www.e-rara.ch

Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum ex dato eorum centro gravitatis, una cum inventione proportionis et centri gravitatis in portionibus sphaerae plurimorumque peripheriorum ... Demonstrata ...

La Loubère, Antoine <<de>>
Bosc.

Tolosae, 1651

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5545

Persistent Link: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-9180

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

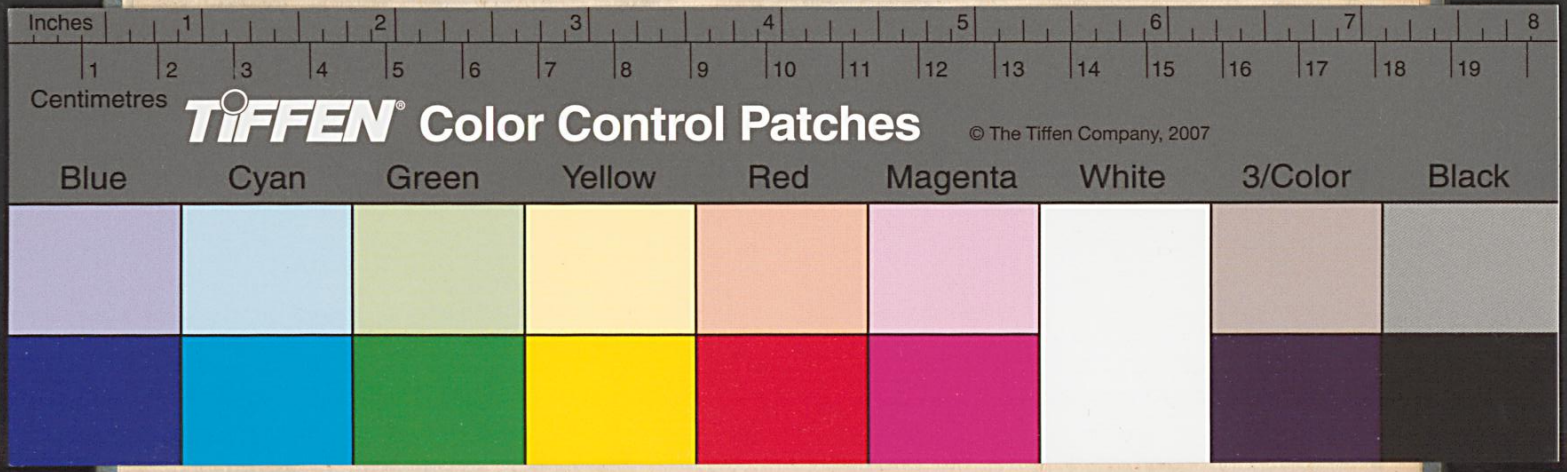
Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

Y3527 Rar
Rar 5545

Dr. Oftendinger


Inches
1
2
3
4
5
6
7
8
Centimetres
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
TIFFEN® Color Control Patches
© The Tiffen Company, 2007
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black

QVADRATVRA

CIRCVLI

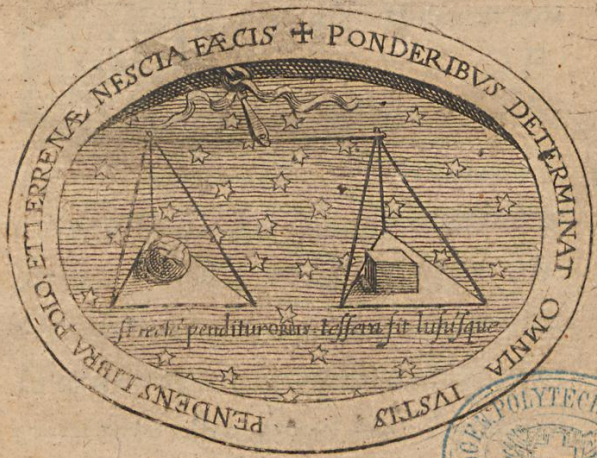
ET HYPERBOLÆ

SEGMENTORVM

Ex dato eorum centro grauitatis; vnà cùm inuentione proportionis & centri grauitatis in portionibus sphæræ plurimorumque periphericorum, nec non tetragonismo absoluto certæ cuiusdam cylindri partis, & aliorum:

Demonstrata atque ad calculum reducta adiumento libræ Archimedeæ & à materiâ diuulsæ, quam præsenti Opere restaurat atque amplificat

ANTONIVS LALOVERA Societatis IESV.



ECOLE POLYTECHN. FEDERALE BIBLIOTHEK

TOLOSÆ,
Apud PETRVM BOSC.

M. DC. LI.



LVDOVICO XIV.

REGI CHRISTIANISSIMO.

QVADRATIONEM *circuli thesaurum esse,* REX OPTIME, *suadet tot tantorumque virorum iudicium, qui ad illam inueniendam iam bis mille abhinc annis omni studio incubuerunt. Horum ego exemplo adductus, cùm vbi illi scrutari desierant sollicitè quærere, & egestis*

impedimentis altiùs in abdita rerum descendere ante annos aliquot cœpissem, exoptatum tandem effodere mihi visus sum non exiguâ ex parte thesaurum; quem dum tollo, deliberandum mihi non fuit, quò eum asportarem; quò enim nisi ad Te cui multis nominibus deberi sciebam? Tuus namque est non ideo solùm quod in publico loco est repertus; verum ex eo etiam quod illius Repertor singulari quodam iure in tuâ est potestate; quatenus scilicet in eam societatem est adscriptus quæ totam se Tuæ Majestati mancipatam profitetur, quippe quæ in tuo primùm nata sit Regno, in eóque Regijs beneficijs aucta creuerit, quorum il-

lud præcipuum numerat, quod Henricus cognomento Magnus, & Ludouicus Iustus, ille auus tuus, hic parens, Túque ipse viros ex eâ assumsistis, qui vobis à sacris Confessionibus & â summæ religionis secretis forent. Adest præterea mihi alia huius Operis Tibi offerendi causa, quòd Regijs licet studijs liberales complectaris artes omnes, præcipuo tamen eas fauore prosequeris, quæ ad militares attinent disciplinas; at verò noster hic labor omnia notis definit, præscriptisque mensuris, sine quibus castrorum metatio nulla, nulla fossæ vallíque munitio rectè instituatur; sed quod magis ad rem facit, istud assequitur libræ illius

ope, quâ Philosopho in Mechanicis testante quicquid est in Machinali scientiâ admirabile, & ad bellicas expeditiones perneceſſarium, omninò continetur. Quid quòd libra adeo expreſſa est repræsentatio Iustitiæ, quæ Francorum Regibus singulari quodam præ cæteris priuilegio perpetua comes aſsidet, vt dubium esse nullum potuerit, quin eius restauratio, amplificatio, & vſus adhuc incompertus Tibi iucunda acciderent. Porrò ſummam istam, quam modò dixi, repræsentationem exhibet, dum εὐτυπεπουθὸς illud (patere Rex benigniſsime græcam vocem cui vix vlla Latina planè reſpondet) quod Ethice velut diuinam Re-

cti normam in Iustitiæ manus tradit, ita pensiculatè obseruat, vt tunc solùm inæqualia duo grauia stare in æquilibrio sinat, quando ponderum isthæc inæqualitas aliâ longitudinum, quibus vtrinque de iugo pendent, compensata planè iuxta Geometricam ἀντιπεπονθότος legem fuerit, prout Archimedis libri de Isorrhopicis editi demonstrant. Hæc omnia effecerunt, vt ausus sit liber iste ad Te accedere exemplum etiam aliorum secutus, qui de hoc argumento scripti Antecessores tuos præsertim Franciscum primum quamuis præmaturè adierunt; quippe istud tuæ Majestatis æuo reseruabatur, vt Orbis dimetiendi ratio eo tem-

pore illustraretur, quo regnare inciperet eius imperio dignissimus; hoc verò vt diu fœliciterque præstes opto, & à Deo summis precibus flagito in Collegio Tolosano Idib. Dec. An. M. DC. L.

Deuotus sacræ M. T.

ANTONIVS LALOVERA,
Societatis IESV.

AD LECTOREM.

ROgo te, Beneuole Lector, vt si quam propositionem ex hoc Opere legendam susceperis, priùs inspicias vtrum aliquid, quod ad illam spectet, correxerim vel adiecerim in appendice. Moneò etiam te nullum ex Recentioribus qui de hoc argumento tractet à me lectum fuisse; non quidem ex vllo contemptu (hoc enim longè abest à moribus meis) sed quòd eius copiam habere non potuerim. In Bibliotheca nostri Alegambe tres inueni quos diu frustra quæsiui; Ioannis Caroli de la Faille *Theoremata de centro grauitatis partiũ circuli & ellipsis*; Pauli Guldin *centrobaryca*; & Gregorij à Sancto Vincentio *Theoremata scientiæ staticæ.*

Istius quidem vltimò recensiti nactus sum ante sex menses *quadraturam circuli*; sed in eius quàm amplo sanè Opere, nihil de librâ inueni: gauisus tamen sum quadraturam *cunei primi noti*, quam vnicâ propositione (ea est vigesima quinta libri quarti) ope libræ tradideram & ad calculum exegeram, ab eo sub *vngulæ* nomine aliter pertractatam fuisse longâ doctâque propositionum serie. Quadraturam verò circuli quam exponit examinare nondum mihi licuit; eam tamen omnino absolutam non esse vel ex eo apertum est, quod ad numeros non sit ab Autore deducta, nec monstratum quæ sit lateris quadrati circulo æqualis ratio ad diametrum, vel certè ipsius diametri ad peripheriam. Hoc verò iustè, meo quidem iudicio, exigitur; dum enim ad calculum venitur multa sape deteguntur vel non probata, vel falsa:

aliquando verò calculi methodus tot binomijs apotomiſque & id genus linearum incommenſurabilium nominibus implicatur, vt ad praxim vtilis exitus nullus ſperetur. Ego certè niſi in animo hoc fixum ſtatuiſſem quadraturam circuli nullam pro verâ & planè abſolutâ habendam mihi eſſe, cuius non definirentur ratiocinia, & ad demonſtrationem Archimedeam de circuli dimenſione exigerentur, me ipſum iamdiu multoties fefelliſſem, nec dubito quin plurimis imprudens illuſiſſem. Quid porro in his libris inuenerim ex ipſo Operis titulo (qui nihil exaggerãdo promittit) intelligis, vt puto, ſatis; pleniùs tamen perſpicies ſi attentè quæ in eo ſcripſi, meditatus fueris. Quadratura quam libro tertio demonſtro fœliciùs & ſine tanto apparatu procedit per libram, quam planam appellaui, & cuius vſum ad numeros redactum

habes in ſecundâ & tertiâ libri quinti; in cuius etiam decimâ tertiâ leges quadraturam plane mirabilem (abſit verbo iactantia) quorundam periphericorum quorum baſis eſt circulus vel hyperbola, altitudo verò parabola; *ea dicylindracea* nominaui. Neque minùs admirandam exiſtimo inuentionem proportionis quam inter ſe habent conica, ſphærica, conoidea, & ſphæroidea; licet enim Archimedes eiuſmodi proportionem iam olim excogitarit, ſuóque in ſepulchro monumentum eius extare voluerit, nos tamē diuersâ plane viâ idipſum reperimus, aliáque adiũximus adhuc irreperta. Atq; hæc ipſa via eò pluris eſt facienda quod centra grauitatis in ſphæræ, & hyperbolici conoidis portionibus determinet, cum nullus ante nos, quem nouerimus, id demonſtrarit; nam Archimedes in parabolico hæſit, prout in

quarto libro, vbi ista omnia tractantur, aduertimus. Vno verbo patere, Lector amice, dicam nihil esse alicuius momenti in toto hoc opere quod à me inuentum non sit, & quod non suppressissem si apud alios Scriptores iam demonstratum esse mihi perspectum fuisset.

Facultas R. P. Prouincialis facta Autori.

EGo ANTONIVS SAVIGNACVS Præpositus Prouinciæ Tolosanæ Societatis IESV concedo Antonio Laloveræ Societatis nostræ Presbytero facultatem edendi *Quadraturam circuli & hyperbolæ* à nostris de more recognitam & probatam : in cuius rei fidem has literas manu meâ subscripsi, & sigillo mei officij munitas tradidi. Tolosæ die 7. Maij anni 1648.

Eiusdem facultas facta Librario iuxta Regis Priuilegium.

EGo ANTONIVS SAVIGNACVS Societatis IESV in Prouincia Tolosana Præpositus Prouincialis librum qui inscribitur *Quadratura circuli & hyperbolæ* Autore P. ANTONIO LALOVERA è Societate IESV, iuxta priuilegium eidem Societati à Regibus Christianissimis Henrico III. 10. Maij 1583. Henrico IV. 20. Dec. 1606. Ludouico XIII. 14. Febr. 1611. concessum, quô Bibliopolis omnibus prohibetur, ne libros ab hominibus Societatis nostræ compositos, absque Superiorum eius permissu imprimant, Permitto PETRO BOSC, vt ad 10. annos imprimere, ac libere diuendere possit. Datum Monspelij 17. Nouemb. 1650.

ANTONIVS SAVIGNACVS.

PROLEGOMENA AD CIRCVLI tetragonismum.

§. 1.

Quid hac voce significetur.

QVadrare circulum τὸν κύκλον τετραγωνίζειν nihil est aliud quam vt ait Archimedes initio quadraturæ paraboles κύκλῳ χωρίον εὑρεῖν εὐθυγράμμου ἴσον *circulo æquale rectilineum patium inuenire*; vel vt pressiùs Simplicius, 1. Physicorum τῷ κύκλῳ ἴσον τετράγωνον θέσθαι *circulo æquale quadratum constituere*. Quamuis autem innumeræ sint rectilineæ figuræ à quadratâ diuersæ, Archimedi tamen satis fuit definire quadrationem circuli inuentione rectilinei illi æqualis, quoniam iam ab Euclide tradita fuerat methodus

fol. 13. e lit. Aldinæ.

quadrandi quamlibet figuram rectilineã, & viciſſim quodlibet quadratum in diuerſæ rationis cuiuſcunque

Propoſ. 25. εὐθύγραμμον æquale cõuertendi. Libro etenim ſexto datis duabus figuris rectilineis docet methodum inueniendi tertiam rectilineam, quæ alteri ſimilis ſit, alteri æqualis: quòd ſi datæ figuræ non fuerint ambæ eiuſdem generis, ſed vna duntaxat earum rectilinea, altera curuilinea aut mixta; inuenire rectilineam illi ſimilem & æqualem iſti, id erit curuilineam aut mixtam εὐθυγραμμίζειν, vt ita dixerim, hoc eſt in rectilineam ſeruata ſpatij paritate commutare: & ſi quidem curuilinea fuerit circulus aut parabola, rectilinea verò quadratum, id erit circulum quadrare aut parabolam; quod poſtremum iam olim præſtitit Archimedes, noſque eius veſtigijs inſiſtendo ad illud alterũ præſenti opere progredimur.

Cæterò ille libellum hac de re inſcripſit κύκλου μέτρησιν *circuli dimenſionem*, non quòd omnis circuli dimenſio ſit eius tetragoniſmus (menſurâ enim

circulari, & quidem facilè eum metiri possumus) sed quia Geometræ in mensuris capiendis communiter adhibent certi cuiusdam modi rectum canonem, vt quot eiusmodi canones (siue pedales, siue alterius rationis fuerint) quadratos aut etiam cubicos res emensa contineat, indagent. Atque hæc mensurandi ratio per lineas rectas ita communi hominum captui accommodata est, vt cùm illâ ipsâ methodo quâ circulus τετραγωνίζεται, quadratū κυκλίζεσθαι valeat; circuli tetragonismus, potiùs quàm quadrati cyclismus in ore omnium sit. 2. duodeci.

An circuli tetragonismus sit possibilis.

§. II.

CVm circuli tetragonismus adeo sit abstrusus prima de eo quæstio iure merito instituta olim fuit, vtrum vllatenus esset, an potius inter centauros chimærasque locum haberet: Nam primum quod de vnoquoque

ignoto quæritur Aristoteles assignat
l. 1. poste. c. 1. εἰ ἔστι, *an sit* vt *an*, inquit *centaurus sit.*
Hæc porro quæstio ita æuo illius
controuersa extitit, vt in Cathego-
rijs assensum suspendat: postquam
c. de relat, enim affirmauit eiusmodi tetrago-
nismum sublato ἐπιστητῷ hoc est (vt
vulgò loquimur in Schola) *scibili*, si-
mul tolli scientiam, quia nisi sit sci-
bile non est scientia: subdit *Si tamen
scientia, non sit nihil prohibet scibile esse*
οἷον καὶ ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς εἰ γέ ἐστιν
ἐπίστητον, ἐπιστήμη μὲν αὐτοῦ οὔκ ἐστιν οὔπω, αὐτὸ
δὲ ἐπιστητόν ἐστιν, *vt si circuli tetragonis-
mus cadat sub scientiam, ipsius scientia
nondum quidem est, ipse tamen est
quidpiam scibile.* Inde autem fortasse
euenit vt anceps iudicata tunc fuerit
præsens controuersia; quòd ij qui
ἐπιστητὸν esse demonstrandum susce-
perant, non nisi fallacibus rationi-
bus vsi fuerint, sicuti postea dice-
mus. Illud certè magis mirabile vi-
deatur, hocce dubium hæsisse in quo-
rundam animis etiam post Archi-
medis hac de re inuentum, quo per
deductionem εἰς τὸ ἀδύνατον demon-

strat circuli spatium esse æquale parallelogrammo rectangulo comprehenso sub diametro & sub quartâ parte lineæ rectæ æqualis ipsi perimetro circuli; istiusmodi autem deductio in eo est posita, quod ea esse datur sequi ἀδύνατόν τι siue esse maius, siue minus ponatur: vnde concluditur, cùm neque maius neque minus esse possit; æquale esse debere.

Simplicius in Aristotelis primum Physicorum testatur Ammonium præceptorem suum multum propendisse in id vt circuli tetragonismum ἀδύνατον censeret; alioque eiusdem sententiæ fuisse innuit Philoponus in secundum Posteriorum. Causa verò quæ ad talem opinionem illos impulit, hæc ferme est. Sicut semicirculi angulo nullus rectilineus est æqualis, licet dentur infiniti eo maiores, rectus scilicet & omnes obtusi: & infiniti pariter minores, nimirũ acuti omnes; vt ex Elementis satis constat: ita nec absurdus videri debet qui postquam

fol. 13. pag. 26. edit. Aldin.

fol. 15. pag 29. edit. eiusdẽ.

16. tertij.

admisit dari innumeras figuras rectilineas circulo maiores, innumeraſque minores; quæ tamen æqualis ipſi ſit, poſſibilē neget eſſe; præcipuè cum ſicuti angulus rectilineus & mixtus ille, ita etiā figura rectilinea, & curuilinea ſint diuerſi generis, & vt Græci loquuntur heterogeneæ; illudque effatum *Vbi eſt maius & minus, ibi etiam eſt æquale* non ſit verum niſi in homogeneis, & quæ eiuſdem ſunt generis.

Verùm Archimedis demonſtratio nititur tantùm principiis omnium conſenſu probatis: primum enim illud eius poſtulatum, *inæqualium ſpatiorum exceſſus quo maius ſuperat minus; fieri poſſe, vt ſibi ipſi coaceruatus quodlibet propoſitum definitumque ſpatium excedat* aſſumunt propoſitiones duodecimi. Euclidis omnium nobiliſſimæ & pulcherrimæ quibus oſtenditur circulos inter ſe proportionem habere duplam diametrorū; ſphæraſque triplam axium; omnem præterea conum tertiam partem eſſe cylindri eandem ipſi baſim habentis

2.duod. 18.duo 20.duo.

7.duod. in Coroll.

& altitudinem; & omnem pyramidem tertiam partem prismatis, quod eandem basim habeat pyramidi & æqualem altitudinem. Quæ omnia non minùs certa sunt habita, quam si absque eiusmodi principio fuissent demonstrata, vt rectè monet idem Archimedes in libello de quadraturâ parabolæ, vbi in huius confirmationem addit sua etiam scripta quamuis eodem fulta fundamento perinde indubitata omnibus fuisse. Verba eius vt in editione Heruagiana extant egent emendatione, & ita legi debent prout legisse videtur prior interpres Iacobus Cremonensis; posteriorem enim Commandinum in abruptam sententiam induxerunt. ἔγγαφον συμβαίνει τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τὰ ἄνευ τούτου λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι ἔτι δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτου ἀναγμένον τῶν ἐφ' ἡμῶν ἐκδιδομένων, *euenit prædictorum theorematum singula non minùs probata fuisse quàm alia quæ sine eiusmodi postulato demonstrata erant: simili quoque assensione excepta sunt, quæ ex eiusmodi*

lemmate deducta nuper edidimus.

Insuper Archimedes in eadem demonstratione sumit circuli perimetro posse dari rectam æqualem, hocque ipsum vsurpat in libro de lineis spiralibus huius maximæ tetragonismi gratiâ scripto ; postulat verò sibi dari in versione vtráque paulò superiùs commemoratâ , quamuis id postulatum ex editione græcâ exciderit. Adeo clarum est hocce *dimæ.* vt nullus vnquam teste Eutocio , illud in dubium reuocasset. Auerroes tamen postea l. 1. poster. videtur hac de re dubitare dum asserit nullam esse verè proportionem inter lineam rectam & circularem; apertiùs autẽ 7. Phys. affirmat, *quòd impossibile est de quantitatibus esse æquales nisi rectas tantùm , scilicet quæ sunt eiusdem speciei , cum istæ sibi superponantur* , idipsum inculcat 10. met. Sed aut falli dicendum est istum Authorem ; aut reducendus est in legitimum sensum, si cui hæc cura insit cum Tomitano contradict. 64. & Zimara theoremate, 51. Licet curua & recta linea

in libr. de circ. dimẽs.

comment. 67.

com. ment. 29.

Com. ment. 10.

non ita possint componi, vt sibi simul congruant, & communem habeant partem, id tamen non obstat quo minus curua possit intelligi coaptari rectę, non solùm quia curua eadem dimensione seruatâ potest in directum flecti, & recta in curuum; verùm etiam quia dum circulus per planum volui concipitur, rectæ curua successu temporis coextenditur.

Ratio itaque cur peripheriæ circuli alteriue curuæ lineæ possit recta æqualis dari, est, quia mente saltem κυρτότης siue curuatura ita separari potest ab ipsâ, vt magnitudo in longum dumtaxat extensa relinquatur, eaque extensio in ratione longitudinis inuariata maneat, Hoc sibi vult Eutocius dum in primam dimẽsionis circuli propositionem ita scribit εἰ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου παντίπου δῆλον οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἑνδιαστάτων, ἐστὶ δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ὀφάνῃ δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναι τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς οὐδενός ἐστι ζη-

τούμενον quæ quia satis obscurè conuersa sunt, ita reddo *circuli peripheria est, vt omnibus apertum reor, magnitudo; eáque vnam tantùm dimensionem habens, nempe longitudinem solam; atqui recta linea est eatenus eiusdem rationis & speciei: licet igitur nondum vllus potuerit tradere methodum comparandi rectam æqualem circuli perimetro; attamen aliquam esse illi naturâ æqualem iure optimo omnes citra vllum dubium consentire.* Quod igitur circulare & rectum dicantur esse ab Aristotele specie diuersa, id non obstat, quominus sint magnitudines eiusdem illius speciei; esto non atomę, cui est proprium vt quæ sub ipsâ continentur æqualia sint, vel additione aut detractione fieri possint. At verò angulus contactus (quē κεραλοειδῆ appellāt, & quo angulus rectus superat angulū semicirculi definiti ab Euclide initio libri primi defin. 18.) & rectilineus ideo non sunt illius eiusdem speciei, quòd si ab angulo contactus separari intelli-

1. Phys. texta 33.

gas lineæ ipsum cõprehendẽtis κυρτότητα & loco illius substitui rectitudinem, non relinquitur eadem anguli magnitudo vt demonstratur in Elementorum tertio. Ergo cùm eadem anguli magnitudo non possit remanere si curua angulum comprehendens dirigatur in rectam, sed semper fiat maior; rectè dicitur curuilineum & rectilineum angulos non posse coaptari, neque esse per accidens quãtum ad ipsorum æqualitatem spectat, quòd vnus curuilineus, alter sit rectilineus; sicuti est per accidens, quantum ad æqualitatem curuæ & rectæ attinet, quod curuæ vel rectæ existant. Illud postulatum *omni curuæ lineæ dari rectam æqualem* quamuis, vt iam diximus, verum contineat, nobis tamen in præsenti conatu necessarium non fuit; sed istud *inæqualium spatiorum excessus quo maius superat minus, fieri potest vt sibi ipsi coaceruatus quodlibet propositum definitumque spatium excedat*, vnà cum Archimedeis libræ principiis, quibus nemo, quod sciã,

ad hunc diem contradixit, neque verò ijs probabiliter repugnari potest, vt monstramus in libello quem hac de re conscriptum habemus.

