, quod usui esse debeat ad ulteriorem progressum post novam istam parallelarum definitionem. Ecce autem alterum istud Pronunciatum apud Clavium (ad quem disertè provocat ipse Borellius) in Scholio post Prop. 28. lib. primi: Si recta linea, ut putà *BD* super aliam rectam, ut putà *BA*, in transversum moveatur constituens cum ea in suo extremo *B* angulos semper rectos, describet alterum illius extremum *D* lineam quoque rectam *DC*, dum nempe ipsa *BD* pervenerit ad congruendum alteri æquali *AC*.

Agnosco opportunitatem Pronunciati, ut inde transitus fiat ad demonstrandum illud alterum Euclidæum, quo nempe fulciri tandem debet reliqua omnis Geometria. Nam antea proposuerat Clavius; quòd linea, cujus omnia puncta æquè distent a quadam supposita recta *AB*; qualis utique est (ex hypothesi prædictæ descriptionis) linea *DC*; debet esse etiam ipsa linea recta; quia nempe ejusmodi erit, ut omnia ipsius puncta intermedia *ex æquo jaceant* (qualis est rectæ lineæ definitio) inter ejus extrema puncta *D*, & *C*; *ex æquo*, inquam, *jaceant*; cum omnia æquè distent ab ea supposita recta *AB*, nimirum quanta est longitudo ipsius *BD*, aut *AC*. Quo loco affert Clavius exemplum lineæ circularis, de qua commodiùs infra disseremus; ubi ostendam clarissimam hac in parte disparitatem

tem inter lineam rectam, & circularem. Nam interim dico non satis liquere, an linea descripta ab eo puncto *D* sit potiùs recta *DC*, quàm curva quædam *DGC* seu convexa, seu concava versùs partes ipsius *BA*.

Si enim ex puncto *F* dividente bifariam ipsam *BA* intelligatur educta perpendicularis, quæ occurrat rectæ *DC* in *E*, & prædictis curvis in *G*, & *G*, constat sanè (ex 2. hujus) rectos fore angulos hinc inde ad punctum *E*; qualiscunque tandem in eo motu intelligatur descripta linea *DC* a puncto *D*; ac præterea (ex facili intellecta superpositione) æquales hinc inde fore angulos ad puncta *G*, prout alterutra curva *DGC* descripta fuerit.

Sed rursum; assumpto in *AB* quolibet puncto *M*; si educatur perpendicularis, quæ occurrat rectæ *DC* in *N*, & prædictis curvis in *H*, & *H*, paulò post demonstrabo rectos fore angulos hinc inde ad punctum *N*, quatenus quidem recta ipsa *DC* genita supponatur in suo illo motu a puncto *D*, seu quatenus recta *MN* æqualis censeatur ipsi *BD*. Sin verò alterutra curva *DHC* genita putetur; ex facili itidem præscripta superpositione demonstrabitur æquales rursum hinc inde fore angulos *MHD*, *MHC*, ubivis in ea alterutra descripta curva sumptum fuerit punctum *H*, ex quo ad subjectam rectam lineam *AB* demissa intelligatur perpendicularis *HM*. Verùm hac de re fusiùs, ac diligentiùs in altera parte hujus libri, ubi locum proprium habet.

Quorsum igitur, inquies, præcox ista anticipatio? In eum, inquam, finem; ut ne ex ista lineæ eo modo genitæ verissima, & a me exactissimè in præcitato loco demonstranda proprietate; & quidem citra omnem defectum quomodolibet infinitè parvum; præcipitanter censeremus non nisi rectam lineam esse posse. Scilicet hìc inquiritur penitior rectæ lineæ natura, sine qua vix infantiam præ-

tergreftergressa Geometria subsistere ibi deberet. Non igitur hac in re vituperari potest major quædam exactissimæ veritatis inquisitio.

Neque tamen hìc renuo, quin diligentissimâ aliquâ experientiâ physicâ deprehendi possit, quòd linea *DC* eo motu genita non nisi recta linea censenda sit. Sed quatenus ad experientiam physicam provocare hìc liceat; tres statim afferam demonstrationes Physico-Geometricas ad comprobandum Pronunciatum Euclidæum. Ubi non loquor de experientia physica tendente in infinitum, ac propterea nobis impossibili; qualis nempe requireretur ad cognoscendum, quòd puncta omnia junctæ rectæ *DC* æquidistent a recta *AB*, quæ supponitur in eodem cum ipsa *DC* plano consistens. Nam mihi satis erit unicus individuus casus; ut purâ, si junctâ rectâ *DC*, assumptoque uno aliquo ejus puncto *N*, perpendicularis *NM* demissa ad subjectam *AB* comperiatur esse æqualis ipsi *BD*, sive *AC*. Tunc enim anguli hinc inde ad punctum *N* æquales forent (ex 1. hujus) angulis sibi correspondentibus ad pnncta *C*, & *D*, qui rursum (ex eadem 1. hujus) æquales inter se forent. Quare anguli hinc inde ad puuctum *N*, atque ideo etiam reliqui duo recti erunt. Igitur unum habebimus casum pro hypothesi anguli recti; ac propterea (juxta quintam, & decimamtertiam hujus) demonstratum habebimus Pronunciatum Euclidæum. Atque hæc esse potest prima demonstratio Physico-Geometrica.

Transeo ad secundam. Esto semicirculus, cujus centrum *D*, & diameter *AC*. Si ergo (fig. 17.) in ejus circumferentia assumatur punctum aliquod *B*, ad quod junctæ *AB*, *CB* comperiantur continere angulum rectum, satis erit hic unicus casus (prout demonstravi in 18. hujus) ad stabiliendam hypothesim anguli recti, ac propterea (ex prædicta 13. hujus) ad demonstrandum notum illud Pronunciatum.

 Supe-

Supereſt tertia demonſtratio Phyſico-Geometrica ; quam puto omnium efficaciſſimam, ac ſimpliciſſimam, utpote quæ ſubeſt communi, facillimæ, paratiſſimæque experientiæ. Si enim in circulo, cujus centrum *D*, tres coaptentur (fig. 22.) rectæ lineæ *CB*, *BL*, *LA*, æquales ſingulæ radio *DC*, comperiaturque juncta *AC* tranſire per centrum *D*, ſatis id erit ad demonſtrandum intentum. Nam junctis *DB*, *DL*, tria habebimus triangula, quæ (ex 8. & 5. primi) tum inter ſe invicem, tum etiam in ſe ipſis ſingula erunt æquiangula. Quoniam igitur tres ſimul anguli ad punctum *D*, nimirum *ADL*, *LDB*, *BDC* æquales ſunt (ex 13. primi) duobus rectis ; duobus etiam rectis æquales erunt tres ſimul anguli cujuſvis illorum triangulorum, ut putà trianguli *BDC*. Quare (ex 15. hujus) ſtabilita hinc erit hypotheſis anguli recti ; ac propterea (ex jam nota 13. hujus) demonſtratum manebit illud Pronunciatum.

Sin verò, ante omnem attentatam ſeu demonſtrationem, ſeu figuralem exhibitionem, conferre inter ſe placeat duo illa Pronunciata, fateor ſanè Euclidæum videri poſſe obſcurius, aut etiam falſitati obnoxium. At poſt figuralem exhibitionem, quam Scholio IV. conſequenti reſervo, conſtabit viceverſà Pronunciatum quidem Euclidæum retinere poſſe dignitatem, ac nomen Pronunciati, alterum verò inter Theoremata computari tutiùs debere.

Sed hìc explicare debeo (prout paulò ante me facturum ſpopondi) manifeſtam iſto in genere diſparitatem inter lineam circularem, & lineam rectam. Diſparitas autem ex eo oritur; quòd recta quidem linea dicitur ad ſe ipſam; circularis verò, ut putà (fig. 23.) *MDHNM*, non ad ſe ipſam, ſed ad alterum dicitur, nimirum ad quoddam alterum in eodem cum ipſa plano exiſtens punctum *A*, quod eſt ejuſdem centrum. Conſequens igitur eſt, prout optimè mè demonstratur a Clavio, quòd linea *FBCL* in eodem cum illa plano consistens, & cujus omnia puncta æquidistent a prædicta *MDHNM*, sit & ipsa circularis, nimirum omnibus suis punctis æquidistans a communi centro *A*. Quod enim *BD*, quæ sit continuatio in rectum ipsius *AB*, sit mensura distantiæ illius puncti *B* ab ea circulari *MDHNM*, ex eo constat; quia (ex 7. tertii, quæ est independens a Pronunciato hìc controverso) minima omnium ipsa est, quæ ab eo puncto in eam circumferentiam cadere possint. Idem valet de reliquis *CH*, *LN*, *FM*. Quoniam igitur & totæ *AM*, *AD*, *AH* æquales sunt, utpote radii ex centro *A* ad suppositam lineam circularem *MDHNM*; atque item æquales sunt abscissæ *FM*, *BD*, *CH*, *LN*, quæ nempe mensura sunt æqualis distantiæ omnium punctorum illius lineæ *FBCLF* ab ea supposita linea circulari *MDHNM*; consequens planè est, ut æquales pariter sint residuæ *AF*, *AB*, *AC*, *AL*, ac propterea ipsa etiam linea *FBCLF* sub eodem centro *A* circularis sit.

Numquid autem uniformiter, ad demonstrandum, quòd linea *DC* (fig. 21.) eo tali motu genita a puncto *D* sit linea recta, satis erit æquidistantia omnium ipsius punctorum a subjecta recta *AB*? Nullo modo. Nam linea recta dicitur absolutè ad se ipsam, sive in se ipsa, nimirum ita *ex æquo jacens inter sua puncta*, ac præsertim extrema, ut manentibus istis immotis nequeat ipsa revolvi ad occupandum novum locum. Nisi hæc passio aliquo pacto demonstretur de ea *DC*, nunquam constabit eam esse lineam rectam, qualiscunque tandem supponatur, aut demonstretur omnium ipsius punctorum relatio ad subjectam in eodem plano rectam *AB*; præsertim verò, ne uniformiter dicamus nullam aliam in eo plano fore lineam rectam, quæ omnibus suis punctis non æquidistet ab ea supposita recta linea *AB*.

Neque

Neque tamen dictum hoc meum ita accipi volo, quasi putem demonstrari non posse, quòd linea sic genita ipsa sit linea recta, nisi post demonstratam veritatem controversi Pronunciati; cum magis ego ipse prope finem hujus Libri demonstraturus id sim, ad confirmandum ipsum tale Pronunciatum.

SCHOLION III.

In quo expenditur conatus Nassaradini Arabis, & simul idea super eodem negotio Clarifs. Viri Joannis Vallisii.

CONatum istum Nassaradini Arabis latino idiomate typis vulgavit prælaudatus Vir Joannes Vallisius, cum animadversionibus opportuno loco adjectis. Duo autem in rem suam postulat sibi concedi Nassaradinus.

Primum est; ut duæ quælibet rectæ lineæ in eodem plano positæ, in quas aliæ quotlibet rectæ lineæ ita incidant, ut uni quidem earum perpendiculares semper sint, alteram verò ad angulos inæquales semper secent, nimirum versùs unam partium sub angulo semper acuto, & versùs alteram sub angulo semper obtuso; ut, inquam, priore loco dictæ lineæ censeantur semper magis (quandiu se mutuò non secent) ad se invicem accedere versùs partes illorum angulorum acutorum; & vicissim semper magis a se invicem recedere versùs partes angulorum obtusorum.

At ego quidem, si nihil aliud moratur Nassaradinum, libens permitto, quod postulat; cum istud ipsum, quod ab eo indemonstratum relinquitur, intelligi possit exactissimè a me demonstratum in Cor. II. post 3. hujus.

Alterum Nassaradini Postulatum est reciprocum primi; ut nempe acutus semper sit angulus versùs eas partes,

ad

ad quas jam dictæ perpendiculares supponantur fieri semper breviores; obtusus autem versùs alias partes, ad quas eædem perpendiculares supponantur evadere semper longiores.

Verùm hìc latet æquivocatio. Cur enim (dum ab una aliqua statuta tanquam prima perpendiculari procedatur ad alias) consequentium perpendicularium anguli, ad eandem partem acuti, non fiant semper majores, quo usque incidatur in angulum rectum, nimirum in talem perpendicularem, quæ ipsa sit utriusque prædictarum rectarum commune perpendiculum? Et istud quidem si accidat, evanescit latebrosa ista Nassaradini præparatio, postquam ingeniosè quidem, sed magno cum labore Euclidæum Pronunciatum demonstrat.

Quòd si Nassaradinus jure quodam suo præsumere velit tanquam per se notam consistentiam illam ad eandem partem angulorum acutorum: Cur non etiam (dicam cum Vallisio) concipi potest tanquam per se clarum: *Duas rectas in eodem plano convergentes* (in quas nempe alia recta incidens duos ad easdem partes angulos efficiat minores duobus rectis, ut purà unum rectum, & alterum quomodolibet acutum) *tandem occursuras, si producantur*? Neque enim opponi potest, quòd major ista ad unas partes convergentia subsistere semper possit intra quendam determinatum limitem, adeò ut nempe tanta quædam distantia inter eas lineas ad eam partem semper intersit, etiamsi cæteroquin una ad alteram semper propiùs accedat. Non, inquam, opponi id potest; quoniam ex hoc ipso demonstrabo, post XXV. hujus, omnium talium rectarum ad finitam distantiam occursum, juxta Pronunciatum Euclidæum.

Jam transeo ad prælaudatum Joannem Vallisium, qui nempe, ut morem gereret tot Magnis Viris, Veteribus pariter, ac Recentioribus, & rursum ex onere Cathedræ ſuæ Oxonienſi impoſito, hoc idem penſum aggredi voluit demonſtrandi ſæpe dictum Pronunciatum. Unicè autem aſſumit tanquam certum, quod ſequitur: nimirum *Datæ cuicunque figuræ ſimilem aliam cujuſcunque magnitudinis poſſibilem eſſe*. Et id quidem præſumi poſſe de qualibet figura (etiam ſi in rem ſuam unicè aſſumat triangularem rectilineam) bene argumentatur ex circulo, quem ſcilicet ſub quantolibet radio deſcribi poſſe omnes agnoſcunt. Deinde acutus Vir cautiſſimè obſervat præſumptioni huic ſuæ non obſtare, quòd prætet correſpondentium angulorum æqualitatem requiratur etiam correſpondentium omnium laterum proportionalitas, ut habeatur una figura rectilinea, v. g. triangularis, alteri rectilineæ triangulari ſimilis; cum tamen Proportionalium, ac ſubinde ſimilium Figurarum definitio ex Quinto, ac Sexto Euclidis Libro deſumendæ ſint: *Poterat enim Euclides* (inquit ipſe) *utramque Libro Primo præmiſiſſe*. Porrò autem, hoc ſtante (quod tamen negari à quopiam poſſet, niſi demonſtretur) intentum ſuum pulchro ſanè, atque ingenioſo molimine exequitur laudatus Vir.

Sed nolo oneri a me ſuſcepto in quoquam deeſſe. Itaque aſſumo duo triangula, unum *ABC*, & alterum *DEF* (fig. 24.) invicem æquiangula: Non dico planè ſimilia; quia non indigeo proportionalitate laterum circa angulos æquales, immo neque ullâ ipſorum laterum determinatâ menſurâ. Solùm igitur nolo triangula invicem æquilatera, quia tunc ſufficeret ſola octava primi, ſine ulla præſumptione. Itaque anguli ad puncta *A*, *B*, *C*, æquales ſint angulis ad puncta *D*, *E*, *F*; ſitque latus *DE* minus latere *AB*; aſſumaturque in *AB* portio *AG* æqualis ipſi *DE*, atque item in *AC* portio *AH* æqualis ipſi *DF*. Debere autem *DF* minorem eſſe ipsà *AC* infrà declarabo. Tum (junctâ *GH*) conſtat (ex 4. primi) æquales fore

an-

angulos ad puncta E, & F, ipsis AGH, AHG. Quapropter; cum modò dicti anguli unâ cum aliis BGH, CHG, æquales sint (ex 13. primi) quatuor rectis; quatuor itidem rectis æquales erunt anguli ad puncta B, & C, unà cum eisdem angulis BGH, CHG. Igitur quatuor simul anguli quadrilateri $BGHC$ æquales erunt quatuor rectis; ac propterea (ex 16. hujus) stabilietur hypothesis anguli recti; & simul (ex 13. hujus) Pronunciatum Euclidæum.

Porrò suppofui latus DF, sive AH sumptum ipsi æquale, minus fore latere AC. Si enim æquale foret, & sic punctum H caderet in punctum C; tunc angulus BCA æqualis foret (ex hypothesi) angulo EFD, sive GCA (qui tunc fieret) totum parti; quod est absurdum. Sin verò majus foret, & sic juncta GH secaret in aliquo puncto ipsam BC; jam angulus ACB externus æqualis foret ex hypothesi (contra 16. primi) angulo interno, & opposito (qui tunc fieret) AHG, sive GHA. Itaque bene suppofui latus DF unius trianguli minus fore latere AC alterius trianguli, juxta hypothesim jam stabilitam.

Quare ex duobus quibusvis invicem æquiangulis triangulis, sed non etiam invicem æquilateris, stabilitur Pronunciatum Euclidæum. Quod intendebatur.

SCHOLION IV.

In quo exponitur figuralis quædam exhibitio, ad quam fortasse respexit Euclides, ut suum illud Pronunciatum tanquam per se notum stabiliret.

PRæmitto primò: sub quolibet angulo acuto BAX (recole ex hac Tab. Fig. 12.) educi posse ex aliquo

 pun-

puncto X ipsius *AX* quandam *XB*, quæ sub quovis designato etiamsi obtuso angulo *R*, qui nimirum cum eo acuto *BAX* deficiat à duobus rectis; quandam, inquam, educi posse *XB*, quæ ad finitam distantiam occurrat ipsi *AB* in quodam puncto *B*. Nam id ipsum jam demonstravi in Scholio post XIII. hujus.

Tab. III. Præmitto secundò: eas *AB*, *AX* (Fig. 25.) intelligi posse in infinitum protractas usque in quædam puncta *Y*, & *Z*; atque item prædictam *XB* (in infinitum & ipsam protractam usque in quoddam punctum *Y*) intelligi posse ita moveri super eâ *AZ* versùs partes puncti *Z*, ut angulus ad punctum *X* versùs partes puncti *A* æqualis semper sit dato cuivis obtuso angulo *R*.

Præmitto tertiò: nulli jam dubitationi obnoxium fore illud Pronunciatum Euclidæum, si antedicta *XY* in eo quantocunque motu super rectâ *AZ* secet semper illam *AY* in quibusdam punctis *B*, *D*, *H*, *P*, atque ita consequenter in aliis punctis remotioribus ab eo puncto *A*. Ratio evidens est; quia sic duæ quælibet in eodem plano existentes rectæ *AB*, *XH*, in quas recta quælibet incidens *AX* duos ad easdem partes angulos *BAX*, *HXA*, duobus rectis minores efficiat, convenire tandem ad eas partes deberent in uno eodemque puncto *H*.

Præmitto quartò: nulli item dubitationi locum fore super veritate præcedentis hypothetici assumpti; si posteriores illi externi anguli *YDH*, *YHP*, & sic alii quilibet consequentes, aut æquales semper sint priori externo angulo *YBD*, aut saltem non ita minores semper sint, quin eorum unusquisque major semper sit parvulo quopiam designato acuto angulo *K*: Hoc enim stante manifestum fiet, quòd ea *XY*, in suo illo quantocunque motu versùs partes puncti *Z*, nunquam cessabit secare prædictam *AY*; quod utique (ex præcedente notato) satis est ad stabilibiliendum Pronunciatum controversum.

Unicè igitur superest, ut quidam Adversarius dicat angulos illos externos in majore, ac majore distantia ab illo puncto *A* fieri semper minores sine ullo determinato limite. Inde autem fiet, ut illa *XY* in suo illo motu super recta *AZ* occurrere tandem debeat ipsi *AY* in quodam puncto *P* sine ullo angulo cum segmento *PY*, adeo ut nempe segmentum ejusmodi commune sit duarum rectarum *APY*, & *XPY*. At hoc evidenter repugnat naturæ lineæ rectæ.

Sin verò cuiquam minùs opportunus videatur angulus obtusus ad illud punctum *X* versùs partes puncti *A*, nullo negotio supponi poterit rectus; adeò ut nempe (in motu prædictæ *XY* ad angulos semper rectos super rectâ *AZ*) manifestiùs appareat singula illius *XY* puncta æquabiliter semper moveri relatè ad subjectam *AZ*; ac propterea nequire jam dictam *XY* transire de secante in non secantem alterius indefinitæ *AY*, nisi eam aut aliquando in aliquo puncto præcisè contingat, aut ipsi occurrat in aliquo puncto *P*, ubi cum eadem *AY* commune obtineat segmentum *PY*; quorum utrunque adversari naturæ lineæ rectæ ostendam ad XXXIII. hujus. Igitur juxta veram ideam lineæ rectæ, debebit illa *XY*, in quantacunque distantia puncti *X* a puncto *A*, occurrere semper in aliquo puncto ipsi *AY*. Atque id quidem (quantumlibet parvus supponatur acutus angulus ad punctum *A*) satis esse ad demonstrandum, contra hypothesim anguli acuti, Pronunciatum Euclidæum, constabit ex XXVII. hujus.

PROPOSITIO XXII.

SI duæ rectæ AB, CD *in eodem plano existentes perpendiculariter insistant cuidam rectæ* BD; *ipsa autem* AC *jungens ea perpendicula internos (in hypothesi anguli acuti) acu-*

Tab. III. *tos angulos cum eiſdem efficiat: Dico (fig. 26.) rectas terminatas* AC, BD *commune aliquod habere perpendiculum, & quidem intra limites deſignatis punctis* A, *&* C *præfinitos.*

Demonſtratur. Si enim æquales ſint ipſæ *AB*, *CD*; conſtat (ex 2. hujus) rectam *LK*, a qua bifariam dividantur illæ duæ *AC*, & *BD*, commune fore eiſdem perpendiculum. Sin verò alterutra ſit major, ut putà *AB*: demittatur ad *BD* (juxta 12. primi) ex quovis puncto *L* ipſius *AC* perpendicularis *LK*, occurrens alteri *BD* in *K*. Occurret autem in aliquo puncto *K*, conſiſtente inter puncta *B*, & *D*; ne (contra 17. primi) perpendicularis *LK* ſecet alterutram *AB*, aut *CD*, perpendiculares eidem *BD*. Si ergo anguli ad punctum *L* recti non ſunt, unus eorum acutus erit, & alter obtuſus. Sit obtuſus versùs punctum *C*. Jam verò intelligatur *LK* ita procedere versùs *AB*, ut ſemper ad rectos angulos inſiſtat ipſi *BD*, atque item opportunè aucta, aut imminuta, in aliquo ſui puncto ſecet rectam *AC*. Conſtat angulos ad puncta interſectiva ipſius *AC* non poſſe omnes eſſe obtuſos versùs partes puncti *C*, ne tandem in ipſo puncto *A*, dum recta *LK* congruet cum recta *AB*, angulus ad punctum *A* versùs partes puncti *C* ſit obtuſus, cum ad eas partes poſitus ſit acutus. Quoniam ergo angulus ad punctum *L* ipſius *LK* poſitus eſt obtuſus versùs partes puncti *C*, non tranſibit in eo motu recta *LK* ad faciendum in aliquo ſui puncto cum recta *AC* angulum acutum versùs partes prædicti puncti *C*, niſi priùs tranſeat ad conſtituendum in aliquo ſui puncto cum eadem *AC* angulum rectum versùs partes ejuſdem puncti *C*. Erit igitur inter puncta *A*, & *L* unum aliquod punctum intermedium *H*, in quo *HK* perpendicularis ipſi *BD* ſit etiam perpendicularis alteri *AC*.

Simili modo oſtendetur adeſſe aliquam *XK* inter ipſas *LK*, *CD*, quæ ſit perpendicularis & rectæ *BD*, &

rectæ

rectæ *AC*, dum scilicet angulus obtusus ad punctum *L* ponatur consistere versùs partes puncti *A*.

Constat igitur rectas *AC*, *BD* commune aliquod habituras esse perpendiculum, & quidem intra limites designatis punctis *A*, & *C* præfinitos, quoties junctæ *AB*, *CD* in eodem plano existant, sintque perpendiculares ipsi *BD*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXIII.

Si duæ quælibet rectæ AX, BX (*fig.* 27.) *in eodem plano existant; vel unum aliquod (etiam in hypothesi anguli acuti) commune obtinent perpendiculum; vel in alterutram eandem partem protractæ, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat, semper magis ad se invicem accedunt.*

Demonstratur. Ex quolibet puncto *A* ipsius *AX* demittatur ad rectam *BX* perpendicularis *AB*. Si ipsa *BA* efficiat cum *AX* angulum rectum, habemus intentum communis perpendiculi. Cæterùm verò ea recta efficiat ad alterutram partem, ut putà versùs partes puncti *X*, angulum acutum. Itaque in prædicta recta *AX* designentur inter puncta *A*, & *X* quælibet puncta *D*, *H*, *L*, ex quibus demittantur ad rectam *BX* perpendiculares *DK*, *HK*, *LK*. Si unus aliquis angulus ad puncta *D*, *H*, *L* acutus sit versùs partes puncti *A*, constat (ex præcedente) unum aliquod adfuturum commune perpendiculum ipsarum *AX*, *BX*. Sin verò omnis hujusmodi angulus sit major acuto; vel unus aliquis erit rectus, & sic rursum habemus intentum communis perpendiculi, cum omnes anguli ad puncta *K* supponantur recti; vel omnes illi anguli ponuntur obtusi versùs partes puncti *A*, ac propterea omnes itidem acuti versùs partes puncti *X*, & sic rursum argumentor. Quoniam in quadrilatero *KDHK* recti sunt angu-

anguli ad puncta K, ponitur autem acutus angulus ad punctum D, erit (ex Cor. II. post 3. hujus) latus DK majus latere HK. Simili modo ostendetur latus HK majus esse latere LK; atque ita semper, conferendo inter se perpendiculares ex quolibet puncto altiore ipsius AX demissas ad alteram BX. Quapropter ipsæ AX, BX semper magis versùs partes puncti X ad se invicem accedent: Quæ est altera pars propositi disjuncti.

Ex quibus omnibus constat duas quaslibet rectas AX, BX, quæ in eodem plano existant, vel unum aliquod (etiam in hypothesi anguli acuti) commune habere perpendiculum, vel in alterutram eandem partem protractas, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat, semper magis ad se invicem accedere. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

Hinc anguli versùs basim AB erunt semper obtusi ad illud punctum ipsius AX, ex quo demittitur perpendicularis ad rectam BX: erunt, inquam, semper obtusi, quoties duæ illæ AX, & BX semper magis ad se invicem accedant versùs partes punctorum X; quod quidem sano modo intelligi debet, nimirum de perpendicularibus demissis ante prædictum occursum, si fortè ad finitam distantiam una in alteram incidere debeat.

SCHOLION.

Video tamen inquiri hìc posse, qua ratione ostendendum sit commune illud perpendiculum; quoties recta quæpiam $PFHD$ (fig. 28.) occurrens duabus AX, BX in punctis F, & H, duos ad easdem partes efficiat internos angulos AHF, BFH, non eos quidem rectos, sed tamen æqua-

æquales ſimul duobus rectis. Ecce autem commune illud perpendiculum geometricè demonſtratum. Divisâ *FH* bifariam in *M* demittantur ad *AX*, & *BX* perpendiculares *MK*, *ML*. Angulus *MFL* æqualis erit (ex 13. primi) angulo *MHK*, qui nempe ſupponitur duos rectos efficere cum angulo *BFH*. Præterea recti ſunt anguli ad puncta *K*, & L; ac rurſum æquales ſunt ipſæ *MF*, *MH*. Igitur (ex 26. primi) æquales itidem erunt anguli *FML*, *HMK*. Quare angulus *HMK* duos efficiet rectos angulos cum angulo *HML*, prout cum eodem duos efficit rectos angulos (ex 13. primi) angulus *FML*. Igitur (ex 14. primi) una erit recta linea continuata ipſa *KML*, commune idcirco perpendiculum prædictis rectis *AX*, *BX*. Quod erat &c.

COROLLARIUM II.

SEd rurſum docere hinc poſſum, quòd illæ duæ *AX*, *BX*, in quas incidens recta *PFHD*, aut duos efficiat cum ipſis *AX*, *BX* internos ad eaſdem partes angulos æquales duobus rectis; aut conſequenter (ex 13. & 15. primi) alternos ſive externos, ſive internos angulos inter ſe æquales; aut rurſum, eodem titulo, externum (ut putà *DHX*) æqualem interno, & oppoſito *HFX*: quòd, inquam, illæ duæ rectæ neque ad infinitam earundem productionem coire inter ſe poſſint. Si enim ex quolibet puncto *N* ipſius *AX* demittatur ad *BX* perpendicularis *NR*, erit hæc in ipſa hypotheſi anguli acuti (quæ utique ſola obeſſe nobis poſſet) major (ex Cor. I. poſt 3. hujus) eo communi perpendiculo *KL*. Non igitur illæ duæ *AX*, *BX* convenire unquam inter ſe poterunt.

Porrò autem demonſtratas hinc habes Propoſ. 27. & 28. Libri primi Euclidis; & quidem citra immediatam dependentiam a præcedentibus 16. & 17. ejuſdem primi, circa quas oriri poſſet difficultas, quoties ſub baſi finita infinitilaterum eſſet triangulum; ad quale nempe triangulum provocare non dubitaret, qui eas duas *AX*, *BX* ad infinitam ſaltem diſtantiam inter ſe coituras cenſeret, quamvis anguli ad incidentem *PFHD* tales forent, quales ſuppoſuimus.