Quòd si quæras cur istud sine probatione sumāt, cum similis propositio sit falsa *inæqualiū angulorū excessus quo maior superat minorem, fieri potest vt sibi ipsi coaceruatus, quemlibet propositum definitumque angulum excedat*: excessus enim quo angulus rectus superat angulum contentū sub diametro & sub peripheriâ ad contactum conuenientibus quantumuis sibi ipsi accumuletur, nunquam excedet quemuis angulum rectilineum propositum. Respondeo sicut euincitur dari angulum curuilineum minorem quocunque rectilineo, vnde efficitur vt quamuis multoties sibi ipsi adiunctus, nunquam eo vsque excrescat, vt datum rectilineum angulum superet; ita ex terminorum comprehensione euidens esse *nullum dari planum spatium, quibuscunque lineis claudatur, quin intra ipsum contineatur figura plana datæ similis*, (ma-

gna an parua sit, nihil refert) *ac proinde quin toties in vnũ conferri possit, vt cumulus datam figuram excedat.* Clarum etenim est figuram interiùs descriptam, cùm similis sit datæ, posse toties sibi ipsi accumulari, vt aceruus datam superet: ergo si pars potest ita augeri, multò magis id poterit totum ipsum cuius est pars. En quo initio veluti gradu primo ad tã longè posita perueniatur. Quod si principia non concesseris, Mathematicus digitum progredi non potest, vt ait Tullius: sed quænam alia disciplina id potest? Zimara antè laudatus concedit quadrationẽ circuli esse mathematicè possibilem, physicè tamen possibilem negat; quo dicto quid sibi velit non satis percipio; vel si mentem eius assequor, falsum enuntiat. acadẽ quæst. 2.

Quamuis circuli retragonismus sit φύσει possibilis, an tamen etiã sit πρὸς ἡμᾶς, hoc est, an post Adæ lapsum homo eius scientiam absque speciali diuinæ gratiæ auxilio possit cõparare iure merito inquirunt Theo- Suar. tom. 1. de grat. l. 1. c. 1. n. 9.

logi, pronuntiantque hanc veritatẽ tantâ esse caligine involutam, vt illam videre nemo possit nisi ignorantię ex primi parentis præuaricatione propagatas tenebras indebitus diuinæ lucis radius dissipet; quod verissimum esse sentio, quare nec mihi ex isto opere, nisi quid peccatum est, arrogo quicquam memor illius Bernardi sententiæ *quis credat parieti, si se dicat parturire radium quẽ suscipit per fenestram?*

ferm. 13. in cant.

Duplex conficiendi alicuius problematis ratio explicatur Mathematica & Mechanica.

§ III.

PRoblematis à theoremate discrimen in eo positum esse, quòd problema aliquid faciendum proponat; theorema autem in nudâ veritatis contemplatione consistat, norunt omnes. Hinc porro consequens fit vt problematis solu-

tioni propria sit κατασκευὴ *constructio* quædam, qua posita id ostenditur peractum esse quod propositum fuerat, vnde sub finem problematum clausula solennis additur *quod faciendum erat* ὅπερ ἔδει ποιῆσαι vel ὅπερ προέκειτο ἐυρεῖν; *quod erat demonstrandum* ὅπερ ἔδει δεῖξαι vel δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα, aut simili aliâ verborum forma.

Pro duplici genere instrumentorũ quibus eiuscemodi constructio peragi potest, duplex potissimum consurgit ratio conficiendi problematis; vna dicitur mathematica, altera mechanica; illa magni, & quidem meritò penditur, ideoque & nomine ipsius disciplinæ nobilissimæ particeps fit; ista longè inferior veluti hoc nomine indigna à machinis quas operosiùs adhibet, mechanica dicitur; qua deinde voce illiberales notatæ sunt artes.

Mathematica constructionem totam absolu it solo rectarum & circulorum ductu, id est solâ circini & regulæ ope, quæ expeditissima, ne-

ceſſaria tamen ſunt Matheſeos arma. Mechanica non ita ſimplex inſtrumenti genus adhibet, ſed machinulas quaſdam prius excogitatas extruit, quarum deinde præſidio conſtructionem problematis molitur. Ita celebre illud problema quod iubet inuenire duas medias proportionales inter duas datas rectas ex antiquis confecerunt plures, miniſterio quarundam machinularum quas deſcriptas cernimus apud Eutocium in ſecundum Archimedis librum de ſphærâ & cylindro. Idipſum eodem ſucceſſu tentatum eſt, vt conficeretur, notum illud problema quo iniungitur diuiſio cuiuſuis anguli rectilinei in tres æquales partes, de quo Proclus in nonam propoſitionem libri primi Euclidis, & alij.

Plus differunt iſti duo modi quàm primo eorum aſpectu iudicetur. Nō enim hoc tantùm præferēdus eſt ille, quod ſimpliciori inſtrumentorum apparatu, ac proinde expeditiùs rem propoſitam exequatur; verùm etiam

quoniam

quæ solius regulæ & circini adiumento præstantur, ea ex constructionis ipsius ratione per calculos arithmeticos supputantur, atque vt Græci Artifices loquuntur ἐπιλογίζονται. Quæ res quanti sit ad vitæ politicę commoda momenti nō ignorant qui mediocriter in istis versati sunt. Nisi enim mathematicè diuiseris angulum quemuis in tres & quinque partes æquales, tabula ὑποτεινουσῶν Ptolemaicæ, (*nos sinuum tangentium & secantium* in meliorem redactas modum appellamus) quibus carêre Astronomica non possunt, imperfectæ restabunt quamuis id mechanicè perficias. Nisi etiam inter duas rectas datas mathematicâ ratione duas medias inueneris (quamuis mechanicè id assequaris) inter duos tamen numeros datos, duos alios medios inuenire arte epilogisticâ non poteris, nec proinde numeris definire proportionem quam debet habere diameter vasis sphærici ad diametrū alterius vasis item sphęrici, sed duplo aut quouis alio ex [illegible] proposito ca-

pacioris. Sumpſimus autem exempli causâ vas ſphæricum; idem namque dici potuit de duobus ſolidis quacunque aliâ vniuſmodi formâ præditis. Quæ res ad menſuras liquidorum nec non aridorum rectè cognoſcendas & tractandas perneceſſaria eſt, vt ex Villa pandi inter cæteros apparatu ſatis conſtat; cuius autem ſit vtilitatis in architecturâ ad hoc vt ſeruatâ columnarum aut aliorum id genus eâdem formâ, molis & ponderis diuerſitas ſolo calamo innoteſcat ædificij vniuerſam ſtructuram partiumque ſymmetriam meditanti, ſupruacaneum eſt dicere.

Huc refero quòd Plutarchus in Marcelli vitâ problema nondum niſi mechanicè ſolutum appellat ἄλογον, quia nimirum nondum rationes numericas exhibet, nec propterea poteſt ἐπιλογίζεσθαι: è contrario autem mathematicam ſolutionem vocat λογικὴν καὶ παραμεθικὴν ἀπόδειξιν; quòd epilogiſmum & numerorum ratiocinia ſecum trahat. Vnde intelliges

cur Plato adeo infensus eodem teste exiterit Eudoxo, & Archytæ machinularum istiusmodi inuentoribus; timuit enim vir sapiens ne his contenti posteri altiorem, nobiliorem, longiusque semotam à materiæ fæce solutionem inquirere præ laboris tædio desisterent.

Hinc præterea apertum est cur Nicomedes apud Eutocium propositurus instrumenti fabricam quo cõchoidem lineam certo ductu describas, & per eam duas medias inuenire possis; Eudoxi inuentis insultet ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἐξέσεως ἐστερημένοις, *tanquam destituris idoneâ ad scopum attingendum machinâ, nec non vacuis successu geometrico.* Quamuis enim Eudoxi machinam, quam ibidem describit Eutocius, inuenerit; quia tamen nullâ certâ ratione per illam inueniuntur duæ mediæ, sed sæpius tentando donec res optatis congruat, ideo hæc operatio ne mechanica quidem dici meretur. Quæ enim propriè mechanica est, certum machinæ inuentæ vsum præ-

cribit; & hoc vsu concesso, geometricis principijs euincit id esse effectum quod quærebatur. Iure quoque merito illæ machinæ reijciuntur vt spuriæ, in quibus lineæ quædam curuæ describendæ sunt, nec tamen vlla eas omnino describēdi traditur methodus; sed certâ viâ aliquot eius punctis notatis, tota relinquitur oculi iudicio quàm proximè delinianda; quod vitij genus animaduertitur in Nicomedis quadam lineâ quadratrice, quam cum hoc næuo placuisse tamen tãtopere Clauio nostro miror; sed & illud quoque mirũ mihi accidit, quòd in Geometriâ practica conchoidem Nicomedis maluerit describere per certa puncta solo & fortuito in cæteris oculi regimine, quàm vti instrumento ad id ingeniosè excogitato, quo linea illa conchæ vestigio similis perinde ὀρθῶς ducitur, atque circino peripheria circuli. Magni sine dubio fieri debet machina, præsertim si expeditè tractetur, quæ continenti tractu lineas eiusmodi curuas designet,

Geometriæ pract. l. 7. in appendice.

l. 6. propos. 15. & l. 8. prop. 25.

quarum interſectione cum alijs lineis aliquod problema perficitur: alioqui enim caſu potiùs quàm arte habebitur vera interſectio, veraque problematis exequutio. Hinc vt puto accidit, vt Eutocius expoſito Menæchmi modo duas medias inuenientis per interſectionem duarum parabolarum, ſubdat parabolam deſcribi διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μηχανικῷ Ισιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ *operâ* diabetæ, *quod inſtrumenti genus excogitauit præceptor noſter Iſidorus cognomento Mechanicus.*

Non tamen ſemper ἀμήχανον in malam partem vertitur; ſed aliquando etiam in bonam. Inſignis ad iſtud confirmandum eſt locus Theodoreti orat. 5. de prouidentiâ, quo geometricam apum induſtriam in fauis extruendis commendans *id inſecti genus*, inquit, ἔμφυτον ἔχον καὶ αὐτοδίδακτον τὴν ἀμήχανον ἐργασίαν ὑφαίνει τε τὰ κηρία καὶ πληροῖ τὰ δοχεῖα οὐ μέτρων οὐ κέντρων, οὐ γωνίων δεόμενον, *cùm habeat operandi artem innatam, ſine magiſtro edoctam, & nullis egentem inſtrumentis conſtruit*

fauos, eorumque cellas artificiosè implet; neque (vt homines solent) ne aberret, opus suum exigere cogitur ad mensuras, centra, & angulos. Summa laus & prope diuina operis est vt sine instrumento non incertâ tamen methodo fiat; proxima vt ope instrumenti sed certo conficiatur; postrema & fermè nulla, vt incerto quodam casu peragatur; horum duo extrema cùm medio quod machinale est opponantur, rectè appellari possunt, ἀμήχανα, ac proinde id nominis laudi vel vitio tribui.

Quo sensu Archimedes parabolæ tetragonismum à se primùm διὰ τῶν μηχανικῶν; deinde etiam διὰ τῶν γεωμετρικῶν demonstratum esse dixerit.

§ IV.

QVamuis plurimi aggressi essent circuli & ellipseos tetragonismum, qui tamen parabolem dimetiri conatus fuisset nullum anterio-

rum se scire testatur Archimedes in opusculo hac de re edito ; vt mirum sit quod in scriptis reliquit Plutarchus χωρίον παραβολῆς *aream parabolæ* inuentorem habere Pythagoram, qui eam ob causam à nonnullis dicatur Dijs bouem sacrificasse, quod an congruat viro qui superstitiosè coleret animantes non immerito dubitari solet ; Certè Archimedis quamuis de se testantis, vt pote viri synceri & aliunde inuentorum gloriâ cumulatissimi mihi potior est hac in re fides. Is igitur in commemorato opere duplici viâ se ad parabolæ dimensionem peruenisse narrat, *mechanica* primùm quam primis septēdecim propositionibus tradit ; tùm geometricâ, quæ ad finem vsque libelli tractatur. Quoniam verò *mechanica* est illa ipsa methodus, quam nos in tentando circulo tenuimus, poterit alicui inde suboriri suspicio, quadrationem circuli quam molimur non esse *mathematicam*, sed solummodo *mechanicam*. Hoc obiectū euanescet, postquam Archimedis

dicto veram & menti Autoris consentaneam interpretationem dederimus.

Problematis effectio non potest dici *mechanica* prout ista vox vitium aut defectum paulò superiùs explanatũ designat, nisi quatenus in constructione ipsius adhibetur instrumentum aliud quàm simplex circinus aut regula; cùm igitur segmentum parabolæ vtrobique ostendatur ab Archimede esse tertia pars noti cuiusdam trianguli rectilinei, & cùm tertia pars eiusdem trianguli sumatur per simplicia Matheseos instrumenta, manifestum est constructionem huius problematis immunem esse ab omni imperfectione mechanicâ, quocunque tandem modo constructio monstretur esse legitima.

Cur ergo Archimedes alteram è duabus demonstrationibus *mechanicam* dicit? Quia nimirum hæc appellatio à diuersis principijs diuersarum Matheseos partiũ sumpta fuit. Quoniam verò altera demonstratio

perficitur non assumptis nisi solis Geometriæ postulatis appellatur *geometrica*: & quia in alterâ adhibentur etiam postulata *æquiponderantium* siue ad libram attinentia dicitur *mechanica*; nam Mechanicæ admirabiles effectus demonstrantur per libram vt docet Aristoteles initio quæstionum mechanicarum: & vt Proclus in primum Euclidis air: ὑπὸ τὴν μηχανικὴν ἐστὶ καὶ τὴν ἰσορρόπων ὅλως, καὶ τῶν λεγομένων κεντροβαρικῶν διάγνωσιν, *sub mechanicâ insuper collocatur illa scientia quæ plenè tractat de æquiponderantibus & de ijs quæ centrum grauitatis habent.* Simili prorsus ratione si quis in demonstrando principia inferat Optices, poterit demonstrationem suam nominare *opticam*.

Ex hactenus dictis manifestum est *mechanicum* multis modis dici. Aliquando *Mechanica* nobilissimam scientiam significat, quam Aristoteles, vnà cum Opticâ Geometriæ subiungit veluti cognatas, & vt interpretes loquuntur ὑπαλλήλους, nos vulgò *subalternatas* no-

1. poster. text. 23.

minamus. Huius est ἀρχιτεκτονικῶς præscribere, & demonstrare effectum qui intenditur, necessariò ex præscriptorum exequutione consequi. Nonnunquam *Mechanicæ* nomen descendit ad famulas artes quæ dominæ subseruiunt, & ita illiberale aliquid sonat. Denique *mechanicam* solemus appellare eam κατασκευὴν problematis, cuius imperfectam rationem paulò superiùs tradidimus. Illud quoque ex hactenus explicatis apertum est, dum parabolæ tetragonismus *mechanicè* inuentus dicitur sumendam esse illam vocẽ iuxta primam significationem; vt sensus sit inuentum quidem esse eiusmodi tetragonismum per simplicem & mathematicam κατασκευὴν: sed vt monstraretur per eam id effectum esse, quod erat propositum, fuisse adhibita principia nobilissimæ illius scientiæ quæ μηχανικὴ dicitur, *Machinalem* reddit alicubi Plinius.

lib 7. c. 37.

Cur tantopere laboratum sit ab Antiquioribus in inquirendo isto tetragonismo & quo successu.

§. V.

QVamuis ipsum de veritate inquentâ gaudiũ satis amplum sit mentis indagatricis, si ingenua fuerit, operæ pretium; quoties tamen illius necessitas stimulos addit, solent homines indefesso labore eam perquirere. Hæc est germana causa cur peruulgata illa tria de quadrando circulo, de inueniendis duabus medijs inter duas assignatas rectas, & de diuidendo angulo rectilineo in tres portiones inuicem æquales, superiores exercuerit Mathematicos omnes qui alicuius nominis extiterint. Et quidem quamdiu diuisio anguli in tres & quinque partes inexplorata erit, necesse est tabulas illas *sinuum*, quas dixi, & sine quibus vix latum vnguem progredi valet Astro-

nomia, imperfectas maximam partem manere; vt omittam Architectis perneceſſariam eſſe polygonorum deſcriptionem, quæ tamen ſine notitiâ diuiſionis anguli rectilinei fieri nequit. Vnde cùm tetragoni, pentagoni, & hexagoni deſcribendi ratio tradita eſſet ab Euclide: heptagoni non traditam tentarunt nonnulli, ſed fruſtra vt rectè demonſtrat Clauius; inter illos autem memorat Franciſcum Fluſſatem Candallam quem iure optimo appellat virum doctiſſimum & nobiliſſimum. Duarum autem mediarum inuentio tam amplos habet vſus, vt Delphicum illud hac de re oraculum referre ſuperuacaneum ſit, cùm quæ hactenus dicta fuere inſtituto noſtro ſatis ſuperque ſint. Non omittam tamen eiuſmodi problema à Plutarcho numerari inter elementa Matheſeos; στοιχεῖον, inquit ἐπὶ πολλὰ τῶν γραφομένων ἀναγκαῖον, *Elementum ad multa problemata neceſſarium.* Neque enim omnes propoſitiones ita vocari ſolent; ſed vt Proclus docet, eæ tantùm

4. libro

libro 8. Geom. pract. prop. 30.

lib. 2 in Eucl.

ὧν ἡ θεωρία δϊϊκνεῖται πρὸς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστήμην, *quorum cognitio ad aliorum scientiam requiritur*; hoc, inquit, nomine desumpto à Grammaticis qui vocũ scriptarum principia prima, simplicissima & indiuisa *elementa* appellant. Circuli postremò tetragonismus nesciri non potest, quin mensura innumerorum, inter quæ ipse orbis mundi principem locum tenet, figurâ sphæricâ vel cylindricâ præditorum ignoretur.

Huius necessitatis publicæ apertum argumentum esto, quòd, quoniam cùm illorum problematum solutiones accuratæ inueniri non poterant, excogitatæ fuere earum loco aliæ quàm minimè ab ipsis aberrantes, vt ijs tanquam veris Artifices vterentur. Istud, vt cætera omittam, de præsenti tetragonismo clarè euincit libellus quem Archimedes inscripsit *de circuli dimensione* tanquam πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον *ad vitæ vsus necessarium*, vt Heraclides in eius vitâ testatum reliquit apud Eutocium. Neque enim ibi scopus illius Auto-

ris est inuenire veram circuli quadrationem, sed vt idem Eutocius ait, σύνεγγυς εὑρεῖν διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας *quàm proximè accedere propter vitæ humanæ commoda*. Putauit numeris ambitum polygonorum duorum, quorum singula constant nonaginta sex lateribus, vnum autem eorum circulo inscribatur, alterum circumscribatur; sumptóque eiusmodi polygonorum ambitu, altero pro paulò maiori peripheriâ, altero pro paulò minori inuenit rectam lineam æqualem perimetro circuli non continere omnino tres diametros & earum vnius vnam septimam partem, complecti tamen plusquam tres diametros & earum vnius decem septuagesimas primas: decem porro septuagesimæ primæ non æquant vnam diametri septimam, sed sunt tantò minores quanta est vna diametri pars quadringentesima nonagesima septima. Aliunde verò firmissimè (quicquid futiliter repugnarit Scaliger) demõstrarat rectangulũ sub diametro & sub quartâ parte rectæ æqualis perime-

tro circuli, esse æqualē circuli ipsius spatio. Opinio nō fefellit Archimedē; vulgò enim artifices quadraturi circulum ponunt eius perimetrum continere tres diametros, & vnam diametri septimam particulam. Neque verò sensûs iudicio errant in paruis circulis; quamuis in magnis possent multum a vero aberrare, si quando nimirum vna diametri quadringentesima nonagesima septima esset notabilis. Sit tamen diametri mensura esset pedum vnius & quadraginta cum quinque vnius particulis duodecimis, vna quadringentesima nonagesima septima particula, non foret nisi vnius vnciæ quam *pollicem* vulgus vocat.

Quo euentu à tot viris sudatum olim in hoc negotio sit, superest vt dicam; nam qui ex recentibus hoc ipsum frustra aggressi sunt Cusanus Cardinalis, Orontius Finæus, & Iosephus Scaliger satis noti sunt ex refutationibus eorum, quas vulgarunt insignes Mathematici Ioannes Regiomontanus, Buteo, Petrus No-

nius, & Christophorus Clauius Ante Aristotelem Bryso, Antiphon, & Hippocrates Chius ita celebres extiterunt suis paralogismis, vt cùm exempla sumantur à rebus perspectè cognitis, Aristoteles ipse passim ipsorum fallaces tetragonismos exempli causâ afferat, vbi de syllogismis, vel scientiarum principijs agit. In quodam verò volumine quod κυρίων *sauos* inscriptum voluit, ita accuratè Antiphontem & Hippocratem impugnat, vt istorum hallucinationes affirmet Eutocius clarè compertas esse tam ex Aristoteleis κυρίοις, quàm ex Eudemi geometricâ historiâ cuius hac de re fragmentum insigne visitur apud Simplicium.

Lib. 1. Phys. textu. 11. folio

Archimedes initio quadraturæ paraboles aliquos, quorum nomen reticet, fuisse ait, qui istud conficere sibi visi sunt assumptis ijs postulatis, quę nõ facilè cõcedantur & quæ nec ipsis concedi debere cùm plures compererint, eorum hac de re scripta neglecta fuêre: ita enim interpretor satis intricata verba λαμβάνοντες

ἐκ ἐυπαραχώρητα λήμματα, ὅπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πολλῶν ἐκ ἐυρισκόμενα τᾶυτα, καὶ ἔγνωσθεν.

Ipse verò acutè vt cætera omnia demonstrauit quidem, vt iam dictum fuit, rectangulum sub diametro & quartâ parte rectæ lineæ æqualis perimetro circuli, esse æquale ipsius circuli spatio; sed qua ratione eiusmodi recta linea haberi posset nec ipse nec alius teste Eutocio docuit. Ostendit quidem in opere de lineis spiralibus illam ipsam perimetrum esse æqualem certæ cuidam rectæ; sed neque tradere potuit methodum inueniendi istiusmodi rectam. prop. 18. & 27.