Præterea, propter demonſtratum commune perpendiculum *KL*, nequirent ſanè illæ duæ *KX*, *LX* ad ſuam partem punctorum *X* ſimul concurrere, quin etiam (ex facili intellecta ſuperpoſitione) ad alteram etiam parte n ſimul concurrerent reliquæ & ipſæ interminatæ *KA*, *LB*. Quare duæ rectæ *AX*, *BX* clauderent ſpatium; quod eſt contra naturam lineæ rectæ.

Sed hæc poſteriora ſunt. Nam in præcedentibus nuſquam adhibui aut 16. aut 17. primi, niſi ubi clarè ageretur de triangulo omni ex parte circumſcripto, prout nempe in Proemio ad Lectorem ita me curaturum ſpoponderam.

PROPOSITIO XXIV.

I*Iſdem manentibus: Dico quatuor ſimul angulos (fig. 27.) quadrilateri* KDHK *proximioris baſi* AB *minores eſſe (in hypotheſi anguli acuti) quatuor ſimul angulis quadrilateri* KHLK *remotioris ab eadem baſi; atque ita quidem, ſive illæ duæ* AX, BX *aliquando ad finitam diſtantiam incidant versùs partes puncti* X; *ſive nunquam inter ſe incidant; ſed versùs eas partes aut ſemper magis ad ſe invicem accedant, aut aliquando recipiant commune perpendiculum, poſt quod nempe (juxta Cor. II. præc. Propoſ.) ad eaſdem partes incipiant invicem diſſilire.*

Demonſtratur. Verùm hìc ſupponimus portiones *KK* ſumptas eſſe invicem æquales. Quoniam igitur (ex præceden cedente) latus DK majus eſt latere HK, ac ſimiliter HK majus latere LK; ſumatur in HK portio MK æqualis ipſi LK, & in DK portio NK æqualis ipſi HK; junganturque MN, MK, LK; nimirum punctum K intermedium cum puncto L, & punctum K vicinius puncto B cum puncto M. Jam ſic progredior. Quandoquidem latera trianguli KKL (initium ſemper ducam à puncto K viciniore puncto B) æqualia ſunt lateribus trianguli KKM, & anguli comprehenſi æquales, utpotè recti; æquales etiam erunt (ex 4. primi) baſes LK, MK; atque item æquales, qui correſpondent invicem anguli, ad eaſdem baſes, nimirum angulus KLK angulo KMK, & angulus LKK angulo MKK. Igitur æquales etiam ſunt reſidui NKM, & HKL. Quare, cum latera NK, KM trianguli NKM æqualia itidem ſint lateribus HK, KL trianguli HKL; æquales etiam erunt (ex eadem 4. primi) baſes NM, HL; anguli KNM, KHL; ac tandem anguli KMN, KLH. Sunt autem in prioribus triangulis jam probati æquales anguli KLK, & KMK. Igitur totus angulus NMK æqualis eſt toti angulo HLK. Quare, cum omnes ad puncta K anguli ſint recti, manifeſtè conſequitur omnes ſimul quatuor angulos quadrilateri $KNMK$ æquales eſſe omnibus ſimul quatuor angulis quadrilateri $KHLK$. Quoniam verò duo ſimul anguli ad puncta N, & M in quadrilatero $KNMK$ majores ſunt, in hypotheſi anguli acuti, duobus ſimul angulis (ex Cor. poſt XVI. hujus) ad puncta D, & H in quadrilatero $NDHM$, ſeu quadrilatero $KDHK$; conſequens inde eſt, ut (additis communibus rectis angulis ad puncta K) quatuor ſimul anguli quadrilateri $KNMK$, ſeu quadrilateri $KHLK$, majores ſint (in hypotheſi anguli acuti) quatuor ſimul angulis quadrilateri $KDHK$. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

SEd opportunè obſervari hic debet, nihil defuturum factæ argumentationi, quamvis angulus ad punctum L poneretur rectus, juxta hypotheſin anguli acuti. Nam adhuc illa communis perpendicularis LK minor foret (ex Cor. I. poſt III. hujus) altera perpendiculari HK, ex qua propterea ſumi adhuc poſſet portio MK æqualis prædictæ LK: Quo ſtante conſtat nullum poſſe obicem intercurrere.

SCHOLION.

DUbitari nihilominus poſſet, an ex quolibet puncto K (aſſumpto nimirum in BX ante occurſum ipſius BX in alteram AX) perpendicularis educta versùs partes rectæ AX occurrere huic debeat (fig. 29.) in aliquo puncto L; dum nempe illæ duæ, ante prædictum occurſum, ponantur ad ſe invicem ſemper magis accedere. Ego autem dico ita omnino ſecuturum.

Demonſtratur. Aſſignatum ſit in BX quodvis punctum K. Sumatur in AX quædam AM æqualis ſummæ ex ipsâ BK, & duplâ AB. Tum ex puncto M ducatur ad BX (juxta 12. primi) perpendicularis MN. Erit MN (juxta præſentem ſuppoſitionem) minor ipsâ AB. Quare AM (facta æqualis ſummæ ex ipsâ BK, & duplâ AB) major erit ſummâ ipſarum BK, AB, & NM. Jam oſtendere oportet eandem AM minorem eſſe ſummâ ipſarum BN, AB, & MN, ut inde conſtet eam BN majorem eſſe prædictâ BK, ac propterea punctum K jacere inter puncta B, & N. Jungatur BM. Erit latus AM (ex 20. primi) minus duobus ſimul reliquis lateribus AB, & BM. Rurſum

latus

latus *BM* (ex eadem 20. primi) minus erit duobus simul lateribus *BN*, & *MN*. Igitur latus *AM* multò minus erit tribus simul lateribus *AB*, *BN*, & *NM*. Hoc autem erat ostendendum, ut constaret punctum K jacere inter puncta *B*, & *N*. Inde autem consequens est, ut perpendicularis ex puncto K educta versùs partes ipsius *AX* occurrere huic debeat in aliquo puncto *L* inter puncta *A*, & *M* constituto; ne scilicet (contra 17. primi) secare debeat alterutram *AB*, aut *MN* perpendiculares eidem *BX*. Quod &c.

PROPOSITIO XXV.

SI *duæ rectæ (fig.* 30.) AX, BX *in eodem plano existentes (una quidem sub angulo acuto in puncto* A, *& altera in puncto* B *perpendiculariter insistens ipsi* AB) *ita ad se invicem semper magis accedant versùs partes punctorum* X, *ut nihilominus earundem distantia semper major sit assignatâ quadam longitudine, destruitur hypothesis anguli acuti.*

Demonstratur. Assignata sit longitudo *R*. Si ergo in ea *BX* sumatur quædam *B*K quantumlibet multiplex propositæ longitudinis *R*; constat (ex præcedente Scholio) perpendicularem ex puncto K eductam versùs partes ipsius *AX* in aliquo puncto *L* eidem occursuram; ac rursum (ex præsente hypothesi) constat eam K*L* majorem fore prædicta longitudine *R*. Porrò intelligatur *B*K divisa in portiones *K*K, æquales singulas ipsi *R*, usque dum K*B* æqualis sit ipsi longitudini *R*. Tandem verò ex punctis K erectæ sint ad *BX* perpendiculares occurrentes ipsi *AX* in punctis *L*, *H*, *D*, *M*, usque ad punctum *N* proximius puncto *A*. Jam sic progredior.

Erunt (ex Prop. præcedente) quatuor simul anguli quadrilateri *KHLK*, remotioris ab ea basi *AB*, majores quatuor ſimul angulis quadrilateri $KDHK$, proximioris eidem baſi; cujus itidem quadrilateri quatuor ſimul anguli majores erunt quatuor ſimul angulis ſubſequentis versùs eandem baſim quadrilateri $KMDK$. Atque ita ſemper uſque ad ultimum quadrilaterum $KNAB$, cujus utique quatuor ſimul anguli minimi erunt, relatè ad quatuor ſimul angulos ſingulorum aſcendentium versùs puncta X quadrilaterorum.

Quoniam verò tot aderunt prædicto modo recenſita quadrilatera, quot ſunt præter baſim AB demiſſæ ex punctis ipſius AX ad rectam BX perpendiculares; expendenda eſt ſumma omnium ſimul angulorum, qui comprehenduntur in illis quadrilateris. Ponamus eſſe novem ejuſmodi perpendiculares demiſſas, ac propterea novem itidem quadrilatera. Conſtat (ex 13. primi) æquales eſſe quatuor rectis angulos hinc inde comprehenſos ad bina puncta illarum octo perpendicularium, quæ mediæ jaceant inter baſim AB, & remotiorem perpendicularem LK. Itaque ſumma horum omnium angulorum erit 32. rectorum. Reſtant duo anguli ad perpendiculum LK, & duo ad baſim AB. At anguli, unus quidem ad punctum K, & alter ad punctum B, ſupponuntur recti; angulus autem ad punctum L (ex Cor. poſt XXIII. hujus) eſt obtuſus. Quapropter (etiam neglecto angulo acuto ad punctum A) ſumma omnium angulorum, qui comprehenduntur ab illis novem quadrilateris, excedet 35. rectos. Inde autem fit, ut quatuor ſimul anguli quadrilateri $KHLK$, remotioris a baſi, minùs deficiant a quatuor rectis, quàm ſit nona pars unius recti; & id quidem etiam ſi æqualis portio prædictæ omnium angulorum ſummæ contingeret ſingulis illis quadrilateris. Ergo minor adhuc erit inſinuatus defectus, cum ſumma quatuor ſimul angulorum illius quadrilateri $KHLK$ oſtenſa ſit omnium maxima, relatè ad

qua-

quatuor ſimul angulos reliquorum quadrilaterorum.

Sed rurſum; juxta ſuppoſitionem, in qua procedit hæc Propoſitio; aſſumi poteſt tanta longitudo ipſius *Bk*, ut confici ſemper poſſint non tot quin plura quadrilatera ſub baſibus kk, æqualibus ſingulis illi aſſignatæ longitudini *R*. Quare defectus quatuor ſimul angulorum illius remotioris quadrilateri k*HL*k a quatuor rectis oſtendetur ſemper minor & unâ centeſimâ, & unâ milleſimâ, & ſic ſub quolibet aſſignabili numero unâ portiunculâ unius recti.

Porrò autem erunt ſemper (juxta prædictam ſuppoſitionem) ipſæ *L*k, & *H*k majores deſignata longitudine *R*. Si ergo in k*L*, & k*H* ſumantur k*S*, & k*T* æquales ipſi kk, ſeu longitudini *R*; erunt, junctâ *ST*, duo ſimul anguli k*ST*, k*TS* majores, in hypotheſi anguli acuti, duobus ſimul angulis (ex Cor. poſt XVI. hujus) ad puncta *H*, & *L* in quadrilatero *THLS*, ſeu quadrilatero k*HL*k; ac propterea (additis communibus rectis angulis ad puncta k, k) erunt quatuor ſimul anguli quadrilateri k*TS*k majores quatuor ſimul angulis illius quadrilateri k*HL*k.

Jam verò: cum ex una parte ſtabile ſit, ac datum quadrilaterum k*TS*k, utpotè conſtans data baſi kk, quæ nimirum æqualis ponitur aſſignatæ longitudini *R*, ac rurſum conſtans duobus perpendiculis *T*k, *S*k eidem baſi æqualibus, ac tandem jungente *TS*, quæ evadit omnino determinata; & ex altera quatuor ſimul anguli ſtabilis illius, ac dati quadrilateri, oſtenſi jam ſint majores quatuor ſimul angulis quadrilateri k*HL*k quantumlibet diſtantis ab ea baſi *AB*: conſequens utique fit, ut quatuor ſimul anguli ſtabilis illius, ac dati quadrilateri k*TS*k majores ſint qualibet angulorum ſummâ, quæ quomodolibet deficiat a quatuor rectis; quandoquidem oſtenſum jam eſt deſignari ſemper poſſe tale aliquod quadrilaterum k*HL*k,

cujus

cujus quatuor simul anguli minùs deficiant a quatuo r rectis, quàm sit quævis designabilis unius recti portiuncula. Igitur quatuor simul anguli stabilis illius, ac dati quadrilateri, vel æquales sunt quatuor rectis, vel eisdem majores. Tunc autem (ex XVI. hujus) stabilitur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi; ac propterea (ex V. & VI. hujus) destruitur hypothesis anguli acuti.

Itaque constat destructum iri hypothesim anguli acuti, si duæ rectæ in eodem plano existentes ita ad se invicem semper magis accedant, ut nihilominus earundem distantia major semper sit assignatâ quadam longitudine. Hoc autem erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

AT (destructâ hypothesi anguli acuti) manifestum fit, ex 13. hujus, controversum Pronunciatum Euclidæum; prout a me hoc loco declaratum iri spopondi in Scholio III. post XXI. hujus, ubi de conatu Nassaradini Arabis locuti sumus.

COROLLARIUM II.

RUrsum ex hac Propositione, & ex præcedente XXIII. manifestè colligitur satis non esse ad stabiliendam Geometriam Euclidæam duo puncta sequentia. Unum est: quòd nomine parallelarum illas rectas censeamus, quæ in eodem plano existentes commune aliquod obtinent perpendiculum. Alterum verò, quòd omnes rectæ in eodem plano existentes, quarum nullum commune sit perpendiculum, ac propterea quæ juxta assumptam Definitionem parallelæ non sint, debeant ipsæ in alterutram partem semper magis protractæ inter se aliquando incidere, si non ad

fini-

finitam, saltem ad infinitam distantiam. Nam rursum demonstrare oporteret, quòd duæ quælibet in eodem plano existentes, in quas recta quæpiam incidens duos ad easdem partes internos angulos efficiat minores duobus rectis, nusquam alibi possint ipsæ recipere commune perpendiculum. Quòd autem, hoc demonstrato, exactissimè stabiliatur Geometria Euclidæa, infrà constabit.

PROPOSITIO XXVI.

SI *prædictæ* AX, BX (*fig.* 31.) *coire quidem inter se debeant, sed non nisi ad infinitam earundem productionem versùs partes punctorum* X: *Dico nullum fore assignabile punctum* T *in ipsa* AB, *ex quo perpendicularis educta versùs partes ipsius* AX *non occurrat ad finitam, seu terminatam distantiam eidem* AX *in aliquo puncto* F.

Demonstratur. Nam (ex præcedente hypothesi) unum aliquod erit in ipsa *AX* punctum *N*, ex quo perpendicularis *N*k demissa ad *BX* minor sit qualibet assignata longitudine, ut putà eâ *TB*. Tum verò sumatur in *TB* portio *CB* æqualis ipsi *N*k, jungaturque *CN*. Constat angulum *NCB* acutum fore, in hypothesi anguli acuti. Ergo (ex 13. primi) obtusus erit, qui deinceps est angulus *NCT*. Igitur recta, quæ ex puncto *T* (inter puncta *A*, & *C* constituto) perpendiculariter educatur versùs partes ipsius *AX*, non incidet (ex 17. primi) in ullum punctum ipsius *CN*; ac propterea (ne claudat spatium cum *AT*, aut cum *TC*) occurret ipsi terminatæ *AN* in aliquo puncto *F*. Igitur in ipsa etiam hypothesi anguli acuti (quam scimus obesse unicè hic posse) nullum erit assignabile punctum *T* in ea *AB*, ex quo perpendiculariter educta versùs partes ipsius *AX* non occurrat ad finitam, seu terminatam distantiam eidem *AX* in quodam puncto *F*. Quod &c.

CO-

COROLLARIUM I.

INde autem fit, ut assumpto in *AB* protractâ quolibet puncto *M*, ex quo versùs partes punctorum *X* educatur perpendicularis *MZ*, nequeat ipsa, etiamsi infinitè producatur, occurrere prædictæ *AX*; quia cæterùm illa altera *BX* deberet (ex præmissa demonstratione) ad finitam distantiam occurrere eidem *AX*; quod est contra præsentem hypothesin.

COROLLARIUM II.

EX quo rursum consequitur omnem perpendiculariter eductam ex quolibet puncto illius quantumlibet continuatæ *AB*, sed non tamen infinitè dissito, debere ad finitam distantiam occurrere prædictæ *AX*; quatenus nempe supponatur omnem talem perpendiculariter eductam semper magis, sine ullo certo limite accedere ad alteram semper continuatam *AX*.

COROLLARIUM III.

UNde tandem fit, ut ab illa *AX* neque ad infinitam ejusdem productionem secari possit ipsa *BX*; quia cæterum ex quodam illius *AX* ultra prædictam sectionem puncto intelligi posset demissa ad *AB* productam quædam perpendicularis *ZM*; unde rursum fieret, ut ipsa *BX* (contra præsentem hypothesim) non ad infinitam, sed omnino ad finitam distantiam occurreret prædictæ *AX*. Sed hoc postremum dictum sit ultra necessitatem.

PROPOSITIO XXVII.

SI recta AX *(fig. 32.) sub aliquo, ut libet, parvo angulo educta ex puncto* A *ipsius* AB, *occurrere tandem debeat (saltem ad infinitam distantiam) cuivis perpendiculari* BX, *quæ ad quantamlibet ab eo puncto* A *distantiam excitari intelligatur super ea incidente* AB: *Dico nullum jam fore locum hypothesi anguli acuti.*

Demonstratur. Ex quodam puncto k prope punctum *A*, ad libitum in ipsa *AB* designato, erigatur ad *AB* perpendicularis k*L*, quæ utique (ex Cor. II. præcedentis Propositionis) occurret ipsi *AX* ad finitam, seu terminatam distantiam in aliquo puncto *L*. Jam verò constat sumi posse in k*B* portiones kk æquales singulas cuidam assignabili longitudini *R*, & eas plures quolibet assignabili numero finito; quandoquidem punctum *B* statui potest; juxta præsentem suppositionem; in quantalibet distantia ab eo puncto *A*. Itaque ex aliis punctis k erigantur ad *AB* perpendiculares k*H*, k*D*, k*P*, quæ omnes (ex præcitato Corollario) occurrent rectæ *AX* in quibusdam punctis *H*, *D*, *P*; atque ita circa reliqua puncta k uniformiter designata versùs punctum *B*. Constat secundò (ex 16. primi) angulos ad puncta *L*, *H*, *D*, *P*, fore omnes obtusos versùs partes punctorum *X*; atque item (ex 13. ejusdem primi) angulos ad prædicta puncta fore omnes acutos versùs punctum *A*. Igitur (ex Cor. II. post 3. hujus) latus k*H* majus erit latere k*L*; latus k*D* majus latere k*H*; atque ita semper, procedendo versùs puncta *X*. Constat tertiò quatuor simul angulos quadrilateri k*LH*k majores fore quatuor simul angulis quadrilateri k*HD*k: nam id in simili demonstratum jam est in XXIV. hujus. Constat quartò idem similiter valere de quadrilatero k*HD*k relatè ad quadrilaterum *KDP*k; atque ita semper, procedendo ad quadrilatera remotiora ab eo puncto A.

Quoniam igitur tot aderunt (ut in XXV. hujus) prædicto modo recensita quadrilatera, quot sunt, præter primam Lk, demissæ ex punctis ipsius AX perpendiculares ad rectam AB; constabit uniformiter (si ponamus novem, præter primam, demissas ejusmodi perpendiculares) summam omnium angulorum, qui comprehenduntur ab illis novem quadrilateris, excedere 35. rectos; ac propterea quatuor simul angulos primi quadrilateri $kLHk$, quod quidem in hac ratione ostensum est omnium maximum, minùs deficere à quatuor rectis, quàm sit nona pars unius recti. Quare; multiplicatis ultra quemlibet assignabilem finitum numerum eisdem quadrilateris, procedendo semper versùs partes punctorum X; constabit similiter (ut in eadem præcitata) quatuor simul angulos stabilis illius quadrilateri $kHLk$ minùs deficere à quatuor rectis, quàm sit quælibet assignabilis unius recti portiuncula. Igitur quatuor simul illi anguli vel æquales erunt quatuor rectis, vel eisdem majores. Tunc autem (ex XVI. hujus) stabilitur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi; ac propterea (ex V. & VI. hujus) destruitur hypothesis anguli acuti.

Itaque constat nullum jam fore locum hypothesi anguli acuti, si recta AX sub aliquo, ut libet, parvo angulo, educta ex puncto A ipsius AB occurrere tandem debeat (saltem ad infinitam distantiam) cuivis perpendiculari BX, quæ ad quantamlibet ab eo puncto A distantiam excitari intelligatur super eâ incidente AB. Quod erat &c.

SCHOLION I.

ET hoc est, quod prædixi in Cor. II. post XXV. hujus; nullum scilicet superfuturum locum hypothesi anguli

guli acuti, ſeu ſtabilitum exactiſſimè iri Geometriam Euclidæam; ſi duæ quælibet in eodem plano exiſtentes rectæ, ut putà *AX*, *BX*, in quas incidens recta *AB* (ſumpto puncto *B* in quantalibet diſtantiâ a puncto *A*) duos cum eiſdem ad eaſdem partes punctorum *X* angulos efficiat minores duobus rectis; ſi (inquam) nuſquam alibi (hoc ſtante) poſſint illæ recipere commune perpendiculum. Tunc enim illæ duæ *AX*, *BX* ſemper magis ad ſe invicem accedent; nimirum vel intra quendam determinatum limitem, prout in XXV. hujus; vel ſine ullo certo limite, ac propterea uſque ad occurſum ſaltem poſt infinitam productionem, prout in hac XXVII. Conſtat autem in utroque prædictorum caſuum oſtenſam jam eſſe deſtructionem hypotheſis anguli acuti. Quod intendebatur.

SCHOLION II.

ATque id rurſum eſt, quod ſpopondi in fine Scholii IV. poſt XXI. hujus, prout ex ipſis terminis clarè eluceſcit.

SCHOLION III.

PRæterea obſervari hic velim diſcrimen inter hanc Propoſ. & præcedentem XVII. Nam ibi (recole fig. 15.) oſtenſa eſt deſtructio hypotheſis anguli acuti, ſi (exiſtente, ut libet parvâ, rectâ *AB*) omnis *BD* ſub quovis acuto angulo educta, occurrere tandem debeat in quodam puncto *K* ipſi perpendiculari *AH* productæ. Hic autem (viceverſâ) permittitur quidem deſignatio cujuſvis parviſſimi acuti anguli ad punctum *A*, dum tamen interjecta *AB*, ad quam erigenda eſt perpendicularis indefinita Tab. II.

 BX,

BX, statui possit quantælibet longitudinis.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duæ rectæ AX, BX (*quarum prior sub angulo acuto, & altera ad perpendiculum eductæ sint versùs easdem partes ex quantalibet recta* AB) *semper magis sine ullo certo limite ad se invicem accedant, præterquam ad infinitam earundem productionem; Dico omnes angulos (fig.* 33.) *ad quælibet puncta* L, H, D *ipsius* AX, *ex quibus demittantur ad rectam* BX *perpendiculares* LK, HK, DK; *tum fore omnes obtusos versùs partes puncti* A; *tum fore semper minores, qui magis distant ab eo puncto* A; *ac tandem angulos magis, ac magis distantes ab eodem puncto* A, *semper magis sine ullo certo limite accedere ad æqualitatem cum angulo recto.*

Tab. IV.

Demonstratur. Et prima quidem pars constat ex Cor. I. post XXIII hujus. Secunda verò pars ita evincitur. Nam duo simul anguli ad *LK* versùs basim *AB* majores sunt (ex Cor. post XVI. hujus) duobus simul internis, & oppositis angulis ad *HK* versùs eandem basim *AB*. Sunt autem inter se æquales, utpote recti, anguli ad utrumque punctum K versùs basim *AB*. Ergo angulus obtusus ad *L* versùs basim *AB* major est angulo obtuso ad *H* versùs eandem basim *AB*. Simili modo ostendetur prædictum angulum obtusum ad *H* majorem esse angulo obtuso ad punctum *D*. Atque ita semper, procedendo versùs puncta *X*.

Tertia tandem pars majore indiget disquisitione. Si ergo fieri potest, assignatus sit (fig. 34.) quidam angulus *MNC*, quo semper major sit, aut saltem non minor, excessus cujusvis ex prædictis angulis obtusis supra angulum rectum. Constat (ex XXI. hujus) latera *NM*, *NC* comprehendentia illum angulum *MNC* taliter produci posse, ut perpendicularis *MC*, ex quodam puncto *M* ipsius *MN*

de-

demissa ad *NC*, major sit (in ipsa etiam hypothesi anguli acuti) qualibet finitâ assignatâ longitudine, ut putà prædictâ basi *AB*. Hoc stante: assumatur in *BX* (fig. 35.) quædam *BT* æqualis ipsi *CN*; educaturque ex puncto *T* versùs *AX* perpendicularis *TS*, quæ nempe (ex Scholio post XXIV. hujus) occurret ipsi *AX* in quodam puncto *S*. Deinde ex puncto *S* demittatur ad *AB* perpendicularis *SQ*. Cadet hæc (propter 17. primi) ad partes anguli acuti *SAB* inter puncta *A*, & *B*. Porrò acutus erit angulus *QST* in quadrilatero *QSTB*, cum reliqui tres anguli sint recti; ne (contra V. & VI. hujus) incidamus in hypothesin aut anguli recti, aut anguli obtusi. Hinc recta *SQ* major erit (ex Cor. I. post 3. hujus) rectâ *BT*, sive *CN*; ac rursum angulus *ASQ* major erit excessu, quo angulus obtusus *AST* excedit angulum rectum, & sic major angulo *MNC*. Ducatur igitur quædam *SF* secans *AQ* in F, & efficiens cum *SA* angulum æqualem ipsi *MNC*. Deinde ex puncto *A* ducatur ad *SF* productam perpendicularis *AO*. Cadet punctum *O* (ex 17. primi) infra punctum *F*, cum angulus *AFS* (ex 16. ejusdem primi) sit obtusus. Tandem verò; cum *FS* major sit (ex 18. primi) ipsâ *QS*, & sic multò major ipsâ *BT*, sive *CN*; sumatur in *FS* portio *IS* æqualis ipsi *CN*, & ex puncto *I* erigatur ad *FS* perpendicularis *IR* occurrens in puncto *R* ipsi *AS*. Cadet autem punctum *R* inter puncta *A*, & *S*: si enim caderet in aliquod punctum ipsius *AF*, haberemus in eodem triangulo (contra 17. primi) duos angulos majores duobus rectis, cum angulus ad punctum *F* versùs partes puncti *A* ostensus jam sit obtusus.

Post tantum apparatum sic concludo. Quandoquidem in quadrilatero *AOIR* recti sunt anguli ad puncta *O*, & *I*; & est acutus angulus (ex 17. primi) ad punctum *A*, propter rectum angulum *AOS*; ac rursum est obtusus (ex 16.

ejus-

ejusdem primi) angulus *IRA*, cum rectus sit angulus *RIS*: consequens tandem est (ex Cor. II. post 3. hujus) ut latus *AO* majus sit latere *IR*. At (juncta *OQ*) latus *AQ* majus est (ex 18. primi) latere *AO* propter angulum obtusum in *O*, cum angulus *AOS* factus sit rectus. Igitur recta *AQ* multò major erit rectâ *IR*, sive (ex 26. primi) rectâ *NC*, & sic multò major rectâ *AB*, pars toto; quod est absurdum.

Non igitur ullus assignari potest angulus *MNC*, quo semper major sit, aut saltem non minor excessus cujusvis ex prædictis angulis obtusis supra angulum rectum. Quare anguli illi obtusi, magis ac magis distantes ab eo puncto *A*, semper magis sine ullo certo limite accedent ad æqualitatem cum angulo recto. Quod erat postremo loco demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hoc autem stante, quod postremo loco demonstratum est, manifestè consequitur, duas illas *AX*, *BX*, in infinitum protractas, commune tandem habituras, vel in duobus distinctis punctis, vel in uno, eodemque puncto *X* infinitè dissito, perpendiculum. Rursum verò, quòd non in duobus distinctis punctis haberi possit commune istud perpendiculum, ex eo manifestè liquet; quia cæterum (ex Cor. II. post XXIII. hujus) inciperent inde illæ rectæ invicem dissilire, & sic neque ad infinitam distantiam inter se concurrerent; quin etiam (contra expressam suppositionem) non ad se invicem, sine ullo certo limite, semper magis versùs eas partes accederent. Itaque in uno, eodemque puncto *X* infinitè dissito commune haberent perpendiculum.

PROPOSITIO XXIX.

R*Esumptâ fig.* (33.) *præcedentis Propositionis: Dico omnem rectam* AC, *quæ secet angulum* BAX, *aliquando ad finitam, seu terminatam distantiam (etiam in hypothesi anguli acuti) occursuram ipsi* BX *in quodam puncto* P, *dum nempe illa* AC *semper magis protrahatur versùs partes punctorum* X.

Demonstratur. Et primò quidem (ne recta *AC* spatium claudat cum ea *AX*) occurret ipsa ad finitam distantiam rectis *LK*, *HK*, *DK* in quibusdam punctis *C*, *N*, *M*; occurret, inquam, nisi antea (ad finitam utique distantiam, prout intendimus) occurrat ipsi *BX* in aliquo puncto inter punctum *B*, & unum aliquod punctorum *K* constituto. Deinde (ex Cor. I. post XXIII. hujus) obtusi erunt anguli *ACK*, *ANK*, *AMK*. Præterea anguli isti, semper obtusi, accedent (ex præcedente) sine ullo certo limite ad æqualitatem cum angulo recto, quoties nempe illa *AC* non nisi ad infinitam distantiam occursura putetur ipsi *BX*. Igitur deveniri posset ad talem ordinatam K*MD*, ad quam angulus *AMK* minùs superaret angulum rectum, quàm sit ille angulus *DAC*. Tunc autem angulus *DAC*, sive *DAM*, unà cum angulo *AMD* major erit uno recto. Quare; addito obtuso angulo *ADM*; tres simul anguli trianguli *ADM* majores erunt duobus rectis, quod est contra hypothesin anguli acuti. Igitur omnis recta *AC*, quæ secet illum angulum *BAX*, aliquando ad finitam, seu terminatam distantiam (etiam in hypothesi anguli acuti) occurret ipsi *BX* in quodam puncto *P*. Quod &c.