Simplicius loco superiùs laùdato recitat ex Iamblicho quosdam huius problematis Artifices; ex veteribus quidem Pythagoreos, quorum demonstrationes extent apud Sextum eius sectæ scriptorem; Ex posterioribus verò Archimedem διὰ τῆς ἑλικοειδοῦς γραμμῆς per spiralem lineam incessisse ait; Nicomedem διὰ τῆς ἰδίως τετραγωνιζούσης καλουμένης per eam quæ specialiter quadratrix est appellata;

Apollonium διὰ τῆς κοχλοειδοῦς ἀδελφῆς *per eam quam sororem cochleaceæ nominauit*, & quæ à Nicomedeâ nihil differre dicitur; Carpum διὰ τῆς ἐκ διπλῆς κινήσεως *per eam quam ex duplici motu procreatam appellauit*, alioſque plures alijs vijs ita parum fœliciter progreſſos fuiſſe vt nec adhuc ὀργανικὴν κατασκευὴν vllam reliquerint. Quod poſtremò dictum cùm ad rem præſentem maximè faciat, hunc ſenſum habet; problema tetragoniſmi iſtius non ſolùm non eſſe mathematicè, & operâ ſoliûs regulæ circinique confectum, ſed neque mechanicè adiumento nimirum alicuius alterius inſtrumenti; cùm tamen reliqua duo problemata iam commemorata per organa, perque diuerſas à regulâ & circino machinas reperta fuerint ſtudio anteriorum Mathematicorum. Ex quo liquidò conſtat ſolutionẽ huius problematis eſſe trium longè difficillimam, cùm reliquis duobus ſalten per organa & machinulas inuentæ ſint certæ & determinatæ *conſtru-*

ctiones, quibus positis euidenter ostenditur veritas solutionis.

Hic statim sese offert dubitatio, cur obuiam obmiserint machinam, qua circulus voluatur per plani lineam rectam, donec idem circuli punctum quod initio motus tangebat planum absolutâ reuolutione iterum plano occurrat: portio enim illa lineæ rectæ cui applicata in motu peripheria circuli fuerit videtur esse æqualis ipsi peripheriæ. Alias videre me memini gallicè conscriptum à quodam Ecclesiastico viro, cuius nomen excidit, libellum quo iste tetragonismus traditur, eum autem sibi in mentem veniisse narrat inspecto vestigio quod *claui capitati* extimo rotarum limbo infixi, relinquunt dum currus earundem rotarum adminiculo trahitur. Verùm iste homo non legerat vnquam vigesimam quintam Mechanicarum quæstionum Aristotelis, ex illâ enim didicisset posse fieri vt linea illa cui rotæ peripheria successu motus respondet, sit modo maior, modo æ-

qualis; modo minor ipsâ peripheriâ, pro diuersâ proportione duarum motionum quibus rota agi intelligitur. Atque hæc est causa cur illa machina à peritis hominibus sit prætermissa, cùm construi non possit, nisi priùs nota sit linea æqualis perimetro. Simile incommodum in delineatione Nicomedeæ quadratricis, quæ generatur pariter ex duplici motione, reprehendit Pappus Alexandrinus apud Clauium. Non dispar quoque est generatio spiralis Archimedeæ, ac proinde perinde est inuentu difficilis machina quæ illam vno ductu delineet. Quanquam licet daretur einsmodi machina, adhuc restaret inuenienda methodus ducendi tangentem quandam rectã, vt per illam daretur recta peripheriæ circuli æqualis.

l. 7. Geom. præct. propos. vult in appẽd.

Aristotelicum volumen κυρίων inscriptum cum suprà laudarem occurrit mihi Plinij locus Græcorum arrogantian satis apertè carpentis, in hocce librorum quorundam titulo affectando. Quinam ij fuerint nec

in præfat. l. 1.

exponit, nec ego noui; hoc tamen existimo non cadere in Aristotelem, cuius nullum fastum in aliorum librorum titulis notamus. Egerit itaque, quantum coniicio, eo libro de fauis apum, & cum ad crates fauorum ventum fuisset, occasione formæ cellarum sexangulæ egerit quoque de paralogismis in circulo quadrando; Antiphon enim, vt ipse indicat primo Physicorum, & Interpretes communi consensu narrant, circulum non putabat esse nisi polygonum rectilineum ex lateribus minimis & propemodum innumeris, quæ nullo sensu dignosci possent. Vel certè, si totus liber fuit mathematicus, ita inscriptus fuerit, quod de polygonis ibi præcipuè agatur, & occasione illorum de paralogismis in circulo quadrando commissis. Aliqua certè est probabilis causa hunc præfigendi titulum, cùm Porus Nicænus in libello eiusdem tituli scripserit de circuli tetragonismo, sicuti testatur sæpiùs laudatus Eutocius in circuli dimen-

sionem Archimedeam. Commandinus verumque Eutocij locum ita reddidit vt pro ἐν τοῖς κυρίοις, substituisse videatur ἐν τοῖς κυρίοις; vertit enim *libros super ea re conscriptos, & libros propriam huiusce generis doctrinam complectentes*. Cautius, meo quidem iudicio, antiquior Interpres Cremonensis intactum locum reliquit, & *ceria* latinè retinuit. Quod si emendatio foret legitima, adhuc dubitarem an versio esset bona: κύριοι enim fortasse Aristoteli fuerint *primarij quidam & principales libri*; quo sensu primam Philosophiam, si Interpretibus credimus, κυρίαν appellauit; certè eam quæ ita cæterarum est princeps, vt illarum initia seu principia suo iure demonstret.

1. poster. c. 9 aliàs 8.

Quinam fuerint paralogismi Brysonis, Antiphontis & Hippocratis Chij.

§ VI.

ITa noti fuerunt eiusmodi paralogismi ætate Aristotelis, vt eos in exemplum adducendo tanquam superuacaneum omittat explicare quinam ipsi fuerint. Hippocratis quidem Chij ψευδογράμμα *falsam delineationem* cognitam habemus ex fragmento illo historiæ Eudemi quod apud Simplicium extare diximus. Quadrauit ille, & quidem admirabili ingenij subtilitate, quosdam μηνίσκους seu figuras duplici circuli portione contentas, nos vulgari linguâ *crescentes* dicimus, eò quod lunæ crescentis speciem referant; hallucinatus verò est, cùm quadrasset quasdam lunulas, non tamen eas ex quibus quadratio circuli sequitur; quod ex ipsis quasi iam quadratis circuli quadrationem intulit. Inuentum

hominis eo quòd ingenio plenum sit, refert & clarè more suo explicat Clauius, nos verò propositione 25. primi libri idipsum colligimus, postquam viam ad alias lunulas figurasque conuexo-cauas ex reliquis etiam sectionibus conicis confectas instruximus. Lunularum istarum mentionem facit Aristoteles in Prioribus & Elenchis, atque vt multi Interpretes volunt in Physicis, quamuis hîc non μηνίσκους, sed sed τμήματα circuli appellet.

l. 7 Geometr. pract. cit.

2. Prior r. c. 31. Elenc. c. 10. alias 11. 1. Phys. t. 11.

Cæterùm lunularum ista quadratio non leue est argumentum ad ostendendum circulum quoque posse quadrari, eóque vtuntur Philoponus & Simplicius; in illâ tamen (cùm nitatur secundâ duodecimi) non potest esse maior certitudo, quàm sit in principio, quod ab Euclide eo loco vsurparum esse diximus; & quo dato parabola quadratur ab Archimede, atque à nobis circulus ipse atque hyperbola tentantur, assumptis aliunde libræ initiis certissimis. Qui igitur summâ peruicaciâ neget cir-

culum posse quadrari, is si consequentia velit loqui lunularum paraboleque tetragonismo, ipsisque Euclidis Elementis quatenus commemorato principio incumbunt, fidem proterue negare debet: Ammonius verò, cùm lunularum tetragonismum admitteret, parum consequenter de circulo ratiocinabatur. Hinc adducor vt credam Aristotelem, qui perspectum haberet Hippocratis istud inuentum, non dubitasse quin circulus quadrari posset; in Categoriis tamen de eo nihil pronuntiasse, quòd ad rem quam ibi tractabat nihil attineret.

Ex illo Physicorum loco habemus Antiphontem in quadrando circulo repugnasse principiis Geometricis, ideóque nec eius tetragonismi refutationem ad Geometram spectare; Ex Elenchis præterea constat eius & Brysonis tetragonismos fuisse *eristicos*; cùm Hyppocratis paralogismi non fuerint eiusmodi, sed mera ψευδογραφήματα, ex principiis veris atque geometricis prauè per incogi-

tantiam adhibitis; contentioſi autem & agoniſtici fiunt ἐκ φαινομένων ἐνδόξων, μὴ ὄντων δὲ *ex ijs principijs quæ videntur probabilia, cùm reuerâ talia non ſint*, vt c. 2. eiuſdem operis Philoſophus dixerat. Hinc porro fit, vt quoniam Eriſticus falſis licet, non tamen euidenter falſis nititur principijs, nunquam cogatur acquieſcere repugnanti, ſed ſemper contentioni ſit locus, contra quàm accidat Pſeudographo.

Omnes paſſim Interpretes ſed enulcleatiùs Simplicius in 1. Phyſc. docent Antiphontis ſententiam in eo abhorrentem fuiſſe à Geometriâ quòd circulum affirmaret eſſe polygonum ex lateribus minimis & quæ ſenſu dignoſci nequirent conflatum, ac proinde omnes à centro huius polygoni ad eius ambitum eductas lineas eſſe inuicem æquales cùm tamen ex ſecundâ tertij Euclidis manifeſtum ſit ex centro polygoni cuiuſuis ad peripheriam ipſius lineas eductas non eſſe omnes æquales, negauerit igitur principia geo-

edit. Aldinæ pag. 23.

metrica in quibus illa propositio fundatur.

Eudemus, vt refert idem Simplicius, narrat initium geometricum ab Antiphonte sublatum esse illud ἐπ' ἄπειρον εἰς τὰ μεγέθη διαιρεῖσθαι, *magnitudines posse in infinitum diuidi*; quod rectè consonat hactenus dictis. Si quis enim ponat circuli peripheriam ex punctis Zenonicis numero finitis componi, dicet polygonum æquale circulo esse illud quod tot angulos habuerit, quot sunt in circuli perimetro puncta; mensuramque singulorum Polygoni laterum esse duo puncta sese ἁπτόμενα contingentia. Quo posito nihil prorsus vrget demonstratio secunda tertij Euclidis; illa enim sumit rectam qua duo quælibet puncta circuli cõnectantur, posse secari per aliam à centro ductam inter duas rectas ab eodem centro ad duo illa puncta eductas; quod fieri nequit nisi omnis linea duo puncta coniungens possit in infinitum diuidi. Quòd si peripheria ponatur non componi ex punctis Zenonicis, sed

eiusmodi puncta dicantur esse *virtualiter* extensa, & posse coëxtendi spatio in infinitum *diuisibili*; (liceat mihi nunc & posthac absque vllo discrimine vsurpare voces illas quāuis minus latinas, quæ Scholæ Philosophicæ vel Mathematicæ communi probantur vsu; eæ etenim vt plurimùm sonant notiones aliquas eiusmodi artium peritis, quibus tantùm hæc scribo, proprias) si inquam ista puncta virtualiter extensa admittantur perinde vrgebit propositio illa secunda Euclidis, magisque peccabitur hoc dicto contra Physicam quàm contra Geometriam. Si quis demum contenderet non esse possibilem circulum aut corpus perfectè circulare, adhuc locum relinqueret problemati, quo videlicet pacto quadraretur circulus ex hypothesi quòd foret possibilis, & quòd per circinum posset describi peripheria, perque canonem recta linea; sicuti si sumas triangulum rectilineum nō esse possibile, adhuc quæri potest methodus illud quadrandi, si ipsum

esset possibile; illa enim methodus de facto continetur in 25. sexti Elementorum. Ex his apertum est rectè Philoponum scripsisse figuram illam rectilineam quā Antiphon æqualem circulo statuebat, esse πολυγωνόπλευρον σχῆμα *angulosissimam*; nulla enim illi circulo æqualis potest dari quæ pluribus angulis constet; sed quod eiusmodi πολυγωνόπλευρον σχῆμα μικρὰς πάνυ ἔχον τὰς γωνίας dicitur, emendari debet, & pro γωνίας, legi πλευρὰς: nam minima quidem habet latera, ex duobus scilicet punctis conflata; anguli verò esse debent maximi. pag. 13. in primum Phys. edit. Venetæ græcè.

Aristoteles duobus in locis Brysonis tetragonismum commemorat; in Elenchis loco citato eius argumentandi rationem ait esse *cōtentiosam*, vt paulò ante dicebamus; In Posterioribus docet demonstrari vnumquodque debere ex propriis ipsius principiis, non autem ex communibus; hoc enim, inquit, esset demonstrare vti Bryso ostendit tetragonismum. Interpretes omnes Græci, Arabes & Latini dicunt Brysonis 1. Posterior. textu. 23.

paralogismum hunc fuisse. Vbicunque est maius & minus ibi est æquale; sed in rectilineis figuris datur maior circulo nempe quadratum circumscriptum, datur etiam minor nempe quadratum inscriptum, ergo datur æqualis. *Ita* inquit Toletus, *Interpretes declarant Brysonis rationem, cuius nihil dixit Aristoteles. Propterea mihi dubium est an illa fuerit; cùm non solum ex communibus, sed ex falsis procedat; at Aristoteles ex veris & immediatis videtur dicere processisse. Dico ex falsis nã illud principium* quo datur maius & minus datur æquale *est falsum vt docet Campanus; nam angulo semicirculi datur rectilineus maior nempe rectus & obtusus, & datur minor scilicet acutus, nunquam tamen datur æqualis.* Ita quidem videtur Aristoteles dixisse, & ita illum interpretantur plurimi in quibus est Philoponus commentarijs in illum locum; at clariùs & apertiùs ipse Aristoteles docet in Elenchis contentiosum fuisse Brysonis syllogismum; contentiosum verò ex ap-

1. Poster. c. 7. num. 13.

parentibus quidem, sed falsis concludere. Iulius Pacius refert Brysonem ita quadrasse circulum, vt voluerit eum esse quadrato medio, quod æquè sit & minus circumscripto, & maius inscripto: verùm oppositum testatur Philoponus ex Alexandro ipso quem Pacius in huius Brysonici tetragonismi historiâ referendâ sequi se alibi profitetur. ἐν τίνι δὲ τόπῳ τῶν μεταξὺ σημείων τὸ ἴσον πίπτει τετράγωνον ἐκ ἀπέδειξεν, *in quodnam punctorum interpositorum cadat quadratum illud æquale non ostendit*; paulò verò post reprehendit illum quòd non designarit, prout debebat, quadratum illud medio loco positum. Pacium fefellit, quantum coniicere valeo, ipsius Philoponi oratio, qui vt ostendat intermedia spatia esse numero infinita, ideoque vnum ex illis à Brysone determinari debuisse, assumit exempli causâ in maiori quadrato esse partes sexdecim, in minori octo, & in circulo duodecim; quo dato, non quoduis medium quadratum erit æquale circulo, sed

in Eléch. c. 11.

in 1. poster. c. 9.

illud tantummodo, inquit, quod æquo excessu mediũ fuerit. ἔστω γάρ, φέρε εἰπεῖν, ὁ μὲν κύκλος ιβ΄ τινῶν, οἷων τὸ μεῖζον τετράγωνον ις΄, τὸ δὲ ἔλασσον τετράγωνον η. οὐκ ἁπλῶς ἄν, τὸ μεταξὺ τῶ μείζονος καὶ τῶ ἐλάσσονος ἔσται ἴσον τῷ κύκλῳ τῷ τῶν αὐτῶν ιβ΄ ὄντι, ἀλλὰ τὸ ἐν ἴσαις ὑπεροχαις· τὰ γὰρ θ΄, καὶ ι΄, καὶ ιά΄ καὶ τὰ λοιπὰ μεταξύ εἰσι τῶν ις, ἀλλ' οὐκ εἰσὶν ἴσα τοῖς ιβ΄· ἔδει γὰν κἀκεῖνον οἰκείως τῇ γεωμετρικῇ ἐπιστήμῃ παραδοῦναι καθ' ποῖον σημεῖον τῶν μεταξὺ πίπτει τὸ ἴσον τετράγωνον· καὶ μὴ ἁπλῶς ὅπως, τὸ μεταξὺ ἴσον ἀποφαίνεσθαι. *Consistet enim verbi gratiâ circulus* 12. *mensuris, cuiusmodi maius quadratum continet* 16. *minus verò quadratum* 8. *Non igitur simpliciter quodcunque medium inter maius & minus iacet, illud erit æquale circulo qui eiusmodi* 12. *mensuris constare ponitur: sed illud quod æquali excessu superat & superatur. Nouem enim mensuræ & decem, vndecim quoque atque tredecim & reliquæ iacent inter* 8. *&* 16. *sed non sunt æquales ipsis duodecim. Oportuit igitur illum accommodatè ad scientiam geometricam tradere in quodnam ex intermedijs punctis caderet quadratum circulo æquale.*

Meam

Meam igitur de quæstione initio propositâ vt paucis complectar, sententiam & aliquam fortasse lucem verbis Aristotelis afferam, tetragonismum circuli ab ipso duobus sumi modis aduerto iuxta duas de eo quæstiones. Quæsitum primò est vtrum esset possibilis; tum quo pacto is ope regulæ & circini, vel certè alterius instrumenti præstetur; vtrique quæstioni suus respondet tetragonismus, quique alterutri satisfacere nititur, circulum dicitur quadrare vel θεωρητικῶς, ostendendo tetragonismum illum esse aliquid verum; vel προβληματικῶς, tradendo constructionem ex qua ille necessariò sequatur. Hippocratis Chij tetragonismus fuit *practicus* in tradendâ κατασκευῇ illi propriâ; Antiphontis verò Brysonisque nō fuit nisi *speculatiuus* in quæstione εἰ ἔστι *an sit*; vterque iste fuit ἐριστικὸς, id est innixus principijs in speciem verisimilibus, re tamen verâ falsis. His ita constitutis facile explanantur Aristotelis aliorumque dicta.

Primò neque Aristoteles neque Interpretes tradunt vllam κατασκευὴν Brysonis vel Antiphontis; quoniam nec ipsi vllam vnquam proposuerunt, nec ex hoc capite reprehendi à Philopono vlloue alio meruit Bryso, cùm id non esset necessarium ad probandum tetragonismum circuli esse, quod vnum ipsi disputabant. Certè Antiphontis principia satis apertè ostendunt, ipsum non potuisse quadrare circulum in posteriori sensu; Quomodo enim vel probabiliter determinare posset numerum punctorum quæ circuli dati peripheriam componunt? quomodo quadrare triangulum isosceles cuius basis sit linea ex duobus punctis cõstans, latera verò æqualia duæ rectæ à centro eductæ? illa tamen duo inuenienda sunt ei qui eiusmodi schema πολυγωνότατον quadrare instituat.

Secundò rectè Aristoteles dixit in Elenchorum citato loco, modum quo Bryso quadrauit circulum, posse trãsferri aduersus multos, ὅσοι μὴ ἴσασιν

τὸ δύναλον ἐν ἑκάστῳ, καὶ τὸ ἀδύναλον, *qui non norunt quid in vnaquæque re fieri possit, & quid fieri non possit.* Bryso enim vt demonstraret tetragonismum esse δύναλον sumpsit propositionem quæ vt ipse Aristoles indicat, in vno magnitudinum genere est vera, indemonstrabilis, & immediata, nimirum istam *vbi datur maius & minus, ibi datur æquale*; & eam verisimilitudine quadam ductus transtulit ad ea quæ sunt alterius generis. Hoc autem pacto eos qui ignorant quid in singulis sit possibile possis fallere. Vt si sumas duas lineas quæ quo magis producuntur, eò propiùs ad se inuicem accedunt, conuenire tandem in vnum punctum, ex hoc principio quod in genere linearum rectarum est verum & euidens per se, latiùs tamen sumptum & ad omnes lineas quadam apparenti probabilitate traductum est falsum, ostendes hyperbolicæ lineæ occurrere rectam illam lineam, quæ vt in Conicis monstratur, propiùs quidem dum producitur accedit, nunquam ta-

11. & 12. propos. lib. 2. Apoll.

men cum eâ conuenit, idóque ἀσύμπτωτος *nusquam* in hyperbolam *incurrens* dicitur. Porro eiusmodi principia quæ strictiùs sumpta sunt euidentia, dum ita extenduntur ad aliud genus, non considerando vtrum propria istius generis principia tali extensioni repugnent, aut sint accommodata, sunt ea quæ Aristoteles appellat communia, opponitque proprijs.

Hinc colligitur ratio cur Aristoteles dixerit, id quod per commune aliquod principium demonstratur non sciri *nisi per accidens* κατὰ συμβεβηκός; accidere enim potest vt ex eo argumentandi modo fallamur. Colligitur præterea difficile esse cognoscere an scientiam habeamus de aliquo, quia, vt ipse ait, difficile est iudicare an ex aliquo eiusmodi principio communi concludamus, quod verum quidē & primum sit in quodam genere, sed quadam tantùm verisimilitudine translatum sit ad alia ἐ συγγενῆ *non eiusdem generis*, & minimè accommodata eiusmodi prin-

cipio. Colligitur denique qua ratione illud principium à Brysone sumptum dicatur ab Aristotele modò verum & immediatum, modò falsum; est enim verum in vna vt ipse loquitur συγγενείᾳ, est falsum in aliâ ad quam transfertur, non consideratâ propriâ ipsius naturâ. Cùm enim illud ita commune fit, habet sub se angulum mixtum & rectilineum, in quo genere quantitatum non est verum; habet etiam sub se spatium rectilineum & circulare; & in hoc quidem est verùm, sed id *per accidens*, cùm non demonstretur esse verum per propria isti quantitatum binario principia.

Quid Oliuarius de Serres profecerit dum libræ admiculo circulum quadrasse sibi visus est; & quàm longè dispari methodo ea tractetur à Mathematico inquirente figurarum tetragonismos.

§ VII.

IStius Autoris, nisi libram in quadrando circulo admouisset, mentionem nullam hoc loco feciſſem; neque enim instituti præsentis est, recentiorum omnium Scriptorum in hoc genere peccata emendare vel recensere. Quia tamen inde sumere posset aliquis ansam existimandi vel libram non aliter adhiberi ab Archimede in hoc tetragonismorum negotio; vel accuratam esse Oliuarij experientiam, eamque inauditâ aliquâ inuentione niti; operæ pretium duxi eius hac de re scripta recognoscere, ne libræ mathematicæ officiant. Tria igitur breuiter dicam.