CO-

COROLLARIUM I.

HInc nulla *AZ*, quæ versùs partes punctorum *X* angulum acutum efficiat majorem illo *BAX*, occurrere unquam poterit, sive ad finitam, sive ad infinitam distantiam ipsi *BX*. Quatenus enim ita contingeret, jam illa *AX*, dividens angulum *BAZ*, deberet (contra præmissam suppositionem) ad finitam distantiam occurrere ipsi *BX*; prout demonstratum id est de recta *AC* dividente angulum *BAX*.

COROLLARIUM II.

PRæterea sequitur nullum fore determinatum acutum angulum omnium maximum, sub quo educta ex puncto *A* ad finitam distantiam occurrat illi *BX*. Si enim versùs partes puncti *X* punctum quodvis assumas, quod sit altius puncto *P*, constat rectam jungentem punctum *A* cum illo puncto altiore majorem angulum effecturam cum ipsa *AB*, quàm sit angulus *BAP*. Atque ita semper sine ullo termino intrinseco. Quare angulus *BAX* (dum scilicet ipsa *AX*, & semper accedat ad eam *BX*, & non nisi ad infinitam distantiam in eandem incidat) erit limes extrinsecus acutorum omnium angulorum, sub quibus rectæ eductæ ex illo puncto *A* ad finitam distantiam occurrunt prædictæ *BX*.

PROPOSITIO XXX.

CUivis terminatæ AB *insistat ad perpendiculum* (*fig.* 36.) *quædam indefinita* BX. *Dico primò rectam* AY, *perpendiculariter elevatam versùs partes easdem super illâ* AB, *fore limitem unum intrinsecum earum omnium, quæ ex illo puncto*

A *ver-*

A versùs easdem partes eductæ commune aliquod (juxta hypothesin anguli acuti) in duobus distinctis punctis obtinent perpendiculum cum alterâ indefinitâ BX. *Dico secundò nullum fore acutum angulum omnium minimum, sub quo educta ex prædicto puncto* A *commune aliquod (juxta prædictam hypothesin) in duobus distinctis punctis obtineat perpendiculum cum eadem* BX.

Demonstratur prima pars. Quoniam enim illa *AY* commune obtinet cum altera *BX* perpendiculum *AB* in duobus distinctis punctis *A*, & *B*; si educatur versùs easdem partes sub angulo obtuso quæpiam *AZ*, constat nullum ad eas partes esse posse in duobus distinctis punctis commune perpendiculum ipsarum *AZ*, *BX*; ne scilicet ex consecuturo quadrilatero continente quatuor angulos majores quatuor rectis incidamus (ex XVI. hujus) in hypothesin jam reprobatam anguli obtusi, contra suppositam hoc loco hypothesin anguli acuti. Igitur illa perpendicularis *AY* erit ex ista parte limes intrinsecus earum omnium, quæ ex illo puncto *A* versùs easdem partes eductæ commune aliquod (juxta illam hypothesin anguli acuti) in duobus distinctis punctis obtineant perpendiculum cum alterâ indefinitâ *BX*. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Si enim fieri potest; esto quidam angulus acutus omnium minimus, sub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus distinctis punctis perpendiculum *ND*. Tum assumpto in *BX* altiore puncto k, ex eo educatur ad *BX* perpendicularis *KL*, ad quam ex puncto *A* demittatur (juxta 12. primi) perpendicularis *AL*. Jam verò, si hæc *AL* occurrat in quodam puncto *S* ipsi *ND*, constat sanè angulum *BAL* minorem fore eo *BAN*, qui propterea non erit omnium minimus, sub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus distinctis punctis perpendiculum *ND*.

Porrò autem ab ea perpendiculari *AL* secari prædictam *ND* in quodam ejus intermedio puncto *S* sic demonstratur.

Et primò quidem non posse ab ea *AL* secari ipsam *BK* in quodam puncto *M* constare absolutè potest ex 17. primi, ne scilicet in eodem triangulo *MKL* duos habeamus angulos rectos in punctis *K*, & *L*; præterquam quòd in hoc ipso haberemus intentum contra illum angulum *BAN*, ne scilicet in hac tali ratione censeatur omnium minimus. Rursum verò nequit *AL* esse continuatio ipsius *AN*; quia cæterum in quadrilatero *NDKL* quatuor haberemus angulos rectos, contra hypothesim anguli acuti. Sed neque eam *DN* protractam secare potest in quovis ulteriore puncto *H*; quia angulus *AHN* (ex 16. primi) foret acutus, propter suppositum rectum angulum externum *AND*; ac propterea angulus *DHL* foret obtusus, & sic in quadrilatero *DHLK* quatuor haberemus angulos, qui simul sumpti majores forent quatuor rectis, contra prædictam hypothesin anguli acuti. Igitur constat ab ea *AL* secari debere angulum *BAN*, qui propterea nequit dici omnium minimus, sub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus distinctis punctis perpendiculum *ND*. Quod erat secundo loco demonstrandum. Itaque constat &c.

COROLLARIUM.

Unde autem observare licet, quòd sub angulo minore *BAL* obtinetur (in hypothesi anguli acuti) commune *LK* perpendiculum, remotius quidem ab illa basi *AB*, prout constat ex ipsa constructione, sed rursum minus altero viciniore communi perpendiculo *ND*, quod obtinetur sub angulo majore *BAN*. Ratio hujus posterioris est, quia

quia in quadrilatero *LKDS* angulus ad punctum *S* acutus est in prædicta hypothesi, cum reliqui tres supponantur recti. Quare (ex Cor. I. post 3. hujus) latus *LK* minus erit contraposito latere *SD*, & sic multò minus latere *ND*.

PROPOSITIO XXXI.

Jam dico nullum fore prædictorum in duobus distinctis punctis communium perpendiculorum limitem determinatum, quo minùs sub minore, ac minore acuto angulo, ad illud punctum A *constituto, deveniri semper possit (juxta hypothesin anguli acuti) ad tale commune in duobus distinctis punctis perpendiculum, quod sit minus qualibet assignatâ longitudine* R.

Demonstratur. Quatenus enim aliter res se habeat; si ex puncto *K* (recole fig. 30.) in quantalibet à puncto *B* distantiâ in ea *BX* assignato, educatur perpendicularis *KL*, ad quam ex puncto *A* (juxta 12. primi) demissa intelligatur perpendicularis *AL*, deberet ipsa *KL* major esse eâ longitudine *R*. Ratio autem est; quia assumpto in eadem *BX* altiore puncto *Q*, ex quo educatur ad ipsam *BX* perpendicularis *QF*, ad quam (juxta eandem 12. primi) demittatur perpendicularis *AF*, deberet hæc rursum saltem non esse minor eâ longitudine *R*. Erit autem *KL* (ex Cor. præced. Prop.) major ipsâ *QF*. Igitur ea *KL* major foret prædictâ longitudine *R*. Atque ita semper altiùs procedendo. Tab. III.

Jam verò: si illa quantacunque *KB* divisa intelligatur (prout in XXV. hujus) in portiones *KK*, æquales illi longitudini *R*, educanturque ex illis punctis *K* perpendiculares, quæ occurrant ipsi *AX* in punctis *H*, *D*, *M*; non erunt anguli ad hæc puncta, versùs partes puncti *L*, aut recti, aut obtusi; ne in aliquo quadrilatero, ut putà *KM-*

LK quatuor simul anguli æquales sint, aut majores quatuor rectis, contra hypotesim anguli acuti, juxta quam procedimus. Omnes igitur hujusmodi anguli acuti erunt versùs partes puncti *L*; ac propterea omnes itidem ad illa puncta obtusi versus partes puncti *A*. Quare (ex Cor. I. post 3. hujus) prædictarum perpendicularium minima quidem erit *KL* remotior à basi *AB*, maxima *KM* propinquior eidem basi; reliquarum verò propinquior remotiore semper major erit. Igitur (ex meâ præced. 24. ejusque Coroll.) quatuor simul anguli quadrilateri *KHLK* remotioris à basi *AB* majores erunt quatuor simul angulis reliquorum omnium quadrilaterorum eidem basi proximiorum. Quare (prout in XXV. hujus) destructa maneret hypothesis anguli acuti.

Itaq; constat nullum fore prædictorum in duobus distinctis punctis communium perpendiculorum limitem determinatum, quo minùs sub minore, ac minore acuto angulo, ad illud punctum *A* constituto, deveniri semper possit (juxta hypothesin anguli acuti) ad tale commune in duobus distinctis punctis perpendiculum, quod sit minus quali bet assignatâ longitudine *R*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXII.

Jam dico unum aliquem fore (in hypothesi anguli acuti) determinatum acutum angulum BAX, *sub quo educta* AX *(fig. 33.) non nisi ad infinitam distantiam incidat in eam*

Tab. IV. BX, *ac propterea sit ipsa limes partim intrinsecus, partim extrinsecus; tum earum omnium, quæ sub minoribus acutis angulis ad finitam distantiam incidunt in prædictam* BX; *tum etiam aliarum, quæ sub majoribus angulis acutis, usque ad angulum rectum inclusivè, commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendiculum cum eadem* BX.

De

Demonstratur. Nam primò constat (ex Cor. II. post XXIX. hujus) nullum fore determinatum acutum angulum, omnium maximum, sub quo educta ex illo puncto *A* ad finitam distantiam occurrat prædictæ *BX*. Secundò constat nullum itidem esse (in hypothesi anguli acuti) acutum angulum omnium minimum, sub quo educta commune habeat in duobus distinctis punctis perpendiculum cum illa *BX*; quandoquidem (ex præcedente) nullus esse potest limes determinatus, quo minùs sub minore acuto angulo ad illud punctum *A* constituto deveniri possit ad tale commune in duobus distinctis punctis perpendiculum, quod sit minus qualibet assignabili longitudine *R*.

Atque hinc tertiò consequitur unum aliquem (in ea hypothesi) esse debere determinatum acutum angulum *BAX*, sub quo educta *AX* ita semper magis accedat ad eam *BX*, ut non nisi ad infinitam distantiam in eandem incidat.

Porrò autem hanc ipsam *AX* fore limitem partim intrinsecum, partim extrinsecum utriusque prædictarum rectarum classis, sic demonstratur. Nam primò conveniet cum illis rectis, quæ ad finitam distantiam occurrunt ipsi *BX*, cum ipsa etiam aliquando conveniat; discrepabit autem, quia ipsa non nisi ad infinitam distantiam. Secundò autem conveniet etiam, & simul discrepabit ab illis rectis, quæ commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendiculum cum illâ *BX*; quia ipsa etiam commune obtinet perpendiculum cum eadem *BX*; sed in uno eodemque puncto *X* infinitè dissito. Hoc autem postremum censeri debet demonstratum in XXVIII. hujus, prout moneo in ejusdem Corollario.

Itaque constat unum aliquem fore (in hypothesi anguli acuti) determinatum acutum angulum *BAX*, sub quo educta *AX* non nisi ad infinitam distantiam incidat in

eam

eam BX, ac propterea sit ipsa limes partim intrinsecus, partim extrinsecus; tum earum omnium, quæ sub minoribus acutis angulis ad finitam distantiam incidunt in prædictam BX; tum etiam aliarum, quæ sub majoribus angulis acutis, usque ad angulum rectum inclusivè, commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendiculum cum eadem BX. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIII.

HYpothesis anguli acuti est absolutè falsa; quia repugnans naturæ lineæ rectæ.

Demonstratur. Ex præmissis Theorematis constare potest eò tandem perducere Geometriæ Euclideæ inimicam hypothesin anguli acuti, ut agnoscere debeamus duas in eodem plano existentes rectas AX, BX, quæ in infinitum protractæ versùs eas partes punctorum X in unam tandem eandemque rectam lineam coire debeant, nimirum recipiendo, in uno eodemque infinitè dissito puncto X, commune in eodem cum ipsis plano perpendiculum. Quoniam verò de primis ipsis principiis agendum mihi hìc est, diligenter curabo, ut nihil omittam quasi nimis scrupulosè objectum, quod quidem exactissimæ demonstrationi opportunum esse cognoscam.

LEMMA I.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

DEfinit Euclides lineam rectam, quæ *ex æquo sua interjacet puncta*. Esto igitur (fig. 37.) linea quædam AX, quæ ex puncto A per sua quælibet intermedia puncta continuativè excurrat usque ad punctum X. Non di-

cetur

cetur hæc linea recta, si talis ipsa fuerit, ut circa duo illa immota extrema sua puncta possit ipsa in alteram partem converti, ut putà a læva parte in dexteram: Non dicetur, inquam, linea recta; quia non jacebit ex æquo inter sua designata extrema puncta; quandoquidem vel in lævam partem declinabit, ubi ex puncto *A* excurrit ad punctum *X* per quædam intermedia puncta *B*; vel declinabit in dexteram, ubi ex eodem immoto puncto *A* excurrit ad idem immotum punctum *X* per quædam intermedia puncta *C*, quæ alia planè sunt a prædictis punctis *B*. Scilicet illa sola linea *AX* dici poterit recta, quæ excurrat ex puncto *A* ad punctum *X* per talia intermedia puncta *D*, quæ ipsa, prout sic invicem continuata, revolvi nequeant, circa illa immota extrema puncta *A*, & *X*, ad novum & novum occupandum situm.

In hac autem rectæ lineæ idea manifestè continetur proposita veritas, duas nempe rectas lineas spatium non comprehendere. Si enim duæ exhibeantur lineæ claudentes spatium, quarum nempe communia sint extrema duo puncta *A*, & *X*, facilè ostenditur vel neutram, vel unam tantùm illarum linearum esse rectam. Neutra erit recta, ut putà *ABBX*, & *ACCX*, si circa duo extrema immota puncta *A*, & *X*, ita revolvi posse intelligantur ipsæ *ABBX*, *ACCX*, ut reliqua ipsarum intermedia puncta ad novum, & novum occupandum locum pertranseant. Una tantùm erit recta, ut putà *ADDX*, si circa illa immota extrema puncta ita revolvi intelligantur ipsæ *ABBX*, *ACCX*, quæ hinc inde cum illa *ADDX* spatium claudunt, ut ipsarum quidem *ABBX*, *ACCX* puncta intermedia ad novum, & novum occupandum locum pertranseant, ipsius verò *ADDX* puncta omnia etiam intermedia in eodem loco persistant. Non igitur fieri potest, ut duæ juxta præmissam intelligentiam rectæ lineæ, spatium comprehendant. Quod erat propositum.

QO.

COROLLARIUM I.

HInc porrò ſequitur admitti oportere poſtulatum illud Euclidæum: quòd *à dato puncto ad quodlibet aſſignatum punctum rectam lineam ducere liceat*. Nam clarè intelligitur, duas ſemper ſine ullo certo limite duci poſſe lineas, prædictis punctis *A*, & *X* terminatas, quæ propiores invicem fiant, minuſque idcirco ſpatium comprehendant; dum ſcilicet una quidem ducatur ad lævam partem, & altera uniformis ad dexteram, ſive una ſurſum, & altera deorſum; duci, inquam, poſſe lineas ejuſmodi ſemper invicem ſine ullo certo limite propiores, quæ utique omnino uniformes inter ſe ſint, ſibique invicem idcirco ſuccedant, dum circa immota extrema puncta *A*, & *X*, revolvi ipſæ intelligantur. Inde autem clarè itidem intelligitur, ſequi tandem debere (in ſemper majore harum uniformium linearum, unius ad alteram acceſſu) coitionem in unam, eandemque lineam *ADX*, quæ circa immota extrema illa puncta revolvi nequeat ad occupandum novum locum. Et hæc erit linea recta poſtulata.

Ubi rurſum conſtat unicam eſſe, quæ à dato puncto ad quodlibet alterum aſſignatum punctum poteſt duci linea recta.

COROLLARIUM II.

PRæterea ſequitur uniformem eſſe debere intelligentiam alterius Euclideæ definitionis, in qua dicit planam ſuperficiem eſſe, *quæ ex æquo ſuas interjacet lineas*. Si enim ſuperficies clauſa prædictis lineis unâ *ABX* rectâ, & alterâ *ABBX* (ſive hæc ſit unica, aut multiplex linea curva, ſive ſit compoſita ex duabus, aut pluribus lineis rectis, ut putà *AB*, *BB*, *BX*) ſi, inquam, ſuperficies

ejuſ-

ejusmodi revolvi intelligantur circa immotam rectam ADX, usque dum ipsa linea ABX perveniat ad congruendum lineæ ACX, in parte adversâ locatæ, quæ utique ad omnimodam æqualitatem, & similis omnino sit ipsi ABX, & rursum cum eadem rectâ ABX claudat (versùs eandem sive supernam, sive infernam partem) superficiem omnino æqualem, & similem antedictæ: alterutrum sanè continget; vel ita ut una superficies alteri adamussim congruat; vel ita ut intra duas illas superficies claudatur spatium trinæ dimensionis. Et primum quidem si contingat, dicetur superficies plana; sin verò contingat secundum, non dicetur superficies plana; quia tunc aliæ intermediæ intelligi poterunt inter easdem extremas lineas interpositæ superficies invicem æquales, ac similes, quæ semper magis ad se invicem sine ullo certo limite accedant, ac propterea usque ad excludendum omne spatium intermedium. Tunc autem utraque illa superficies dicetur plana, quia verè jacebit ex æquo inter suas extremas lineas, sine ullo ascensu, aut descensu in partes adversas.

LEMMA II.

Duæ lineæ rectæ non possunt habere unum & idem segmentum commune.

DEmonstratur. Si enim fieri potest; unum & idem segmentum AX commune sit (fig. 38.) duabus rectis, per punctum X in eodem plano continuatis AXB, & AXC. Tum centro X, & intervallo XB, sive XC, describatur arcus BMC, ad cujus quodlibet punctum M jungatur ex puncto X recta XM.

Dico primò, lineam AXM fore & ipsam, in facta hypothesi, lineam rectam, ex puncto A per punctum X continuatam. Si enim linea ejusmodi recta non sit, duci poterit (ex Cor. I. præcedentis Lemmatis) alia quædam linea AM, quæ ipsa sit recta. Hæc autem vel secabit in aliquo puncto K alterutram ipsarum XB, XC; vel earundem alterutram, ut putà eam XB claudet intra spatium comprehensum ipsis AX, XM, & $APLM$. At horum prius manifestè repugnat præcedenti Lemmati; quia sic duæ suppositæ rectæ lineæ, una AXK, & altera ATK, spatium clauderent. Posterius autem uniformis absurdi statim convincitur.

Nam constat rectam XB, si per B ulteriùs protrahatur, occursuram tandem in aliquo puncto L ipsi $APLM$; unde rursum duæ suppositæ rectæ, una $AXBL$, & altera APL, spatium claudent. Porrò uniforme sequitur absurdum, si fingamus, quòd recta XB, ulteriùs protracta per B, occurrat tandem in quovis alio puncto aut rectæ XM, aut rectæ XA.

Ex istis autem evidenter consequitur lineam AXM fore ipsam, in facta hypothesi, lineam rectam ex puncto A ad punctum M deductam. Quod erat propositum.

Dico secundò, eam suppositam rectam AXB (quatenus quidem intelligatur conservare suam illam qualemcunque continuationem ex puncto A per X versùs B) non posse recipere duplicem aliam in eodem plano positionem, in quarum utrâque portio quidem AX in eodem situ persistat, portio verò altera XB in una illarum duarum positionum congruat (exempli causâ) ipsi XC, & in alia positione congruat ipsi XM.

Scilicet non hìc renuo, quin portio XB, si intelligatur moveri in illo suo plano circa punctum X, adeò ut successivè adamussim congruat (ex præcedente Lemmate) non modò ipsis XM, XC, verùm etiam adamussim con-

gruat

gruat infinitis aliis rectis; quæ ex puncto *X* duci possunt ad reliqua intermedia puncta arcus *BC*: Non, inquam, hic renuo, quin illa *XB* in qualibet illarum positionum considerari debeat tanquam continuatio in rectum ipsius immotæ *AX*; cum magis circa eam *AXM* jam demonstraverim id secuturum in facta hypothesi illius communis segmenti: Unicè igitur hìc assero, in una tantùm novarum illarum positionum, ut putà dum congruit ipsi *XC*, retineri ab ea posse illam eandem qualemcunque continuationem, quam obtinet in prima positione, ubi ex puncto *A* per *X* procedit versùs punctum *B*.

Et istud quidem sic demonstratur. Nam primò constat continuationem illam *AXB* nequire esse omnino similem, aut æqualem continuationi *AXC*, si utraque consideretur versùs eandem seu lævam, seu dexteram partem; quia cæterùm in ea tali positione deberent invicem congruere ipsæ *AXB*, *AXC*; quod est contra hypothesim communis illius segmenti *AX*: Deberent, inquam, congruere; dum scilicet, relatè ad eam immotam *AX*, æquè similiter in eandem seu lævam, seu dexteram partem convergerent in eo tali plano illæ continuatæ *XB*, & *XC*. Secundò constat nihil vetare, quin prædicta continuatio *AXB*, considerata versùs unam partem, ut putà, ad lævam, similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXC*, consideratæ versùs partem adversam, ut putà, ad dexteram, adeò ut propterea, sine ulla immutatione in ipsa *AXB*, locari hæc possit ad congruendum in eodem plano alteri *AXC*. At manifestè repugnat, quòd rursum, sine ulla immutatione illius suæ continuationis, locari ea possit in eodem plano ad congruendum alteri *AXM*, quæ nimirum dividat in *X* illum qualemcunque angulum *BXC*. Quòd enim continuatio *AXB* alia planè sita continuatione *AXM*, si utraque consideretur versùs eandem seu lævam, seu dexteram partem, ex eo manifestum esse debet; quia cæterùm (ut in simili observatum jam est) in ea tali positione deberent invicem congruere ipsæ *AXB*, *AXM*. Sed neque sustineri potest, quòd continuatio *AXB* versùs unam partem, ut putà ad lævam, similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs partem adversam, ut putà ad dexteram; quia cæterùm continuatio *AXM* versùs dexteram similis planè foret, aut æqualis continuationi *AXC* versùs eandem dexteram partem, propter suppositam omnimodam similitudinem, aut æqualitatem inter modò dictam continuationem, & illam aliam *AXB* versùs lævam. Tunc autem in ea tali positione (ut est prædictum) deberent invicem congruere ipsæ *AXM*, *AXC*; quod est contra præsentem hypothesim.

Ex quibus omnibus infero: eam suppositam rectam *AXB* (quatenus quidem intelligatur conservare suam illam qualemcunque continuationem ex puncto *A* versùs *B*) recipere non posse duplicem aliam in eodem plano positionem, in quarum utrâque portio quidem *AX* in eodem situ persistat, portio verò altera *XB* in una illarum duarum positionum congruat (exempli causâ) ipsi *XC*, & in alia positione congruat ipsi *XM*. Quod erat propositum.

Dico tertiò: eandem suppositam rectam *AXB* non aliâ ratione conservare posse suam illam qualemcunque continuationem, dum ejusdem portio *XB* intelligitur transferri per nova, & nova loca usque ad congruendum in illo quodam plano ipsi *XC*, persistente interim in eodem suo loco portione *AX*; non posse, inquam, conservare suam illam qualemcunque continuationem, nisi quatenus portio ipsa *XB* intelligatur ascendere, aut descendere ad existendum cum illa immota *AX* in novis, & novis planis, usque dum redeat ad antiquum planum, congruens ibi prædictæ *XC*.

XC. Id

Id enim censeri potest jam demonstratum; quia scilicet nulla alia in eodem illo plano reperiri potest positio, juxta quam ipsa *AXB* (persistente portione *AX* in suo eodem loco) conservet suam illam qualemcunque continuationem, præterquam ubi deveniat ad congruendum prædictæ *AXC*.

Dico quartò: designari posse in eo arcu *BC* tale punctum *D*, ad quod si jungatur *XD*, jam ipsa *AXD* non modò recta linea sit, sed rursum ita se habeat, ut continuatio *AXD*, considerata versùs lævam, æqualis planè sit, aut similis eidem continuationi consideratæ versùs dexteram.

Demonstratur. Et prior quidem pars (qualecunque sit illud punctum *D* in arcu *BC* designatum) eo modo ostenditur, quo supra usi sumus circa continuatam *AXM*. Posterior verò pars ita evincitur. Nam hìc supponimus duas rectas *AXB*, *AXC*, sub eodem communi segmento *AX*. Præterea supponimus continuationem *AXB* versùs lævam non esse omnino similem, aut æqualem eidemmet continuationi versùs dexteram; quia stante omnimodà ejusmodi similitudine, aut æqualitate, facilè ostenditur nulli alteri rectæ lineæ commune esse posse illud segmentum *AX*, prout nempe sic demonstrabimus de illa continuata *AXD*. Tandem consequenter supponimus continuatam illam *AXB* ita locari posse in eodem plano, ut sub eodem immoto segmento *AX* congruat cuidam alteri *AXC*, in qua nimirum continuatio ipsa *AXC* versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXB* versùs lævam, ac rursum continuatio *AXC* versùs lævam similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXB* versùs dexteram.

His stantibus: si ad quodvis punctum *M* sumptum in eo arcu *BC* jungatur *XM*; vel continuatio *AXM* erit

sibi

sibi ipsi planè uniformis relatè ad lævam; ac dexteram partem ipsius AX; vel non. Si primum; demonstrabo de ista AXM, quod statim demonstraturus sum de illa continuata AXD. Si secundum, ergo prædicta AXM ita rursum locari poterit in eodem plano, ut sub eodem immoto segmento AX congruat cuidam alteri AXF, in qua nimirum continuatio ipsa AXF versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis continuationi AXM versùs lævam, ac rursum continuatio AXF versùs lævam similis planè sit, aut æqualis continuationi AXM versùs dexteram. Porrò, cum punctum M supponi possit vicinius puncto B, quàm punctum C, non cadet punctum F in ipsum punctum C; quia sic continuatio AXM versùs lævam similis planè foret, aut æqualis continuationi AXF, sive AXC versùs dexteram, ac propterea similis planè, aut æqualis continuationi AXB versùs lævam, quod est absurdum, cum illæ duæ XM, XB non sibi invicem congruant in sua tali positione. Sed neque etiam existet punctum F ultra punctum C in eo arcu BC ulteriùs producto; quia sic uniformi ratiocinio ostendetur, contra hypothesim, quòd etiam punctum M deberet existere in eo arcu CB ulteriùs producto, adeo ut nimirum ipsa XM divideret versùs lævam eum qualemcunque angulum AXB, prout XF poneretur dividere versùs dexteram eum qualemcunque angulum AXC: Deberet, inquam, sic existere, ad eum utique finem, ut ea AXM sub eodem immoto segmento AX locari rursum possit in eodem plano ad congruendum illi alteri AXF, in qua nimirum continuatio ipsa AXF versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis continuationi AXM versùs lævam, ac rursum continuatio AXF versùs lævam similis planè sit, aut æqualis continuationi AXM versùs dexteram.

Quoniam verò arcus BC major est ejusdem portione

MF, designarique uniformiter possunt in ea portione *MF* alia duo puncta cum minore, sine ullo certo termino, intercapedine; alterutrum sanè in hac prædictorum punctorum approximatione contingere debet. Unum est, si tandem incidatur in unum idemque intermedium punctum *D*, ad quod si jungatur *XD*, talis habeatur continuatio *AXD*, cui soli conveniat (factâ comparatione inter lævam, ac dexteram partem) esse sibi ipsi omnino similem, aut æqualem. Alterum est, si duo talia inveniantur distincta puncta *M*, & *F*, ad quæ junctæ *XM*, & *XF*, duas exhibeant continuationes, unam *AXM*, & alteram *AXF*, quarum utraque sit sibi ipsi, modo jam explicato, omnino similis, aut æqualis. Hoc autem secundum impossibile esse sic demonstro. Nam ex ipsis terminis constare potest, quòd recta linea, ex puncto *A* per *X* ulteriùs producta, unicam tantùm sortiri potest in eo tali plano positionem, dum scilicet quædam superaddita *XF* æquè omnino se habeat in lævam, & in dexteram partem præsuppositæ *AX*, seu non magis in lævam, quàm in dexteram ejusdem partem convergat. Non ergo alia erit continuatio *AXM*, quæ rursum æquè omnino se habeat in lævam, & in dexteram partem ejusdem *AX*. Scilicet constat subsistere simul non posse; & quòd continuatio *AXF* versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis sibi ipsi consideratæ versùs lævam; & quòd alia quædam continuatio *AXM* versùs lævam (quæ, ex ipsa positione, minor sit continuatione *AXF* versùs eandem lævam) æqualis iterum sit eidem continuationi versùs dexteram, quæ certè, ex ipsa rursum positione, major est prædictâ continuatione *AXF* versùs eandem dexteram.

Non ergo in eo arcu *BC* duo talia inveniri possunt puncta *M*, & *F*, ad quæ junctæ *XM*, & *XF*, duas exhibeant continuationes, unam *AXM*, & alteram *AXF*, qua-

rum

rum utraque sit sibi ipsi, modo jam explicato, omnino similis, aut æqualis. Unde tandem consequitur incidi aliquando debere in unum, idemque punctum *D*, ad quod juncta *XD* talem exhibeat continuationem *AXD*, cui soli conveniat (factâ comparatione inter lævam, ac dexteram partem) esse sibi ipsi omnino similem, aut æqualem. Quod erat hoc loco demonstrandum.

Dico tandem quintò: eam solam *AXD* fore lineam *rectam*, nimirum ex *A* per *X directè* continuatam in *D*. Quamvis enim ly *ex æquo*, in definitione lineæ rectæ, applicari primitùs debeat punctis intermediis relatè ad puncta ipsius extrema; unde utique jam elicuimus, *duas lineas rectas non claudere spatium*; intelligi tamen etiam debet de ejusdem rectæ lineæ continuatione *in directum*. Itaque ea sola *XD* (in eodem cum *AX* plano existens) dicetur esse continuatio *recta*, sive *in rectum* prædictæ *AX*, quando ipsa neque in lævam, neque in dexteram illius partem convergat, sed utrinque *ex æquo* procedat; adeo ut nempe continuatio illa *AXD* versùs lævam similis planè sit, aut æqualis eidem continuationi consideratæ versùs dexteram. Inde enim fiet, ut illi soli *AXD* conveniat non posse ab ea suscipi in eo tali plano aliam positionem sub illa immota *AX*; cum certè (ex jam demonstratis) illæ aliæ *AXB*, & *AXM*, citra omnem suarum talium continuationum immutationem, suscipere possint sub eadem immota *AX* alias in eodem plano positiones, quales sunt ipsarum *AXC*, & *AXF*. Igitur illa sola *AXD*, cujus nempe continuatio *XD* tum in eodem cum ipsa *AX* plano existat, tum etiam æquè omnino se habeat in lævam, ac dexteram partem prædictæ *AX*, est linea *recta* juxta explicatam definitionem, seu continuatio *in rectum* ejusdem præsuppositæ rectæ *AX*.

Ex quibus omnibus tandem constat evenire non posse, ut unum quodpiam sit commune segmentum duarum

recta-

rectarum. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex duobus præmissis Lemmatis tria opportunè subnotare licet. Unum est: duas rectas, neque sub infinitè parvâ inter ipsas distantiâ, claudere spatium posse. Ratio est, quia (prout in primo Lemmate) vel utraque illarum sub duobus illis communibus extremis punctis immotis revolvi posset ad novum situm occupandum, & sic (ex jam tradita *lineæ rectæ* definitione) neutra foret linea recta: vel una tantum in suo eodem situ persisteret, & sic illa sola recta linea foret. Quod autem nequeat utraque in eodem ipso situ persistere, dum aliquod concludant spatium, etiamsi infinitè parvum, manifestum fiet consideranti posse faciem illius plani, in quo illæ duæ consistunt, converti de superna in infernam, manentibus cæteroquin in suo eodem loco duobus illis extremis punctis.

Alterum est: neque item ullam lineam rectam, in quantalibet ejusdem productione in directum, diffindi posse in duas, quamvis sub infinitè parva intercapedine. Ratio est; quia (prout in præcedente Lemmate) continuatio in directum præsuppositæ cujusdam simplicis rectæ *AX* non alia esse intelligitur præter unam *XD*, quæ *ex æquo* utrinque procedat relatè ad lævam, ac dexteram partem prædictæ *AX*; ex quo utique fiat, ut sub ea immota *AX* non aliam ipsa immutata habere possit in eo plano positionem. Quòd autem in eodem plano alia quædam ad lævam decerni possit *XM*, infinitè parum dissiliens ab ipsa *XD*, nihil suffragatur. Nam rursum alia item ad dexteram designari poterit *XF*, quæ uniformiter infinitè parum dissiliat ab eadem *XD*. Quare (prout in præcitato Lemmate) te) illa sola *AXD* erit linea recta a nobis definita.

Tertium tandem est: in hoc ipso secundo Lemmate censeri posse immediatè demonstratam 4. undecimi; quòd nempe ejusdem rectæ nequeat pars una quidem in subjecto plano existere, & altera in sublimi.

LEMMA III.

Si duæ rectæ AB, CXD *sibi invicem occurrant* (*fig.* 39.) *in aliquo ipsarum intermedio puncto* X, *non ibi se invicem contingent, sed una alteram ibidem secabit.*

DEmonstratur. Si enim fieri potest, tota *CXD* ad unam eandemque partem ipsius *AB* consistat. Jungatur *AC*. Non erit porrò *AC* eadem cum ipsâ veluti continuatâ *AXC*; quia cæterùm (contra præcedens Lemma) duarum rectarum, unius *AXC*, & alterius præsuppositæ *DXC*, unum idemque foret commune segmentum *XC*. Itaque jungatur *BC*. Non erit rursum hæc *BC* continuatio ipsius *BA* usque in punctum *C*; ne duæ rectæ, una *XAC*, portio ipsius *BAC*, & altera *XC* spatium claudant, contra præmissum Lemma primum. Igitur ea *BC* vel secabit in aliquo puncto *L* ipsam *XD*, sive præsuppositam rectam *DXC*; & tunc rursum duæ rectæ lineæ, una *LC* portio ipsius *BC*, & altera *LXC* portio prædictæ *DXC*, spatium claudent; vel alterutrum extremum punctum sive *A* ipsius *BA*, sive *D* ipsius *CXD*, claudetur intra spatium comprehensum ipsis *CX*, *XB*, & alterutrâ vel *BFC*, vel *BHC*. At in utroque casu idem absurdum consequitur: Sive enim *BA* protracta per *A* occurrat ipsi *BFC* in aliquo puncto *F*; sive *CXD* protracta per *D* occurrat ipsi *BHC* in aliquo puncto *H*: in idem semper absurdum incidimus, quòd duæ rectæ spatium claudant; nimirum aut

Tab. IV.

recta

recta *BF* portio ipsius *BFC* unà cum altera *BAF*; aut recta *HC*, portio ipsius *BHC*, unà cum altera præsupposita recta continuata *CXDH*.

Porrò idem, aut majus absurdum consequitur, si illa *BA* protracta per *A* occurrat in aliquo puncto vel ipsi *CX*, vel sibi ipsi in aliquo puncto suæ portionis *XB*. Atque id similiter valet, si altera *CXD* protracta per *D* occurrat in aliquo puncto vel ipsi *XB*, vel sibi ipsi in aliquo puncto suæ portionis *CX*.

Itaque constat, quòd duæ rectæ *AB*, *CXD* sibi invicem occurrentes in aliquo ipsarum intermedio puncto *X*, non ibi se invicem contingent, sed una alteram ibidem secabit. Quod erat &c.

LEMMA IV.

Omnis diameter dividit bifariam suum circulum, ejusque circumferentiam.

DEmonstratur. Esto circulus (recole fig. 23.) *MDHNKM*, cujus centrum *A*, & diameter *MN*. Intelligatur illius circuli portio *MNKM* ita revolvi circa immota puncta *M*, & *N*, ut tandem accommodetur, seu coaptetur reliquæ portioni *MNHDM*. Constat primò totam diametrum *MAN* quoad omnia ipsius puncta in eodem situ esse mansuram: ne duæ rectæ lineæ (contra præcedens Lemma primum) spatium claudant. Constat secundò nullum punctum *K* circumferentiæ *NKM* casurum vel intra, vel extra superficiem clausam diametro *MAN*, & alterâ circumferentiâ *NHDM*; ne scilicet contra naturam circuli, unus radius v. g. *AK* minor sit, aut major altero ejusdem circuli radio v. g. *AH*. Constat tertiò quemlibet radium *MA* continuari unicè posse in rectum per Tab. II.

 alte-

alterum quendam radium *AN*, ne (contra præcedens Lemma secundum) duæ ſuppoſitæ rectæ lineæ, ut putà *MAN*, *MAH*, unum idemque commune habeant ſegmentum *MA*. Conſtat quartò (ex proximè antecedente Lemmate) omnes cujuſvis circuli diametros ſe invicem in centro ſecare, & ex notâ naturâ circuli bifariam.

Ex quibus omnibus conſtare poteſt, quòd diameter *MAN* tum dividit exactiſſimè ſuum circulum, ejuſque circumferentiam in duas æquales partes, tum etiam aſſumi univerſim poteſt pro qualibet ejuſdem circuli diametro. Quod erat &c.

SCHOLION.

HAnc eandem veritatem demonſtratam leges apud Clavium a Thalete Mileſio, ſed fortaſſe non exhauſtâ omni qualibet objectione.

LEMMA V.

Inter angulos rectilineos omnes anguli recti ſunt invicem exactiſſimè æquales, ſine ullo defectu etiam infinitè parvo.

DEmonſtratur. Angulum inter rectilineos rectum definit Euclides: *qui eſt æqualis ſuo deinceps*. Non hunc Tab. IV. poſtulat ipſe ſibi concedi, ſed problematicè demonſtrat in ſua Prop. XI. Libri primi. Ibi enim ex dato in recta *BC* quolibet puncto *A* (fig. 40.) docet excitare perpendicularem *AD*, ad quam anguli *DAB*, *DAC* ſint invicem æquales. Porrò illos duos angulos eſſe invicem exactiſſimè æquales, ſine ullo defectu etiam infinitè parvo, conſtare poteſt ex Corollario poſt duo priora præmiſſa Lemmata ſi nempe ipſæ *AB*, *AC* deſignatæ ſint exactiſſimæ æquales.

Sed aliqua oriri poteſt dubitatio, ſi duo alii ad quandam alteram *FM* recti anguli *LHF*, *LHM* (fig. 41.) conferantur cum prædictis rectis angulis *DAB*, *DAC*. Itaque *HL* æqualis ſit ipſi *AD*, ac rurſum poſterior integra Figura ita intelligatur ſuperponi priori, ut punctum *H* cadat ſuper punctum *A*, & punctum *L* ſuper punctum *D*. Jam ſic progredior. Et primò quidem (ex præcedente Lemmate) ipſa F*HM* non præcisè continget alteram *BC* in eo puncto *A*. Ergo vel adamuſſim procurret ſuper illa *BC*, vel eandem ita ſecabit, ut unum ejus punctum extremum v. g. *F* cadat ſuprà, & alterum *M* deorſum. Si primum: jam clarè habemus exactiſſimam inter omnes rectilineos angulos rectos æqualitatem intentam. At non ſecundum; quia ſic angulus *LHF*, hoc eſt *DAF*, minor foret angulo *DAB*, ejuſque ſuppoſito exactiſſimè æquali *DAC*, & ſic multò minor angulo *DAM*, ſive *LHM*; contra hypotheſin. Deinde verò nihil ſuffragatur, quòd angulus *DAF* infinitè parùm deficiat ab angulo *DAB*, ſive ejus exactiſſimè æquali *DAC*, qui rurſum ſolùm infinitè parum ſuperetur ab angulo *DAM*. Nam ſemper angulus *DAF*, ſive *LHF*, non erit exactiſſimè æqualis angulo *DAM*, ſive *LHM*, contra hypotheſin.

Itaque conſtat omnes rectilineos angulos rectos eſſe invicem exactiſſimè æquales, ſine ullo defectu etiam infinitè parvo. Quod &c.

COROLLARIUM.

INde autem fit, ut quæ ex uno dato cujuſvis rectæ lineæ puncto perpendiculariter in aliquo plano ad eandem educitur, ipſa ſit in eo tali plano unica exactiſſimè linea recta, nec potens diffindi in duas.

Poſt

Post quinque præmissa Lemmata, eorumque Corollaria, progredi jam debeo ad demonstrandum principale assumptum contra hypothesin anguli acuti.

UBi statuere possum, tanquam per se notum, non minùs repugnare, quòd duæ rectæ lineæ (sive ad finitam, sive ad infinitam earundem productionem) in unam tandem, eandemque rectam lineam coeant; quàm quòd una eademque linea recta (sive ad finitam, sive ad infinitam ejusdem continuationem) in duas rectas lineas diffindatur, contra præcedens Lemma secundum, ejusque Corollarium. Quoniam ergo naturæ lineæ rectæ (ex præcedente Corol. proximi Lemmatis) oppositum itidem est, quòd duæ rectæ lineæ ad unum, idemque punctum cujusdam tertiæ rectæ, perpendiculares ipsi sint in eodem communi plano; agnoscere oportet tanquam absolutè falsam, quia repugnantem naturæ prædictæ, hypothesin anguli acuti, juxta quam duæ illæ *AX*, *BX* (fig. 33.) in uno eodemque communi puncto *X* perpendiculares esse deberent cuidam tertiæ rectæ, quæ in eodem cum ipsis plano existeret. Hoc autem erat principale demonstrandum.

SCHOLION.

ATque hìc subsistere tutus possem. Sed nullum non movere lapidem volo, ut inimicam anguli acuti hypothesim, a primis usque radicibus revulsam, sibi ipsi repugnantem ostendam. Iste autem erit consequentium hujus Libri Theorematum unicus scopus.

LIBRI PRIMI
PARS ALTERA.

In qua idem Pronunciatum Euclidæum contra hypothesin anguli acuti redargutivè demonstratur.

PROPOSITIO XXXIV.

In qua expenditur curva quædam enascens ex hypothesi anguli acuti.

Recta *CD* jungat æqualia perpendicula *AC*, *BD* cuidam rectæ *AB* insistentia. Tum divisis bifariam in punctis *M*, & *H* (fig. 42.) ipsis *AB*, *CD*, jungatur *MH* (ex 2. hujus) utrique perpendicularis. Rursum in hac hypothesi supponuntur acuti anguli ad junctam *CD*. Quare in quadrilatero *AMHC* erit *MH* (ex Cor. I. post 3. hujus) minor ipsâ *AC*. Hinc autem; si in *MH* protractâ sumas *MK* æqualem ipsi *AC*; puncta *C*, *K*, *D* spectabunt ad curvam hic expensam. Deinde anguli ad junctam *CK* erunt & ipsi (ex 7. hujus) acuti. Igitur juncta *LX*, quæ bifariam, atque ideo (ex 2. hujus) ad angulos rectos dividat ipsas *AM*, *CK*, erit similiter (ex Cor. I. post 3. hujus) minor eâdem *AC*. Quapropter; si in *LX* protractâ sumas *LF* æqualem ipsi *AC*, aut *MK*; etiam punctum *F* spectabit ad eam curvam. Præterea jungens *CF*, & *FK* invenies similiter duo alia puncta ad eandem curvam spectantia. Atque ita semper. Quod autem dico pro inveniendis punctis inter puncta *C*, & *K*, idem etiam uniformiter valet pro inveniendis punctis inter puncta *K*, & *D*, scilicet cur- Tab. V.

va

va CKD, enaſcens ex hypotheſi anguli acuti, eſt linea jungens extremitates omnium æqualium perpendiculorum ſuper eâdem baſi verſus eandem partem erectorum, quæ utique venire poſſunt ſub nomine rectarum ordinatim applicatarum; eſt, inquam, linea ejuſmodi, quæ propter ipſam, ex qua naſcitur, hypotheſim anguli acuti, ſemper eſt cava versùs partes contrapoſitæ baſis AB. Quod quidem hoc loco declarandum, ac demonſtrandum a nobis erat.

PROPOSITIO XXXV.

SI ex quolibet puncto L *baſis* AB *ordinatim applicetur ad eam curvam* CKD *recta* LF: *Dico rectam* NFX *perpendicularem ipſi* LF *cadere totam ex utraque parte debere versùs partes convexas ejuſdem curvæ, atque ideo eam fore ejuſdem curvæ tangentem.*

Demonſtratur. Si enim fieri poteſt, cadat quoddam punctum X (fig. 43.) ipſius NFX intra cavitatem ejuſdem curvæ. Demittatur ex puncto X ad baſim AB perpendicularis XP, quæ protracta per X occurrat curvæ in quodam puncto R. Jam ſic. In quadrilatero $LFXP$ non erit angulus in puncto X aut rectus, aut obtuſus: Cæterùm (ex 5. & 6. hujus) deſtrueretur præſens hypotheſis anguli acuti. Ergo prædictus angulus erit acutus. Quare erit PX (ex Cor. I. poſt 3. hujus) & ſic multò magis PR major ipsâ LF. Hoc autem abſurdum eſt (ex præcedente) contra naturam iſtius curvæ. Itaque illa NF protracta cadere tota debet versùs partes convexas, atque ideo ipſa erit ejuſdem curvæ tangens. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

SI recta quæpiam XF (fig. 44.) acutum angulum efficiat cum quavis ordinatá LF, non cadet punctum X extra cavitatem curvæ, nisi priùs ipsaXF in aliquo puncto O curvam secuerit.

Demonstratur. Constat sumi posse in ipsa *XF* punctum quoddam *X* adeò vicinum ipsi puncto *F*, ut juncta *LX* priùs curvam secet in aliquo puncto *S*: cæterùm ipsa *XF* vel non cadet tota extra cavitatem curvæ, & sic habemus intentum; vel adeò non efficiet cum *FL* angulum acutum, ut magis censenda jam sit in unicam rectam cum altera *LF* coire. Itaque ex puncto *S* demittatur ad basim *AB* perpendicularis *SP*. Erit hæc (ex 34. hujus) æqualis ipsi *LF*. Est autem *SP* (ex 18. primi) minor ipsâ *LS*. Ergo etiam *LF* minor est eâdem *LS*, ac propterea multò minor ipsâ *LX*. Hinc in triangulo *LXF* acutus erit angulus in puncto *X*, quia minor (ex 18. primi) angulo *LFX* supposito acuto. Jam demittatur ad *FX* perpendicularis *LT*. Cadet hæc (propter 17. primi) ad partes utriusque anguli acuti. Quare punctum *T* jacebit inter puncta *X*, & *F*. Deinde ex puncto *T* demittatur ad basim *AB* perpendicularis *TQ*. Erit *LF* (propter angulum rectum in *T*) major ipsâ *LT*, & hæc (propter angulum rectum in *Q*) major alterâ *QT*. Igitur *LF* multò major erit ipsâ *QT*. Hinc autem; si in *QT* protractâ sumatur *QK* æqualis ipsi *LF*; punctum *K* (ex 34. hujus) ad præsentem curvam spectabit, cadetque idcirco punctum *T* intra cavitatem ejusdem curvæ. Non ergo recta *FT*, quæ secat duas rectas *QK*, & *LT* in *T*, promoveri potest ad secandam protractam *LS* in puncto *X*, constituto extra cavitatem præsentis curvæ, nisi priùs ipsa protracta *FT* secet in aliquo puncto *O* portionem ejusdem curvæ inter puncta *S*, & *K* constitutam. Hoc autem erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Atque hinc manifestè liquet, inter tangentem hujus curvæ, & ipsam curvam locari non posse quandam rectam, quæ tota ad hanc, vel illam tangentis partem extra curvæ cavitatem cadat; quandoquidem recta sic locata efficere debet (ex præcedente) angulum acutum cum demissa ex puncto contactus ad contrapositam basim perpendiculari.

PROPOSITIO XXXVII.

Curva CKD, *ex hypothesi anguli acuti enascens, æqualis esse deberet contrapositæ basi* AB.

Ante demonstrationem præmitto sequens axioma.

Si duæ lineæ bifariam dividantur, tum earum medietates, ac rursum quadrantes bifariam, atque ita in infinitum uniformiter procedatur; certo argumento erit, duas istas lineas esse inter se æquales, quoties in ista uniformi in infinitum divisione comperiatur, seu demonstretur, deveniri tandem debere ad duas illarum sibi invicem respondentes partes, quas constet esse inter se æquales.

Jam demonstratur propositum. Intelligantur erecta ex basi *AB* ad eam curvam *CKD* (fig. 45.) quotvis perpendicula *NF*, *LF*, *PF*, *MK*, *TF*, *VF*, *IF*; sintque æquales in ipsa basi *AB* portiones *AN*, *NL*, *LP*, *PM*, *MT*, *TV*, *VI*, *IB*.

Constat primò angulum ipsius *AC* cum eâ curvâ æqualem fore singulis hinc inde ad puncta *F*, sive ad punctum *K*, aut punctum *D*, prædictarum perpendicularium angulis cum eâdem curvâ. Si enim mistum quadrilaterum

rum *ANFC* ſuperponi intelligatur miſto quadrilatero *NLFF*, conſtitutâ baſi *AN* ſuper æquali baſi *NL*, cadet *AC* ſuper *NF*, & *NF* ſuper *LF*, propter æquales angulos rectos ad puncta *A*, *N*, *L*. Deinde propter æqualitatem rectarum (ex 34. hujus) *AC*, *NF*, *LF*, cadet punctum *C* ſuper punctum *F* ipſius *NF*, & hoc ſuper alterum punctum *F* ipſius *LF*. Præterea curva *CF* congruet adamuſſim ipſi curvæ *FF*: ſi enim una illarum, ut *CF* introrſum, aut extrorſum cadat; ſumpto quolibet puncto *Q* inter puncta *N*, & *L*, ductâque perpendiculari ſecante unam curvam in *X*, & alteram in *S*, æquales forent (ex notâ hujus curvæ naturâ) ipſæ *QX*, *QS*, quod eſt abſurdum. Idem valebit, ſi in dicta ſuperpoſitione maneat in ſuo ſitu recta *NF*, & recta *AC* cadat ſuper *LF*. Rurſum idem valebit, ſi idem quadrilaterum miſtum *ANFC* utrovis modo ſuperponi intelligatur cuivis reliquorum quadrilaterorum uſque ad ipſum incluſivè poſtremum quadrilaterum *BDFI*. Itaque angulus ipſius *AC* cum eâ curvâ æqualis eſt ſingulis hinc inde ad puncta *F*, ſive ad punctum *K*, aut punctum *D*, prædictarum perpendicularium angulis cum eadem curva.

Conſtat hinc ſecundò æquales adamuſſim inter ſe eſſe portiones ipſius curvæ ab iſtis perpendicularibus hinc inde abſciſſas.

Si ergo baſis *AB* diviſa ſit bifariam in *M*, & medietas *AM* bifariam in *L*; tum quadrans *LM* bifariam in *P*; atque ita in infinitum, procedendo ſemper versùs partes puncti *M*; conſtabit tertiò, etiam curvam *CKD* bifariam dividi in *K* a perpendiculari *MK*, medietatem *CK* bifariam itidem dividi in *F* a perpendiculari *LF*, quadrantem *FK* bifariam in *F* a perpendiculari *PF*; atque ita in infinitum, procedendo ſemper uniformiter versùs partes ipſius puncti *K*.

Quoniam verò in iſtâ baſis *AB* in infinitum diviſione considerare possumus rem devenisse ad portionem ipsius *AB* infinitè parvam, quæ nempe exhibeatur per latitudinem infinitè parvam perpendicularis *MK*, constabit quartò (ex præmisso axiomate) æqualitas intenta totius basis *AB* cum totâ curvâ *CKD*, dum aliàs ostendam portionem infinitè parvam abscissam ex basi *AB* a perpendiculari *MK* æqualem esse adamussim portioni infinitè parvæ, quam eadem perpendicularis abscindit ex curva *CKD*. Et hoc quidem postremum sic demonstro.

Nam *RK* perpendicularis ipsi *KM* tanget (ex 35. hujus) curvam in *K*, atque ita eandem tanget in *K*, ut inter ipsam tangentem (ex Cor. post 35. hujus) & curvam, ex neutra parte locari possit recta, quæ ipsam curvam non secet. Igitur infinitesima *K*, spectans ad curvam, æqualis omnino erit infinitesimæ *K* spectanti ad tangentem. Constat autem infinitesimam *K* spectantem ad tangentem, nec majorem, nec minorem, sed omnino æqualem esse infinitesimæ *M* spectanti ad basim *AB*; quia nempe recta illa *MK* intelligi potest descripta ex fluxu semper ex æquo ejusdem puncti *M* usque ad eam summitatem *K*.

Quare (juxta præmissum axioma) curva *CKD*, ex hypothesi anguli acuti enascens, æqualis esse deberet contrapositæ basi *AB*. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION I.

SEd fortè minùs evidens cuipiam videbitur enunciata exactissima æqualitas inter illas infinitesimas *M*, & *K*. Quare ad avertendum hunc scrupulum sic rursum procedo. Cuidam rectæ *AB* insistant ad rectos angulos in eodem plano (fig. 48.) duæ rectæ æquales *AC*, *BD*. Rursum in eodem plano intelligatur existere circulus *BLDH*, cujus diameter *BD*; sitque semicircumferentia *BLD* æqua-

Tab. V.

lis

lis prædictæ AB. Præterea idem circulus ita in eo plano revolvi concipiatur super eâ rectâ AB, ut motu semper continuo, & æquabili perficiat, seu describat suæ ipsius semicircumferentiæ punctis prædictam BA; quousque nempe punctum D, ad illam semicircumferentiam spectans, perveniat ad congruendum ipsi puncto A, itaut propterea punctum B, ejusdem semicircumferentiæ alterum extremum punctum, deveniat ad congruendum illi puncto C.

His stantibus; si in semicircumferentia BLD designetur quodvis punctum L, cui in descripta recta linea BA correspondeat punctum M, ex quo in eo tali plano educatur perpendicularis MK, æqualis ipsi BD: Dico illud punctum K fore ipsum punctum H diametraliter oppositum illi puncto L. Nam ibi in puncto M, sive L recta AB continget prædictum circulum. Igitur MK eidem AB perpendicularis transibit (ex 19. tertii, quæ utique independens est ab Axiomate controverso) per centrum ejusdem circuli. Quare; ubi punctum L in eâ tali circuli $BLDH$ revolutione perveniat ad congruendum cum puncto M ipsius AB, etiam punctum H, diametraliter oppositum prædicto puncto L, incidet in punctum K illius MK.

Porrò constat idem similiter valere de reliquis punctis semicircumferentiæ BLD, & horum diametraliter correlativis in altera semicircumferentia BHD. Quare linea, eo tali modo successivè descripta a punctis semicircumferentiæ BHD, erit illa eadem jam expensa DKC, quæ nempe suis omnibus punctis æquidistet ab illa recta BA; sitque idcirco (juxta hypothesin anguli acuti) semper cava versùs partes ejusdem AB.

Inde autem fit, ut punctum M in ea BA censendum sit exactissimè æquale puncto K in altera DKC, propter

omni-

omnimodam istorum æqualitatem cum punctis *L*, & *H* diametraliter oppositis in eo circulo *BLDH*. Quare; cum idem valeat de omnibus punctis descriptæ rectæ *BA*, si conferantur cum aliis uniformiter contrapositis in prædicta supposita curva *DKC*; consequens planè est, ut ipsa talis curva, ex hypothesi anguli acuti enascens, censenda sit æqualis contrapositæ basi *AB*. Atque id est, quod novâ hac methodo iterum demonstrandum susceperam.

SCHOLION II.

Rursum verò: quoniam recta *BA* intelligitur successivè descripta a punctis semicircumferentiæ *BLD* motu illo semper æquabili, & continuo; cui nempe descriptioni correspondet descriptio illius lineæ *DKC* a punctis diametraliter correlativis alterius semicircumferentiæ *BHD*: obvium est intelligere, quòd ipsa recta *BA* motu illo semper æquabili, & continuo describatur ab eo unico puncto *B*, quod nempe (veluti replicatum) intelligatur cum ipsa tali semicircumferentia semper excurrere super eâ *BA*; dùm interim eodem ipso tempore, motu eodem semper æquabili, & continuo, describitur illa altera *DKC* ab altero diametraliter correlativo unico puncto *D*, quod ipsum rursum (veluti replicatum) intelligatur cum sua altera semicircumferentia *BHD* semper excurrere super prædicta *DKC*. Tunc autem faciliùs intelligitur intenta æqualitas inter eam *DKC*, & eidem contrapositam rectam *BA*; quippe quæ duæ æquali ipso tempore, & æquali motu intelliguntur descriptæ a duobus exactissimè inter se æqualibus punctis, seu mavis infinitesimis. Ubi constat hanc ipsam exactissimam prædictorum punctorum æqualitatem non esse mihi in ista nova contemplatione necessariam.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Hypothesis anguli acuti est absolutè falsa, quia se ipsam destruit.

Demonstratur. Nam suprà ex ipsa hypothesi anguli acuti evidenter elicuimus, curvam *CKD* (fig. 46.) ex ea prognatam æqualem esse debere contrapositæ basi *AB*. Nunc autem contradictorium ex eadem hypothesi elicimus, quòd curva *CKD* nequeat esse æqualis illi basi, cum certè sit eâdem major. Quod enim curva *CKD* major sit rectâ *CD* ejus extremitates jungente, notio est omnibus communis, quam etiam demonstrare possumus ex vigesima primi, quòd duo trianguli latera reliquo semper sunt majora; junctis nimirum *CK*, & K*D*; ac rursum junctis similiter apicibus, primò quidem duorum, tum quatuor, & sic in infinitum, duplicato numero enascentium segmentorum, quousque intelligatur hoc pacto absumi, seu desinere in ipsas infinitè parvas seu chordas, seu tangentes, tota curva *CKD*. Sed hìc procedere possumus ex sola communi notione. Quòd autem juncta *CD* major sit basi *AB*, demonstratum a nobis est in 3. hujus ex ipsis visceribus hypothesis anguli acuti. Igitur curva *CKD*, ex hypothesi anguli acuti enascens, est certè major basi *AB*, quia est major, saltem ex communi notione, rectâ *CD*, quæ ex hac ipsa hypothesi anguli acuti demonstratur major basi *AB*. Non igitur potest simul consistere, quòd curva ista *CKD* æqualis sit basi *AB*. Itaque constat hypothesim anguli acuti esse absolutè falsam, quia se ipsam destruit.

SCHOLION.