Primò proponam eius methodum; tum quadrationis eius vitium ostendam; aperiam postremò quàm diuerso modo librâ vtantur Mathematicus, & qui mathematicus non est. Ad primum spectat vt ipsa Autoris verba producamus, prout iacent sub finem capitis 3. libri primi *Theatri agriculturæ* gallicè editi. *Quamuis*, inquit, *circularis figura omnes adhuc Geometras antiquos & recentiores vexarit, præfatus me in isto negotio aliquot horas consumpsisse, meum ea de re iudicium velut vnus de turbâ proferam: non quod censeam meam hanc propositionem præferendam esse monumentis eorum qui deditâ operâ istam tractarunt materiam, sed ne celem disciplinæ huius cupidos de nouâ quam ineo methodo, magis promptam & expeditam, si quæ ab vllo offeratur, amplecti paratus. Fateor hanc operationem esse mechanicam, & Geometriæ, vt potè à qua suas demonstrationes non mutuatur, incognitam; sed tantò etiam longiùs à falso abest, quantò facilius sensu percipitur.* Ecce iam verba quibus

negotium se conficere putat. *In proposito circulo triangulum æquilaterum inscribatur, & super trianguli vno latere quadratum. Dico aream huius quadrati æqualem esse areæ circuli.* Hoc autem ostendit in hunc modum. *Eligatur plana superficies in materiâ quadam vniformi, & rectè cohærente vt in chartâ papyraceâ vel pergamenâ, ligno, aut cerâ & in ea describatur tam circulus quàm quadratum modo dicto, tum appendatur è libræ lance vnâ quadratum, ex altera circulus, æquilibrium quod consequetur monstrabit æqualitatem inter vtramque aream, discrimenque si quod sit, esse insensibile.*

Istam quadrationem nec veram esse nec tam propè accedere ad veram, quin propiùs Archimedea paulò superiùs laudata (quæ & expeditissima & omnium artificum vsu probata est) iampridē accesserit, nunc habeo ostendere. Contendo igitur aream circuli ab Oliuario repertam esse verâ minorem, & quæ ab Archimede tradita fuit verâ minor Oliuarianâ tamen multò maio-

rem esse. Latus trianguli circulo inscripti subtendit arcum graduum 120; cuius medietas est arcus gr. 60. Sinus gr. 60 vero maior est 866,026 posito sinu toto partium 1,000,000; Numeri 866,026 duplus 1,732,052 est latus triāguli inscripti, vt ex doctrinâ *sinuum* notum pono. Numerus 1,732,052 quadretur, vt existat numerus 3,000,004,130,704. Posito igitur sinu toto, hoc est semidiametro circuli partium 1,000,000, & consequenter quadrato eiusmodi semidiametri 1,000,000,000,000; maior vero circulus cōtinebit mensuras quadratas 3,000,004,130,704, cuiusmodi semidiametri quadratū in se habet 1,000,000,000,000: proportio ergo quadrati quod ex semidiametro fit ad spatiū illud maiº circulo est numeri 1,000,000,000,000 ad 3,000,004,130,704: spatium ergo quod quadratum semidiametri continebit ter, & insuper quinque particulas cuiusmodi quadratum semidiametri continet decies centenas millenas siue vt vulgò loquimur

vnum millionem, erit maius circulo quod est absurdum. Ex Archimedis enim demonstratione certissimum est spatium aliquod circulo minus complecti in se quadratum semidiametri ter, & insuper decem partes tales, quales septuaginta & vna complent prædictum semidiametri quadratum. Porro discrimen inter has duas minutias $\frac{10}{71}$ & $\frac{5}{1,000,000}$ est $\frac{9,929\ 645}{71,000,000}$; quæ minutia est maior vnâ octauâ parte prædicti quadrati. Eiusmodi igitur quadrati ex semidiametro geniti octauam partem & ampliùs lucrifaceret quisquis agrum circularem hoc mensurandi genere emeret, tantumque dispendij pateretur qui eum venderet, si ex Theatri agriculturæ Oliueriani præscripto fundi mensura institueretur; quod sanè non est æquâ lance suum cuique tribuere. Sed quæ erroris istius causa?

Primò facile fieri potuit vt materia quàm Oliuarius ad praxim istam

assumpsit non esset æquali tenore densa, & crassa. Secundò vt non ad amussim dissecta. Tertiò vt libra ipsa vitio aliquo extraordinario sed occulto laboraret, id enim sæpiùs euenit quàm vulgò creditur, vt in tractatu de libræ principijs explicamus. Quartò denique humanâ arte fieri non potest, prout multiplici experientiâ edocti Scriptores testantur, vt per libram quamuis exactè elaboratam omnimoda diuersitas inter duo pondera vtrinque appensa dignoscatur: neque enim axis circa quem' voluitur iugum est aut esse potest linea indiuisibilis, neque punctum suspensionis fit ex medio axe, neque cætera omnia vitia, quæ bene multa interuenire possunt in vsu vel constructione libræ, ita euitari possunt, vt illorum vestigia aliqua non remaneant.

Supereſt vt declaremus vnde oriatur Mathematicũ, dum operâ libræ quadrat figuram aliquam, non esse obnoxium eiusmodi incommodis. Vera huius causa est quòd in praxi

non vtatur librâ, ſed ſolâ regulâ & circino; in demonſtrandâ autem praxeos veritate vtatur quidem librâ ſed diuulsâ & abſtractâ à materiâ, ac proide & à vitijs ex illâ prouenientibus. Porro quid ſit libram abſtractam à materie aſſumere, aptiùs explicare non poſſum quàm ex doctrinâ in Ariſtotelicis libris paſſim conſignatâ, præcipuè verò in Metaphyſicis, vbi poſtquam dixit mathematicas diſciplinas (ijs nominatim annumerat Mechanicam libræ noſtræ contemplatricem) ſpectare obiectum ſuum nempe quantitatem vt ſeparatam ab ijs quæ ipſi accidũt, & per quæ ſenſibilis fit ſcilicet ab albedine, frigore, duritie &c. ſubdit

l. 13. c. 3. ſummâ. 1.

ὥστε εἴ τις θέμενος κεχωρισμένα τῶν συμβεβηκότων, σκοπεῖ τι περὶ τούτων ἢ τοιαῦτα, ἀθὲν διὰ τοῦτο ψεῦδος ψεύσεται, ὥσπερ ἐδ' ὅταν ἐν τῇ γῇ γράφῃ, καὶ τὴν ποδιαίαν φῇ μὴ ποδιαίαν· οὐ γὰρ ἐν ταῖς προτάσεσι τὸ ψεῦδος.

Quapropter ſi quis ponat hæc ab accidentibus eiuſmodi ſeparata, ac de ijs aliquid, quatenus talia ſunt, conſideret, nullius propterea fallaciæ tenebituri

quemadmodum nec si in terrâ figuram describat, & eam quæ pedalis linea non est, pedalem esse dicat: neque enim in istis propositionibus mendacium falsúue inest. Vbi per *propositiones* intelligit illas quæ conditionali particulâ afficiuntur, vt *si sol lucet; si superficies sit grauis; si hæc sit libra ab omni vitio immunis*; quãuis enim vitiis scateat, nihil prorsus fallit qui vt demonstret aliquid, ponit eã absque vllo vitio, atque hoc ponens θέμενος, syllogismum ita conficit. Figura omnis cui, si pendeat ex libra mathematicè perfectâ, conueniunt certæ quædam in ordine ad libram ipsam proprietates, est æqualis figuræ *A.* quam ponimus esse quadratam & notam: Sed figura *B.* quam sumimus esse circulũ pedali diametro, affecta est eiusmodi proprietatibus spectatis in ordine ad lineam *C.* quam ponimus esse libram ipsi circulo adaptatam; ergo circulus *B.* est æqualis figuræ *A.* quadratæ & cognitæ. Hîc nullus vt apertum est, interuenit vsus libræ quæ manu attrectetur, quámuis faber

ex ære vel aliâ materie confecerit. Quicquid in isto negotio examine eget est veritas vtriusque præmissæ, an scilicet eiusmodi proprietates cum respectu ad libram expositæ conueniant isti circulo; & vtrum, si conueniant, consequens sit ipsum circulum esse æqualem quadrato *A*. Hoc autem totum demonstrari potest ab eo qui nunquam vulgares illas quibus trapezitæ & id genus homines vtuntur, lances manu suspenderit.

Quòd verò Oliuarius hunc figuras quadrandi modum suum esse & hactenus incompertum putat, fallitur plurimùm; cognitus equidem est, & vbi commodior via tetragonismi non suppetit vsurpatus, sed magis exactâ accuratâque methodo, scilicet per admirabile illud genus bis librandi eandem magnitudinem primò in aëre, deinde in aquâ, de quo nos in libello iam memorato agimus. Ad istud comprobandum satis puto adducere Iordanum sub finem opusculi *de ponderositate*, vbi

istam in aquâ ponderandi rationem explicaturus præfatur in hæc verba. *Quoniam propter irregularem quorundam corporum compositionem non potest eorundem magnitudinis per geometriam certa proportio inueniri; & quoniam pretia quorundam quæ emuntur & venduntur debent magnitudinibus ipsorum corporum proportionari; necessarium fuit per ipsorum pondera corporum, eorum magnitudinum proportionem reperire, vt singulis magnitudinibus per proportiones suorum ponderum cognitis, valeant certa pretia sociari. Primò igitur instrumenti per quod examinantur ponderum quantitates ratio danda est. Est ergo examinis ponderum virgula recta, in cuius medio est foramen recipiens perpendiculum, cum quo sustinetur virgula, cum ponderibus in extremitatibus eius appensis, cum debet magnitudinis alicuius quantitas per mensuras ponderum deprehendi.* fol. 16 edit. Venetę ann. 1565.

Hæc ille emendatis Typographi erratis. Vnde apertè constat Mathematicum ideò non vti librâ materiali ad habendum quadratum veræ cir-

culi areæ proximè æquale, quòd illud ex Archimedis methodo facillimâ & obuiâ longè accuratiùs obtineatur, quàm per lancium manu tractatarum opem vllâ humanâ industriâ præstari queat.

Vnde oriatur tanta istius tetragonismi difficultas.

§. VIII.

NObis notitias rerum impressas à natura hærere sine quibus neque intelligi quicquam neque quæri neque disputari potest, vox est non tam Aristotelis, quàm Veritatis ipsius, cui omnes facilè assentiuntur. Ex eiusmodi ἐννόιαις ἀδιδάκτοις καὶ ἀναπόδεικτοις, quas propterea ἀρχὰς Græci nos *initia* siue *principia* dicimus, *cætera series deinde sequitur maiora nectens*, vt Tullius loquitur: in illâ tamen quasi *catenâ verorum* ab initijs, veluti primis annulis alia longiùs, alia distant propiùs; ideóque hæc faciliùs,

l. 4. quæst. Tuscul.

faciliùs, illa difficiliùs deprehenduntur connexa. Vt hîc idem nonnunquam contingat, quod in quibusdam regionibus, vbi fluuij à fonte suo profecti, & cæco terræ hiatu absorpti dū post longos tortuososque flexus emergunt inexplicabile incolis sit, hæc cauda cum quo capite cohæreat.

Ista est vera causa cur circuli quadratio sit adeo abstrusa, vt tot sæculis inueniri nō potuerit, tot ingenijs tantisque studijs quærentibus; proficiscitur quidem à principio aliquo per se noto, sed ita longè ab eo processit, totque interiecta sunt quæ obstant ne connexio eorum appareat; vt dubitatum à viris grauibus fuerit, fictitiumne illud esset, cuius cum veri principijs nulla colligatio cerneretur. Atque vt istud distinctiùs intelligatur percurrere lubet ἀρχὰς præcipuas ex quibus Geometra concludit duarum magnitudinum æqualitatem; illico enim intelligemus obscurum esse quo pacto illa initia circuli tetragonismus sequatur, cùm ijs

potius repugnare videatur.

Primò quidem adhibere solet illud quod apud Euclidem in Elementorum limine extat τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. *Quæ sibi mutuo congruunt ea inter se sunt æqualia.* Quod vt pleniùs intelligatur recolendum est illa dici ἐφαρμόζειν quæ in eodem ita collocantur spatio vt nihil vnius sumi possit extra aliud; ad istud verò requiritur vt termini siue limites quibus continentur sibi inuicem apte quadrent, sicuti futuri operis protypus cohæret adaptatus rei quæ ex illo deformatur; vel sicuti ferus ille tormentorum Artifex mortua corpora iungebat viuis.

componens manibusque manus, atque oribus ora.

Præterea memoriâ tenendum est quasdam ex lineis (à Græcis ὁμοιομερεῖς dicuntur, nos *regulares* appellamus) ex Vitellonis descriptione *vmformes esse in omni sui parte*, istámque inde obtinere proprietatem, vt Proclus rectè exponit, quòd earum quæuis partes quibusuis commissa

l. 1 prop. 11s. l. 2. in Eucl. pag. 19. edit. Hertuag

adaptentur & congruant; species verò eiusmodi regularium in plano descriptarum non sunt nisi duæ, recta scilicet & circularis; nam spiralis illa circa cylindrum ducta quam ex Apollonij demonstratione adiungit idem Proclus, *quando rectâ motâ circa superficiem cylindri punctum æquè velociter in ipsâ mouetur*, ὅταν εὐθείας κινουμένης περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου σημεῖον ὁμοταχῶς ἐπ' αὐτῆς κινεῖται, est quidem regularis sed non in planâ superficie iacet; vnde Vitello non repugnat, vt quidem existimo, Proclo, dum duas tantum ait esse lineas *regulares* rectam nempe & circularem. Regularibus lineis proximæ sunt conicæ ellipsis, parabole, & hyperbola; quia quamuis quælibet earum pars cuilibet non congruat καθ' ἁρμοσιν *secundum conuenientiam illam* partes tamen quæ circa axem sunt sibi mutuò quadrant, si secundùm eundem axem complicatæ fuerint.

Ex his liquidò constat, cùm linea recta disconueniat omni alteri lineæ præterquam soli rectæ, figuram con-

tentam lineis rectis, quam rectilineam dicunt, cuiusmodi est quadrata non posse ex isto principio, quod æqualitatem petit ex mutuâ ἐφαρμογῇ, ostendi æqualem esse vlli curuilineæ, qualis est circulus ac proinde ex istâ *notione primâ* non posse quadrati circulum, aut, quod idem est, quadratum rotundari, tanta est oppositio istarum figurarum, ad quam fortasse respexit ille qui disconuenientia sectantem describens ait illum *mutare rotunda quadratis*. Constat insuper segmentum circuli rectè ostendi ex eodem principio apud Euclidem esse æquale alteri segmento, cui iungi καθ' ἐφάρμοσιν potest; eademque de causâ partes segmenti parabolæ vel hyperbolæ vel etiam ellipsis quę axẽ earum vtrinque ambiunt, esse æquales monstrari potest.

l. 3. prop. 24.

Secundò plurima sunt quorum æqualitas vel proportio licet ostendi non possit per istam ἐφαρμογὴν, demonstratur tamen per *deductionem ad impossibile* monstrando nimirum nisi se habeant vt inscripta notâ quadam

ratione rectilinea quorum æquali. tas ostenditur per *principium* illud *conuenientiæ*, sequi ἀδύνατον, partem nimirum esse æqualem toti. Hoc pacto plurima, eaque scitu digna ostendit Euclides in duodecimo Elementorum libro, quorum mentionem superiùs fecimus; innumera etiam nos hac viâ æquamus istorum Elementorum, tetragonismorum libro, primo; is enim totus est de hoc argumento, quod ab alijs tractatum non vidi, optaui tamen, vt eò breuior forem. Qui enim problematis alicuius solutionem inuestigat, clauem ad reconditiora quædam aperienda quærit; clauem autem mole ipsis valuis propè pari quis commendet?

Hoc æquandi genere quin quadrari possit circulus ex solis principijs geometricis non dubito, sed adeo abstrusum puto vt sicut parabolæ tetragonismus non est inuentus solis geometricis initijs, nisi postquàm Mechanica mira istius æqualitatis venatrix eum prima reperit; ita nec Geometria se huius inuenti laudem

Mechanicæ præreptum ire sperare vnquam debuerit.

Tertiò est aliud geometriæ *initium* quo duorum æqualitas probari potest. *Si ab aliquâ magnitudine partem demas & ad residuum adijcias æqualem ablatæ magnitudinem, composita ex residuo & ex adiecto erit æqualis integræ magnitudini.* Hoc initio quadrauit *lunulas* Hippocrates Chius, ex triãgulo enim rectilineo aufertur segmentum circuli cuius basis eadem sit quæ trianguli, & ad residuum adduntur duo vnius circuli segmenta, quæ reliqua duo trianguli latera habent pro basibus, æqualiáque simul esse ablato segmento ostenduntur per methodum secundo loco iam à nobis propositam, vt videre potes in primi libri laudato corollario. Ex eodem
§ 6. initio ostenditur angulo recto æqualis angulus quidam μηνοειδὴς *speciem cornu lunaris referens*, cuius meminit
pag 64. Proclus, quamuis inquit fieri nequeat vt rectæ lineæ peripherijs congruant, ἀδύνατον ἐφαρμόσαι, ταῖς εὐθείαις τὰς περιφερείας. Eiusce modi angulus est ille quẽ continent duo semicirculi, quorum

diametri sunt duo in eundem quadrati angulum coeuntia latera, vnus autem est intra quadratum, alter exteriùs describitur. Cæterùm iste modus, si rectè perpendatur, deprehendetur non priùs posse geometricè quadrare circulũ, quin ipsa segmenta quæ adduntur, & subducuntur fuerint in quadratam figuram permutata.

Quartò denique ex Mechanicâ habemus istud principium. *Quæ sibi inuicem ex æqualibus interuallis suspensa æquiponderant sunt æqualia*; quod latissimè patet, quia quibuscunque illa terminis claudantur curuis vel rectis; id per accidens est dummodo æquilibrium vtrinque appensa committere probentur. Hac methodo Archimedes parabolam primus quadrauit; nec enim audiendi sunt qui istam, vt diximus, inuentionem Pythagoræ ascribunt. Occurrit mihi hoc loco vnum quod prætermitti non debet, eos videlicet longè errare qui difficultatem inueniendi rem aliquam, ex ipsâ iam inuentâ metiuntur, sibique persuadent explanato & ostenso iti-

Var. in opus. contra Picu.

nere incedentes factæ primùm monstratæque viæ laudem non esse tantam, quin ipsi quoque eam consequi potuissent, si anteriores Archimedi vixissent. Audiant Plutarchum de illius inuentis ita scribentem ζητῶν οὐκ ἄντις εὕροι δι' αὐτοῦ τὴν ἀπόδειξιν· ἅμα δὲ τῇ μαθήσει περιίσταται δόξα τοῦ κἂν αὐτὸν εὑρεῖν· οὕτω λείαν ὁδὸν ἄγειν καὶ ταχείαν ἐπὶ τὸ δεικνύμενον. *Si quis per se solutionem problematum eiusmodi quærit, frustra laborat, inueniendique desperatione occupatur; simul autem atque illam ab Archimede didicerit adducitur vt credat à se quoque inueniri potuisse, ita plena & breuis apparet via quæ ad rem propositam ducit.*

in vita Marcelli.

Archimedes porro ostendit si parabola certo quodam è libra suspendatur modo, sequi inde ipsam esse æqualem designato cuidam spatio rectilineo. Istud demonstrandi genus præcipuè si ad circulum & hyperbolam extendatur, vt à nobis factum est, eget pleniore quodam theorematum ad libram spectantium notitiâ, quapropter secundum librum Elementorum nostrorum illis destinaui

nimus, cùm ea alibi nobis non occurrerent, & perneceſſaria eſſe intelligeremus ad figurarum quarumcunque tetragoniſmos. Tertio demum Elementorum libro, quod neminem feciſſe vidimus, tradimus methodum ſuſpendēdi è librâ circulum, ellipſim, & hyperbolam, quod ab initio huius laboris ſibi propoſuerat animus veri, vtinam & gloriæ diuinæ vtcunque inde prouenturæ, ſtudio ardens.

Ex hactenus dictis liquet fruſtra eos eſſe qui, cùm in limine mathematicarum diſciplinarum adhuc verſentur, imo necdum illud fortaſſe attigerint, circumſpiciunt quasi, quæ ſeſe cæterorum oculis ſubduxit, ipſis ſe viſendam vltro oblatura ſit quadratio circuli: non enim habitat in ipſo aditu, ſed in abditiſſimis palatij iſtius receſſibus. In veſtibulo ſunt Demonſtrationes elementorum quæ Euclides collegit; in penetralibus latent Conica elementa ad quæ proximè peruenit Apollonius anteriorum conatu excitatus; longiùs deliteſcunt ἰσοῤῥοπικὰ quę

Aequiponderantia vulgò dicuntur, ipsamque *Parabolæ* quadraturam stipant, quousque peruenit indefatigabili labore Archimedes; vlteriùs sine viæ duce, atque eò periculosiùs quò minori luce progrediendum est ei qui ad irrepertã Circuli quadrationem aspirat. Quid nos Euclidem, Apollonium & Archimedem sequuti porro soli profecerimus, tuum erit æstimare, benigne Lector, si tuos oculos ipsa cui tuâ causâ studuimus, Operis euoluendi breuitas allexerit. Labores nostros fatemur fuisse diuturnos & incredibiles; sæpius, vt solet per auia & prærupta, ex offendiculorum incursu lapsi sumus; non semel inanibus spectris delusi fuimus; nobis frequenter venit in mentem vox illa Augustinianæ similis NOLI QVAERERE SI NON VIS ERRARE; an verò tandem aliquod tanti tædij pretium nobis constet penes te, inquam, esto iudicium, humane Lector; quod si quid veri à nobis repertum esse probaueris, id totum in Deum, quem viæ rectorem

tractat. 26. in Ioan.

assiduè implorauimus, vt refundas enixè flagitamus.

ADMONITIO in sequentes libros.

LIbro qui ad ἰσοφέμενα præsentis tetragonismi pertinebat absoluto reliquum est vt ad eos qui θεωρέμενα tractant, transitum faciamus; priustamen de paucis quibusdam monitum volo Lectorem.

Primò. Si quis ad legendos qui sequuntur libros accedet, debet is callere Elementorum Euclidis sex saltem priores libros; præterea ignorare non debet Apollonij Elementa Conica, quæ extant; denique versatum eum esse oportet in Archimedeis demonstrationibus ijs minimùm

quas scripsit *de æquiponderantibus* libro primo, & de quadratione parabolæ libello singulari; quæ duo opera vel ex hoc probantur esse Archimedea quod paucis multa, & recondita complectantur; videtur enim iste Autor esse specialis præ cæteris ofor magnorum voluminum. Qui his instructus nondum fuerit, non est quòd in manus nostros libros sumat; nihil etenim in ijs uideret, & fortasse hoc esse librorum vitium quereretur; vbi apertè constaret non esse istum *obiecti* (vt docendo loquimur) *& luminis defectum, sed potentiæ ipsius visuæ.*

Secundò causam exponere debeo Tolosatibus, in quorum Prouinciâ & vrbe primariâ *Sacram doctrinam qua fides saluberrima gignitur, nutritur, defenditur* iampridem profiteor, cur Theologus Mathematica scribam? Non mentiar si conscius tenuitatis meæ primùm dixero me diuinis scribendis imparem esse; nec si deinde adiecero priùs me Matheseos in hac ipsâ vrbe professorem extitisse quàm Scholasticæ Theologiæ: respondere

August. l. 14. de Trin. c. 1.

tamen lubet velle me hac scriptione indicare Theologo Mathematicas disciplinas imprimis necessarias esse. Illum egere Sacræ scripturæ intelligentiâ non vulgari nullus infitiatur; atqui ea esse absoluta nequit, nisi Chronologiam sacram, lunarium solariumque eclipsium ac cyclorum rationem, nisi vasorum, ponderum, atque ædificiorum proportiones adiunctas habeat; ad quæ omnia quantum disciplinæ istæ conducant nemo non facile intelligit. Sumo exemplum vnicum ex Apologetico Tertulliani ad Scapulam Africæ Præsidem, quem vt à persecutione Christianorum deterreat, postquam commemorauit imbres immodicos, segetum iacturam, ignes super mœnia Carthaginis pendere visos, tonitrua frequentia audita, *omnia*, inquit, *hæc sunt signa imminentis iræ Dei, quam necesse est quomodo possumus & annuntiemus, & prædicemus, & deprecemur interim localem esse. Nam & sol ille in conuentu Vticensi extincto pæne lumine adeo portentum fuit, vt non potuerit ex*

ORDINARIO *deliquio hoc pati positus in suo hypsomate & domicilio; habetis Astrologos.* Ita Afer ille Paganis in causâ bonâ malo argumento insultat. Si Astronomiæ peritus fuisset nunquam pronuntiasset homo nimiùm credulus solem in meridiano circulo & suo domicilio positum non posse pati deliquium, cùm contrarium ipsâ luce meridianâ apud Astrologos clarius sit; nunquam istud deliquium contra ordinariâs Astronomiæ leges euenisse iactasset. Quamuis Authores qui eclipses apud antiquiores consignatas scriptores colligunt, istius non meminerint, certum tamen est anno Christi 196. Seueri 4. (sub quo ista contigisse consentit Baronius, quamuis quinque annis tardiùs, quod mirum non est, cùm præter Mathematicas, quas Cardinalis iste non adhibuit, aliæ omnes huius præcisè temporis coniecturæ incertæ sint vt Pamelius admonet) congruere ex iisdem tabulis eclipsim solarem quæ Vticæ contigerit 7. Decembris. Feriâ 3. duraſſe horas duas

cum semisse ferè; inchoasse quinque ferè horariis quadrantibus ante meridiem, totidemque ferme pòst desiisse; eius *digitos* vt loquuntur, *eclipticos* fuisse 9. ferè.