Observare tamen debeo, quòd etiam ex hypothesi anguli obtusi enascitur curva quædam *CKD*, sed convexa

vexa versùs partes basis *AB*. Nam *MH* (fig. 47.) bifariam dividens ipsas *AB*, *CD* erit (ex 2. hujus) eisdem perpendicularis; & major (ex Cor. I. post 3. hujus) ipsis *AC*, *BD*, in hypothesi anguli obtusi. Quare ipsius *MH* portio quædam *MK* æqualis erit ipsi *AC*, aut *BD*. Tum junctis *Ck*, & *kD*, divisisque bifariam in punctis *X*, *P*, *Q*, *N* rectis *Ck*, *AM*, *MB*, *kD*, constat (ex eadem 2. hujus) junctas *PX*, *QM*, perpendiculares fore ipsis rectis divisis. At rursum erunt illæ (ex eodem Cor. I. post 3. hujus) majores ipsis *AC*, *Mk*, *BD*. Hinc; assumptis earundem portionibus *PL*, *QS*, quæ prædictis æquales sint; habebimus curvam, ex hypothesi anguli obtusi enascentem, quæ transibit per puncta *C*, *L*, *k*, *S*, *D*. Atque ita semper, si decernere velimus reliqua puncta ejusdem curvæ. Inde autem constat eam fore convexam versùs partes basis *AB*. Jam fateor demonstrari uniformi planè methodo potuisse æqualitatem hujus curvæ cum ipsa basi *AB*. At quis fructus? Nullus sanè. Quemadmodum enim curva ista *CkD* censeri debet, ex communi saltem notione, major rectâ *CD*; ita etiam (in 3. hujus) basis *AB* demonstratur major eâdem *CD*, dum stet hypothesis anguli obtusi. Nullum ergo ex hac parte absurdum, si basis *AB* æqualis sit prædictæ curvæ. Aliter verò rem procedere in hypothesi anguli acuti, constat ex dictis suprà.

Ex hoc igitur Scholio, & ex altero post 13. hujus intelligi potest, diversam planè viam iniri debuisse ad refellendam utranque falsam hypothesim, unam anguli obtusi, & alteram anguli acuti.

Præterea facilè itidem est ex istis dignoscere, non nisi rectam lineam *CD* esse posse, quæ omnibus suis punctis æquidistet ab ea supposita recta linea *AB*.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

Et hoc est notum illud Axioma Euclidæum, quod tandem absolutè demonstrandum suscipio. Ad hunc autem finem satis erit recolere nonnullas præcedentium Demonstrationum. Itaque in meis Propositionibus, usque ad VII. hujus inclusivè, tres secrevi hypotheses circa rectam jungentem extrema puncta duorum æqualium perpendiculorum, quæ uni cuidam rectæ, quam basim appello, in eodem plano insistant. Porrò circa has hypotheses (quas invicem secerno ex specie angulorum, qui ad eam jungentem fieri censeantur) demonstro unam quamlibet earum, nimirum aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, si vel in uno casu sit vera, semper & in omni casu illam solam esse veram. Tum in XIII. ostendo universalem veritatem Axiomatis controversi, dum consistat alterutra hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi. Hinc in XIV. declaro absolutam falsitatem hypothesis anguli obtusi, quia se ipsam destruentis, utpote quæ prædicti Axiomatis veritatem infert, ex quo contra reliquas duas hypotheses soli hypothesi anguli recti locus relinquitur. Igitur sola restat hypothesis anguli acuti, contra quam diutiùs pugnandum fuit.

Et hujus quidem (post multa, ne dicam omnia, conditionatè expensa) absolutam falsitatem in XXXIII. tandem ostendo, quia repugnantis naturæ lineæ rectæ, circa quam multa ibi intersero necessaria Lemmata. Tandem verò in præcedente Propositione absolutè demonstro sibi ipsi repugnantem hypothesin anguli acuti. Quoniam igitur unica reſtat hypotheſis anguli recti, conſequens planè eſt, ut ex prædicta XIII. hujus ſtabilitum abſolutè maneat prænunciatum Euclidæum Axioma. Quod erat propoſitum.

SCHOLION.

SEd juvat expendere hoc loco notabile diſcrimen inter præmiſſas duarum hypotheſium redargutiones. Nam circa hypotheſin anguli obtuſi res eſt meridianâ luce clarior; quandoquidem ex ea aſſumpta ut verâ demonſtratur abſoluta univerſalis veritas controverſi Pronunciati Euclidæi, ex quo poſtea demonſtratur abſoluta falſitas ipſius talis hypotheſis; prout conſtat ex XIII. & XIV. hujus. Contra verò non devenio ad probandam falſitatem alterius hypotheſis, quæ eſt anguli acuti, niſi priùs demoſtrando; quòd linea, cujus omnia puncta æquidiſtent a quadam ſuppoſita recta linea in eodem cum ipſa plano exiſtente, æqualis ſit ipſi tali rectæ; quod ipſum tamen non videor demonſtrare ex viſceribus ipſius met hypotheſis, prout opus foret ad perfectam redargutionem.

Reſpondeo autem triplici medio uſum me fuiſſe in XXXVII. hujus ad demonſtrandam prædictam æqualitatem. Et primò quidem, in corpore illius Propoſitionis, demonſtro eam curvam *CKD*, prout enaſcentem ex hypotheſi anguli acuti (ac propterea ſemper cavam versùs partes illius rectæ *AB*) æqualem eidem eſſe debere, & quidem argumentum ducendo ex ipſis ejuſdem curvæ tangentibus. Deinde in duobus ejuſdem Propoſitionis ſubſequentibus Scholiis, præciſivè a qualibet ſpeciali hypotheſi, bis rurſum demonſtro æqualitatem illius genitæ lineæ *CD* cum ſubjecta recta linea *AB*, qualiſcunque tandem cenſeatur eſſe ipſa linea *CD* eo modo genita.

Jam verò; quatenus illa curva *CKD*, prout enaſcens

ex

ex hypothesi anguli acuti, censeatur primo illo modo demonstrata æqualis subjectæ rectæ lineæ *AB*; manifesta evadit redargutio, cum ex eadem hypothesi evidenter demonstretur major. Sin autem alterutro ex duobus aliis modis ostensa censeatur æqualitas prædicta; neque tunc cessat redargutio contra hypothesin anguli acuti. Ratio est; quia nihil vetat, quin illa *CD* sit curva, & nihilominus æqualis sit illi rectæ *AB*, dum tamen sit semper versùs eas partes convexa, ac propterea recta jungens illa eadem puncta *C*, & *D* minor sit contrapositâ basi *AB*, prout in hypothesi anguli obtusi: At omnino repugnat, si versùs easdem partes sit semper cava, ac propterea recta jungens prædicta illa puncta *C*, & *D* major sit eâdem contrapositâ basi *AB*, prout in hypothesi anguli acuti. Atque ita declaratum jam est in Scholio præcedentis Propositionis. Scilicet contra hypothesin anguli obtusi manifestum est nullam hinc sequi redargutionem, quæ propterea unicè impetit hypothesin anguli acuti.

Hoc tamen loco aliquis fortasse inquiret, cur adeò sollicitus sim in demonstranda utriusque falsæ hypothesis exacta redargutione. Ad eum, inquam, finem, ut inde magis constet non sine causa assumptum fuisse ab Euclide tanquam per se notum celebre illud Axioma. Nam hic maximè videtur esse cujusque primæ veritatis veluti character, ut non nisi exquisitâ aliquâ redargutione, ex suo ipsius contradictorio, assumpto ut vero, illa ipsa sibi tandem restitui possit. Atque ita a prima usque ætate mihi feliciter contigisse circa examen primarum quarundam veritatum profiteri possum, prout constat ex mea Logica demonstrativa.

Inde autem transire possum ad explicandum, cur in Proemio ad Lectorem dixerim: *non sine magno in rigidam Logicam peccato assumptas a quibusdam fuisse tanquam datas* *duas rectas lineas æquidistantes*. Ubi monere debeo nullum eorum a me hìc carpi, quos in hoc meo Libro vel indirectè nominavi, quia verè magnos Geometras, hujusque peccati verissimè immunes. Dico autem: *magnum in rigidam Logicam peccatum*: quid enim aliud est assumere tanquam datas *duas rectas lineas æquidistantes*: nisi aut velle; quòd omnis linea in eodem plano æquidistans a quadam supposità lineâ rectâ sit ipsa etiam linea recta; aut saltem supponere, quòd una aliqua sic æquidistans possit esse linea recta, quam idcirco seu per hypothesin, seu per postulatum præsumere liceat in tanta aliqua unius ab altera distantia? At constat neutrum horum venditari posse tanquam per se notum. Scilicet ratio objectiva lineæ, quæ omnibus suis punctis æquidistet a quadam supposita linea recta, non ita clarè per se ipsam congruit cum definitione propria ipsius lineæ rectæ. Quare assumere duas rectas lineas sub ista *æquidistantiæ* ratione inter se *parallelas* fallacia est, quam in prædicta mea Logica appello *Definitionis complexæ*, juxta quam irritus est omnis progressus ad assequendam veritatem absolutè talem.

Unam tamen superesse adhuc video necessariam observationem. Nam lineam jungentem extrema puncta omnium æqualium perpendiculorum, quæ in eodem plano versùs easdem partes erigantur a singulis punctis subjectæ rectæ lineæ *AB*, debere esse & æqualem prædictæ *AB*, & rursum in seipsa rectam, fateri omnes volumus. Sed dico prius esse apud nos, quòd æqualis sit; deinde autem, quòd recta. Cum enim singula puncta illius rectæ *AB* intelligi possint semper æquabiliter procedere per sua illa perpendicula ad formandam tandem illam qualemcunque *CD*; manifestum videri debet, quòd illa qualiscunque genita *CD* æqualis sit eidem *AB*; præsertim verò, si respiciamus explicationem contentam in Scholio II. post

XXXVII. hujus, ubi hoc punctum clarissimè demonstratum est.

Sed postea magna adhuc restat difficultas in demonstrando, quòd illa eadem sic genita *CD* non nisi recta linea sit. Atque hinc factum esse puto, ut ex communi quadam persuasione rectam lineam, pro faciliore progressu, maluerint præsumere, ut inde æqualem ostenderent illi basi *AB*, ac postea inferrent rectos angulos ad ipsam talem jungentem *CD*. Dico autem *magnam difficultatem*: Nam priùs expendere oportebat tres hypotheses circa angulos ad illam junctam *rectam CD*, nimirùm aut rectos, si ipsa æqualis sit basi *AB*; aut obtusos, si minor; aut acutos, si major. Tum verò ostendi debebat non nisi cavam esse posse versùs basim *AB* lineam curvam, quæ (in hypothesi anguli acuti) jungat extremitates illorum æqualium perpendiculorum, ac rursum non nisi convexam versùs eandem basim aliam curvam, quæ (in hypothesi anguli obtusi) jungat extremitates eorundem perpendiculorum. Deinde autem hypothesis quidem anguli acuti ex eo demonstranda erat falsa; quia linea jungens prædictorum perpendiculorum extremitates adeò non erit æqualis basi *AB*, ut immo (ex communi saltem notione) major sit illâ junctâ rectâ *CD*, quæ ex natura ipsiusmet hypothesis major est prædictâ basi *AB*. At hypothesis anguli obtusi aliunde ostendenda erat sibi ipsi repugnans, prout in XIV. hujus. Sed hæc jam satis.

Finis Libri primi.

EUCLI-

EUCLIDIS
AB OMNI NÆVO VINDICATI
LIBER SECUNDUS.

SOlo plerunque ratiocinio opus erit in toto hujus Libri decursu. Nam hìc Euclidem in eo unicè accusant, quòd in sexta Definitione Quinti magis obtenebret, quàm explicet naturam magnitudinum æquè proportionalium, sibique idcirco onus imponat demonstrandi plures Propositiones, quæ per se ipsas clarissimæ videri possunt, vel certè allatis ab ipso demonstrationibus clariores: Tum verò, quòd in quinta Definitione Sexti sub specie Definitionis Axioma quoddam assumat non facilè permittendum, sine prævia demonstratione.

PARS PRIMA,

In qua expenditur sexta Definitio Libri quinti Euclidæi.

DEfinit ibi Euclides magnitudines æquè proportionales, prout sequitur: *In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ, & tertiæ æquè multiplicia, a secundæ, & quartæ, æquè multiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrunque ab utroque vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondent.* Supersedeo ab omni exemplo, quia profiteor me scribere jam versatis in Geometria, non autem immaturis novitiis. Moneo tamen justè hoc loco reprehendi a Clavio Campanum, atque

Orontium, quòd ita hanc Euclidis definitionem interpretentur, quasi tunc solùm illa *proportionalitas* subsistere debeat, quando prædicta æquè multiplicia vel unà deficiant, vel unà excedant *proportionaliter*, *sive in eadem proportione*. Nam id foret inducere Euclidem desipientem, qui nempe idem per idem definiret. Fateri igitur debemus, quòd Euclides loquatur de quolibet defectu, aut excessu; dum tamen ad utramque partem juxta quamlibet multiplicationem alteruter idem semper consistat, & non etiam aliquando ex una quidem parte defectus, ex altera autem aut æqualitas, aut excessus.

Audire jam oportet, quid reprehensione dignum invenerint in exposita Euclidæa Definitione. Itaque dicunt debuisse probari ab Euclide istud ipsum esse verum; quòd nempe, quoties prædicta qualiacunque æquè multiplicia vel unà excedunt, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, toties quatuor illæ magnitudines in eâdem sint ratione. Ego autem non satis miror, quomodo Viri apprimè docti in hunc lapidem impegerint. Quid enim, quæso, probari debuit ab Euclide? An fortè, quòd nusquam asserat, seu præsumat quatuor magnitudines in eadem esse ratione, nisi quando aliunde constet prædicta qualiacunque earundem æquè multiplicia vel unà excedere, vel unà deficere, vel unà æqualia esse? At id ipsum tam religiosè exequitur, ut nimius hac in parte videri quibusdam potuerit in demonstrandis primis undecim Propositionibus Libri quinti, quæ nimirùm, sub alio quodam magis vulgari æquè Proportionalium conceptu, immediatam sibi ipsis facerent fidem.

Rursum verò: Quid per se ipsum clarius, si præcisè attendamus ad vulgarem quandam acceptionem, quàm quòd Partes cum pariter Multiplicibus in eadem sint ratione; ut putà, quòd 4. eandem habeat rationem ad 6.

quam

quam habet 8. duplus ipsius 4. ad 12. duplum illius 6. ? Nihilominus magna ista claritas satis non fuit Euclidi, qui in Propos. 15. prædicti Libri istud ipsum demonstrat ex Definitione ab eo assumpta æquè Proportionalium; ne scilicet accusari posset de petitione Principii, hoc est de duplici assumpta Definitione. Nihil ergo probare debuit Euclides, quod facto ipso non probet.

Sed in hoc ipso (inquiet aliquis) peccare ipse videtur, quòd rem per se claram suâ illâ Definitione obscurare voluerit. Quasi verò (inquam ego) non potuerit acutus Euclides magnitudines invicem commensurabiles ab aliis non talibus separare, illasque idcirco ita definire, prout in Libro VII. Defin. XX. numeros proportionales apud Clavium definit: tunc nimirùm quatuor magnitudines proportionales fore: *Cum prima secundæ, & tertia quartæ æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certè, cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes*. Ita sanè: At quis fructus, cum tandem descendere debuerit ad magnitudines multis modis incommensurabiles? Decuit igitur, ut unâ, eâdemque Definitione ipsas etiam non invicem commensurabiles magnitudines complecteretur.

Nullus, inquiunt, refragatur; aliamque idcirco ipsis etiam quomodolibet incommensurabilibus magnitudinibus Definitionem assignant, quæ sequitur: *Prima ad secundam eandem rationem habebit, ac tertia ad quartam, si prima secundæ partes aliquotas quascunque contineat, quoties tertia quartæ similes partes aliquotas continet*: Ut putà; si magnitudo *A* toties continet magnitudinis *B* partes centesimas, millesimas, centies millesimas, & quascunque alias aliquotas similes; ita ut nulla sit pars magnitudinis *B*, quæ pluries contineatur in magnitudine *A*, quàm similis pars aliquota ipsius *D* contineatur in *C*, licèt in irrationalibus re-

stet

ftet femper aliqua quantitas; tunc ita eſt A ad B, ut C ad D.

Agnoſco eximium, meiſque oculis familiarem Geometram ſic loquentem. Sed pace ipſius dictum ſit: nullum video hujus novæ Definitionis commendabilem fructum. Et primò quidem indignum puto homine Geometra aliud quidpiam intelligere in uſu alicujus termini ſcientifici præter id, quod in ejuſdem Definitione exprimitur; ac præſertim, ubi Definitio tradita ſit per voces minimè ambiguas, quales ſunt *multiplicatio*, *majus*, *minus*, *æquale*. Igitur Definitio Euclidæa repræhendi non debuit titulo obſcuritatis. Deinde verò: Nemo ibit inficias, quin promptior ſit ad uſum, ac propterea opportunior ad rectam, expeditamque intelligentiam multiplicatio præſcripta ab Euclide, quàm diviſio ab aliis ſubſtituta. Unicè igitur expendendum ſupereſt, an nova illa æquè proportionalium Definitio opportunior ſit ad demonſtrandum, ubi applicari debeat in ſpecialibus materiis. Ad hunc finem aſſumo Prop. primam Libri ſexti, quæ utique prima eſt omnium talium applicationum: ubi Euclides demonſtrat: Triangula, & Parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habere, ut baſes.

Ecce autem ex Euclide nitidiſſimam demonſtrationem. Sint duo triangula (fig. 49.) ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum baſes BC, EF. Omitto parallelogramma, quia ſcribo jam verſatis in Geometria. Jam dico ita eſſe triangulum ABC ad triangulum DEF, ut baſis BC ad baſim EF. Nimirùm; ſi baſis BC ſtatuatur prima magnitudo, baſis EF ſecunda, triangulum ABC tertia, & triangulum DEF quarta; Dico qualiacunque æquè multiplicia primæ ac tertiæ a quibuſvis æquè multiplicibus ſecundæ & quartæ vel unà deficere, vel unà æqualia eſſe, vel unà excedere, prout exigit Definitio ſexta Libri quinti.

Tab. VI.

Intelligantur enim prædicta triangula tum in eodem plano existere, tum etiam constituta esse inter easdem parallelas *AD*, *CBEF*; adeò ut nempe (ex natura parallelarum) æqualem altitudinem habeant. Tum verò sumptis in *BC* indefinitè protractâ quotvis portionibus *CI*, *IK*, *KL*, æqualibus ipsi *BC*; atque item in *EF* similiter protractâ quotvis *FM*, *MN*, æqualibus ipsi *EF*; jungantur *AI*, *AK*, *AL*; atque item *DM*, *DN*. Constat (ex 38. primi) æqualia inter se fore triangula *ALK*, *AKI*, *AIC*, *ACB*; atque item eâdem ratione æqualia inter se fore triangula *DEF*, *DFM*, *DMN*. Igitur, quàm multiplex est rectæ *CB* quæcunque assumpta recta *CL*, tam multiplex quoque erit triangulum *ACL* trianguli *ACB*; & quam multiplex est recta *EN* rectæ *EF*, tam quoque multiplex erit triangulum *DEN* trianguli *DEF*; quia in tot triangula æqualia sunt divisa tota triangula *ACL*, *DEN*, in quot rectas æquales sectæ sunt totæ rectæ *CL*, *EN*. Quoniam verò, si basis *CL* æqualis fuerit basi *EN*, necessariò (ex predicta 38. primi) etiam triangulum *ACL* æquale est triangulo *DEN*; ac proinde, si *CL* major fuerit quàm *EN*, necessariò *ACL* majus est quàm *DEN*; & si minor, minus: consequens planè est, ut recta *CL*, & triangulum *ACL*, quæ assumpta sunt pro quibusvis æquè multiplicibus primæ magnitudinis *BC*, & tertiæ *ABC*; si conferantur (prout inter se respondent) cum recta *EN*, & triangulo *DEN*, quæ ipsa rursum assumpta sunt pro quibusvis æquè multiplicibus secundæ magnitudinis *EF*, & quartæ *DEF*; inveniantur semper vel unà æqualia esse, vel unà excedere, vel unà deficere. Igitur (juxta sextam Definitionem quinti) quæ proportio primæ *BC* ad secundam *EF*, basis ad basim, ea est tertiæ *ABC* ad quartam *DEF*, trianguli ad triangulum. Quod erat propositum.

Conferre nunc debeo præmissam Euclidæam Demonstraſtrationem cum alterâ indicati eximii Geometræ, quam ipſis ejuſdem vocibus ſtatim exhibeo.

Sint duo triangula (fig. 50.) *ABC*, *DEF*, quorum altitudo ſit eadem. Dico eandem eſſe rationem trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*, quæ baſis *BC* ad baſim *EF*. Demonſtratur. Intelligatur baſis *EF* diviſa in quotcunque partes æquales, ut putà in quatuor, & ex puncto *D* ducantur lineæ *DG*, *DH*, *DI*; & linea *BC* quadrantem lineæ *EF* contineat ter, ſintque lineæ *CM*, *ML*, *LK*, quæ ſint ſingulæ æquales lineis *EG*, *GH*, *HI*, *IF*, ducanturque lineæ *AK*, *AL*, *AM*. Triangula *DEG*, *DGH*, *DHI*, *DIF* ſingula ſunt æqualia (per 38. 1.) quia ſunt ſupra baſes æquales, & in eiſdem parallelis. Igitur ſunt quadrantes trianguli *DEF*: & quia triangula *ABC*, *DEF* habent æquales altitudines, etiam in eiſdem parallelis intelligi poſſunt conſtituta, & ſic triangula *AKL*, *ALM*, *AMC*, habentia baſes æquales cum triangulis *DEG*, *DGH*, *DHI*, *DIF*, illis æqualia erunt. Ergo quot erunt quadrantes lineæ *EF* in linea *BC*, tot erunt quadrantes trianguli *DEF* in triangulo *ABC*. Quod autem oſtenſum eſt de quadrantibus, poteſt ſimiliter oſtendi de quibuslibet partibus aliquotis. Igitur (juxta aſſumptam novam illam æquè proportionalium Definitionem) ut baſis *BC* ad baſim *EF*, ita triangulum *ABC* ad triangulum *DEF*. Quod erat &c.

Jam fateor hanc etiam demonſtrationem opportunam eſſe intento; ſed puto non æquè claram eſſe, atque Euclidæam. Ratio diſcriminis hæc eſt; quia poſterior Definitio procedit in *quid rei*; prior autem in *quid nominis*. Scilicet non eo inficias, quin probè demonſtratum ſit tot fore v. g. quadrantes (fig. 50.) trianguli *DEF* in triangulo *ABC*, quot erunt quadrantes baſis *EF* in baſi *BC*; atque ita uniformiter ſecundùm quamlibet aliam partem aliquotam.

At ubi venitur ad conclusionem, quòd triangulum *ABC* ita sit ad triangulum *DEF*, ut basis *BC* ad basin *EF*, hæret statim mens; cum magis immediatè debuerit inferri, ita esse basim *KC* ad basim *EF*, ut triangulum *AKC* ad triangulum *DEF*.

Neque juvat reponere, quòd una veritas alteri officere non debeat. Nam dico ex hac ipsa innegabili veritate oriri dubium posse, an fortè per nullam partem aliquotam ipsius *EF* quomodolibet multiplicatam exhauriri præcisè possit ipsa *BC*; quod sanè omninò continget, si ipsæ *EF*, *BC* sint incommensurabiles; nisi fortè provocare velimus ad partem aliquotam infinitè parvam, circa quam rursum non levis oriri posset difficultas.

Cur autem (urgebit quispiam) licitum fuerit Euclidi tradere suam illam Definitionem æquè proportionalium, quæ nulli communi notioni innititur; & non etiam aliis liceat quampiam aliam subrogare, quæ ex quadam cum numeris æquè proportionalibus similitudine sibi ipsi faciat fidem? Per me (inquam) quidquid libeat, licitum etiam hac in parte puto; dum tamen observentur duo sequentia. Primò; ut ne (quatenus procedi velit per Definitionem *puri nominis*) accusetur ut mala quæpiam alia *puri nominis* assumpta Definitio; nisi aut ostendatur ex ipsis ejusdem vocibus nimis perplexa, aut aliunde constet longiore quadam indagine opus esse ad assequendam *rem ipsam*, cujus nempe veluti propria dignosci tandem debeat exposita Definitio. Secundò autem; ut (quatenus procedi velit per Definitionem *ipsius rei* aliunde cognitæ) nunquam putemus *rem ipsam* assecutos nos esse, nisi clarè deveniamus ad illam originem, unde sumpta est occasio, aut opportunitas talis Definitionis.

Post hanc non inutilem digressionem duo alia opportunè subdo. Unum est; me non negare, quin posteriore loco exposita Demonstratio optima sit, & evidentissima; dum tamen ibi assumpta æquè proportionalium Definitio recipi unicè debeat in *quid nominis*. Sed tunc observo nullam fuisse causam respuendi, ac multò minùs damnandi Definitionem Euclidæam: cum ex una parte & Demonstratio eidem innixa nulli tergiversationi obnoxia sit; & ex alterâ Definitio, certissimè ibi assumpta in *quid nominis*, procedat per multiplicationem, quam unusquisque intelligit clariorem esse, ac faciliorem divisione, & quidem (suo quodam proprio jure) sine ullo periculo cujusvis objectæ incommensurabilitatis; prout constare potest ex antea dictis.

Alterum est; me rursum non negare, quin aliquo tandem pacto demonstrari possit prima illa Propositio Libri sexti, etiamsi assumpta censeatur in *quid rei* prædicta æquè proportionalium nova Definitio. Verùm arbitror hac sola ratione demonstrari eam posse, dum aliàs præsumatur unam aliquam esse rectam lineam determinatam, quæ ad basim *BC* eam habeat rationem, quæ est trianguli *DEF* ad triangulum *ABC*. Nam demonstrabo nullam *EI*, quæ sit portio ipsius *EF*, ac similiter nullam *EX*, quæ assumpta sit in *EF* productâ, tales esse posse, ut eam habeant ad basim *BC* rationem, quæ est trianguli *DEF* ad triangulum *ABC*.

Demonstratur prima pars. Nam constat primò (fig. 50.) talem ipsius *BC* assumi posse partem aliquotam *BK*, ut putà *octavam*, quæ minor sit illâ in *EF* residuâ portione *IF*. Constat hinc secundò; tot in *EF* designari posse portiones æquales ipsi *BK*, ita ut postrema designata portio desinat in punctum *Q*, quod jaceat inter puncta *I*, & *F*. Tunc autem (junctâ *QD*) manifestum fiet (ex 38. 1.) tot contineri in triangulo *DEQ* octavas partes trianguli *ABC*, quot in basi *EQ* continentur octavæ partes illius

basis

basis BC. Quare (ex nova illa assumpta in *quid rei* æquè proportionalium Definitione) ita erit triangulum DEQ ad triangulum ABC, ut basis EQ ad basim BC. Habet autem EQ ad BC majorem rationem (ex 8. 5.) quàm illa EI ad eandem BC; Igitur (ex 13. 5.) etiam triangulum DEQ non æqualem, sed majorem rationem habebit ad triangulum ABC, quàm sit ratio prædictæ EI ad illam basim BC. Quod erat priore loco demonstrandum.

Demonstratur secunda pars. Nam rursum constat primò; talem illius BC assumi posse partem aliquotam BK, ut putà *decimam*, quæ minor sit illo excessu FX, quo basis EF superatur ab ipsa EX. Atque hinc constat secundò; tot in EX designari posse portiones æquales ipsi BK, ita ut postrema designata portio desinat in punctum T, quod jaceat inter puncta F, & X. Tunc autem (junctâ TD) manifestum fiet (ex eadem 38. 1.) tot in triangulo DET decimas partes trianguli ABC contineri, quot in basi ET continentur decimæ partes ipsius basis BC. Quare (ex eadem assumpta in *quid rei* æquè proportionalium nova Definitione) ita erit triangulum DET ad triangulum ABC, ut basis ET ad basim BC; & invertendo ita erit triangulum ABC ad triangulum DET, ut basis BC ad basim ET. Habet autem basis BC ad basim ET rationem majorem (ex eadem 8, 5.) quàm sit ratio ejusdem basis BC ad illam EX, quæ supponitur major prædictâ ET; ac propterea (ex eadem 13. 5.) majorem ratione trianguli ABC ad triangulum DEF. Non igitur ulla EX, quæ sit major ipsâ EF, talis esse potest, ad quam basis BC eam habeat rationem, quæ est trianguli ABC ad triangulum DEF. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Unde tandem fit, ut ratio trianguli ABC ad triangulum DEF, quod eandem cum ipso altitudinem habeat, eadem

eadem ſit ac baſis BC ad baſim EF; dum ſcilicet aliàs præſumatur unam aliquam eſſe rectam lineam determinatam, ad quam baſis BC eam habeat rationem, quæ eſt trianguli ABC ad triangulum DEF. Quod erat principale intentum.

Poſt hæc autem addere inſuper debeo, non placere mihi neceſſitatem illius *Petitionis*, quòd una aliqua ſit recta linea determinata, ad quam prædicta baſis BC eam habeat rationem, quæ eſt trianguli ABC ad triangulum DEF. Nam certè verus nævus hic foret, maximè dolendus in primo ingreſſu novæ hujus apud Geometras nobiliſſimæ partis; quòd ſcilicet reperiri demonſtrativè non poſſit recta linea, ad quam talis quæpiam data recta eam rationem habeat, quæ eſt vel talis cujuſdam dati trianguli rectilinei ad alterum datum triangulum rectilineum, vel talis cujuslibet datæ rectæ ad alteram quamlibet propoſitam rectam lineam; quòd, inquam, talis recta linea reperiri non poſſit, niſi antea præſumendo, per modum primi Principii, quòd una aliqua ejuſmodi recta linea verè exiſtat in rerum natura.

Sed hìc audio quempiam reclamantem, quòd ipſe etiam Euclides, ſine demonſtratione, hoc veluti Axiomate utitur in Propoſ. 18. 5. ubi demonſtrat compoſitionem rationis; hoc eſt, *duas magnitudines, quæ diviſæ proportionales ſint, has quoque compoſitas proportionales eſſe*. Quin etiam Clavius, acutiſſimus Euclidis Interpres, ſub expreſſo *Axiomatis* nomine, ante omnes prædicti Libri Propoſitiones ſic præmittit: *Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quævis magnitudo propoſita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propoſitam*. Hujus autem aſſumpti hanc reddit rationem. *Quamvis enim ignoremus interdum, quænam ſit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non eſt, eam*

eſſe

esse posse in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, ut Philosophi loquuntur, neque absurdi aliquid ex eo consequatur.

Veruntamen, his ipsis stantibus, non desino agnoscere indecorum nævum, a quo, ex officio assumpto, vindicare debeam Euclidem; præsertim verò, cum ipse Clavius non Euclidi, sed interpretibus istud attribuat. Itaque dico illam 18. 5. demonstrari potuisse sine ullo recursu ad intrusum illud Axioma; nimirùm provocando ad quasdam Libri sexti Propositiones, quæ ab illo intruso Axiomate nullatenus pendent; & ex quibus illud ipsum Problematicè demonstratur, saltem quoad lineas rectas. Cur autem oculatissimus Clavius non id animadverterit, in causa esse potuit, quòd ibi fusior esse debuerit in explicanda vera doctrina proportionum, adversùs quosdam non ignobiles Euclidis interpretes.

Jam pergo ad exequendum munus assumptum: Ubi, ut expeditior sim, resolvendo magis, quàm componendo, rem ipsam paucioribus exhibere conabor. Præmitto autem, assumi hìc posse tanquam a me juxta Euclidem jam demonstratam primam sexti, sine ulla dependentia a præfato Axiomate; cum ibi (si excipias doctrinam parallelarum) sola usui fuerit ex Libro primo Propositio 38. & ex quinto Euclidæa æquè proportionalium Definitio.

Deinde transeo ad exequendum Problema, quod continetur in 12. sexti; ubi datis tribus rectis lineis, ut putà *AD*, *DB*, *AE*, præcipitur quartæ proportionalis inventio. Disponantur enim (fig. 51.) primæ duæ *AD*, *DB* secundùm lineam rectam, quæ sit *AB*: Tertia verò *AE* quemlibet angulum *A* efficiat cum prima *AD*. Deinde ex *D* ad *E* recta ducatur *DE*, cui per *B* parallela ducatur *BC*, occurrens rectæ *AE* productæ in *C*. Dico ipsam *EC* esse quartam proportionalem quæsitam. Cum enim in tri-

angulo

gulo *ABC* acta sit parallela *DE*; erit (ex 2. 6.) ut *AD* ad *DB*, ita *AE* ad *EC*. Quare *EC* erit quarta proportionalis quæsita. Quod erat &c.

Verùm obstat, quòd nondum demonstravi independentiam secundæ Sexti ab illo intruso Axiomate. Itaque (manente eadem Figura) jungantur *EB*, *CD*. Constat (ex 37. primi) æqualia inter se fore triangula *DEB*, *DEC*, utpote constituta inter easdem parallelas *DE*, *BC*, & super eadem basi *DE*. Quare (ex 7. 5.) ut triangulum *ADE* ad triangulum *DEB*, ita est idem triangulum *ADE* ad triangulum *DEC*. Atqui ut triangulum *ADE* ad triangulum *DEB*, ita est (ex 1. 6.) basis *AD* ad basim *DB*; propter æqualem eorundem altitudinem in puncto *E*: & eadem ratione, ut triangulum *ADE* ad triangulum *CDE*, ita est basis *AE* ad basim *EC*; propter æqualem eorundem altitudinem in puncto *D*. Igitur (ex 11. quinti) ut *AD* ad *DB*, ita est *AE* ad *EC*; cum hæ duæ proportiones eædem sint proportionibus trianguli *ADE* ad triangulum *DEB*, & ejusdem trianguli *ADE* ad triangulum *DEC*. Quod erat hoc loco demonstrandum.

Hinc porrò evidenter constat nihil vetuisse, quin statim (præciso ordine materiæ) post 17. 5. procederet Euclides ad demonstrandas primam, secundam, & duodecimam sexti, quæ utique satis erant ad stabiliendam, saltem pro lineis rectis, illam 18. ejusdem quinti, pro qua sola induci ibi debuerat præfatum Axioma. Quòd enim post illam 12. sexti progredi facilè possimus (sine indigentia novæ alicujus præsumptæ veritatis) ad inveniendam rectam lineam, quæ ita se habeat ad aliam quamlibet datam rectam, ut unum quodvis datum triangulum rectilineum ad alterum quodlibet datum triangulum rectilineum, etiamsi non æqualis altitudinis cum priore; solis Geometriæ imperitis difficile videri poterit. Porrò uniformiter constabit, reperiri similiter posse rectam lineam, quæ ita se habeat ad quamlibet aliam datam rectam, ut una quælibet data figura rectilinea ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam. Atque hæc rursum utrovis modo vice versâ.

Sed video opponi adhuc mihi posse ipsummet Euclidem, qui in 2. 12., ut ostendat eandem esse rationem cujusvis circuli ad alterum quemlibet exhibitum circulum, quæ est quadratorum ab ipsorum diametris, tacitè præsumit unam aliquam esse in rerum natura superficiem, vel æqualem, vel majorem, vel minorem exhibito circulo, ad quam alter circulus eam habeat rationem, quæ est prædictorum ab illis diametris quadratorum.

Et hìc quidem duo respondenda censeo. Unum est; absonam utique videri potuisse, in ipso primo ingressu hujus materiæ *de proportionibus*, præsumptionem ejusmodi; sed non etiam, postquam circa lineas rectas, ac figuras rectilineas demonstratum generaliter id sit (non obstante qualicunque earundem irrationalitate) aut incongruum, aut nimis remotum a veritate videri posse, quòd simile quidpiam præsumatur circa duas figuras rectilineas ex una parte, & ex altera duas circulares. Alterum est; neque ibi necessariam esse Euclidi jam dictam præsumptionem. Nam antea in prima duodecimi sine ulla præsumptione demonstrat, duo quælibet in circulis similia poligona esse inter se, ut a diametris quadrata. Deinde (in ipsa secunda) absolutè rursum demonstrat, tale in exhibito circulo (duplicando, ac duplicando numerum laterum) inscribi posse poligonum, cujus defectus ab ipso integro circulo minor sit qualibet parvulâ assignatâ magnitudine; intactâ nihilominus manente eâdem semper ratione ad alterum simile poligonum, quod in alio circulo inscribatur. Quare ipsosmet circulos considerare jam potuit tanquam similia

lia infinitilatera poligona, in quibus propterea firma adhuc consisteret jam demonstrata ratio, quæ est quadratorum a diametris.

Agnosco tamen doctioribus Geometris nunquam plenè satisfactum iri, nisi aliquo tandem pacto aut generaliter demonstrem præsumptum illud Axioma, aut saltem unum aliquod in ejus locum substituam, quod usui esse possit in decursu universæ Geometriæ. Ecce autem statim rem exequor.

Dico enim assumi posse hoc alterum Axioma; quòd nempe *duæ quælibet, in quolibet eodem genere constitutæ magnitudines, rationem inter se habebunt, quæ vel æqualis sit, vel major, vel minor ratione duarum quarumlibet aliarum magnitudinum, quæ vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quolibet ipsarum proprio constitutæ sint*. Ubi constat duplex a me onus assumi; nimirùm demonstrandi & veritatem propositi Axiomatis, & plenam ejusdem sufficientiam pro usu in decursu totius Geometriæ.

Priori oneri sic satisfacio. Sint quatuor magnitudines (fig. 52.) *A*, *B*, *C*, *D*, quarum duæ priores in suo proprio genere, ac similiter posteriores vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quodam suo proprio genere consistant. Dico rationem tertiæ *C* ad quartam *D* vel æqualem fore, vel majorem, vel minorem ratione primæ *A* ad secundam *B*.

Demonstratur. Sumantur enim ipsarum *A* primæ, & tertiæ *C*, duæ quælibet æquè multiplices *EF*, *GH*; atque item ipsarum *B* secundæ, & quartæ *D*, duæ quælibet æquè multiplices *IK*, *LM*. Constat primò, rationem ipsius *A* ad *B* æqualem fore rationi ipsius *C* ad *D*, si vel in uno casu talium assumptarum æquè multiplicium contingat, ut *EF* multiplex primæ æqualis sit ipsi *IK* multiplici secundæ, & *GH* multiplex tertiæ æqualis sit ipsi *LM* multiplici quartæ.

Ratio evidens eſt; quia hìc agitur de multiplici propriè tali ſecundùm veram rationem numeri, juxta quam multiplicatum non tranſit in novam ſpeciem entis, ſed in eadem ſpecie conſiſtens ita ſe habet v.g. *EF* ad *A*, ut numerus ibi multiplicans ad unitatem. Quoniam igitur genitæ magnitudines *EF*, & *IK* ponuntur æquales; conſequens eſt (ex 19. 7.) ut numeri, per quos multiplicantur magnitudines *A*, & *B*, ſint inter ſe reciprocè, ut ipſæ magnitudines multiplicatæ. Simili modo oſtendetur numeros, per quos multiplicantur magnitudines *C*, & *D*, eſſe inter ſe reciprocè, ut ſunt magnitudines multiplicatæ; Porrò (ex hypotheſi) per eundem quempiam numerum multiplicatæ intelliguntur magnitudines *A*, & *C*; ac ſimilter magnitudines *B*, & *D*. Igitur (ex 11. 5.) ita erit prima *A* ad ſecundam *B*, ut tertia *C* ad quartam *D*. Quod erat hìc demonſtrandum.

Conſtat ſecundò, rationem primæ *A* ad ſecundam *B* majorem fore ratione tertiæ *C* ad quartam *D*; ſi vel in uno caſu talium aſſumptarum æquè multiplicium contingat, ut *EF* multiplex primæ excedat ipſam *IK* multiplicem ſecundæ, ſed *GH* multiplex tertiæ non excedat illam *LM* multiplicem quartæ; aut illa *EF* æqualis ſit prædictæ *IK* (prout ego cum Clavio interpretor) dum altera *GH* minor eſt ſibi correſpondente *LM*.

Patet autem nullâ mihi argumentatione opus hìc eſſe. Nam omnes ſciunt hanc ipſam eſſe rectam intelligentiam Definitionis octavæ Libri quinti, juxta quam Euclides conſtantiſſimè, ac rigidiſſimè ſemper procedit. Ubi adverto (propter quoſdam minùs doctos) aliud eſſe accuſare Euclidem de quadam veluti affectatâ in ſuis quibuſdam definitionibus obſcuritate; & aliud longè diverſum, quòd non ritè juxta aſſumpta proceſſerit; cum magis omdocti consentiant accuratissimum hac in parte eundem fuisse. Unicè igitur restat hoc loco, ut substitutum a me Axioma clarissimè demonstrem.

Sic autem procedo. Vel inter possibiles æquè multiplices primæ *A*, & tertiæ *C*, ac simul inter possibiles æquè multiplices secundæ *B*, & quartæ *D*, una quæpiam reperitur *EF* multiplex primæ *A*, & *IK* multiplex secundæ *B* invicem æquales; ac simul (in eodem casu) una quædam *GH* multiplex tertiæ *C* æqualis ipsi *LM* multiplici quartæ *D*: vel nusquam talis æqualitas reperitur. Si primum; constat ex jam demonstratis ita fore *A* ad *B*, ut *C* ad *D*. Sin verò nusquam reperitur ejusmodi simul ex utrâque parte æqualitas; vel saltem ad alterutram partem reperitur, ut putà ad partem primæ *A*, vel nusquam. Si primum; ergo (ex præmissa Euclidæa majoris, ac minoris proportionis Definitione) habebit *A* ad *B* majorem, aut minorem proportionem, quàm *C* ad *D*; prout *GH* multiplex tertiæ *C* minor fuerit, aut major ipsâ *LM* multiplici quartæ *D*. Sin verò secundum; ergo ex una quidem parte v. g. ad ipsas *A* primam, & *B* secundam, contingere poterit, ut illa multiplex *EF* minor sit alterâ multiplici *IK*, dum vice versâ ex altera parte illa multiplex *GH* major est alterà multiplici *LM*. Tunc autem (sub eadem Euclidæa Definitione) ratio primæ *A* ad secundam *B* erit minor ratione tertiæ *C* ad quartam *D*; aut vice versâ.

Igitur demonstratum manet substitutum illud Axioma; quòd nempe duæ quælibet, in quolibet eodem genere constitutæ magnitudines, rationem inter se habebunt, quæ vel æqualis sit, vel major, vel minor ratione duarum quarumlibet aliarum magnitudinum, quæ vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quolibet ipsarum proprio constitutæ sint. Quod erat onus priore loco mihi impositum.

Tran-

Transfeo ad fecundum onus mihi adjectum. Ubi, ad exemplum aliarum in decurfu Geometriæ fimilium, illuftrandam fufcipio illam fecundam duodecimi, præmiffis (claritatis gratiâ) duobus fequentibus Lemmatis.

LEMMA I.

SI quæpiam tertia magnitudo *C* habeat (fig. 52.) ad quartam *D* majorem rationem, quàm fit ratio primæ *A* ad fecundam *B*; habebit etiam illa *C* ad eandem *D*, auctam quapiam magnitudine *X*, majorem rationem, quàm fit prædicta ratio primæ *A* ad fecundam *B*.

Nam conftat prædictam *LM*, multiplicem quartæ *D*, tali magnitudine *S* augeri poffe, ut adhuc minor fit illâ *GH* multiplici tertiæ *C*. Quare, fi quarta *D* augeatur magnitudine *X*, cujus prædicta *S* ita fit multiplex, ut *LM* eft multiplex quartæ *D*, five illa *IK* eft multiplex fecundæ *B*; non ideo (ex defin. 8. 5.) ratio tertiæ *C* ad quartam *DX* definet effe major ratione primæ *A* ad fecundam *B*; quia adhuc *GH* multiplex tertiæ *C* major erit illâ *LS* multiplici quartæ *DX*, dum interim *EF* multiplex primæ *A* major non eft illâ *IK* multiplici fecundæ *B*. Quod erat &c.

LEMMA II.

POrrò autem (ne peritum Geometram in re facili molefte detineam) fimili modo oftendam, quòd tertia illa magnitudo *C*; quatenus ponatur habere ad quartam *D* minorem rationem, quàm fit ratio primæ *A* ad fecundam *B*; habebit etiam ad eandem *D*, imminutam quapiam magnitudine *T*, minorem rationem, quàm fit prædicta ratio primæ *A* ad fecundam *B*. Ratio eft; quia (ex 26. 5.) habebit convertendo fecunda *B* ad primam *A* minorem rationem,

tionem, quàm quarta *D* ad tertiam *C*. Igitur (ut in prçcedente Lemmate) habebit adhuc quarta *D* ad tertiam *C*, auctam quapiam magnitudine *Y*, majorem rationem, quàm sit secundç *B* ad primam *A*. Quapropter (ex eâdem 26. 5.) habebit rursum convertendo prima *A* ad secundam *B* majorem rationem, quàm tertia *C*, aucta illâ magnitudine *Y*, ad quartam *D*.

Quoniam verò illa magnitudo *Y* sumi potest minor, ac minor, adeò ut sit pars quçdam ipsius *C* ab aliquo finito numero denominata; ac propterea sit pars ipsius *YC* à numero unâ unitate majore denominata: si rursum illius magnitudinis *D* sumatur pars quçpiam *T*, ab eodem numero denominata, a quo *Y* denominatur talis pars prçdictç *YC*; erit (ex 15. 5.) *Y* ad *T*, ut *YC* ad *D*. Igitur (ex 13. 5.) ratio primç *A* ad secundam *B* major etiam erit ratione illius *Y* ad alteram *T*. Unde tandem fit (ex illâ 13. & prçdictâ 15. 5.) ut illa tertia *C*, post sublatam ab *YC* additam illam portionem *Y*, minorem adhuc habeat rationem ad quartam *D*, imminutam notâ illa magnitudine *T*, quàm sit ratio primç *A* ad secundam *B*. Quod erat intentum.

PROPOSITIO PRINCIPALIS:

In qua illustratur secunda Duodecimi; simulque exponitur substituti Axiomatis Major forsitan opportunitas pro similibus casibus in decursu totius Geometriæ.

DEmonstrat ibi Clavius ex Euclide, circulos esse inter se, quemadmodum a diametris quadrata. At supponit (ex communi ab Interpretibus intruso Axiomate) quòd unus circulus habebit ad aliquam magnitudinem, quæ vel æqualis ſit, vel major, vel minor altero circulo, eam rationem, quæ eſt prædicta quadratorum a diametris. Porrò, hoc ſtante, clariſſimè exequitur intentum ſuum; quia optimè demonſtrat nullam eſſe poſſe magnitudinem aut majorem, aut minorem altero circulo, ad quam prior circulus eam habeat rationem, quam expoſuimus.

Jam ego ſubſtituo alterum a me demonſtratum Axioma, quòd unà cum duobus adjectis Lemmatis ſic applicatur in noſtrâ materia: Habebit unus circulus ad alterum circulum vel eandem rationem, quæ eſt jam dicta quadratorum a diametris, vel habebit rationem iſtâ majorem, non modò ad illum alterum circulum, ſed etiam ad aliquam magnitudinem eodem altero circulo majorem, ut putà ad poligonum aliquod eidem circumſcriptum: vel tandem habebit rationem minorem, non modò ad prædictum alterum circulum, ſed etiam ad aliquam magnitudinem eodem minorem, ut putà ad poligonum aliquod eidem inſcriptum.

Tum unuſquiſque videt, quàm facilè (ex Prop. 8. 5.) demonſtrari poſſit, non poſſe priorem circulum ad quoddam poligonum, poſteriori circulo circumſcriptum, habere majorem rationem, quàm ſit ratio illa quadratorum ex diametris; cum ſimile poligonum priori circulo circumſcriptum habeat ad jam dictum poligonum (ex 1. 12.) eam ſolam rationem, quæ eſt prædictorum quadratorum: ac ſimiliter priorem jam dictum circulum habere non poſſe ad quoddam poligonum, eidem poſteriori circulo inſcriptum, minorem rationem, quàm ſit eadem ratio prædictorum quadratorum; cum ſimile poligonum priori circulo inſcriptum habeat (ex eâdem 1. 12.) ad modò dictum poligonum eam ipſam rationem, quæ eſt illorum ſtabilium quadratorum: Atque hinc tandem fit, ut prior ille circulus (ex meo

ſub-

ſubſtituto, ac demonſtrato Axiomate cum adnexis Lemmatis) eam habere debeat ad poſteriorem circulum rationem, quæ eſt jam dictorum quadratorum.

Conſtat autem pro ſimilibus caſibus procedi ſimiliter poſſe in decurſu totius Geometriæ. Igitur ſubſtitutum, ac demonſtratum a me Axioma, cum ſuis adnexis Lemmatis, non modò utile, verùm etiam opportunius videri poteſt illo alio communi merè præſumpto, & indemonſtrato. Quod &c.

SCHOLION I.

QUia tamen in meo ſecundo Lemmate bis aſſumpſi 26. 5. quæ apud Clavium non demonſtratur ſine recurſu ad illud commune Axioma, a me repudiatum in rigore Axiomatis; eam idcirco demonſtro ex ſola Definitione Euclidæa. Si enim prima *A* (fig. 52.) ponatur habere ad ſecundam *B* majorem rationem, quàm tertia *C* ad quartam *D*; debebit quædam *EF* multiplex primæ *A* æqualis eſſe, aut major quadam *IK* multiplici ſecundæ *B*; dum interim (ex æquo) quædam *GH* æquè multiplex tertiæ *C*, ut *EF* eſt multiplex primæ *A*, vel minor eſt, vel non major quadam *LM* æquè multiplici quartæ *D*, ut *IK* eſt multiplex ſecundæ *B*. Tunc autem (conſiderando vice verſâ *B* ut primam, & *A* ut ſecundam; ac ſimiliter *D* ut tertiam, & *C* ut quartam) debebit quædam *IK* multiplex primæ *B* aut æqualis eſſe, aut minor quadam *EF* multiplici ſecundæ *A*; dum interim (ex æquo) quædam *LM* æquè multiplex tertiæ *D*, ut *IK* eſt multiplex primæ *B*, vel major eſt, vel non minor quadam *GH* æquè multiplici quartæ *C*, ut *EF* eſt multiplex ſecundæ *A*. Quare (ex Def. 8. 5.) habebit ex oppoſito illa *B* ſtatuta ut prima, ad alteram *A* ſtatutam ut ſecundam, minorem rationem, quàm ſit ratio illius *D* ſtatutæ ut tertiæ, ad alteram *C* ſtatutam ut quartam. Quod erat &c.

SCHOLION II.

NE verò acutus quiſpiam Geometra accuſare me poſſit, quaſi de induſtria in rem meam immutaverim Definitionem Euclidæam majoris, ac minoris proportionis; quoniam ego volo rationem primæ *A* ad ſecundam *B* majorem eſſe ratione tertiæ *C* ad quartam *D*; quoties (collatis inter ſe jam notis quibuſvis illis æquè multiplicibus) vel ſemel inveniatur multiplex primæ æqualis eſſe, aut major multiplici ſecundæ, dum ex æquo multiplex tertiæ vel minor eſt, vel non major multiplici quartæ; cum Euclides (in illa Def. 8. 5.) unicè id aſſumat, quoties multiplex primæ major ſit multiplici ſecundæ, & non etiam multiplex tertiæ major ſit multiplici quartæ: duas afferre hìc debeo clariſſimas reſponſiones, quæ omnem dubitationem ſuſtollant.

Prior reſponſio hæc eſt; quòd ipſe Clavius (prout ſuo loco inſinuavi) prædictam Definitionem ſic interpretatur: *Quòd ſi quando è contrario multiplex primæ deficiat a multiplici ſecundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad ſecndam minorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam*. Porrò nemo omnium neſcit *majus*, ac *minus* correlativè invicem dici. Igitur, juxta hanc interpretationem, tertia magnitudo dicetur habere majorem rationem ad quartam, quàm prima ad ſecundam; ſi quando contingat, ut multiplex tertiæ vel æqualis ſit, vel major multiplici quartæ, dum multiplex primæ minor eſt multiplici ſecundæ; atque id propterea eodem jure vice versâ. Cur verò (hoc ſtante) præfatus Clavius (cujus eximium in demonſtrando nitorem magni a me fieri

fateor)

fateor) non demonstraverit eam 26. 5. ex sola Definitione; ex eo evenisse vaticinor, quia aliàs non dubitabat de veritate illius ab aliis Interpretibus jam intrusi Axiomatis; unde fieri potuit, ut nobilius, aut expeditius fortasse censuerit a prima ipsa Definitione aliquantulum recedere.

Posterior, & longè potior responsio est, quæ sequitur. Licitum est unicuique definire, prout ipsi libuerit, terminos suæ facultatis; dum tamen ex unâ parte eos nunquam usurpet, nisi juxta Definitiones jam stabilitas; & ex altera accusari istæ non possint de confusione unius termini cum altero. Hoc autem loco nos esse in casu manifestè liquet. Nam constat, Definitiones æqualis, majoris, ac minoris proportionis traditas esse per membra opportunè contradictoria, inter quæ nec medium dari potest, nec inexpectata confusio. Quid enim clarius, minusque confusioni obnoxium; quàm quòd (sumptis quibusvis æquè multiplicibus primæ, ac tertiæ, ac rursum quibusvis secundùm eandem, vel quamlibet aliam multiplicationem; æquè multiplicibus secundæ, ac quartæ) si fiat comparatio multiplicis primæ cum multiplici secundæ, ac similiter multiplicis tertiæ cum multiplici quartæ, vel unà deficiant, vel unà excedant, vel unà æqualia sint? Similiter verò: quid clarius, minùsque rursùm confusioni obnoxium, quàm quòd (in defectu prædictæ uniformitatis) aliquando contingat, ut multiplex primæ vel major sit, vel saltem æqualis multiplici secundæ, dum interim multiplex tertiæ vel major non est, vel neque æqualis multiplici quartæ; aut vice versâ? Atque hinc (occlusâ necessitate alterius subdivisionis) clarissimè distinctas habemus Definitiones æqualis, majoris, ac minoris proportionis; inter primam, & secundam ex una parte; ex altera verò tertiam, & quartam. Plura alia in hanc rem hìc omitto, quia spectantia ad sequens in hac materia Principale Scholium.

SCHOLION III. *omnino Principale.*

NObilis quidam Nationis noſtræ Italicæ Scriptor, quem honoris cauſsâ hìc non nomino, quia verè eximium, ac magnum Geometram; nimius videri poteſt in accuſando tam frequenter Euclide ſuper Definitionibus terminorum. Aſſumo hìc præ cæteris expendendam accuſationem circa magnitudines proportionales. Præmittit laudatus Auctor neminem inficiari, quin ſexta illa Libri quinti Definitio *perplexa ſit, ignota, & ideo reſpuenda.* Rationem affert, quia *Definitio ſcientifica debet evidentiſſimè exponere naturam rei definitæ per paſſionem poſſibilem, veram, primam, & notiſſimam, per quam definitum diſtinguatur a quolibet alio ſubjecto.* At ego (cum bona venia tanti Viri) reponere poſſem, unum aliquem inter omnes eſſe Chriſtophorum Clavium, ipſi optimè notum, & aliàs in rem ſuam circa parallelas ab eodem citatum, qui tamen hanc ipſam circa proportionales magnitudines Euclidæam Definitionem maximè commendat, tueturque ab adverſis, aut extraneis interpretationibus. Sed præſtat meritum cauſæ diligentiùs inſpicere.

Admitto *Definitionem ſcientificam* tradi debere, prout ibi deſcribitur; omiſsâ dumtaxat illâ particulâ *primam*, de qua poſtea ſpeciatim agemus. Nam multiplicatio propoſitarum quatuor magnitudinum, ſimulque præſcripta collatio inter earundem multiplices, ſecundùm rationem *majoris, minoris*, aut *æqualis*, quæ ſemper, aut non ſemper conſiſtat, paſſio eſt *poſſibilis, vera*, & *notiſſima*, immo etiam (propter membra contradictoria) cognita neceſſaria, *per quam definitum diſtinguitur a quolibet alio non tali ſubjecto.* Ubi indignum foret tanto Viro; ſi quis cenſeret eum reſpicere ad infinitas ſecundùm quemlibet numerum propoſitarum magnitudinum præſcriptas multiplicationes, quas certè

certè mens humana assequi omnes distinctè non potest, & sic neque inter se conferre secundùm præscriptas rationes *majoris*, *minoris*, aut *æqualis*. Nam id necessarium non esse constare potest ex prima sexti, prout jam evidenter declaravi.

Venio ad ly *primam*. Atque hìc (cum bona rursum venia) satis mirari non possum, quomodo laudatus Vir provocare velit ad passionem *primam* in sensu veluti metaphysico, ex qua nempe, tanquam primo fonte, reliquæ proprietates ratione nostrâ promanare intelligantur. Si enim loquatur de passione *primâ* quò ad nos, tam certum est assignatam ab Euclide esse verissimè primam, quàm certum est, ejusmodi eam esse, ut inde reliquæ omnes huc usque notæ proportionalium passiones cum summa certitudine eruantur; quod utique notum est omnibus Geometris. In hac proinde materia distinguendum sic puto. Vel agitur de subjecto quopiam per aliquam experientiam aliunde cognito, ut sunt elementa vulgaria, mista, planetæ, stellæ, aliaque hujuscemodi: & in istis dico Definitionem tradi debere per talem passionem, quæ præcognita jam sit, eamque appello Definitionem *quid rei*. At ubi agitur de subjecto, quod nulli communi experientiæ subjaceat, unde ab omni non ipso supponi debeat jam discretum, quales procul dubio sunt magnitudines inter se proportionales, & tunc dico opportunius omnino esse procedere per Definitionem *quid nominis*, dum scilicet observentur hæc duo. Unum est; ut ne talis afferatur Definitio, quæ repugnet, seu non compræhendat magnitudines invicem commensurabiles, quæ nimirum sub datis quibusdam numeris exhiberi possint. Nam Definitio debet esse universalis, ac propterea non excludens magnitudines sub tali nomenclatura jam notas. Alterum est, ut nulla altera passio de ipso tali sic definito præsumatur, nisi quæ ex ipsa

tali

tali ſtatuta Definitione promanet. Atque ita certiſſimè; nullo refragante, procedit in hac materiâ Euclides.

Adeò igitur hac in parte reprehendi ipſe non poteſt, ut immo a quadraginta circiter annis in fine meæ Logicæ Demonſtrativæ ſic ſcripſerim, ac demonſtraverim. *Huc ſi reſpexiſſent doctiſſimi cæteroqui Geometræ, non tantùm peccaſſent, ut in dubium revocarent Definitionem ſextam Libri quinti Euclidis de æquè proportionalibus. Scilicet deponere noluerunt omnem prævium conceptum æquè proportionalium; unde factum eſt, ut quæ recipienda erat tanquam Definitio* quid nominis, *reſpiceretur ut concluſio Theorematica aliunde confirmanda.* Paucis: In eodem meo Opuſculo clariſſimè oſtendo non Matrem, ſed Filiam plurium præcedentium Demonſtrationum eſſe debere illam *Definitionem*, quam nobis laudatus Vir tanquam origine primam commendare intendit.