Tertiò nec istius causam reticere debeo, cur cùm ante annum amici nostri istâ in vrbe palam dixerint istud opus nihil expectare præter Typographi operam, cohibitum tamen apud nos fuerit, ne foras ad hunc vsque diem prodiret? Dico si satis castigatum fuerit, satis citò ipsum prodire in lucem. Maiorum expectanda erat facultas, quorum prudentię summæ fuit lento gradu in eo scribendi genere procedere, cui tam frequens Scriptorum primæ notæ lapsus hunc senarium ex Tragico desumptum meritò addixit.

Nihil timendum video, sed timeo tamen.

Facillimum profectò est sicuti in arithmeticis, ita & in geometricis præcipuè abstrusis hallucinari; quisquis verò istud expertus non est, nihil eum vnquam in hoc negotio ten-

tasse ausim affirmare; & quisquis de hoc argumento aliquid emittit in lucem, nec tamen timet, innominato illo φοβίας vitio laborare, quam in Celtis reprehendit Aristoteles, quòd terræ motus, marisque agitati fluctus contemnerent. Porro quemadmodum facile est in istorum inuestigatione erroris fascino teneri, ita in aliorum inuentis reprehendendis procliue admodum est decipi, non aliter quàm duas ex lucernâ flammulas videre, cum oculum torseris.

Lib. 3. Ethic. cap. 7.

Pag. 64. in margine pro *quæst. Tuscul.* lege *quæst. Academ.*

APPENDIX SECVNDA.

CVM Librum noſtrum Bibliopola iam vanum eſſet daturus, ad nos perlatum eſt, non deeſſe doctos in vrbe iſtâ & amicos viros qui inſpectâ eius fronte, & obiter, vt fit, toto opere euoluto timerent ne licet methodus eſſet noſtra, res tamen quas per eam demonſtramus, iam ab aliis noſtræ ætatis viris Lucâ Valerio, Bonauenturâ Caualerio & Euangeliſtâ Torricellio repertæ extarent. Tunc ego incertus hæſi quid potius facerem; vtrum, ſi quidem id quod timebatur re uera foret, meam ipſe miſeriam deplorarem qui tam egregios viros à quibus plurima facilè addiſcere poteram, ne nomine quidem adhuc nouiſſem; an fœlicitatem agnoſcerem in eo nõnullã, quod de meo protuliſſem ſolus ea in quorum inuentione illi ſimul tantique viri deſudaſſent. Rem ipſam exploraturus eiuſmodi Autorum lucubrationes quas potui per vrbem collegi iſtas, Lucæ Valerij in Gymnaſio Romano Profeſſoris de centro grauitatis ſolidorum libri tres, Clementi octauo Pontifici maximo dicati. Romæ anno 1604. Opera Mathematica Euangeliſtæ Torricellii ſereniſſimi Magni Ducis Etruriæ Mathematici, ad eundem magnum Ducem. Florentiæ 1644. Exercitationes Geometricæ ſex Autore F. Bonauenturâ Caualerio

Ordinis Iesuatorum, & in Bononiensi Academiâ primario Mathematicarum professore. Ad illustrissimos Senatûs Bononiensis quinquaginta viros, Bononiæ 1647. *Lucam Valerium inspexi magnâ voluptate, & eum iudicaui dignissimum qui à Torricellio* verè nostri sæculi Archimedes *diceretur in proemio ad librum de dimensione parabolæ. Caualerii exercitationem qnintam in qua agit de eodem centro grauitatis nouâ methodo, & nouis etiam inuentis suspexi. Postquam verò istorum theoremata cum iis, quæ in libro quarto nostro monstrantur, contuli, non solùm methodum nostram esse diuersam (an facilior & breuior sit meum non est dicere) sed aliqnid etiam à nobis adiectum esse, quod illis non occurrerit, comperi.*

Primò nec Lucas Valerius nec vllus alius, qui viderim, demonstrat modum diuidendi conoidem hyperbolicum iuxta datam rationem. Id à nobis præstatur in corollario tertio decimæ quintæ libri quarti. Ille porro modus prætermissus ob suam difficultatem fuit ab Archimede, vbi simile problema de Sphærâ, sphæroide, & conoide parabolico soluit.

Secundò nec Lucas Valerius nec quispiam alius mihi notus ostendit proportionem xystroidis hyperbolici cum cylindro, quamuis eius consideratio connexa sit cum conoide hyperbolico; sed specialem habet difficultatem. Eam proportionem tradimus propos. 23. lib. 4. coroll. 3. & propos. 27. l. eiusdem; & propos. 3. libri quinti in Scholio.

Tertiò nec etiam ab vllo, quem quidem legerim, demonstratnr centrum grauitatis eiusdem xystroidis hyperbolici. Illud præscribitur propositione 27. libri quarti in scholio.

Quartò methodũ diuidendi eiusmodi xystroides in datâ ratione qui tradiderit ignoro; ea tamen non est diuersa à methodo simili quam damus in corollario quarto duodecimæ, quinto decimæ tertiæ, quarto decimæ quartæ; tertio decimæ quintæ. Hæc sunt præcipua quæ nec in Valerio nec in Caualerio vllóue alio qui mihi ad manum esset, reperire potui. Quod autem iste inuenit & demonstrauit de grauitatis centro magnitudinum quas ipse vniformiter difformiter graues ingeniosè fingit; id ex nostris principiis facillimè reperias & demonstres, postquam quid per istas voces significet, intellexeris.

Præterea cum Torricellius vir meo iudicio de mathematicis optimè meritus diceretur inuenisse spatium rectilineum quod librâ ex centro circuli, ellipsis, vel hyperbolæ suspensâ, æquiponderat cuilibet segmento eorum; in laudato illo opere vbi de solidis sphæralibus, de motu, de dimensione parabolæ, de solido hyperbolico, cum appendicibus de cycloide & cochleâ agit, istud non reperi. Potius suspicarer Guldinum nostrum ista tractasse in centrobarycis suis; si quis vtrumque nactus librum eos inuicem contulerit, inspicere debet vtrum circuli & ellipseos cuilibet segmento assignetur rectilineum æquiponderans; nam de semicirculo & semiellipsi id satis colligo ex

Cauallerii propositione 33. pag. 404. vbi Guldinum laudat, eiusque doctrinâ vtitur ad solutionem huius prrblemætis, in semicirculo vniformiter graui centrum grauitatis indagare. Deinde videndum est num etiam ad hyperbolæ quælibet segmenta methodus pertingat; deniquè attendi debet facilitas qua vterque demonstrat, sed præcipuè exequitur sua problemata. Hæc si rectè perpendantur, non dubito quin appareat diuersitas inter vtrúmque istum tractatum non in methodo solùm sed in ipsis etiam inuentis.

Cunei primi noti tam elliptici quàm hyperbolici, quẽ Gregorius à S. Vincentio vngulã nominat, conuersio in cubum quam trado propositione 25. & 26. libri quarti valde diuersa est ab eâ quã ille excogitauit quantum ad modum inuenitndi attinet nam ego per spatium æquiponderans rem demonstro, ille sine librâ; eadẽ verò libræ tractatione obtineo cubũ parẽ cuilibet eiusmodi cunei frusto intercepto planis quæ cõdicta nominauit.

In quinto libro semicono ex axe suspenso inuenio parallelepipedum æquiponderans, nec tantùm semicono, sed cuiuis ei⁹ frusto abscisso incu- su plani per verticem, idemque consequor etiam si basis eiusmodi frusti fuerit hyperbola, nã si fuerit, parabola illud insuper commuto in parallelepipedum. Ad hæc inuenio parallelepipedum quod æquiponderat cuneo secundo noto, quæ inuentio quam prope ducat ad quadraturam quæsitam liquet ex corollario tertio decimæ tertiæ, vbi dicitur lindracea inde nata & in cubum versa, dixi auroram quadraturæ optatæ; liquet idipsum amplius ex ijs quæ post decimam tertiam laudatam sequuntur. Fateor hîc calculo me debere

quod quadraturas penè innumeras. quæ pro veris sese inter contemplandum mihi obtulere, falsas esse deprehenderim. Quisquis verò in hoc genere sese exercet, & Archimed. um examen negligit, fœlix admodum est si non fallitur.

In secundo libro propositionem septimam quam Archimedes demonstrarat quando suspensum est rectilineum, ego extendo ad suspesa quæcunque vel mixta ex sectione conicâ & rectâ lineâ; vel etiam solis sectionibus conicis comprehensa; imo & ad quæcunque in quibus sexta primi libri propositio locum habet; quam paulò post dicemus esse admodũ generalem. Hoc demonstrato trado modum determinandi æquiponderans, si suspensio libræ ex vno puncto transferatur in aliud quodcunq; etiam si grauis suspensi ex duobus libræ pũctis centrũ grauitatis nõ sit cognitũ. Libram planã mirabile ad inueniendum instrumentum his adiungo pluráque alia, quæ à nobis inuenta sunt, nec scimus quemquã qui ante nos illa tradiderit. Propositionẽ vigesimã tertiã libri 4. pratermiserã, quæ ad peripheriorũ mẽsurã inueniẽdã ita vtilis est, vt vix credi possit: per illã ostẽdetur solidi hyperbolici acuti, de quo agit appendix Torricellii, proportio cũ cylindro; ostẽdetur quoq; proportio cochleæ vel illi æqualis annulli quã altera eiusdem appendix monstrat; addo longè generalius esse nostrũ problema, quia idipsũ ostendit quamuis figura cochleæ genitrix nõ sit triangulũ, sed quæuis figura rectilinea, aut mixtâ ex parabolâ, aut certè ex sectione conicâ quæ centrum in axe cylindri habuerit. Libra autem plana, quam excogitauimus, adeo fœcundum est

Postquam liber iste è prælo exiit Autor eius inuenit, nisi fallitur, circuli quadraturam indepẽdenter à centris grauitatum; per libram tamen.

inuentionis *principium*, *vt quicquid in tertio libro laboriosè inuenimus ex Veterum methodo, ipsa expeditè primo sui vsu exhibeat; in vno tantùm dictæ methodo inferior, quod non demonstretur, sed postulati locum teneat, fidem sibi concilians ex eo, quòd nunquam sit deprehensa fallere.*

Redeo ad libræ principia ex quibus & ex propositione quartâ libri quarti patet si hyperbolæ spatium quod inter asymptotorum vnam & hyperbolam ipsam in infinitum excurrit suspendatur, librâ suspensâ ex centro ad quod confluunt omnes diametri, posito perpendiculo ipsâ eadem asymptoto, determinari posse rectilineam figuram quæ ipsi æquiponderet. Hoc verò plane admirandum est; nam illud spatium in infinitum extensum maius est quacunque datâ figurâ (vt alibi ostendimus) ac proinde est grauitatis infinitæ; pondus tamen æquiponderans est finitæ. Ex quo conficitur spatium illud non habere centrum grauitatis; nam si haberet, æquiponderans foret quoque infinitæ grauitatis; vndecunque patet Archimedē sapienter petiisse sibi dari quācunque figuram præditam esse centro grauitatis, id est quodcunque spatium vndique terminis conclusum, non autem spatium sine terminis ex vna parte diffusum. Est & aliud mirabile quod ex nostris ijsdem principijs sequitur nimirum super eius generis aliquo spatio tanquam basi posse construi solidum cuneatum cuius acies sit dicta asymptotus, & ipsum esse æquale inuento finito spatio, cubo videlicet, insuperque centro

grauitatis posse esse præditum; quod plane admiratione dignum est, solidum videlicet super basi immensâ existens esse finitæ magnitudinis; & solidum, quod figura non sit, id est, quod sit non clausum vndecunque, posse tamen habere centrum grauitatis. Hæc omnia iam pridem à me inuenta & in tractatum de principiis libræ reiecta, commemorare libuit occasione demonstrationis subtilis quam in Torricellio legi de solido hyperbolico acuto.

Quid porro in primo elementorum nostrorum speciale sit, propter quod illum ediderim, restat vt dicam: planius autem id intelligetur si quædam de inuentis Cualerij præmisero. Is ergo tredecim ab hinc ferme annis vulgauit duas regulas admodum vniuersales ad figurarū mensurā, quas Torricellius ante propositionem vndecimam de quadraturâ parabolæ certò affirmat mirum esse pro inuentione compendium & innumera quasi imperscrutabilia Theoremata, breuibus, directis, affirmatiuisque demonstrationibus confirmare, quod per doctrinam Antiquorum fieri minimè potest. Hæc enim est in Mathematicis spinetis via verè Regia, quam primus omnium aperuit & ad publicum bonum complanauit mirabilium inuentorum Machinator Caualerius. Eadem nonnihil concussa à Guldino nostro firmius stabilire conatus est anno 1647. in quinq prioribus Exercitationibus, præcipuè verò in earum tertiâ. Cæterùm earum primam regulam ponit in Exercitatione primâ pag.

5.n.7.*his verbis* Si in duabus quibuſcunque figuris planis etiam non in eadem altitudine exiſtentibus omnes lineæ vnius figuræ cuidã ſignatæ parallelæ mente deſcriptibiles & collectiuè ſumptæ fuerint æquales omnibus lineis alterius figuræ cuicunque ſignatæ parallelis mente deſcriptibilibus & collectiuè ſumptis, etiã ipſæ figuræ erunt æquales; & contra. *Tum eandem regulam ſimiliter applicat ſolidis cùm omnia ſcilicet plana vnius fuerint æqualia planis alterius &c. Secundam quam paulò ſtrictiorem eſſe ait proponit ibidem n.8.in hunc modum* ſi in duabus quibuſcunque figuris planis in iiſdem parallelis cõſtitutis ſingulæ lineæ iſtis parallelæ cum ſingulis lineis in directum exiſtentibus collocatæ, fuerint æquales; etiam ipſæ figuræ erũt æquales. *Eãdem poſtea regulam applicat ſolidis, ſicuti primam. Diſtinguit autem duplicem modũ demonſtrandi aliquam propoſitionem vnum quidem Antiquorum, & vt ipſe loquitur* ſtylo Archimedeo, *qui in iſtis abſtruſis & difficilioribus fit per reductionem, vt dicitur, ad impoſſibile, nullo alio ad probationem aſſumpto præter ea quæ Archimedes & Euclides poſtulare ſolent: alterum autem Recentiorum, qui aliis aſſumptis fit* oſtẽſiuè *vt loquũtur: Ille eſt certiſſimus, ideóque certiludo iſtius per illũ explorari ſolet ab eodem Autore, quãdo id poteſt, vt videre eſt capite vndecimo, Exercitationis 3. & c.8. atque 10. Exercit.5. & Torricellius iſtorũ principiorũ defẽſor in appẽdice de cycloide monet* principia ferè omnia quib⁹ aliq uid per indiuiſi-

biliũ Geometriã demõstratur, ad solitã Antiquorũ demõstrationẽ indirectã reduci posse.

Vt meam de dictis regulis sententiam proferã, simulque aperiã quid in primo libro præcipuè inquisierim longè antequã mihi nota essent scripta Caualerii & Torricellii; dico secundã regulã ad figuras planas compositas ex sectionibus conicis vel rectis esse verissimã; est enim illa ipsa quã in propositione primâ libri paimi probauimus stylo Archimedeo, *hoc est irrefragabili: addo primò methodũ illius demõstrationis videri posse trãsferri ijsdem fermè verbis ad figuras ex alijs quibuscunque lineis cõpositas, quarum generatio cognita fuerit: secundò eandem propositionẽ ad solida traductã à nobis assumptã fuisse in vndecimâ quarti libri: nullũ enim esse puto, qui id neget in solidis, postquam coactus fuerit affirmare in planis. Quare concludo secundã illã regulam Caualerii à me admitti generaliter sumptã, quia, vt modò dixi, tradimus methodum eam applicandi ad figuras cõprehensas sectionibus conicis, & illis omnibus lineis de quibus suo modo ostẽdi possint propositiones similes ijs quibus sexta illa innititur. Istud verò diligẽter teneri volo ex explicatione & demonstratione illius sextæ propositionis nullatenus cons. qui* continuũ cõponi ex indiuisibilibus *meris, ac proinde nec nos admittẽdo secundam illam Caualerii regulam quidquam fauêre opinioni philosophicæ Zenonistarũ de indiuisibilibus; neque enim eã regulã approbamus nisi quatenus stylo veteri demõstrata fuit à nobis.*

Prima verò regula accuratiùs explicari & ad veritatis limites restringi debet, vt sine scrupulo approbetur; de ea tamẽ in vniuersũ pronũtiamus

eatenus tantùm nobis probari, quatenus stylo vetere fulcitur. Neque verò existimandum est quotics inter duas parallelas duæ figuræ ita aptatæ sunt vt totæ sint inter eas, & nulla interijci possit parallela prioribus quæ ambas dictas figuras non secet; si singulis parallelis vnius figuræ respondeat æqualis in aliâ sed non in directum iacens, ipsas figuras esse inuicem æquales. Nã eiusmodi æqualitatem nõ rectè colligi ostendi potest multis modis; quod si legitime colligeretur, quadratio circuli foret absoluta. Reuocato enim ante oculos schemate propositionis decimæ quartæ libri tertij, exparabola g f i b m ita se habet ad semilunulam c b m g vt ex quocunque puncto g, peripheriæ b m ducantur g c, g f æquidistantes rectis a o, b a, & occurrentes parabolæ b n in c, exparabolæ b i in f, ipsæ rectæ g c, g f sint æquales, quod fieri potest in ellipsi; ergo quando g a, a b rectæ fuerint inuicem æquales, exparabola erit inter parallelas g f, b a: & semilunula inter rectas per a & b ipsi a o æquidistantes, ac proinde exparabola & semilunula erunt in parallelis æquè distantibus (quod est perinde ac esse in ijsdem) & singulis singulæ respondebunt æquales: ergo si propterea exparabola & semilunula sint æquales: cum tradita sit methodus quadrandi exparabolam, notum erit rectilineum æquale semilunulæ; sed notum est etiam rectilineum æquale figuræ comprehensæ rectis b o, o c, & parabolâ b n c: ergo differentia istorum rectilineorum esset æqualis segmento ellipseos b m g: quadratâ autem ellipsi,

nullo negotio circulus quoque quadratur.

Ergo Vt tradamus aliquem certum modum Vtendi primâ illâ regulâ, ponatur ante oculos primum schema propositionis sextæ primi libri, & in eo cõsiderẽtur duæ figuræ, prima a h o m f e, altera b c k m f g insistentes portionibus æqualibus a f, f b rectæ a b; in earũ Verò primâ sũptis quibuslibet punctis a & o ductæ sint ipsi f m æquidistãtes a h, e o; in alterâ Verò ipsis f e, f a abscissæ sint æquales f g, f b, & per g, b ductæ sint g k, b c æquidistantes ipsi f m: sintque duæ simul e o, g k æquales rectæ b d; & duæ simul a h, b c sint æquales eidem b d, & ita contingat in quibuscunque alijs pari modo ductis parallelis. Dico quamuis ipsæ inter se parallelæ singulæ sint inæquales, totam tamen figuram a h o m k c b f esse æqualem figuræ parallelogrammæ comprehensæ lateribus f b, b d, & angulo f b d. Si enim intelligatur maioris perspicuitatis causa f m esse perpendicularis ad a b, & circa f m figura a h m f circumuolui imponique figuræ f m b c, parallela a h congruet parallelæ c b, & parallela e o parallelæ g k, duæ Verò e o, g k in eadem parallela g l existentes & ad partes oppositas rectæ a b positæ æquabunt rectam b d; duæ item a h, b c æquabunt rectam eandem b d: ergo ex sextâ illâ eadem primi libri æquales erunt duæ simul figuræ h m f a, m k c b f toti figuræ rectilineæ comprehensæ lateribus f b, b d, quod erat probandum; ergo iste colligendæ æqualitatis modus ex primâ illâ regulâ est probatus, & Veterum principiis congruens. Atque hic est modus quo nititur

quadratura cycloidis, nam duæ parallelæ à centro semicirculi æquo distantes interuallo interiectæ inter semicirculum & cycloiden sunt æquales peripheriæ semicirculi: ergo spatium inclusum semicirculo & cycloide est æquale rectangulo comprehenso sub semidiametro, & sub rectâ peripheriam semicirculi æquante; hoc est toti circulo: ergo addito semicirculo totum spatium inclusum cycloide, diametro & rectâ æquante semiperipheriam circuli est triplum ipsius semicirculi, prout ostendit Torricellius, recte monens demonstrationem quæ procedit ex regulâ illâ, posse in hoc casu reduci ad indirectam, scilicet Archimedeam.

Quòd si ambæ duæ a h, b c æquarent rectam b d, & ambæ duæ e o, g k rectam g l, & ita eueniret in aliis omnibus tota figura a h m c b f perinde ostenderetur æqualis figuræ f n l d b g, vt apertum est.

Demum adest nobis alius casus in quo parallelæ istæ inuicem æquales perturbato quodam ordine iacent: rectè tamen infertur æqualitas figurarum per reductionem ad impossibile stylo veteri: ac proinde hîc etiam valida erit illa regula prima Cauallerii. Ille autem casus expositus & demonstratus à nobis fuit in decimâ sextâ libri eiusdē primi; & ex eo in tertij libri propositione decimâ quartâ & sequētibus quæuis segmēta quadrauimꝰ linearū quas quadratrices diximus.

Ex his igitur satis constat quid in ilo libro primo scripserimus, quod alibi nobis non occurreret, & quo pacto nec cogitantes firmaue-

rimus regulas illas duas Caualerii, nec mirum iam erit fortasse cur nos in inueniendo non adeo infœlices fuerimus: Vsi enim sumus miro illo pro inuentione compendio; *incessimus* viâ illa Regiâ, *quam ipsis veterum armis & apparatu nobis ipsi Deo iuuante fecimus: insuper libram amplificatam aptissimum ad inuentionem instrumentum adhibuimus. Cæterum illa primâ regulâ Caualerij Vti ego tutum non existimo in vllo casu, quem Archimedis radius non demonstret; quia vt verum fatear alia eius probatio à Caualerio adducta propositionibus prima, secunda & tertia Exercitationis primæ, vel non satis cogit, vel à me non intelligitur. Ita verò sentiendi ipse Caualerius potestatem feciſſe videtur dum sub ipsum Exercitationis tertiæ finem, sic alloquitur Lectorem pag.* 241 Hæc ad inueniendum plurimum valere vel ipse Guldinus fassus est l. 4. pap. 331. Tu autem quoque perpende num & ad demonstrandum recipi possint; nempe vel sub eâ formâ qua à me vsurpata fuerunt, vel saltem relatiuè ad methodum Archimedeam iuxta quam confirmata sunt. *Atque* hinc *intelliges Caualerium & alios vsos fuisse secundâ regulâ quæ constanter vera est: vel si primâ, in iis tantum casibus in quibus stabilitur per reductionem ad* impossibile; *si quidem verum est* (*quod facilè mihi persuadeo*) nihil, *vt ipse testatur pag.* 202. *Exercitat.* 3. *c.* 8. adhuc falsi ex tali methodo oriri animaduersum esse.

Cur suam methodum debuerit appellare Geometriam indiuisibilium *potius quàm* diuisibilium *non planè video. Si enim continuum ex meris indiuisibilibus mathematicis conflaretur, regula illius prima generaliter esset vera sine vllâ limitatione: cum ergo restrictè sumi debeat, vt non sit falsa, & ita restricta ostendatur, vt modo dicebamus, per principia Mathematicorum antiquorum, non est cur Zenonicis principiis illæ duæ regulæ adscribantur; præsertim cùm quàm abhorreat antiqua Geometria ab illo continui contextu, qui per pura indiuisibilia fingitur, satis perspectum sit ex prolegomenôn nostrorum paragrapho sexto.*

Hæc habui addere per occasionem timoris initio appendicis narrati; supererat vt ad corollariũ secundum vigesimæ octauæ libri quarti explanandum hæc quæ post cusum librum sese mihi obtulerunt adiungam.

Quando primarius axis in secundarium non parallelum eo mutatur modo, quem præscripsimus in corollario secundo libri quarti; si eiusmodi mutatio fiat per accessum ad graue suspensum, necesse est vt quæ singulis sectionibus suspensi factis à plano parallelo respondebunt magnitudines subducendæ, possint subduci ex sectione in æquiponderante factâ occursu eiusdem paralleli; nam si ista sectio sit minor illâ magnitudine, non rectè inferretur, graue cuius sectiones forent æquales dictis magnitudinibus singulæ singulis, esse excessum quo æ-

quiponderans primæ ſuſpenſionis maius foret. Quandò verò axes ſunt paralleli, id non eſt neceſſarium, ſed poteſt eiuſmodi compenſatio fieri ex ſectionibus factis occurſu aliorum parallelorum: iſtæ enim ſectiones cùm in ſuo ſitu æquè omnes diſtēt ab axe, perinde eſt quod magnitudo quæ ſubduci debet, ex hac vel ex illa ſectione ſubducatur: at in axibus alijs, magnitudo ſubducenda ex ſectione huius paralleli ſi ſubducatur ex ſectione alterius, cùm illa non æquiliter diſtet ab axe, inæqualem etiam ῥοπὴν habebit, ac proinde vis deorſum trahens non erit æqualis vtrobique.

Præterea in Scholio Vndecimæ quinti libri ſub finem pro eiuſmodi plana ſint æqualia, *ltgendum aduerti* eiuſmodi ſolida ſint æqualia.

ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM

LIBER I.

Qui est per sola principia geometrica de curuilineorum & mixtorum proportione inuicem, & cum rectilineis.

DEFINITIONES.

1. PArallelogrammum mixtum voco quadrilaterũ cuius duo latera sunt rectæ lineæ æquidistantes inuicem, & æquales, reliqua autem duo latera sunt lineæ curuæ ita descriptæ, vt rectæ omnes inter ipsas po-

ſitæ & æquidiſtantes alijs lateribus, ſint inuicem & cum ipſis lateribus rectis æquales. 2. Trapezium mixtum eſt quadrilaterũ, cuius duo latera ſunt rectæ lineæ æquidiſtantes & inæquales, reliqua autem duo latera ſunt lineæ curuæ. 3. Amphicyrtum, ſeu internè cauam appello figuram cõprehenſam lateribus curuis, quorũm caua reſpiciunt ad interiora ipſius figuræ. 4. Amphicœlum ſeu internè conuexam, quorum caua reſpiciunt ad exteriora. 5. Menoiden, ſeu internè conuexocauam, quorum vnum ſecundum caua ſui, alterũ ſecundum cõuexa complectuntur ipſam figuram. 6. Sectionem conicam appello non ſolum parabolam, hyperbolam, & ellipſim, verùm etiam ipſum circulum. 7. Oxygoniam, ſi fuerit vndecunque clauſa, cuiuſmo-

di sunt circulus & ellipsis. 8. Centricam, si fuerit centro prædita, cuiusmodi sunt circulus, ellipsis, & hyperbola. 9. Segmentum sectionis conicæ, figuram contentam portione sectionis conicæ, & rectâ subtendente eiusmodi portionem. 10. Rectam istam subtendentem nomino cum Archimede basim. 11. Diametrũ segmẽti, eam quæ bifariam secat ipsam basim. 12. Verticẽ segmenti, punctũ in quo arcus segmenti occurrit diametro eiusdem. 13. Cum per verticem segmenti ducta fuerit parallela basi recta, & per extrema basis ductæ æquidistantes diametro, parallelogrãmi comprehensi sub basi & sub rectis eductis portionem eam quæ est extra segmentum appello diceratoiden.

Inuitus planè vſurpaui voces illas amphicyrtum, amphicœlum, menoiden, & diceratoiden: *mirum enim quantum delector ſenſa animi ijs verbis expromere quæ vſu ſunt notiſsima, ac proinde quæ inſtar familiarium & domeſticorum inſinuant ſe nullo oſtij cuſtode repugnante in penetralia mentis noſtræ.* Neceſsitate igitur compulſum me id feciſſe ſcias, Lector velim: *quamuis neque ipſas voces ego prorſus excogitaui, aut excogitatas aliunde traduxi, ſed ex ipsâ Mathematicorũ officinâ. Ecce verba Procli in Euclidẽ* peripheriæ ſe mutuò ſecantes aut cõtingentes conſtituunt angulos trifariam; vel enim ἀμφικύρτους, quando nimirum extrinſecùs fuerint conuexa peripheriarũ; vel ἀμφικοίλους, quos appellant συγχοειδεῖς, quando extra ipſos angulos fuerint vtriuſque peripheriæ caua; vel mixtos ex cauâ & conuexâ, ſicuti cornua μηνίσκων. Præterea ſub rectâ & peripheriâ continentur anguli duobus modis, ſub rectâ videlicet & ſub cauâ peripheriâ, vt in ſemicirculo; vel ſub rectâ & ſub cõuexâ, cuiuſmodi eſt angulus qui κεραλοειδὴς dicitur. *Quòd igitur figura illa quæ vnà cum ſegmento complet parallelogrãmum de quo agit definitionem vltima, conſtituatur ex duobus angulis ceratoidibus & in cornu formam deſcriptis, qui deinceps ſunt ad punctum tactûs, nos illam* διχεραλοειδῆ diceratoidem *diximus.*

pag 35. edit. Heruag.

pag 64.

Cæterum vtrum συγχοειδὴς, *vel vt alibi ſcribitur* ξυγχοειδὴς, *appelletur à figurâ ſtri-*

gilis antiquâ, parum hîc refert; vix certè ab eius specie quam pingi curarunt Mercurialis, cùm in modum figuræ bicornis non repræsentetur. Fortasse apud Græcos duæ eiusmodi lingulæ flexæ atque tubulatæ in vnum stringendi cutem bifurcum instrumentum compactæ fuerint; quam coniecturam forte an firmat Martialis dum inde Romam missas plurali numero describit hoc versu. Artis gymna. l. 1. c. 8.

Pergamus has misit, curuo distringere ferro.

Aliæ ξύστρα notiones minus aptæ videntur ad præsentem nominis originem explicandam. Apud Diodorum vox ista sonat hastas seu cuspides quibus munichantur currus falcati, vt ex collatione eorum quæ de illis scripsere Liuius & Curtius apertum est. Quid si mendum ibi est ξύστρον pro ξυστῷ quo in eadem paginâ vtitur? Apud Eustathium eadem vox denotat instrumenti genus quo quæ extant in complanando solo raduntur, λίστρα εἰσὶ πλύα σεσιδηρομένα ἤγουν ξυστῆρες. καὶ λιστῶσαι δὲ ἀπ' αὐτῶν, τὸ ξύσαι καὶ ὁμαλίσαι. Lexica interpretantur ventilabrum, vtrum rectè, ignoro; græcè quidem vox πλύον genus est ad vtrumque instrumentum, vt ex ipso Eustathio discimus πλύου, ᾧ δι' οὗ γὴν ἀναβάλλουσιν, ἀλλὰ λιχμητικοῦ ἀναβάλλοντος τὰ ἠλοημένα. Hac porro voce veluti notiore explicat Homericum illud λίστρον in Odisseæ χ, & fortasse πλύου nomen illi indidêre, quòd licet officio differret, non tamen forma. l. 17, bibliot. pag. 590. edit. Stephani. Iliad. φ pag. p. 1314. Iliad. ν pag. 924. Iliad. ϱ. pag. 1161. & Odiss. ω. 832.

Propositio I.

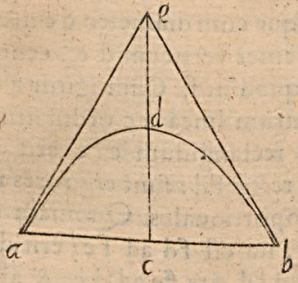
Si duæ rectæ sectionem conicam tangentes conueniant, & à concursu ducatur diameter; portio illius à sectionis vertice ad concursum est in parabolâ æqualis portioni ab eodem vertice ad rectam tactus connectentem; in hyperbolâ est eâ minor; in oxygoniâ, maior.

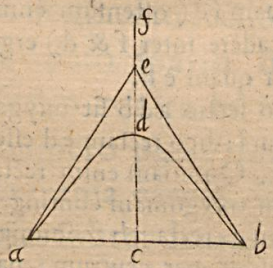
Sit conica sectio a d b, quam in a & b tangant rectæ a e b e conuenientes in e; & per e ducta sit recta e c, occurrens sectioni in d, & rectam a b tactus connectentem secans bifariam in c; erit ergo d c diameter. Sit primò sectio a d b parabola, vt in primâ figurâ; dico rectam e d esse æqualem rectæ d c. Quoniam enim parabolam a d b recta a e contingit in a, conuenitque cum diametro in e; & à tactu ordinatim applicata est ad diametrum recta a c, erit recta d c abscissa ex diametro ad sectionis verticem d, æqualis rectæ d e inter sectionem & contingentem a e interiectæ.

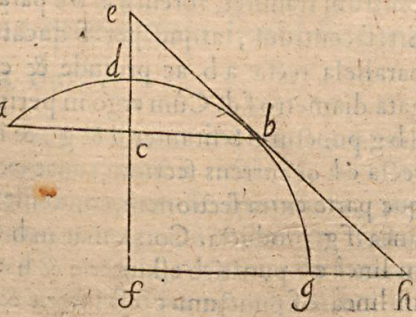
29. Secundi Conic.

35. primi Cō.

Secundò sectio a d b sit hyperbola, vt in secundâ figurâ, dico rectam e d esse


e
d
a
c
b


f
e
d
a
c
b


e
d
a
b
c
f
g
h

minorem rectâ d c. Quoniam enim hyperbolam a d b recta a e contingit in a, conuenitque cum diametro d e in e, ipsum e iacebit inter verticem d & centrum sectionis, quod sit f. Cùm igitur à tactu a ad diametrum linea a c ordinatim applicata sit, rectangulum c f e erit æquale quadrato rectæ f d: sunt ergo tres rectæ f e f d f c proportionales. Quoniam ergo vt f c ad f d, ita est f d ad f e; erit diuidendo vt f d ad c d, ita f e ad d e; & alternando vt f d ad f e, ita c d ad d e: Sed f d est maior quàm f e (ostensum enim est punctum e cadere inter f & d) ergo recta d c est maior quàm e d.

31. primi Cō. in coroll. 37. primi Cō. 16. sexti Euc.

Tertiò sectio a d b sit oxygonia, vt in tertiâ figurâ; dico rectam e d esse maiorem rectâ d c. Quoniam enim rectæ a e b e sectionem oxygoniam contingentes conueniunt in e, recta a b coniungens tactus non transibit per centrum; nam si per centrum transiret, forent a e b e parallelæ. Sit f centrum, atque per f ducatur f g parallela rectæ a b ac proinde & coniugata diametro f d. Cùm ergo in peripheriâ d b g punctum b sit inter d & g, & in illo recta e b occurrens sectioni cadat ex vtraque parte extra sectionem, conueniet cum linea f g productâ. Conueniat in h: ergo in lineâ e b punctū b est inter e & h: ergo in lineâ e f punctum c est inter e & f, ac proinde f c recta est portio rectæ f e, &

27. secun. Con.

17. definit. primi Con.

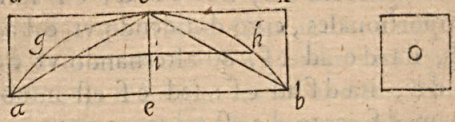
25. primi Cō.

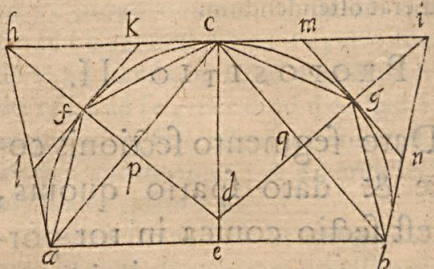
ipsius etiam fd, cùm d sit terminus diametri, c autem sit intra sectionem. Quoniam igitur rectangulum efc est æquale quadrato rectæ fd, tres ef df cf sunt proportionales, ergo diuidendo vt ed ad df, ita dc ad cf, & alternando vt ed ad dc, ita df ad cf: sed cf est minor quam df, ergo dc est minor quàm de, quod erat ostendendum. 31. primi Có.

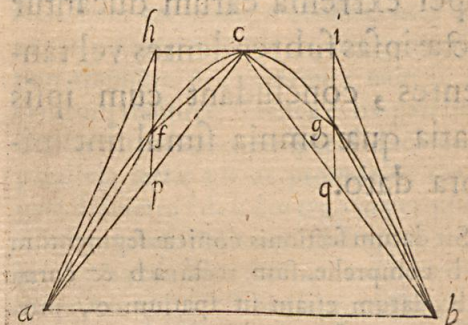
Propositio II.

Dato segmento sectionis conicæ & dato spatio quouis, potest sectio conica in tot portiones numero pares diuidi, vt si per extrema earum ducantur rectæ ipsas subtendentes vel tangentes, concludant cum ipsis spatia quæ omnia simul sint minora dato.

Sit datum sectionis conicæ segmentum acb comprehensum rectâ ab & curuâ acb, datum etiam sit spatium o, propositumque sit primò ostendere sectionem acb posse in tot portiones numero pares diuidi, vt si per extrema earum ducantur rectæ ipsas subtendentes conclu-


d
c
k
g
h
i
a
e
b
O


h
k
c
m
i
f
g
q
n
l
p
d
a
e
b


h
c
i
f
g
p
q
a
b

dant cum ipsis spatia, quæ omnia simul sint minora dato o. Ac primùm ne actum agamus, cùm istud de circulo ex Euclide demonstretur, & de ellipsi ex ijs quæ Commandinus in quintam propositionem libri de conoidibus & Sphæroidibus est commentatus, supereſt vt idipsum ad parabolam & hyperbolam extendamus. 2. duodec.

Parabolæ igitur vel hyperbolæ segmenti basi a b parallela ducatur g h, & vtraque bifariam secta in punctis e i, iungatur recta e i punctumque in quo sectioni occurrit sit c; erit ergo recta e i diameter. Per c ducatur recta c κ æquidistans rectæ a b; tanget ergo c κ sectionem in c. Iungantur rectæ c a b c, & compleatur parallelogrammum a d k b, ita vt a d k b sint æquidistantes rectæ e c: rectæ ergo d a k b in vno tantum puncto cum sectione conuenient: ergo parallelogrammum a d κ b, erit maius segmento a g c h b intra ipsum parallelogrammum incluso: ergo & triangulum a c b semissis parallelogrammi a d κ b erit maius semisse segmenti a g c h b: nam vt totum ad totum, ita semissis ad semissem. 44. secun. Con. 32. primi Cō. 26. primi Cō. 41. primi Euc.

Quoniam igitur ex segmento a g c h b ablatum est triangulum a c b maius ipsius semisse, ex residuisque duobus segmentis a g c b c h possunt pariter auferri duo quæ singula sint maiora ipsorum singulorum semisse, & sic in infinitum, deuenietur

tandem ad ſegnenta numero paria, quæ omnia ſimul minora erunt ſpatio o; id enim fieri poſſe aſſumitur apud Euclidem alioſque Geometras vt in prolegomenis dictum eſt. Dato ergo ſegmento &c. quod erat primo loco demonſtrandum, & quod veluti demonſtratum de parabolâ aſſumit Archimedes in libris de æquiponderantibus.

§. 2.

6. ſecun. de æquip.

Secundò propoſitũ ſit oſtendere ſectionem a c b poſſe in tot portiones numero pares diuidi vt tangentes per earũ extrema ductæ concludant cum ipſis ſpatia quæ omnia ſimul ſint minora dato o. Iſtud de circulo monſtrat Archimedes propoſitione prima de circuli dimenſione, & propoſitione ſexta libri primi de ſphæra & cylindro; oſtendi verò poteſt de omni conica ſectione in hunc modum.

Sit primò curua a c b portio oxygoniæ vt in ſecunda figurâ, cuius centrum d; per d & e ducta ſit diameter d e occurrens curuæ in c: iunctæ ergo a c b c non tranſibunt per centrum d (quòd ſi puncta d & e ſibi congruant, intelligatur diameter c e, quæ ſit coniungata diametro a b.) Quoniam centrum d eſt in recta c e, ſi per a & c ductæ fuerint tangentes concurrent ad eaſdem partes centri d, ad quas eſt recta c a; concurrant in h; & tangentes in c & b (quæ pari ratione oſtendentur conuenire) conue-

27. ſecun. Con.

niant in i. Cùm igitur curua a c b secta sit in duas portiones a c c b, & per extrema a c c b ductæ sint tangentes coëuntes in h & i, spatia h a c i c b comprehensa tangentibus & portionibus curuæ, vel erunt simul minora spatio o, vel non erunt; si sint, ergo in oxigonia sectione hoc est in circulo & ellipsi, ostensum est illud quod erat propositũ. Quòd si non sint minora, ex centro d per h & i ducantur rectæ h d i d, quæ bisariam secabunt rectas a c c b; secent autem oxygoniam in punctis f g, per quæ si ducantur l k m n parallelæ rectis a c c b tangent oxygoniam. Quoniam igitur, iunctis rectis a f f c c g g b, rectæ h f i g sunt maiores rectis f p g q singulæ singulis, & parallelæ sunt inuicem a c l k, item c b m n, vt h f ad f p, ita erit h l ad l a, & h k ad k c. Item vt i g ad g q, ita erit i m ad m c, & i n ad n b: rectæ ergo h l h k i m i n sunt maiores rectis l a k c c m n b singulæ singulis. Rursus quoniam triangula h κ f κ c f habent angulum ad idem punctum f constitutum, habebunt eandem ex f perpendicularem demissam ad latus h k κ c oppositum: ergo triangula h k f κ c f se habent vt bases h κ κ c: ergo triangulum h κ f est maius triangulo κ c f. Simili ratione ostendetur triangula h l f m g i n g i esse maiora triangulis l f a m g c n g b singula singu-

30. secun. Con.
32. primi Con.
1. huius
2. sexti Euc.

lis: ergo triangulum h l κ compositum ex duobus h f l h f k est maius rectilineis duobus l f a κ f c, cúmque triangula mixta l f a κ f c sint partes rectilineorum l f a k f c, triangulum h l k erit multò maius quàm duo triangula mixta l f a k f c: ergo ex triangulo mixto h a c composito ex tangentibus & ex oxigonia erit ablata portio h l k maior quàm residuum. Similiter ostendetur ex triangulo mixto i c b ablatam esse portionem i m n maiorem residuo. Cùm igitur eiusmodi subductio possit continuari in infinitum, nimirum per l k m n nouos tangentium concursus ductis diametris, deuenietur ad figuras mixtas ex tangentibus & ex portionibus oxygoniæ a c b numero paribus, quæ omnes simul erunt minores spatio o.

Sit secundò curua a c b portio parabolæ vel hyperbolæ, vt in tertia figura; poterit ergo per primam huius partem segmentum a c b in tot portiones numero pares diuidi vt spatia illis & subtendentibus rectis comprehensa sint simul minora spatio o. Sint eæ portiones a c c b subtensæ rectis a c c b, & vnà cum illis constituentes mixtas figuras a f c c g b quæ simul erunt minores spatio o. Per extrema eiusmodi portionum ductæ intelligantur tangẽtes, quæ coibunt in vnũ punctum; sitque h punctum in quod eductæ ex a & c conueniunt; & i in quod eductæ ex c & b; di-

24. & 25 secud. Con.

co ſpatia figurarum mixtarum a h c c i b eſſe ſimul minora ſpatio o. Quoniam (per p & q biſectiones rectarum a c c b; & per puncta h & i ductis rectis h p i q ſecantibus curuas a c c b in f & g, & iunctis rectis a f f c c g g b) in parabola & hyperbolâ recta f p non eſt minor recta f h, ſed vel maior in hyperbola, vel æqualis in parabola; & quoniam rectilineorum triangulorum h a f, f a p angulus ad idē punctum a conſtituitur; erit, prout in ſimili oſtenſum eſt, triangulum f a p vel maius, vel certè æquale triangulo h a f; ſimilique ratione triangulum f c p oſtendetur non eſſe minus triangulo f h c; & triangula q c g, q g b triangulis g i c g i b ſingula ſingulis. 1. huius

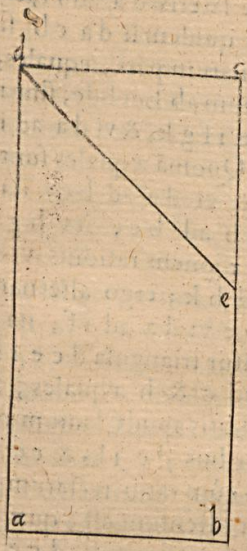
Rurſus quoniam figuræ rectilineæ a f c c g b ſunt vel maiores vel æquales figuris rectilineis h a f c i c g b; figuræ mixtæ h a f c i c g b quæ ſunt pars rectilinearum h a f c i c g b erunt minores ſimul rectilineis a f c c g b ſimul ſumptis: ſed rectilinea a f c c g b ſunt minora mixtis figuris a f c c g b: ergo mixtæ figuræ h a f c i c g b ſunt minores mixtis figuris a f c c g b comprehenſis ſub rectis a c c b, & ſub curuis a c c b. Cùm ergo figuræ mixtæ a f c c g b ſint minores ſpatio o, erunt ipſo ſpatio o multò minores a h c c i b mixtæ. Dato igitur ſegmento &c. quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO III.

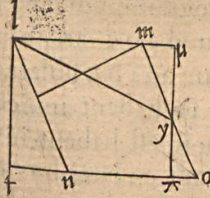
Quadrilatera quæ duo habent latera parallela, ſi fuerint æquiangula, & laterũ parallelorũ eadẽ proportio, inter ſe rationem habent eam quæ ex lateribus æquales angulos continentibus componitur. Et ſi non ſint æquiangula, eam quæ ex diſtantijs parallelorũ, & ex analogis lateribus; vel eam quæ ex baſibus ad quas incidunt parallelæ & ex perpendicularibus quæ ad baſes de terminis laterum analogorum demiſſæ fuerint.