Nondum tamen rem omnem a primis uſque fibris diſcuſſi. Nam adhuc reprehendi ego poſſum, quòd illam Def. 8. 5. ita aſſumpſerim juxta Clavium; quaſi unâ aliquâ vice contingere non poſſit, ut multiplex primæ æqualis ſit multiplici ſecundæ, dum multiplex tertiæ minor eſt multiplici quartæ; quin juxta quandam aliam aſſumptam ex æquo multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplicem ſecundæ, dum multiplex tertiæ non excedit multiplicem quartæ; ac propterea unus quilibet priore loco dictus caſus ſatis ſit ad decernendum, quòd ratio primæ ad ſecundam major ſit ratione tertiæ ad quartam, cum aliis ab Euclide conſequenter demonſtratis. Quare hoc loco rem totam diſcutiendam aſſumo.

Sint igitur quatuor (fig. 52.) magnitudines, prima *A*, ſecunda *B*, tertia *C*, & quarta *D*; vel omnes quatuor in eodem genere; vel priores quidem in uno, & aliæ duæ poſteriores in alio ipſarum communi genere conſtitutæ. Aſſumptæ

etiam

etiam sint earundem, juxta præscriptum, æquè multiplices EF, IK, GH, LM; reperiaturque in uno tali casu EF quidem æqualis ipsi IK, at GH minor ipsâ LM. Dico proportionem primæ A ad secundam B majorem fore (juxta voces ipsas ab Euclide adhibitas in illâ Def. 8. 5.) proportione tertiæ C ad quartam D.

Demonstratur. Nam constat primò (ex Def. 6. 5.) hunc unicum casum sufficere, ut una proportio non dicatur esse alteri æqualis. Constat secundò (ex prædictâ Def. 8. 5.) unicum item casum sufficere, ut prima A dicatur habere ad secundam B majorem proportionem, quàm sit tertiæ C ad quartam D; si probetur unam aliquam esse multiplicationem inter præscriptas, juxta quam multiplex primæ A excedat multiplicem secundæ B, dum interim multiplex tertiæ C non excedit multiplicem quartæ D. Hunc verò casum demonstrandum assumo ex illo ipso casu proposito, in quo EF multiplex primæ A æqualis est ipsi IK multiplici secundæ B, dum GH multiplex tertiæ C minor est illâ LM multiplici quartæ D.

Esto enim portio NM excessus quo LM superat illam GH. Tum prædicta ipsa GH tali magnitudine XG augeri intelligatur, quæ & minor sit illo excessu NM, & sit pars quædam tertiæ C ab aliquo finito numero denominata. Deinde augeatur EF tali magnitudine FT, quæ sit pars primæ A, qualis XG pars est tertiæ C. Quoniam igitur sermo est de multiplicibus, sive per numeros integros, sive per fractos; erit ET æquè multiplex primæ A, ut XH est multiplex tertiæ C. Præterea manebunt, ut suprà, IK, & LM æquè multiplices secundæ B, & quartæ D. Atqui ET multiplex primæ A excedet tunc illam IK multiplicem secundæ B, dum interim XH multiplex tertiæ C adeò non excedit, ut immo deficiat a correspondente LM multiplici quartæ D. Igitur a casu proposito transitur demonstra-

tivè

tivè ad alterum, qui exprimitur ab Euclide in illâ Def. 8. 5. Quare constat de veritate, quam demonstrandam assumpseram.

Neque hìc remorari quempiam debet, quòd sæpe assumam divisionem cujusvis datæ rectæ in quotlibet præscriptas æquales partes. Nam constat divisionem ejusmodi non indigere doctrinâ æquè proportionalium, ut videri potest apud Clavium, qui hanc divisionem demonstrat post Prop. 40. Libri primi. Neque etiam accusari hìc possum, quòd ordine quodam præpostero usus fuerim; quia nempe, resolvendo magis quàm componendo demonstrare multa debui illustrando Euclidi necessaria. Nam facile est, si placeat, ipsum naturæ ordinem sequi.

Et primò censeo Euclidæam æquè proportionalium Definitionem pulcherrimam esse; & quia conceptam per voces communi intelligentiæ facillimas, quales sunt *multiplicatio*, *majus*, *minus*, *æquale*; & quia compræhendentem, sine ullâ necessariâ discretione, omnes magnitudines, seu rationales, seu quomodolibet irrationales.

Secundò censeo excludendum esse indecorum illud Postulatum, sub nomine Axiomatis intrusum; cum sine illo, & ex solis aliunde notis, etiam problematicè procedi possit circa omnes & lineas rectas, & figuras itidem rectilineas, opportunè invicem comparatas; prout suprà non modò declaravi, verùm etiam ex parte demonstravi; unde utique opportunior postea, si opus sit, videri possit similis præsumptio circa reliquas omnes magnitudines.

Tertiò censeo, sine ullo adjecto extraneo Postulato, ex sola Euclidæa æquè Proportionalium Definitione tale elici posse veluti Axioma, quod tutissimè per omnem Geometriam versetur. Ejusmodi autem est: *Omnis magnitudo ad aliam quamlibet ejusdem generis magnitudinem habet rationem vel æqualem, vel majorem, vel minorem illâ, quæ est cujusvis*

jusvis alterius magnitudinis ad aliam quamlibet in suo earumdem proprio genere constitutam magnitudinem. Tum verò, post duo alia a me demonstrata Lemmata, sic tandem stabilio integrum Axioma, quod sit immediatè utile in qualibet materia: *Habebit omnis quæpiam tertia magnitudo* C *ad quamlibet aliam quartam magnitudinem* D *in eodem cum ipsâ genere constitutam; vel rationem æqualem illi, quæ est cujusdam primæ magnitudinis* A *ad quamlibet secundam magnitudinem* B, *quæ in eodem suo proprio cum magnitudine* A *genere consistat; vel tertia illa magnitudo* C *habebit majorem rationem non modò ad magnitudinem* D, *verùm etiam ad aliquam magnitudinem majorem illâ magnitudine* D; *vel tandem habebit rationem minorem non modò ad prædictam magnitudinem* D, *verùm etiam ad aliquam magnitudinem eâdem magnitudine* D *minorem*.

Quòd autem Axioma ejusmodi opportunissimum sit, jam suprà ostendi, sumptâ experientiâ a secunda duodecimi. Sed idém rursum experiri volo sub tota sua generalitate, circa illam 18. 5. ut magis constet nullam fuisse, in ipso fermè Geometriæ initio, necessitatem illius intrusi Postulati.

Proponit ibi Euclides (fig. 53.) compositas magnitudines proportionales fore, si divisæ proportionales sint; ut putà, ita fore *AC* ad *BC*, ut *DF* ad *EF*; si divisæ proportionales sint; nimirùm, si ita sit *AB* ad *BC*, ut *DE* ad *EF*.

Demonstratur. Et primò non erit *AC* ad quandam *YC*, minorem eâ *BC*, ut *DF* ad *EF*; quia dividendo ita foret (ex præc. 17. 5.) *AY* ad *YC*, ut *DE* ad *EF*, sive (ex 11. 5.) ut *AB* ad *BC*; cum divisæ istæ magnitudines suppositæ sint proportionales. Hoc autem absurdum est, contra 8. ejusdem 5. ex qua constat rationem illius *AY* ad *YC* majorem fore ratione prædictæ *AB* ad *BC*.

Simili modo oſtendetur non eſſe AC ad quandam AX, minorem prædictâ AB, ut DF ad EF; quia uniformiter (ex prædictis 17. & 11. 5.) deberet eſſe AX ad XC, ut AB ad BC; contra eandem 8. 5.

Tum ex meo illo Axiomate, ſub adnexis Lemmatis perfectè conſtituto, demonſtro principale intentum. Nam AC ad BC habebit vel æqualem, vel minorem, vel majorem rationem, quàm DF ad EF. At non minorem, neque majorem; quia, in qualibet vicinitate punctorum Y, & X ad punctum B, erit ſemper (ſtante proportionalitate jam dictarum partium) ratio illius AY ad YC, major, & ratio illius AX ad XC, minor ratione prædictæ AB ad BC, ſive DE ad EF. Igitur; ne factâ incidentiâ punctorum Y, & X in idem punctum B, ex liberâ permiſsâ deſtinatione, debeat eſſe ratio AB ad BC & major, & minor ratione illius DE ad EF; conſequens eſt ita fore AC ad BC, ut DF ad EF; dum ſcilicet diviſæ illæ magnitudines AB, BC, & DE, EF ſupponantur proportionales. Quod &c.

Sed quia hìc agitur de ſtabiliendo uno modo argumentandi circa magnitudines proportionales, qui frequentiſſimus eſt apud Geometras; nolo fidere (in hac ſummè abſtractâ rationum ſimilitudine) illi ſoli communi notioni; quòd, ubi conſiſtitur in eodem infimo genere, non poſſit ſucceſſivè ordinatim tranſiri de majori in minus, niſi tranſeundo per æquale. Itaque ſic rurſum argumentor ex eodem meo, noviter illuſtrato Axiomate. Nequit AC ad BC habere v. g. majorem rationem, quàm DF ad EF, quin majorem etiam habeat rationem ad quandam XC, majorem prædictâ BC, dum nempe aliàs ſupponatur ita eſſe AC ad BC, ut DF ad EF. Hæc autem ſimul ſtare non poſſe, ita demonſtro.

Quandoquidem rurſum (ex illo eodem meo Axiomate)

mate) haberet AC ad quandam TC, majorem illâ XC, rationem adhuc majorem, quàm sit ejusdem DF ad EF; atque ita semper usque ad ipsum punctum A. Hoc autem ex ipso Euclide certissimè absurdum est; quòd nempe magnitudo aliqua ad æqualem habeat majorem rationem, quàm tota quæpiam DF ad unam sui partem EF. Unicè igitur restat, ut harum rationum majorum unus quispiam sit terminus, si non intrinsecus, at saltem merè extrinsecus, ut putà in eo puncto T; adeò ut nempe habeat quidem AC ad TC rationem minorem, quàm DF ad EF; sed rursum ad quamlibet, minorem illâ TC, majorem rationem obtineat. Verùm hoc etiam repugnat meo illi Axiomati. Si enim habet AC ad TC minorem rationem, quàm DF ad EF, habebit etiam AC ad aliquam, quæ minor sit eâdem TC, minorem adhuc rationem illius DF ad EF. Non igitur subsistere potest terminus ille extrinsecus constitutus in illo quolibet designato puncto T. Inde autem fit, ut ratio AC ad BC nequeat esse major ratione DF ad EF. At simili modo ostendetur rationem DF ad EF majorem non esse ratione AB ad BC. Quare (ex illo meo Axiomate) unicè restat, ut ratio illius DF ad EF non nisi æqualis sit rationi ipsius AC ad BC, dum scilicet divisæ magnitudines AB, BC proportionales supponantur divisis magnitudinibus DE, EF. Quod erat &c.

Atque hæc satis jam sunt ad ostendendam illius Definitionis Euclidææ non modò certitudinem, verùm etiam opportunitatem ad repellendum intrusum illud, sub nomine Axiomatis, Postulatum.

LIBRI SECUNDI

PARS SECUNDA.

In qua expenditur quinta Definitio Libri ſexti Euclidæi.

DEfinitio eſt, quæ ſequitur: *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem.*

Definitionem hanc egregiè more ſuo elucidat Clavius, qui nempe ad Def. 10. Lib. 5. jam explicaverat, quo ſenſu una ratio dicatur penes Euclidem alterius cujuſdam *duplicata*, *triplicata*, atque ita conſequenter. Sed placet rem totam a primis uſque initiis diligentiùs ſcrutari; nimirum hìc addendo, quæ in priore hujus Libri parte videri potuiſſent importuna.

Nam prælaudatus, Nationis noſtræ Italicæ, eximius Geometra ipſam etiam Libri quinti Def. 3. accuſat, ubi legimus: *Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis mutua quædam, ſecundùm quantitatem, habitudo*; ac ſimiliter Def. 4. ubi habemus: *Proportionem eſſe harum rationum ſimilitudinem*. Quaſi verò (inquam ego) Definitiones iſtiuſmodi quidquam amplius continere deberent, præter abſtractos quoſdam terminos, grammatico more ibi explicatos, ſed poſtea per voces communi uſu notiſſimas philoſophicè explicandos, ſine periculo ullius confuſionis; prout fit in Definitionibus ſextâ, & octavâ ejuſdem Libri.

Quid verò, ſi latinus interpres malè poſuerit *quantitatem*, cum magis debuerit ſcribere *quotitatem*, prout interpretatur, ac demonſtrat ex Græco Euclidæo textu, omnimodè laudandus Joannes Valliſius? Tunc enim multò magis,

magis, etiam ante ſubſequentes Definitiones, promptum foret intelligere non loqui ibi Euclidem de qualicunque habitudine, ſeu relatione unius magnitudinis ad alteram, ſed de illa dumtaxat, juxta quam una vel eſt alteri æqualis, vel tali quodam modo alterâ major, aut minor. Ubi; ne quis erraret circa magnitudines invicem comparatas, notumque faceret ſe loqui de magnitudinibus ejuſdem generis; ſubdit Definitionem quintam, in qua dicit: *Rationem inter ſe habere magnitudines, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare*: Unde utique conſtat nullam eſſe v. g. cujuſvis lineæ rationem ad quamlibet ſuperficiem, quia nulla linea quantumvis multiplicata ſuperare poteſt vel minimam quampiam ſuperficiem.

Quo loco fateor præclarum Geometram Chriſtianum Volfium bene obſervare in ſuis Elementis Arithmeticæ Cap. III. Schol. I. quòd tertia illa Euclidæa Definitio *videri poteſt incompleta*; quia nempe *dantur & aliæ magnitudinum relationes, quæ ſunt conſtantes, nec tamen in rationum numero continentur*: Ubi ex Trigonometria in exemplum affert relationem *ſinus recti ad ſinum complementi*. Quamvis enim certiſſimum ſit talem eſſe habitudinem, ſeu relationem cujuſvis ſinus recti ad ſinum correſpondentis complementi, ut quadrata utriuſque ſinus ſimul ſumpta æquent quadratum ſinus totius; aliunde tamen ſcimus non eandem eſſe *rationem* cujuſvis ſinus recti ad ſinum correſpondentis complementi, quæ eſt alterius ſinus recti ad ſinum ſibi correſpondentis complementi. Unde infert non idem eſſe hac in re *habitudinem*, ſeu *relationem* ex una parte, & ex altera *rationem*, juxta communem Geometrarum intelligentiam.

Nihilominus dico, neque ex hoc capite accuſari poſſe Euclidem. Nam in ſua Definitione dicit; mutua *quædam* ſecundùm quantitatem *habitudo*. Qui autem dicit

quan-

quandam habitudinem, certè non vult comprahendere omnes habitudines, ſeu relationes. Et hìc rurſum expendere debeo ly *ſecundùm quantitatem*. Quis enim putet loqui ibi Euclidem de *quantitate* metaphyſico more expenſâ, juxta quam unum corpus dicitur alteri naturaliter impenetrabile; & non magis loqui de *extenſione* in ſuo tali quodam genere, juxta quam una magnitudo dicitur, relatè ad alteram, vel æqualis, vel major, vel minor? Et ſanè ad interrogationem *quanta ſit* quæpiam linea recta, reſpondebitur v. g. palmaris, bipalmaris, tripalmaris, aut alio quovis modo, cum relatione (ſeu per numeros integros, ſeu per fractos, ſive etiam per minutiam) ad palmum, aut ad aliam longitudinem jam notam. Atque ita uniformiter circa alias cujuſvis generis magnitudines.

Unde infero tertiam illam Def. Euclidæam nulli querelæ obnoxiam eſſe, etiamſi inſpiciatur ſeorsùm a conſequentibus. Quòd enim prælaudatus Chriſtianus Volfius *rationem* definiat *eſſe eam homogeneorum relationem, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius ſine tertio homogeneo aſſumpto*, veriſſimè quidem dicit; quia hinc manifeſtum fit, non omnem *relationem*, etiam conſtantem, unius talis magnitudinis ad alteram, ut putà ſinus recti ad ſinum complementi, eſſe *rationem*; cum quantitas ſinus complementi determinari non poſſit ex quantitate ſinus recti, niſi aſſumatur tertium homogeneum, quale eſt ſinus totus: ſed non ideo repræhendi hinc poteſt Euclides, quaſi *incompletè* definiverit; cum hæc ipſa diſcretio manifeſta ſit in illis ſuis vocibus *ſecundùm quantitatem*, acceptâ nimirum *quantitate* pro *quotitate*, prout certiſſimè intelligi ſic debere paulò ante declaravi, ſumpto argumento ex interrogatione ſuper *quantitate* talis cujuſdam propoſitæ magnitudinis. Atque ita à prima uſque ætate intellectum a me fuiſſe Euclidem, fateri omnibus poſſum. Hoc autem ſtante

vis

vix intelligo, quomodo dubitari possit, an ex quantitate unius magnitudinis decerni possit immediatè quantitas alterius, dum aliàs nota sit prædicta unius ad alteram *secundùm quantitatem* habitudo: Nam qualiter una illarum nota erit, taliter rursum, sine alio extrinsecùs assumpto, nota erit etiam altera ex illa sola præcognita habitudine.

Post hæc gradum facio ad illam quintam Def. sexti: Ubi dico falsissimum esse, quòd sub specie simplicis Definitionis Axioma quoddam intrudatur, non permittendum sine demonstratione.

Et primò: Si sermo sit de magnitudinibus in suo tali quodam ordine commensurabilibus, sive rationem inter se habentibus, quæ est alicujus numeri (aut integri, aut fracti, aut cujusvis minutiæ) ad alium quempiam hujusmodi numerum, ita ut nempe prima quædam magnitudo *A* per talem quempiam seu numerum, seu minutiam multiplicata, æqualis fiat secundæ magnitudini *B*; adeò clarè, & immediatè ostendetur veritas illius Definitionis, ut etiam Axiomatis loco æquissimè censeri possit.

Sint enim quatuor quælibet (fig. 54.) ejusdem generis magnitudines, prima *A*, secunda *B*, tertia *C*, & quarta *D*, prædicto modo invicem rationales. Dico rationem primæ *A* ad quartam *D* componi ex rationibus magnitudinum intermediarum, hoc est primæ *A* ad secundam *B*, secundæ *B* ad tertiam *C*, & tertiæ *C* ad quartam *D*. Scilicet dico magnitudinem *A* toties contineri in magnitudine *D* (sumpto ly *toties* pro quolibet numero, sive integro, sive fracto, sive unitate, aut qualibet ipsius unitatis minutiâ) quotus fuerit numerus ortus, aut quælibet unitatis minutia, ex ductu inter se numerorum prædicto modo sumptorum, qui significent quoties magnitudo *A* continetur in magnitudine *B*, hæc in magnitudine *C*, & ista in magnitudine *D*. Sint porrò isti numeri *T*, *X*, *Y*, qui inter

se

se ducti procreent numerum Z?

Jam sic. Constat, quòd magnitudo A multiplicata per numerum T facit magnitudinem B, & hæc multiplicata per X facit magnitudinem C, quæ rursum multiplicata per Y facit magnitudinem D. Igitur A in T, in X, in Y producit magnitudinem D. Ponitur autem, quòd numeri T, X, Y inter se multiplicati faciant numerum Z. Igitur magnitudo A multiplicata per numerum Z facit eam magnitudinem D. Rursum constat, quòd numerus T exprimit illam quantitatem, seu *quotitatem*, juxta quam prima magnitudo A taliter se habet ad secundam magnitudinem B, nimirum prout unitas se habet ad eum numerum T; atque ita uniformiter de secunda magnitudine B relatè ad tertiam C, prout unitas se habet ad eum numerum X; ac tandem de hac tertia C ad quartam D, prout unitas habet ad reliquum numerum Y.

Simili modo ostendetur exhiberi ab eo numero Z (qui nempe oritur ex ductu prædictorum inter se numerorum T, X, Y) illam quantitatem, seu *quotitatem*, juxta quam prima magnitudo A taliter se habet ad quartam magnitudinem D, nimirum prout unitas se habet ad eundem numerum Z. Cum ergo hic numerus Z compositus sit ex prædictis numeris T, X, Y, manifestum fit nos esse in casu illius Def. Euclidææ. Si enim quantitates, seu quotitates rationum primæ A ad secundam B, secundæ B ad tertiam C, ac tandem tertiæ C ad quartam D, invicem multiplices, gignaturque quantitas, seu quotitas Z, hæc porrò exhibebit rationem primæ magnitudinis A ad quartam D, rationem idcirco compositam ex rationibus magnitudinum intermediarum. Quod utique erat demonstrandum.

Tum secundò: non diffiterer istud ipsum demonstrari a me posse, dum sermo sit de magnitudinibus quomodolibet irrationalibus. Sed non vacat tantum laborem impenpendere in re non necessariâ. Nam dico non nisi inique hac in parte Euclidis nomen vexatum fuisse; quia nempe (ad ipsius usum) nullam ibi veritatem proponit præter eam, quæ in usu *puri nominis* consistit. Ad quod explicandum, seu mavis demonstrandum, capere licet exemplum ex Propos. 23. lib. 6. in qua Euclides demonstrat æquiangula parallelogramma eam inter se rationem habere, quæ ex rationibus laterum componitur.

Sint enim duo talia parallelogramma (fig. 55.) unum *ABCD*, & alterum *CEFG* ita constituta, ut anguli ad punctum *C* sint æquales, ac propterea in unam rectam lineam coeant ipsæ *BCG*, & *DCE*: Tum compleatur alterum parallelogrammum *BCEH*, fiatque, ut latus *BC* unius parallelogrammi ad latus *CG* alterius, ita recta quæpiam linea *I* ad *K*, & ut latus *DC* ad latus *CE*, ita illa *K* ad alteram *L*. Jam sic. Constat (ex 1. sexti) parallelogrammum *AC* ita fore ad parallelogrammum *CH*, ut basis *DC* ad basim *CE*, sive (ex 11. quinti) ut *I* ad *K*. Rursum, eodem jure, parallelogrammum *CH* ita erit ad parallelogrammum *CF*, ut basis *BC* ad basim *CG*, sive (ex eâdem 11. quinti) ut *K* ad *L*. Igitur ex æquo (nimirum ex 22. quinti) ita erit parallelogrammum *AC* ad parallelogrammum *CF*, ut *I* ad *L*.

Atque id est, quod intelligit Euclides, dum dicit rationem unius parallelogrammi ad alterum æquiangulum parallelogrammum componi ex rationibus laterum: Id enim unicè vult, ut ratio prædicta æqualis sit rationi cujusdam rectæ lineæ *I* ad alteram *L*, inter quas interponatur quæpiam *K*, per quam continuentur duæ rationes æquales rationibus prædictorum laterum; dum scilicet ita sit *I* ad *K*, ut latus *DC* unius parallelogrammi ad latus *CE* alterius; & rursum ita sit *K* ad *L*, ut est prioris parallelogrammi alterum latus *BC* ad alterum posterioris parallelogrammi latus *CG*.

Eodem planè modo interpretari debemus Propos. 19. & 20. ejusdem Sexti, in quibus legimus similia triangula, & quælibet similia itidem poligona, duplicatam habere inter se eam rationem, quæ est lateris homologi ad latus homologum. Ibi enim nihil aliud demonstrari debere intelligitur, nisi quòd ratio unius trianguli, aut poligoni, ad alterum simile triangulum, aut poligonum, æqualis sit rationi cujusdam rectæ lineæ *I* ad alteram *L*, inter quas interposita sit quæpiam *K*, per quam continuentur duæ rationes æquales illi, quæ est cujusdam lateris unius trianguli, aut poligoni ad latus homologum alterius trianguli, aut poligoni.

Præterea (ut nullus supersit dubitationi locus) simili itidem modo interpretari debemus Propos. 33. undecimi, ubi legimus: Similia solida parallelepipeda esse inter se in triplicata ratione laterum homologorum. Nam ibi nihil aliud demonstrandum assumitur, nisi quòd ratio unius parallelepipedi ad alterum simile parallelepipedum æqualis sit rationi cujusdam rectæ lineæ *H* ad alteram *L*, inter quas duæ quædam *I*, & *K* interpositæ sint, per quas continuentur tres rationes æquales illi, quæ est cujusdam lateris unius parallelepipedi ad latus homologum alterius parallelepipedi.

Sed nolo dissimulare, quòd jam inutilis fieret illa Definitio, super qua disputamus. Nam respondeo voluisse utique Euclidem rationem veluti reddere nominis ab ipso assumpti, ita ut nempe ad eum modum una aliqua ratio intelligatur ex pluribus rationibus componi, quo unus quispiam numerus ex pluribus numeris invicem multiplicatis exoriri intelligitur, & componi; sed eâ tamen nusquam violatâ lege, ut nunquam ad demonstrandum eam definitionem adhibeat, nisi antea ita omnes terminos disponat, ut locum habere possit demonstratio *ex æquo* juxta

præ-

prædictam 22. quinti. Atque ita semper faciunt omnes magni Geometræ tam veteres, quàm recentiores; quod sanè necessarium præsertim est, ubi componendæ invicem sint rationes magnitudinum diversorum generum, ut putà linearum, planorum, solidorum, velocitatum, temporum, & ejusmodi. Tunc enim certum est has omnes rationes ex utrâque parte reduci primùm debere ad unam aliquam talium magnitudinum speciem, ut postea detur locus alicui argumentationi *ex æquo*; nimirum vel ad probandam (ex illa 22. quinti) æqualem rationem inter extremas; vel ad probandam inter easdem unam rationem alterâ majorem, ex unâ aliquâ consequentium ejusdem Libri quinti Propositionum. Unde tandem constat, illam 5. Def. sexti nulli difficultati obnoxiam esse; utpotè quæ *solius nominis* impositionem decernit, nulli postea ad demonstrandum usui futuram.

APPENDIX.

Atque hìc opportunum est observare, nullius Analyticæ ope decerni posse rationem datæ cujusdam figuræ, etiamsi rectilineæ, ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam, nisi priùs stabilitum supponatur Euclidæum illud Axioma, unde pendet doctrina parallelarum.

Demonstratur. Præmitto autem communes esse Analyticæ, & Arithmeticæ vulgari, regulas omnes additionis, subtractionis, divisionis, & extractionis radicum; quousq; nempe in eodem infimo jam stabilito entis genere consistitur. At ubi transire oporteat de genere in genus, ut putà (per multiplicationem, seu ductum cujusdam rectæ lineæ in alteram rectam lineam) de mera longitudine in superficiem planam; tum consimiliter de hac (per quandam rursum rectam lineam multiplicatâ) in solidum trinæ dimensionis; atque ita ascendendo per novas multiplicationes ad altiores conceptibiles gradus plurium dimensionum; quod utique uniformiter valet de divisione, per quam ad inferiores gradus descenditur: Tunc enimverò censeo, nullum ab Analytica subministrari posse Principium, quo fulciantur præscriptæ ab ipsa operationes ad assequendam veritatem.

Nam constat duas intelligi posse figuras rectilineas; unam (fig. 55.) *DABC*, & alteram *CEFG*; quarum & noti sint anguli ad puncta *D*, *C*, *G*, ut putà omnes quatuor recti; & rursum nota sint perpendicula *DA*, *CB*, *CE*, *GF*, nimirum æqualia singula uni palmo; ac tandem notæ sint ipsæ bases *DC*, *CG*; prior quidem v. g. unius palmi, & altera duorum. Ex his autem rursum constat, datas fore positione ipsas rectas *AB*, *EF*, nimirum jungentes ipsarum extrema puncta, quæ supponuntur data in sua tali positione.

His positis: audire cupio ab Analyticâ Principium aliquod, ex quo decerni possit ratio prioris rectilineæ figuræ *DABC* ad alteram itidem rectilineam *CEFG*. Respondebit quispiam rationem esse, ut basis *DC* ad basim *CG*; addetque demonstrari id posse (jure quodam Analyticæ proprio) ex 18. septimi; ubi habemus, numeros genitos ex duobus, unum quempiam multiplicantibus, eandem inter se habere rationem, quam multiplicantes.

Et ego quidem non renuo jus quoddam hac in parte proprium Analyticæ præ Arithmeticâ vulgari. Itaque agnosco rectam *DA*, quæ ad angulos rectos semper excurrat super rectâ *DC*, quoad usque congruat ipsi *CB*, toties multiplicari, quot sunt quomodolibet distinguibilia puncta in eâdem *DC*; adeò ut propterea superficies quædam *DABC* intelligi possit genita ex illâ *DA* multiplica-

tâ

tâ per *DC*. Tum simili rursum modo agnosco, rectam *CE*, quæ ad angulos rectos semper excurrat super rectâ *CG*, quoad usque congruat ipsi *GF*, toties multiplicari, quot sunt quomodolibet distinguibilia puncta in eâ *CG*; adeò ut similiter superficies quædam *CEFG* intelligi possit genita ex prædictâ *CE*, sive ipsius æquali *DA*, multiplicatâ per *CG*.

At hoc opus, hic labor: Decernere enim oportet, quænam sint istæ superficies genitæ, una *DABC*, & altera *CEFG*, circa quas demonstratum agnosco fore eas inter se, ut bases *DC*, *CG*.

Si enim præsumere quis velit non alias esse modò dictas superficies, præter illas, quas jam supposuimus concludi a duabus illis rectis, unâ *AB*, & alterâ *EF*, jungentibus extremitates illorum quatuor æqualium perpendiculorum, quæ supponuntur in eodem plano insistere rectis *DC*, *CG*: Is enimverò convinci posset de manifestâ petitione principii; cum id ipsum maximè inquiratur, an scilicet utraque linea jungens extremitates etiam intermediorum perpendiculorum sit ipsa etiam linea recta, & non magis aut semper cava, aut semper convexa versùs partes suæ basis, juxta diversam hypothesin aut anguli acuti, aut anguli obtusi; quod quidem satis constat ex dictis in secunda Parte mei primi Libri.