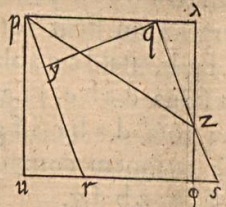
Sint quadrilateræ figuræ a b c d f g h i, quarum latera d a b c ſint parallela inuicem, item f i g h ſint quoque mutuò parallela, ſitque vt d a ad c b, ita f i ad g h, vel alternando vt d a ad f i ita c b ad g h. Primò habeant angulos ad a & f æquales; dico proportionem quadrilateræ figuræ a b c d ad figuram f g h i eſſe cõ-

poſitam


d
c
e
a
b


i
h
k
f
g


l
m
μ
y
t
n
π
o


p
λ
q
σ
z
u
r
φ
s

poſitam ex ratione lateris d a ad i f, & lateris a b ad f g. Et quidem ſi d a c b̄ ſint, vt in primo ſchematum pari, æquales, id iam eſt demonſtratum ab Euclide, ſint igitur trapezia d a b e i f g k, & vt d a ad i f, ita ſit e b ad g k. Quoniã æquales ſunt i f g h, item d a b c; & vt d a ad b e; ita i f ad g k; erit vt c b ad b e, ita h g ad g k; & per conuerſionem rationis vt b c ad c e, ita g h ad h k; ergo alternando vt c b ad h g, ſiue vt d a ad i f, ita e c ad h k. Cùm igitur triangula d c e i h k habeant angulos ad c & h æquales, habebunt ex demonſtratis apud Clauium proportionem ex lateribus d c i h, & c e h k compoſitam; ergo cùm ratio rectarum c e h k ſit eadem, vt oſtenſum eſt, quæ rectarum d a i f; ratio trianguli d c e ad triangulum i h k componetur ex iiſdem ex quibus componitur ratio parallelogrammi d a b c ad parallelogrammum i f g h: ergo cum ſicut totum d a b c ad totum i f g h, ita d c e ablatum ad i h k ablatum; reſidua d a b e i f g k ſe habent inuicem vt tota d a b c i f g h; id eſt habent inter ſe rationem compoſitam ex lateribus d a i f, & a b f g.

23 Sexti Euc.

23. Sexti Eucl. in Scholio

19 quinti Eucl.

Iam, vt in ſecundo ſchematum pari, quadrilateræ figuræ l n o m̄ p r ſ q non ſint æquiangulæ, attamen latera m o l n parallela habeant inuicem eandem rationem, quam latera q ſ p r. Et primò ſint

l n m o æquales rectæ; erunt ergo æquales q s p r, ac proinde figuræ l n o m p r s q erunt parallelogrammæ. Cùm igitur sint parallelogrammæ, verum erit id quod intendimus ex demonstratis apud Clauium loco citato.

Sint ergo trapezia p r s z, l n o y nec sint æquiangula inuicem, latus tamen l n ad p r, sit vt latus y o ad z s. Ostendendum est proportionem trapezij l n o y ad p r s z esse compositam ex rationibus basis n o ad basim r s, & perpendicularis l t in n o basim demissæ, ad perpendicularem p u demissam in s r basim; vel (demissis m x q y perpendicularibus ad l n p r) ex ratione perpendicularis m x ad q y, & ex ratione lateris l n ad p n. 6 Schol. lii citati.

Quoniam enim triangula p z q l y m habent latera q z m y in ratione laterum p r l n (id enim eodem modo ostenditur, quo paulò ante fuit demonstratum rationem laterum κ h e c esse eandem cum ratione laterum f i d a) & habent inter se proportionem compositam ex basibus & altitudinibus; positis basibus l m p q, & demissis perpendicularibus y μ z λ ex y & z ad bases l m p q, proportio trianguli l m y ad triangulum p z q componetur ex proportione basium l m p q, & altitudinum y μ z λ: sed ϖ μ ad μ y, se habet vt o m ad m y; item φ λ ad λ z se habet vt s q ad q z; cùm igitur vt o m ibid. 4. Sexti Euc.

ad m y ita ſit s q ad q z, erit πμ ad μγ vt φλ ad λz; & alternaando vt πμ ſeu l t ad φλ ſeu p u, ita μγ ad λz, ergo altitudines m y l z triangulorum l y m p z q ſunt in ratione altitudinum l t p u: ergo proportio triangulorum l y m, p z q componitur ex ijſdem rationibus baſium l m p q & altitudinum l t p v, ex quibus componuntur tota parallelogrāma l n o m p r s q: ergo reſidua trapezia l n o y p r s z componuntur ex iiſdem rationibus baſium l m p q ſeu n o r s, & altitudinum l t p u.

Quinti Euc. 19.

Quòd ſi m y q z ponantur baſes triangulorum l y m p z q, eorum altitudines erunt m x q y: Cùm ergo ratio baſium m y q z ſit eadem, vt oſtenſum eſt, quæ laterum l n p r; triangulorum l y m p z q proportio componetur ex rationibus laterum l n p r, & diſtantiarum m x q y. Cùm ergo proportio parallelogrammorū l n o m p r s q ſit eodem modo compoſita, reſidua trapezia l n o y p r s z habebunt inter ſe rationem compoſitam ex lateribus l n p r, & ex diſtantiis m x q y, Quadrilatera ergo &c. quod erat oſtendendum.

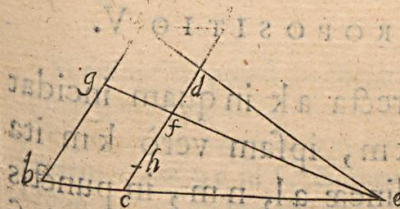
COROLLARIVM.

Hinc ſit quando baſes ſunt æquales prędicta quadrilatera eſſe inter ſe vt altitudines. Cum enim habeant rationem compoſitā ex baſibus & altitudinibus, apertū eſt ex methodo proportionem compo-

nendi ex duabus proportionibus demonstrato apud Clauium loco citato, quadrilatera se habere vt altitudines. Inde etiam liquet, quando distantiæ sunt æquales, ipsa quadrilatera esse in ratione laterum analogorum.

Propositio IV.

Si duæ rectæ inæquales & parallelæ incidant in tertiam aliquam ad easdemque partes, atque secentur proportionaliter, rectæ ductæ per earum extrema, & per puncta sectionum analoga concurrent in idem punctum eiusdem lineæ tertiæ.



Duæ rectæ parallelæ a b maior, d c minor incidant in rectam b c, & ſectæ ſint proportionaliter in punctis g & f; Dico ſi per a & d recta ducatur, item per g & f, rectas ad g f productas ſecare rectam b c in eodem puncto.

Quoniam enim rectæ b a c d ſunt parallelæ, & d c eſt minor, ſi per a ducatur a i parallela rectæ b c, erunt b a c i æquales, ergo c d eſt minor quam c i: ergo cùm anguli i a b a b c ſint ſimul æquales duobus rectis erunt anguli c b a d a b minores duobus rectis; ergo rectæ a d b c conuenient ad partes d.

34. primi. 29. primi. 11 pronunt.

Secet igitur recta a d rectam b c in puncto e, & iungatur recta g e ſecans ſi fieri poteſt rectam d c in h: ergo per ea quæ demonſtrat ex Commandino Clauius, vt a b ad a g, ita eſt c d ad d h: ſed ita etiam ponitur eſſe c d ad d f: ergo d f d h ſunt æquales, pars & totum. Non ergo recta g e ſecat rectam d c niſi in f.

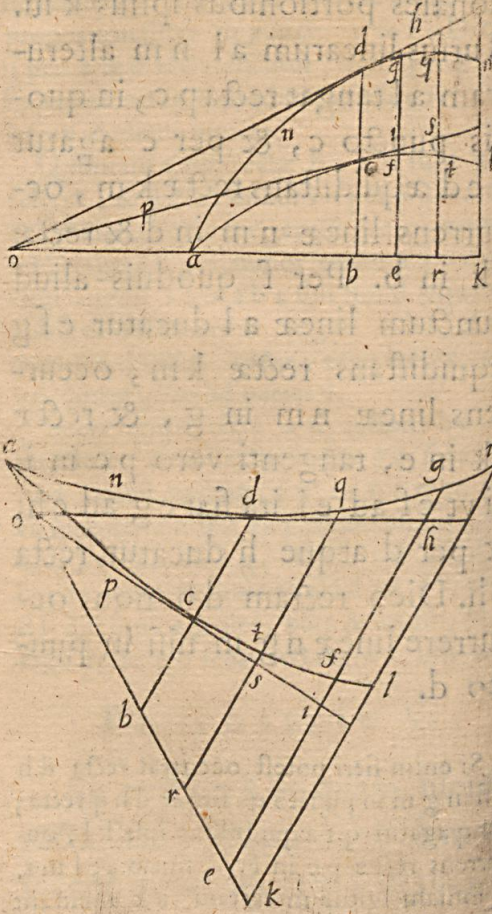
4. Sexti.

PROPOSITIO V.

Sit recta a k in quam incidat recta k m, ipſam verò k m ita ſecent lineæ a l, n m, in punctis l & m, vt æquidiſtantium ipſi k m portiones interceptæ rectâ

a k & lineis a l n m, ſint proportionales portionibus ipſius k m. Rurſus linearum a l n m alterutram a l tangat recta p c, in quouis puncto c, & per c agatur b c d æquidiſtans rectæ k m, occurrens lineæ n m in d & rectæ a k in b. Per f quoduis aliud punctum lineæ a l ducatur e f g æquidiſtans rectæ k m, occurrens lineæ n m in g, & rectæ a k in e, tangenti verò p c in i. Si vt e f ad e i ita fiat e g ad e h; & per d atque h ducatur recta d h. Dico rectam d h non occurrere lineæ n g m niſi in puncto d.

Si enim fieri poteſt occurrat recta d h ipſi n g m in puncto q, ſitque d h q recta; per q agatur q r æquidiſtans ipſi k l, occurrens rectæ p c in ſ, & lineæ a c l in t. Quoniam igitur in rectam a k incidunt rectæ d b h e, & vt b d b c ita ſunt e h e i ex conſtructione ſi b d, c h ſint æquales


h
d
g
q
m
n
i
s
l
c
f
t
p
o
a
b
e
r
k
e
n
d
q
g
m
o
h
p
c
t
f
s
l
b
i
r
e
k

erunt b c i e, b d h e parallelogramma, ac proinde erunt d e, h i æquales; item b c, i e. Si autem sint inæquales conuenient in idem punctum rectæ a k per præcedentem. Sit illud o. Quoniam ergo in rectas d h, c i, b e, incidunt rectæ b c d, r s q, vt b c ad c d ita erit r s ad s q per ea quæ demonstrantur ad 4. sexti, si d h, c i, b e non sint parallelæ, si verò parallelæ fuerint, per 33. primi Euclidis: sed vt b c ad c d ita est r t ad t q, cùm portiones b c, c d & portiones r t, t q intercipiantur recta a b & lineis a l, n m: ergo vt r t ad t q, ita est r s ad s q, & alternando vt r t ad r s, hoc est vt pars ad totum in prima figura, vel vt totum ad partem in secunda figura, ita est t q ad s q hoc est, totum ad partem in prima figura, vel pars ad totum in secunda figura, quod est absurdum. Recta ergo d h non occurrit lineæ n m in alio puncto quàm in d. 33. primi.

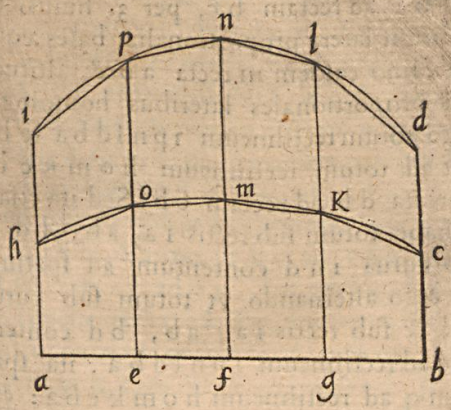
Non absimili ratione ostenderetur, si recta p c secet lineam curuam a l, ipsam quoque n m secari à recta d h, & esse curuam.

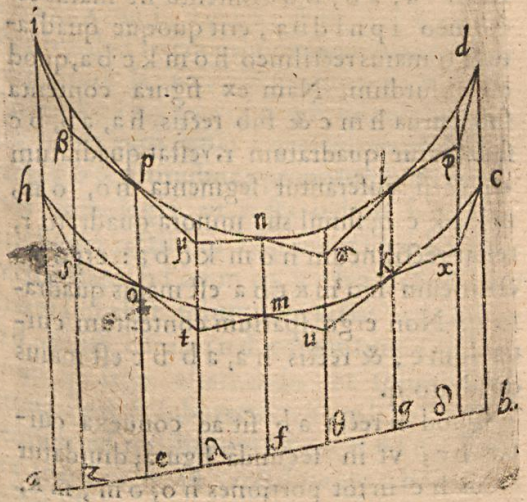
Propositio VI.

Sint tres lineæ a b h c i d, quarum a b sit recta, reliquarum alterutra h c sit sectio conica

(circulo hac voce comprehenſo) illis verò ita occurrant parallelæ inuicem b d a i rectæ in punctis b, c, d, a, h, i, vt ipſarum & parallelarum omnium portiones lineis a b, h c, i d interceptę ſe habeant vt b d, b c. Dico vt ſe habet recta b d ad b c rectã; ita ſe habere ſpatium a i d b ad ſpatium a h c b.

Vt recta b d ad b c ita ſit ſpatium a i d b ad ſpatium quod poteſt recta q. Si quadratum q non eſt æquale ſpatio a h c b, ſit primùm ſi fieri poteſt minus: exceſſus autem ſit ſpatium quod poteſt recta r; ſitque primò recta a b ad concaua curuæ h c. Diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m k, κ c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m κ, k c, ſpatia ſegmentorum ſint ſimul minora dato ſpatio r, hoc enim fieri poteſt per 2. huius. Per puncta o, m, κ, ducantur p o e, n m f, l κ g parallellæ ad rectam b d, occurentes lineis a b, i d in punctis e, f, g, p, n, l. Iunctis rectis i p, p n, n l, l d, trapezia i a e p, p e f n, n f g l, l g b d ſe habebunt ad trapezia


n
p
l
i
d
o
m
K
h
c
a
e
f
g
b


i
d
β
p
l
φ
c
h
n
μ
ω
s
k
x
o
m
t
u
g
δ
b
θ
f
λ
e
z
a

haeo, oefm, mfgk, κgbc, vt recta bd ad rectam bc, per 3. huius, cum habeant latera proportionalia, baſes æquales, imo eaſdem in recta ab & altitudines proportionales lateribus homologis; ergo totum rectilineum ipnldba ſe habet ad totum rectilineum homκcba vt recta db ad rectam cb: Sed ita etiam ſe habet totum ſub rectis ia, ab, bd & ſub curua ind contentum ad ſpatium q: ergo alternando vt totum ſub curua ind & ſub rectis ia, ab, bd contentum ad rectilineum ipnldba, ita ſpatium q ad rectilineum homkcba: ergo cùm totum ſub curua ind & ſub rectis ia, ab, bd contentũ ſit maius rectilineo ipnldba, erit quoque quadratum q maius rectilineo homkcba, quod eſt abſurdum. Nam ex figura contenta ſub curua hmc & ſub rectis ha, ab, bc ſi demptur quadratum r, reſtat quadratum q; & ſi auferantur ſegmenta ho, om, mk, kc q; ſimul sũt minora quadrato r, reſtat rectilineum homkcba: ergo rectilineum homκcba eſt maius quadrato q. Non ergo ſpatium contentum curua hmc, & rectis ha, ab bc eſt maius quadrato q.

Quòd ſi recta ab ſit ad conuexa curuæ hc; vt in ſecundâ figurâ; diuidatur arcus hc in tot portiones ho, om, mκ, κc numero pares, vt ductis tãgentibus hſ,

ſot, tmu, vkx & xc, triangula mixta hſo, otm, mvk, kxc ſint ſimul minora ſpatio r; hoc enim fieri poteſt per 2. huius. Per puncta o, m, κ ducantur rectæ bd æquidiſtantes eop, fmn, gkl occurrentes curuæ id in p, n, l; & rectæ ab in e, f, g. Similiter per puncta ſ, t, v, x agantur ſz, tλ, uθ, xϛ parallelæ ad rectam bd, & occurrentes rectæ ab in z, λ, θ, ϛ, atque vt bc ad cd, ita fiat zſ ad zβ, λt ad λμ, θu ad θπ. ϛx ad ϛφ. Iunctæ rectæ iβ, βp, pμ, μn nπ, πl non occurrent curuæ ind niſi in punctis i, p, n, l, d, vt in præcedenti oſtenſum eſt.

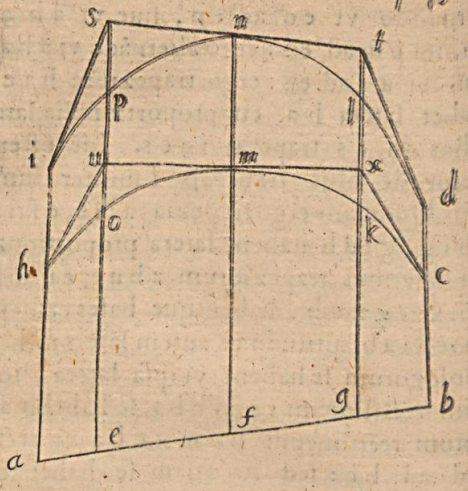
Quoniam ergo trapezia ahſz, zſoe, eotλ, λtmf, fmuθ, θukg, κgxϛ, ϛxcb habēt latera proportionalia lateribus trapeziorū iaβz, zβpe, epμλ, λμnf, fnπθ, θπlg, glφϛ, ϛφdb ſingula ſingulis; habēt verò baſes æquales imo eaſdē in rectâ ab & altitudines proportionales latebus homologis, vt recta bd ad bc, ita erit figura rectilinea iβpμnπlφdba ad rectilineam hſotmukxcba; Sed ita etiam ſe habet totum ſub rectis ia, ab, bd & ſub curuâ ind contentum ad ſpatium q: ergo alternando vt totum ſub curuâ ind & ſub rectis ia, ab, bd contentum ad rectilineum iβpμnπlφdba, ita ſpatium q ad rectilineum hſotmukxcba: ergo cùm totum ſub curua & 3. huius

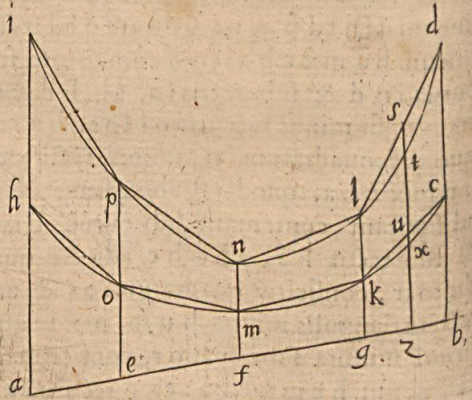
ſub rectis i a, a b, b d contentum ſit maius rectilineo ι β p &c. Erit quoque quadratum q maius rectilineo h ſ o &c. quod eſt abſurdum. Nam ex figura cõtenta ſub curua h m c, & ſub rectis h a, a b, b c dẽpto quadrato r reſtat quadratum q, & demptis triangulis mixtis h ſ o, o t m, m u k, κ x c, quæ ſimul ſunt minora quadrato r, reſtat rectilineum h ſ o t &c. Ergo rectilineum h ſ o t &c. eſt maius quadrato q. Non ergo ſpatium contentum curua h m c & rectis h a, a b, b c eſt maius quadrato q.

Secundò ſit, ſi fieri poteſt, quadratum q maius ſpatio contento ſub curua h m c & ſub rectis a h a b b c; exceſſus autem ſit ſpatium quod poteſt recta r. ſitque primò recta a b ad concaua curuæ h c. Diuidatur arcus h c in tot portiones h m, m c, vt cum per earum extrema eductæ fuerint tangentes h u, u m x, x c, triangula mixta h u m, m x c ſint ſimul minora ſpatio r. id enim fieri poſſe oſtenſum eſt in 2. huius, per v, m, x puncta ducantur rectæ v e, m ſ, x g parallelæ ad rectam b d, quæ occurrant ſectionibus in o, k, p, n, l, & rectæ a b in e, f, g. Vt e o ad e u, ita fiat e p ad e ſ; & vt g κ ad g x, ita ſiat g l ad g t. Iunctæ i ſ, ſ n, n t, t d non occurrent curuæ i d niſi in punctis i n d.

Quoniam ergo vt e o ad e u, ita ſe

habet ex constructione e p ad e s: ergo alternando vt e o ad e p, siue vt a h ad a i, ita e u ad e s: ergo alternãdo vt a h ad e u, ita a i ad e s: ergo trapezium h a e u habet latera h a, e u proportionalia lateribus a i, e s trapezij i a e s. Idẽ ostendetur de alijs trapezijs similiter sumptis. Quoniam ergo trapezia a i f e, e f n f, f n t g, g t d b habent latera proportionalia lateribus trapeziorum a h u e, e u m f, f m x g, g x c b, habentque bases easdem in recta a b, altitudines autem laterum homologorum se habent vt ipsa latera, totum rectilineum i s n t d b a se habebit ad totum rectilineum h u m x c b a vt recta b d ad b c: sed ita etiam se habet totum sub rectis i a, a b, b d & sub curua i n d contentum ad spatium q; ergo alternando vt totum sub curua i n d & sub rectis i a, a b b d contentum ad rectilineum i s n t d b a, ita spatium q ad rectilineum h u m x c b a: ergò cùm totum sub curua i n d & sub rectis i a, a b, b d contentum sit minus rectilineo i s n t d b a, erit quoque quadratum q minus rectilineo h n m x c b a, quod est absurdum. Nam ad figuram contentam sub curuâ h m c & sub rectis h a, a b, b c adiecto quadrato r, conficitur quadratum q; & adiectis triangulis mixtis h u m, m x c quæ simul minora sunt spatio r, conficitur rectilineum h u m x c b a: ergo rectilineum


S
m
t
P
l
i
u
m
x
d
o
k
h
c
b
a
e
f
g
r
q


i
d
S
t
c
h
p
l
u
n
x
o
k
m
a
e
f
g
z
b

h u m x c b a est minus quadrato q. Non ergo spatium contentum curua h m c, & rectis h a, a b, b c est minus quadrato q.

Quòd si recta a b sit ad cõuexa curuæ h c vt in secunda figura; diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m k, k c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m k, k c, spatia segmẽtorũ h o, o m, m c, k c sint simul minora dato spatio r; hoc enim fieri potest. Per puncta o, m, k, ducantur p o e, n m f, l k g parallelæ ad rectam b d, occurrentes lineis a b, i d in punctis e, f, g, p, n, l. Iunctæ rectæ i p, p n, n l, l d non occurrent curuæ i n d nisi in pũctis i, p, n, l, d. Manifestũ autem est cõuexa curuæ i n d esse ad partes rectæ a b; sũpto enim quouis puncto t, & per illud ducta s t u x z parallelâ ad rectam b d, quoniã rectæ g k l, b c d sunt sectæ proportionaliter in k & c, & per extrema ipsarum, perque puncta k & c ductæ sunt rectæ d l, c k, b g, si producantur conuenient in idem punctum; ergo vt b c ad b d, ita est z u ad z s; sed ita etiam est z x ad z t; ergo alternando vt z u ad z x, ita est z s ad z t. Sed z u est maior quam z x: ergo z s est maior quàm z t: ergo punctum t curuæ i t d est inter rectas l d, g b: ergo g b est ad conuexa curuæ l t d. Simili ratione ostendetur si recta a b fuerit ad concaua curuæ h m c, esse quoque ad concauacurvæ i n d, quod in aliis casibus præter-

2. huius

5. huius

4. huius

5. huius

missum videri poterat.