Præterea non renuo, quin demonstrari uniformiter possit ab Analyticâ, quòd ratio unius superficiei genitæ *DABC* ad alteram superficiem genitam *CEFG* (quamvis ipsæ *DA*, & *CE* ponantur invicem inæquales) componatur ex rationibus perpendiculi *DA* ad perpendiculum *CE*, seu perpendiculi *CB* ad perpendiculum *GF*; ac rursum basis *DC* ad basim *CG*; dum scilicet ipsæ *AB*, *EF* ponantur jungere extremitates omnium æqualium perpendiculorum a subjectis basibus erectorum: Atque id insuper

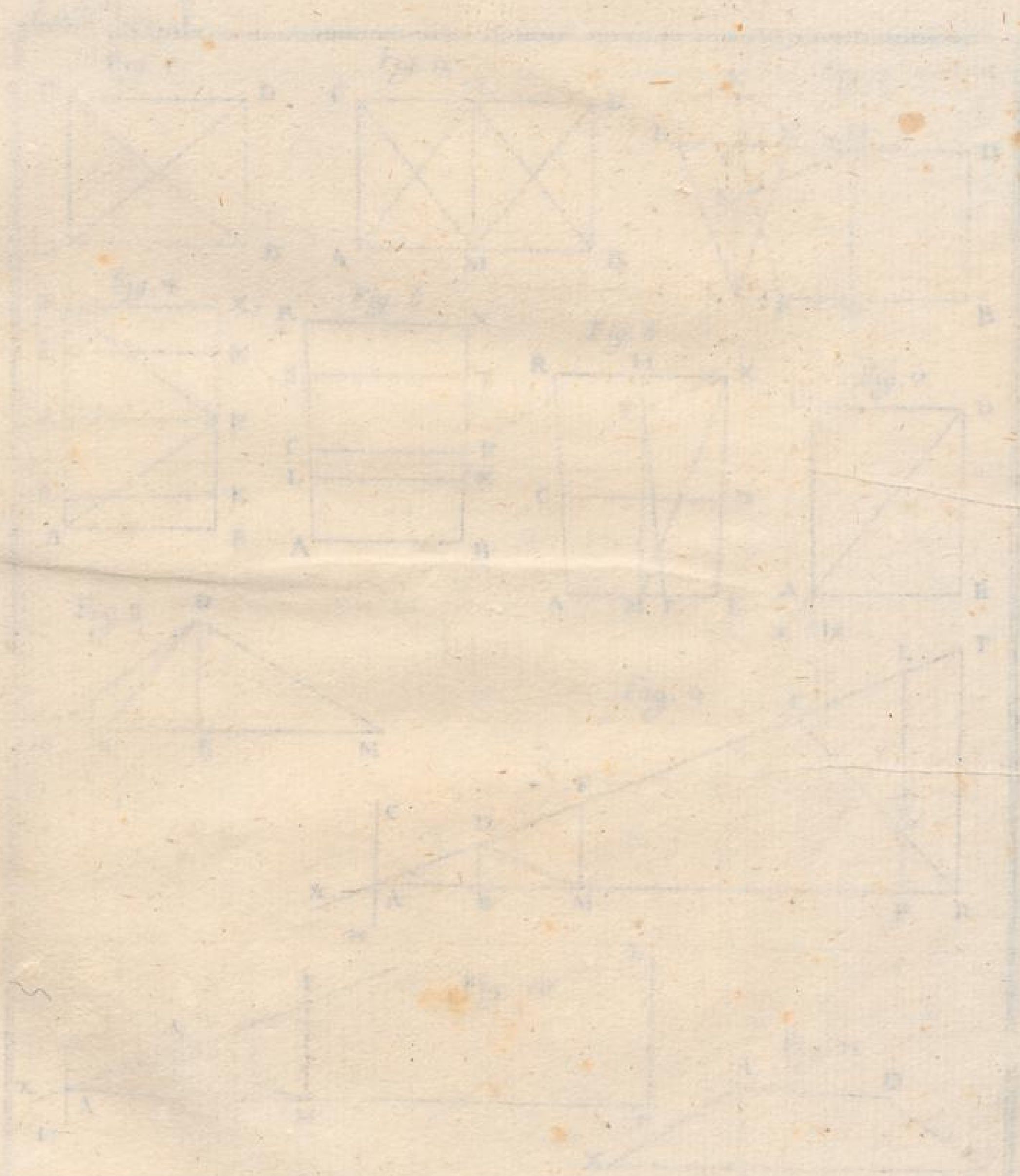
multis

multis aliis modis. At semper manebit quæstio circa jungentes extrema puncta illorum perpendiculorum. Quapropter tandem statuo recurri semper oportere ad Geometriam, quæ nempe ex illo stabilito Euclidæo Axiomate demonstret naturam talium linearum.

Ex quibus omnibus satis constat, nullius Analyticæ ope decerni posse rationem datæ cujusdam figuræ, etiamsi rectilineæ, ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam, nisi priùs stabilitum supponatur Euclidæum illud Axioma, unde pendet doctrina parallelarum. Quod &c.

Atque hæc sufficere jam possunt ad vindicandum Euclidem a nævis eidem objectis.

FINIS TOTIUS OPERIS.



partis alia media. At semper manebit quæstio circa in[illegible] [illegible] perpendicularum. Qua[illegible] [illegible] semper [illegible] ad Geo[illegible], quæ nunquam illo stabilito [illegible] Axioma[illegible] [illegible] hucusque.

[illegible] constat; nullam [illegible] [illegible] posse rationem datæ cujuscunque figuræ [illegible], ad alteram quamlibet datam lineam recti[illegible] [illegible] stabilitam [illegible] Euclideum illud Axioma, unde pendet doctrina parallelarum. Quare, &c.

Atque hæc sufficiant jam possunt ad vindicandum Euclidem a nævis eidem objectis.

FINIS TOTIUS OPERIS

TABULA I.

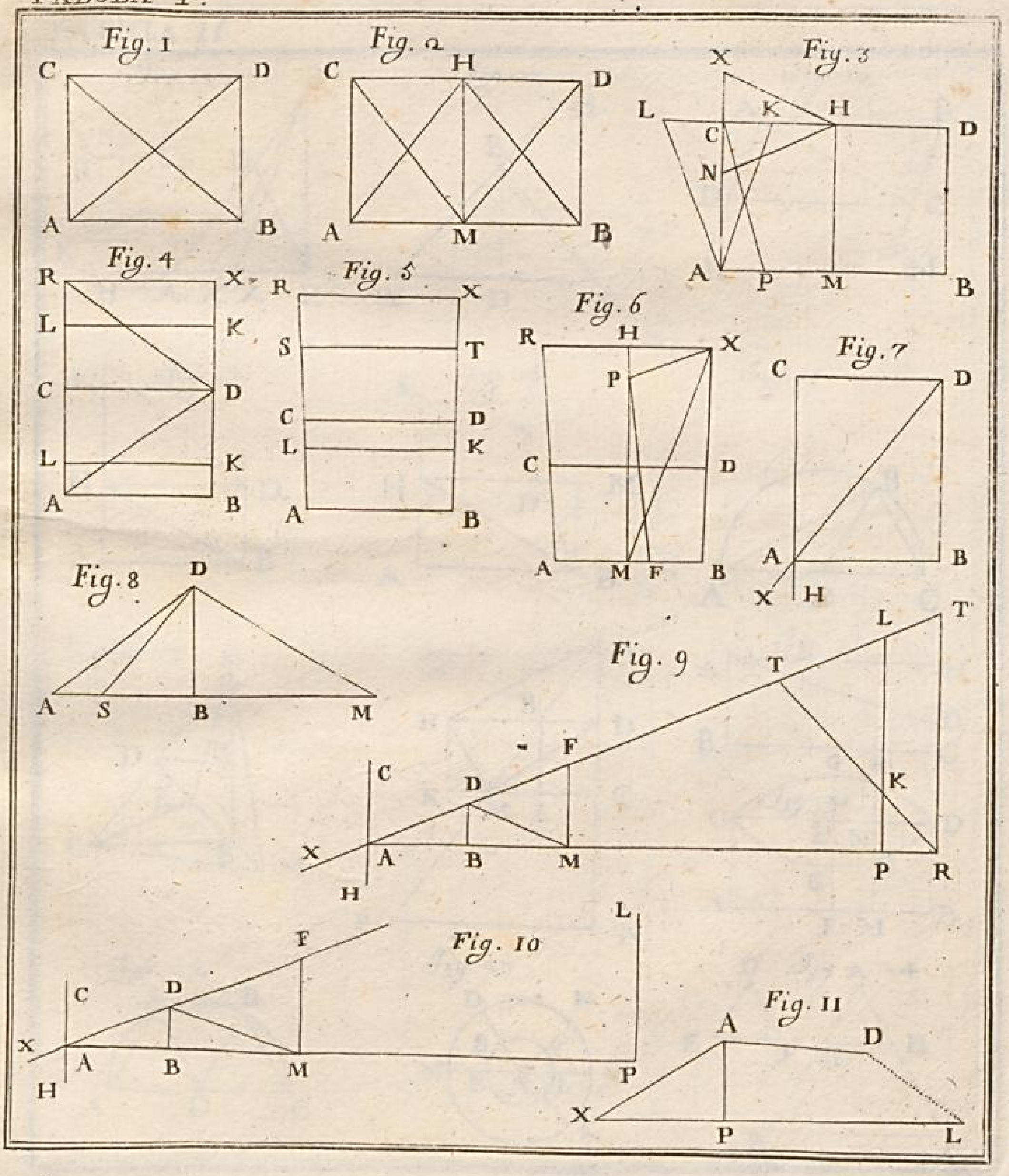


Fig. 1
C D A B
Fig. 2
C H D A M B
Fig. 3
X L K H C D N A P M B
Fig. 4
R X L K C D L K A B
Fig. 5
R X S T C D L K A B
Fig. 6
R H X P C D A M F B
Fig. 7
C D A B X H
Fig. 8
D A S B M
Fig. 9
L T T C F D K X A B M P R H
Fig. 10
L F C D X A B M P H
Fig. 11
A D X P L

TABULA II.

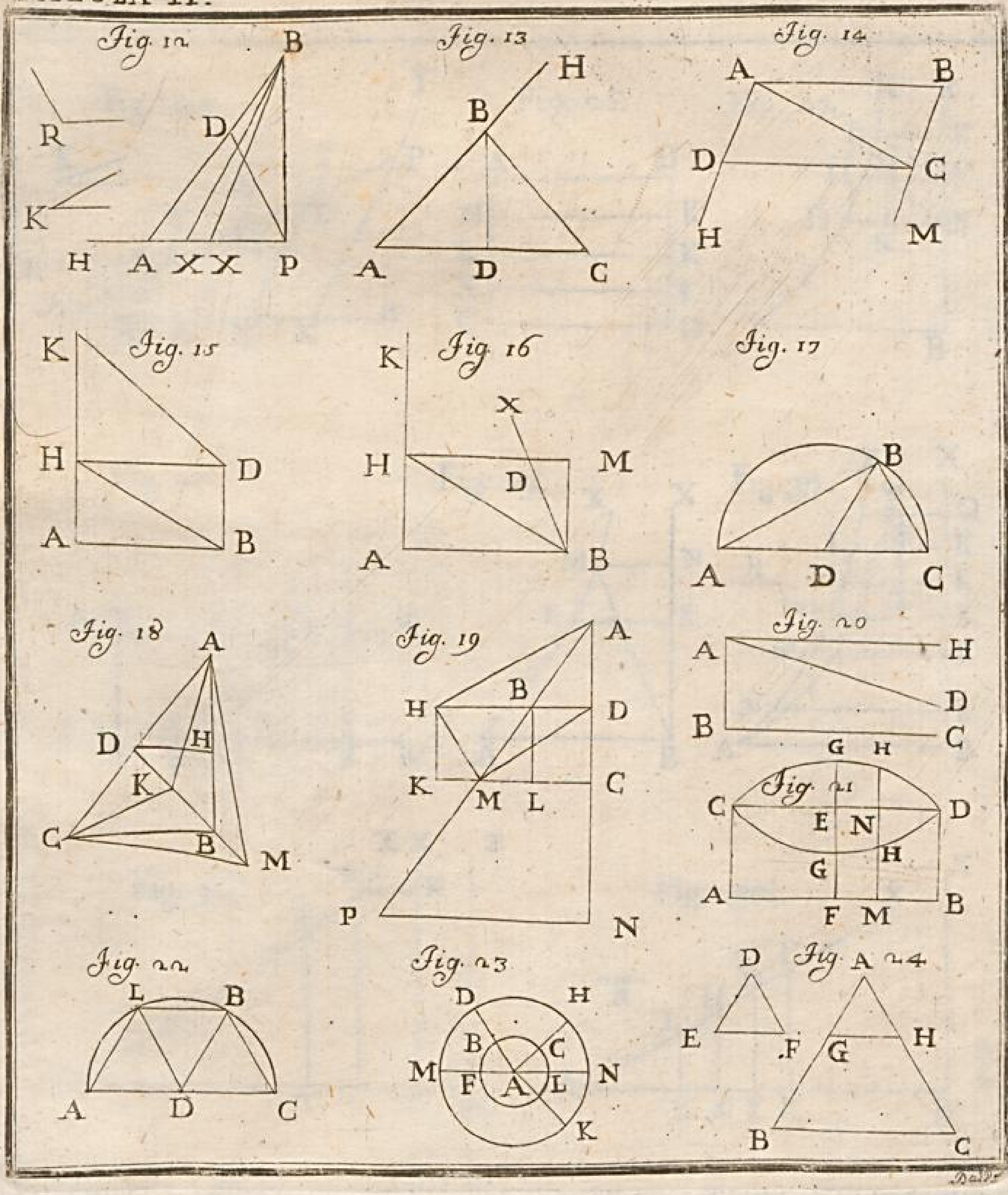


Fig. 12
B R D K H A X X P
Fig. 13
H B A D C
Fig. 14
A B D C H M
Fig. 15
K H D A B
Fig. 16
K X H M D A B
Fig. 17
B A D C
Fig. 18
A D H K C B M
Fig. 19
A H B D K M L C P N
Fig. 20
A H D B C
Fig. 21
G H C D E N H G A F M B
Fig. 22
L B A D C
Fig. 23
D H B C M F A L N K
Fig. 24
D A E F G H B C

TABULA III.

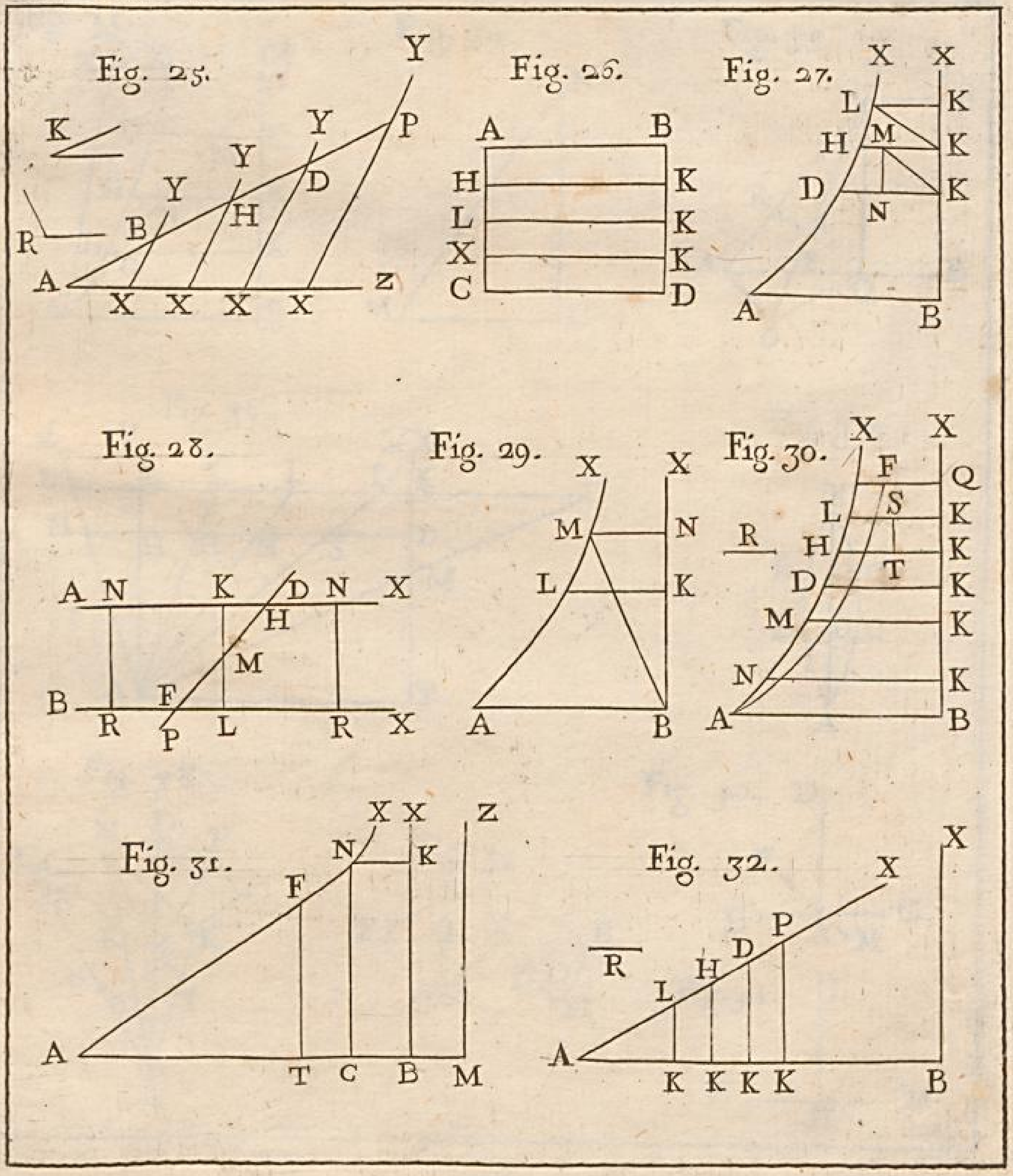


Fig. 25.
Y Y Y Y P K R B H D A X X X X Z
Fig. 26.
A B H K L K X K C D
Fig. 27.
X X L K H M K D K N A B
Fig. 28.
A N K D N X H M B F R P L R X
Fig. 29.
X X M N L K A B
Fig. 30.
X X F Q L S K R H K T D K M K N K A B
Fig. 31.
X X Z N K F A T C B M
Fig. 32.
X X R P D H L A K K K K B

TABULA IV.

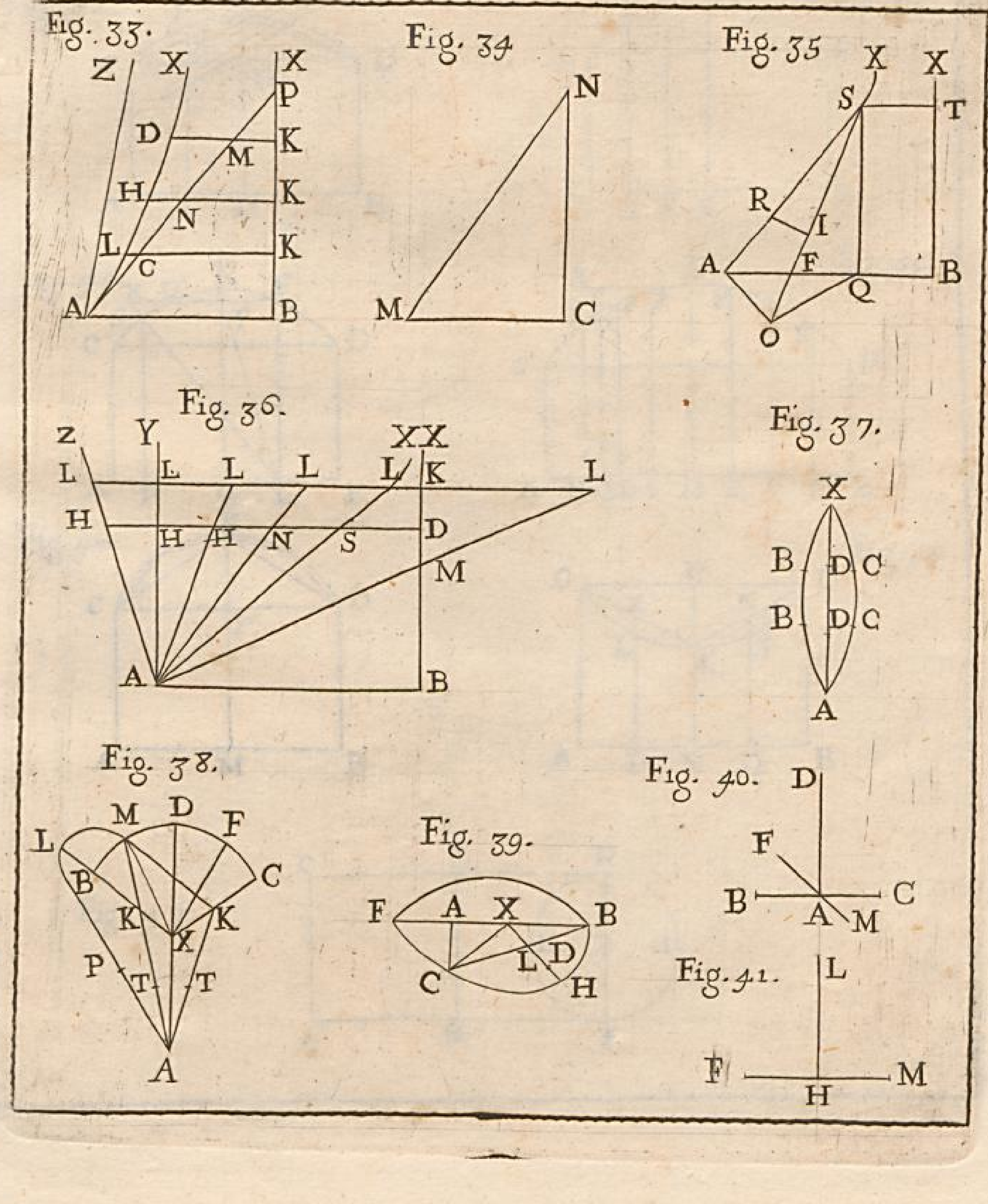


Fig. 33.
Z X X P D K M H K N L K C A B
Fig. 34
N M C
Fig. 35
X X S T R I A F B Q O
Fig. 36.
Z Y XX L L L L L K L H H H N S D M A B
Fig. 37.
X B D C B D C A
Fig. 38.
M D L F C B K K X P T T A
Fig. 39.
F A X B L D C H
Fig. 40.
D F B C A M
Fig. 41.
L F M H

TABULA V

Fig. 42.

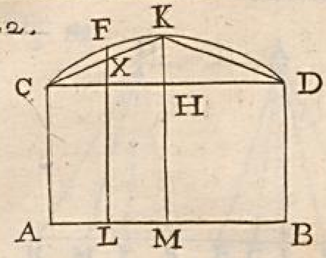


Fig. 43.

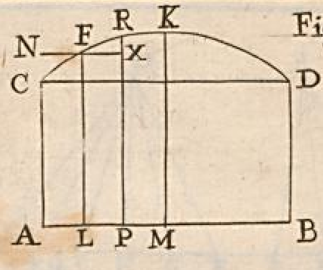


Fig. 44.

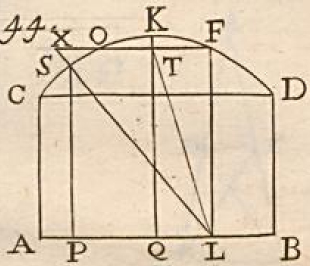


Fig. 45.

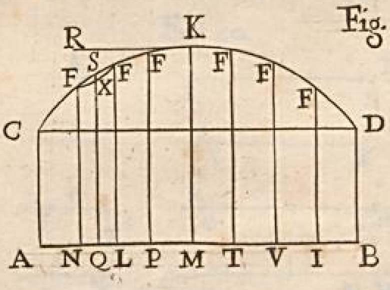


Fig. 46.

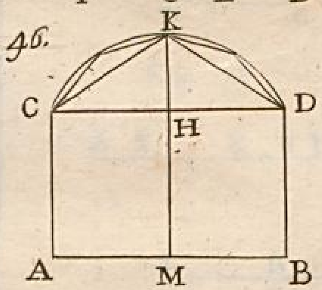


Fig. 47.

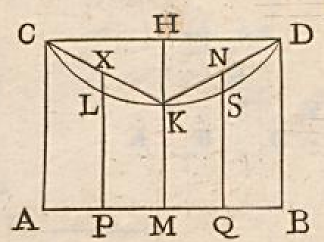
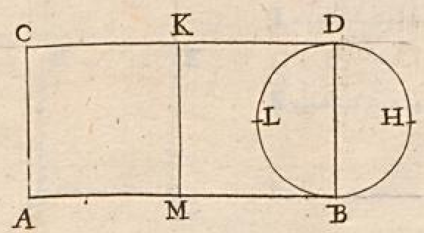


Fig. 48.



TABULA . VI

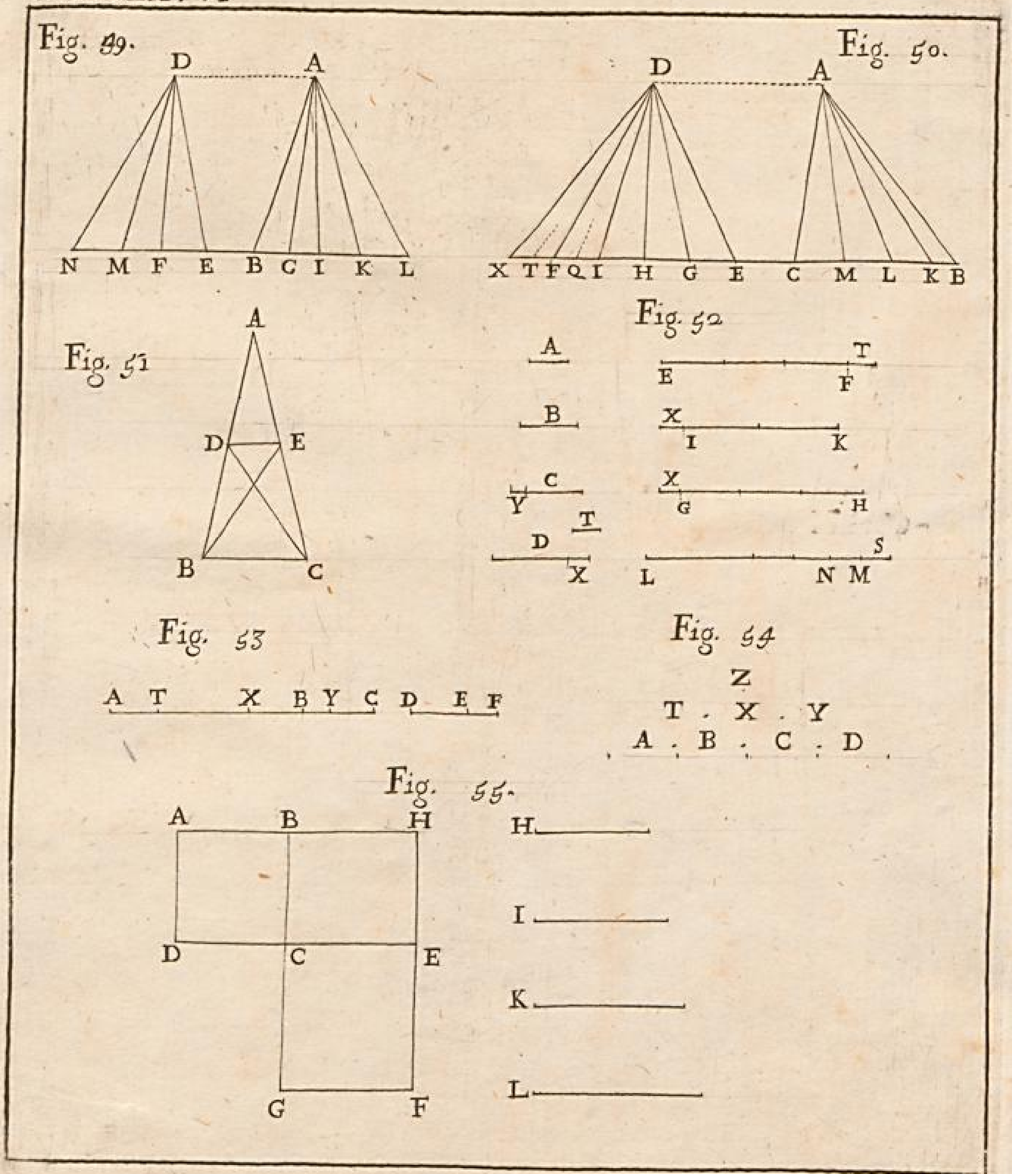


Fig. 49.
D A
N M F E B C I K L
Fig. 50.
D A
X T F Q I H G E C M L K B
Fig. 51
A
D E
B C
Fig. 52
A
B
C
Y
T
D
X
E T F
X I K
X G H
L S N M
Fig. 53
A T X B Y C D E F
Fig. 54
Z
T . X . Y
A . B . C . D
Fig. 55.
A B H
D C E
G F
H.
I
K.
L.

1907, 244.

BUCHBINDEREI
RICH. ROSLER
ZÜRICH-HOTTINGEN

ETH Zürich
Bibliothek

Abt.	T	Nummer	U	Band	Teil		Aufl.	E	S	
7		74734	.*							

BUCHKARTE
Bitte nicht herausnehmen!

0060/1 11405

4/81