His ita demonstratis, ostendetur, sicuti in primâ figurâ factum est, rectilineum i p n l d b a se habere ad rectilineũ h o m k c b a, vt se habet recta d b ad rectam c b; Sed ita etiam se habet totum sub rectis i a, a b, b d & sub curuâ i n d contentum ad spatium q: ergo alternando vt totum sub cutua i n d & sub rectis i a, a b, b d contentũ ad rectilineum i p n l d b a, ita spatiũ q ad rectilineũ h o m k c b a: ergo cum totum sub curua i n d & sub rectis i a, a b, b d contentũ sit minus rectilineo i p n l d b a, erit quoque quadratum q minus rectilineo h o m k c b a, quod est absurdum. Nam ad figuram contentam sub curua h m c & rectis h a, a b, b c adiecto quadrato r conficitur quadratum q; & adiectis segmentis h o, o m, m k, k c quæ simul sunt minora quadrato r conficitur rectilineum h o m k c b a: ergo rectilineum h o m k c b a est minus quadrato q. Non ergo spatium contentum curua h m c & rectis h a, a b, b c est minus quadrato q; Sed neque etiam est maius: ergo est æquale, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Hinc manifestum est eandem esse demonstrationis vim, si loco extremorum trapeziorum ponantur triangula; habe-

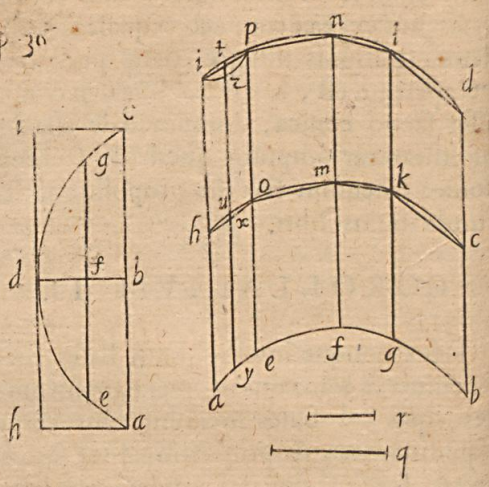
bunt enim se vt altidudines, cùm eorum baſes ſint vel eædem, vel æquales. Vis demonſtrationis integra etiam perſtaret, vt apertum eſt, quamuis linea h c non eſſet ſectio conica, dummodo de illa demonſtraretur idipſum quod de ſectione conica oſtenſum fuit in propoſitione ſecunda huius libri.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque intelligitur ſi baſes fuerint diuerſæ & inæquales, rectæ autem omnes, quæ ad baſes incidunt vni certæ æquidiſtantes, & proportionaliter ſecant baſes, fuerint æquales, eandem eſſe vim demonſtrationis ad probandum ipſas figuras eſſe in ratione baſium.

COROLLARIVM III.

Hinc quoque apertum eſt figuras quæ ſectione conica, ordinatim applicata eadem, & diametro vtrinque continentur eſſe æquales. Sit enim ſectio conica a e d g c, cuius diameter ſit d b, & ex quolibet eius puncto b eductæ ſint ordinatim applicatæ b a, b c quæ in directum iacent cùm ſint tangenti in d parallellæ: dico figuram d e a b eſſe æqualem figuræ d g b c.



habent enim baſim eandem c b, & perpendiculares ex a & c demiſſæ ſunt æquales; ex quocunque verò puncto f baſis d b ducantur rectæ f e, f g parallelæ rectis ab, b c, ipſæ f e, f g ſunt æquales; ergo figura d e a b eſt æqualis figuræ d g c b. Vnde vlteriùs efficitur, ſi ductis a h, c i rectis figuræ d b a h, d b c i ſint æquales, reſiduas quoque a e d h, c g d i eſſe æquales inuicem.

COROLLARIVM IV.

Altera figura in laterculo corollarij proximè ſuperioris exhibita inſeruit ad id

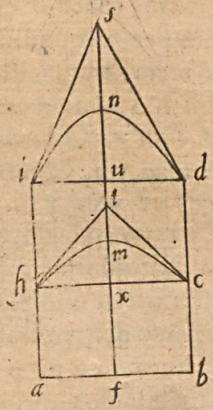
quod quarto loco ex demonstratis colligi volumus; quamuis nimirum linea a b non sit recta, sed sectio conica, propositionem præsentem perinde demonstrari posse. Cùm enim h x o sit recta, si per quodlibet punctum curuæ a e quæ est sectio conica, ducantur ipsi a i parallellæ, & si vt recta a h ad a i, ita earum portiones interceptæ curua a e, & recta h x o fiant ad alias earundem parallelarum portiones eadem curuâ a e terminatas, harũ verò extrema describant curuam i z p; vt recta a i ad a h, ita erit spatium a i z p e ad spatium a h x o e, sicut in præsenti hactenus demonstratum fuit. Ipsa autem curua i z p cadet inter curuas i t p, a e, si recta h x o cadat inter curuas h u o, a e: & si h x o cadat extra, cadet & curua i z p. Ducatur enim per z quodlibet punctum curuæ i z p recta z y parallela rectæ a i secans curuam h o in u, rectam h o in x, & curuam a e in y. Quoniam vt a i ad a h, ita est y t ad y u, & ita est etiam y z ad y x: ergo vt y t, y u, ita y z, y x & alternãdo vt y t, y z, ita y u, y x: ergo si x sit inter u & y, erit quoque z inter t & y; & si x sit vltra u erit quoque z vltra t. Hoc autem ostenso demonstratio nihil differt nisi quod lineæ i z p, p n, &c sunt curuæ, cùm in quatuor propositionis casibus fuerint rectæ; id tamen nõ impedit quominus vt a h recta ad a i, ita

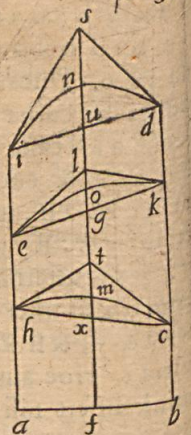
ſit figura a h x o e ad figuram a i z p e, quod ſatis eſt ad demonſtrationis robur.

SCHOLIVM.

Si ex figura a h m c b *lateribus* a h, b c *abſcindantur* h i, c d *ipſis* a h, b c *æquales; & per puncta* i, d *intelligatur ducta linea* i n d, *ita vt ex quocunque puncto* f *rectæ* a b *ducatur* f n *ipſi* a i *parallela occurrens ſectioni conicæ* h n c *in* m, *& lineæ* i n d *in* n, *ſint* f m, m n *æquales; connectantur autem rectæ* h c, id: *oſtendendum eſt ſegmentum* i n d u *eſſe duplum ſegmenti* h m c x.

pa-38





Quoniam figura h i n d c m *est æqualis per præsentem rectilineo* h c b a *& segmento* h m c x, *hoc est figuræ* a h m c b f *quæ ex illis duobus spatijs componitur: si æqualibus addatur segmentum* h m c x *erit figura* h i n d c x *æqualis rectilineo* h b, *& segmẽto* h m e x *bis sumpto; ergo si ex istis æqualibus auferatur rectilineum* h c b r a *seu* i d c h *ipsi æquale, erit segmentum* i n d u *æquale segmento* h m c x *bis sumpto quod erat ostendendum.* 3. huius

Similiter ostendetur rectam n u *esse duplam rectæ* m x; *quoniam enim recta* m n *est æqualis, vt ponimus, ipsi* m f, *hoc est rectis* f x, x m: *si æqualibus addatur recta* m x, *erit recta* n x *æqualis rectæ* f x *semel sumptæ, & rectæ* m x *bis sumptæ: ergo si ex istis æqualibus demptur* f x *seu* x u *ipsi æqualis, residua recta* n u *erit æqualis residuæ* m x *bis sumptæ.*

Hinc manifestum est lineam i n d *æquivalere sectioni conicæ, quod ad effectum propositionis secundæ huius libri attinet. Ostensum enim est curuas* h m c, i n d *inter parallelas* i a, d b *contentas, & subtensas rectis* i d, h c *ita esse collocatas, vt segmentum* i n d *non sit maius duplo segmenti* h m c: *ergo si arcus* h m c *intelligatur diuidi in tot segmenta quæ dati spatij semisse minora sint, arcus* i n d *restabit diuisus in totidem numero segmenta quæ minora erunt dato spatio, hoc est semisse dati spatij bis sumpto.* 2. huius

Similiter ſi h t, c t *tangentes in* h & c *eductæ concurrant in* t, *fiatque* n s *dupla ipſius* m t, *iunctis* i ſ, ſ d *oſtendetur ſicut in ſimili paulò ante demonſtrauimus ſpatium* i ſ d n *eſſe duplum ſpatij* h t c m, *ipſaſque rectas* ſ i, ſ d *non occurrere lineæ* i ſ d *niſi in punctis* i, d : *linea ergo* i n d *æquiualet ſectioni conicæ etiam quantum ad effectum ſecundæ propoſitionis huius libri.*

Quod ſi vt in ſecunda figura intra parallelas a h, b c *ſint duæ ſectiones conicæ* h m c, e o k, *rectiſque* a h, b c *æquales abſciſſæ ſint* e i, k d, *itáque duci intelligatur linea* i n d, *vt quæcunque* f n, *ipſi* a i *æquidiſtans ducatur inter rectas* a i, b d, *occurrens lineæ* i n d *in* n, *ſectioni conicæ* e o k *in* o, *ſint* f m, o n *æquales; perinde oſtendetur iunctis rectis* i d, e k, h c, *rectam* n u *eſſe æqualem duabus* o g, m x *ſimul ſumptis.*

Quoniam enim recta o n *æqualis ponitur rectæ* f m, *hoc eſt rectis* f x, x m: *ſi æqualibus addatur recta* g o, *erit recta* n g *æqualis rectis* f x, x m, g o : *ergo ſi ex iſtis æqualibus dematur* f x *ſeu* g u *ipſi* f x *æqualis, reſidua recta* n u *erit æqualis rectis* x m, g o *ſimul ſumptis. Vnde per præſentem conficitur ſegmẽtum* i n d u *eſſe æquale duobus ſimul* e o k g, h m c k.

Manifeſtum igitur eſt lineam i n d *æquiualere ſectioni conicæ quod ad effectum ſecundæ propoſitionis huius libri in ſubtendentibus: quod verò ad effectum eiuſdem in tagentibus*

spectat, non minus est manifestum; si enim sectiones conicas eok, hmc *ponantur tangere in* e, k, h, c, *rectæ* el, kl, ht, ct *coeuntes in* l, t, *fiatque recta* nf *ambabus* lo, tl *æqualis, & iungantur* if, df: *spatium* ifdn *erit æquale duobus simul* elko, htcm, *vt ex præsenti conficitur: rectas verò* if, fd *non occurrere lineæ* ind *nisi in punctis* i, d *ostendetur sicuti prius.*

Quòd si proportio rectæ ah *ad* ei *non sit æqualitatis, sed alia quæuis; non multò difficilius demonstrabitur, cum opus fuerit, lineam* ind *æquiualere sectioni conicæ quod ad duos prædictos effectus attinet.*

Propositio VII.

Sit recta ak in quam ad idem punctum k incidant rectæ kl, km; ipsam verò kl ita secet linea al, ipsamque km linea nm, in punctis l & m, vt ipsis kl, km æquidistantium portiones interceptæ rectâ ak, & lineis al, nm sint proportionales lineis kl, km. Rursus linearum al, nm

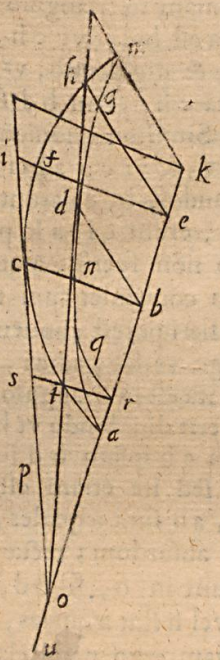
alterutram a l tangat recta p e in quouis puncto c, & per c acta ſit c b æquidiſtans rectæ k l, ſecans rectam a k in b: per b verò acta ſit b d parallela rectæ k m, occurrens lineæ n m in d. Per f quoduis aliud punctum lineæ a l ducatur f e parallela rectæ k l, occurrens rectæ a k in e, & tangenti p c in i; per e verò agatur e g parallela rectæ k m, occurrens lineæ n m in g. Si vt e f ad e i, ita fiat e g ad e h, & per d atque h ducatur recta d h. Dico rectam d h non occurrere lineæ n g m niſi in puncto d.

Si enim fieri poteſt, occurrat linea d h ipſi n g m in puncto q, ſitque d q h recta: per q agatur q r æquidiſtans ipſi k m, ſecans rectam a k in r, & per r agatur r t parallela ipſi k l, occurrens lineæ a c in t, & rectæ p c in ſ.

Quoniam igitur in rectam a k incidunt

33. primi.

pa. 43



rectæ d b, h e parallelæ, si d b, h e sint æquales, erunt d h, b e parallelæ; si verò sint inæquales, rectæ d h, b e productæ
4. sexti. conuenient; punctum occursûs mutui sit o. Quoniam in triangulo h o e, lateri h e parallela est b d; vt e h, d b, ita erunt o e ob; & diuidendo, vt b d ad excessum quo recta e h ipsam b d superat, ita o b ad b e. Similiter quoniam c b, e i sunt parallelæ, & vt c b ad e i, ita est b d ad e h, quando c b, e i erunt æquales, erunt æquales, erunt c i, a k parallelæ: quando verò non fuerint æquales, recta c i producta conueniet cum rectâ a k in o. Si enim fieri potest conueniat in u: quoniam ergo vt b c, ad e i, hoc est vt b d, ad e h, ita est in triangulo i c u e recta u b ad u e; erit diuidendo vt b d ad excessum quo recta e h ipsam b d superat, ita u b ad b e; sed ita etiam est o b ad b e: ergo u b, a b sunt æquales, totum & pars, quod est absurdum; rectæ ergo c p, d h conueniunt in o, si b d, e h sint inæquales; vel si sint æquales, sunt parallelæ.

Quoniam ergo parallelæ sunt b d r q, & in triangulo d o b lateri b d parallela est r q; vt o b, o r, ita erunt b d, r q. Similiter in triangulo c o b, vt o b, o r, ita erunt b c, r f: ergo vt b d, r q, ita b c, r f. Quòd si rectæ p i, t d, a k sint paral-

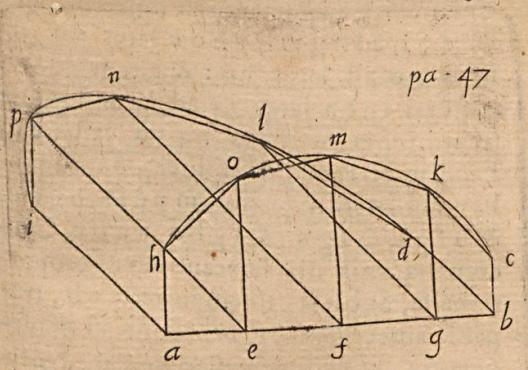
lelæ; ſicut b d erit æqualis rectæ r q, vt pote lateri oppoſito parallelogrãmi r b d q, ita b c erit æqualis lateri oppoſito r ſ parallelogrammi c b r ſ. Quoniam igitur vt b d ad r q, ita eſt b c ad r ſ, ergo alternando vt b c, b c, ita ſunt r q, r ſ: ſed vt b d, b c, ita etiam r q, r t: ergo r t, r ſ ſunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Recta ergo d h non occurrit lineæ n m in alio puncto quàm in d.

Non abſimili ratione oſtendetur, ſi recta p c ſecet lineam curuam a l, ipſam quoque n m ſecari à rectâ d h, & eſſe curuam. Quamuis autem appoſita non ſit figura exhibens caſum quo recta a k ſit ad connexa curuarum a d, c f; demonſtratio tamen ad eam extendi debet, vt manifeſtum eſt.

PROPOSITIO VIII.

Sint tres lineæ a b, h c, i d, quarum a b sit recta, reliquarum alterutra h c sit sectio conica; cum curuâ autem h c ita coëant rectæ inuicem parallelæ b c, a h, & cum curuâ i d parallelæ inuicem b d, a i; vt sicut b c ad b d ita sit h a ad a i, & ita etiam sit quæuis ipsi b c parallela, curuam h c secans ad parallelam ipsi b d ex eodem puncto rectæ a b eductam & curuâ i d interceptam. Dico spatium a i d b se habere ad spatium a k c b, vt perpendicularis ex puncto d, ad perpendicularem ex puncto c in rectam a b demissa se habet.

Vt perpendicularis ex puncto d se habet ad perpendicularem ex c puncto ad rectam a b demissa, ita sit spatium a i d b ad spatiũ quod potest recta q. Si quadratũ



q non est æquale spatio a h c b, sit primùm si fieri potest minus; excessus autem sit spatium quod potest recta r; sitque primò recta a b ad concaua curuæ h c.

Diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m k, k c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m k, k c spatia segmentorum sint simul minora dato spatio r; hoc enim fieri potest per 2. huius. Per puncta o, m, k ducantur o e, m f, k g parallelæ ad rectam c b; & per puncta e, f, g, in quibus secant rectam a b ducantur e p, f n, g l æquidistantes rectæ b d, & occurrentes curuæ i d in p, n, l. Iunctis rectis i p, p n, n l, l d, quoniam vt h a ad i a, ita est o e ad e p, & m f

ad f n, & κ g ad g l: ergo vt trapezij i p e latus a i, ad trapezij a h o e latus a h, ita latus p e ad latus e o: & alternando vt trapezij i p e a latus i a ad latus e p, ita trapezij h o e a latus h a ad latus e o. Eandem ob cauſam, ſimiliter proportionalia erunt latera trapeziorum p e f n, o e f m; & n f g l, m f g κ; & l g b d, κ g b c. Cùm ergo trapezia iſta habeant latera proportionalia, & baſes eaſdem in rectâ a b, trapezia antecedentia ſe habebunt ad conſequentia, vt perpendicularis ex d ad perpendicularem ex c demiſſa ad rectam a b: ergo totum rectilineum i p n l d b a ſe habet ad totum rectilineum h o m κ c b a, vt perpendicularis ex puncto d ad perpendicularem ex puncto e in rectam a b demiſſa: ſed ita etiam ſe habet totum ſub rectis i a, a b, b d & ſub curuâ i n d contentum ad ſpatium q: ergo alternando vt totum ſub curuâ i n d & ſub rectis i a, a b, b d cõtentum ad rectilineum i p l d b a, ita ſpatium q ad rectilineum h o m κ c b a: ergo cum totum ſub curuâ i n d & ſub rectis i a, a b, b d contentum ſit maius rectilineo i p n l d b a, erit quoque quadratum q maius rectilineo h o m k c b a, quod eſt abſurdum, vt ſatis conſtat ex ijs quæ propoſitione 6. huius demonſtrata ſunt: vnde quoque ſumi debent tres qui ſuperſunt caſus, nam ijſdem fermè verbis huc tranſcribendi forent, vt manifeſtum eſt

3. huius

12. quinti.

cuiuis

cuiuis Lectori harum rerum non omnino imperito.

Hinc pariter manifestum est eandem esse demonstrationis vim, si loco extremorum trapeziorum sint triangula; vt pote quæ se habeant sicuti altitudines, cum eorum fuerit vel eadem basis vel æqualis, vt demonstrat Clauius ad 1. sexti Euclidis.

SCHOLIVM.

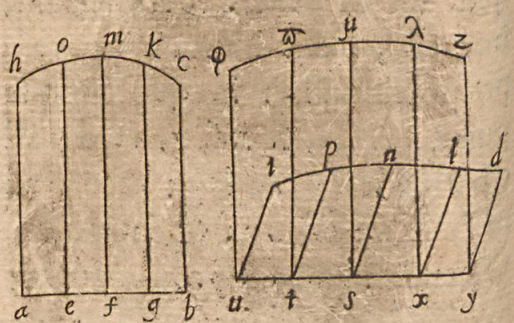
Hoc loco demonstrandum est vnum quod necessarium nobis erit in progressu huius operis.

Si basis a b non sit eadem vel æqualis in vtrâque figurâ, sed bases a b, u y sint inæquales, reliqua autem eadem permaneant, hoc est, sectis basibus u y, a b proportionaliter in quotcunque punctis t, s, x, & c, f, g, vt d y ad c b, ita sit l x ad k g; & n s ad m f; & p t ad o e; & i u ad h a. Ostendendum est proportionem spatij u i n d y ad spatium a h m c b esse compositum ex rationibus ba-

ſium u y, a b, & perpẽdicularium ex d & c, vel ex i & h ad baſes u y, a b demiſſarum

Snper baſi u y intelligantur erectæ rectæ u φ, t π, ſ μ, x λ, y z, ita vt inuicem ſint parallelæ, & cum baſi u y conſtituant angulum æqualem angulo h a b; ipſæ autem φ u, π t, μ ſ, λ x, z y ſint æquales rectis a h, e o, f m, g k, b c; & per puncta φ, π, μ, λ, z & alia omnia quæ ſimili methodo reperiri poſſunt incedat linea φ π μ λ z. Conſtat ergo ex antea demonſtratis figuram a h m c b eſſe ad figurã u φ μ z y vt eſt baſis a b ad baſim u y; conſtat præterea

pa-50



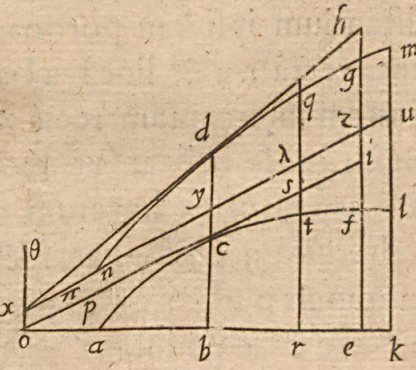
ex præsenti propositione figuram $u\varphi\mu zy$ esse ad figuram $uindy$ vt est perpendicularis ex i ad perpendicularē ex φ in rectam uy demissam: ergo cùm perpendicularis ex φ in rectam uy demissa sit æqualis perpendiculari ex h in rectam ab demissæ, proportio figuræ $ahmcb$ ad $uindy$ componetur ex rationibus basium ab uy & perpendicularium ex h & i in bases demissarum, quod erat demonstrandum. 6. huius in coroll. 2.

Propositio IX.

Sint rectæ ak, xu in quas incidat recta ku ad puncta k & u; ipsam verò ku ita secent lineæ al, nm in punctis l & m, vt æquidistantium ipsi km portio intercepta rectâ ak & lineâ al ad portionem interceptam rectâ xu & lineâ nm se habeat vt recta kl ad um. Rursus linearum al nm alterutram al tangat recta pc in quouis puncto c, & per c agatur bcd æquidistans rectæ km, occurrens lineæ nm in d,

& rectis a k, x u in b, y. Per f quoduis aliud punctum lineæ a l ducatur f g æquidiſtãs rectæ κ m, occurrens lineæ n m in g, & rectis a k, x u, in e, z, tangenti verò p c in i. Si ut e f ad e i, ita fiat z g ad z h, & per d atque h ducatur recta d h. Dico rectam d h non occurrere lineæ n g m niſi in puncto d.

Si enim fieri poteſt occurrat recta d h ipſi n g m in puncto q, ſitque d h q recta. Per q agatur q r æquidiſtans ipſi k l, occurrens verò rectis p c, x u in ſ, λ, & pa. 52



lineæ a c l in t. Quoniam in rectam a k incidunt rectæ c b, i e parallelæ; si c b, i e sint æquales, erunt b e, c i parallelæ: si verò sint æquales, productæ conuenient. Conueniant primo, & punctum concursûs sit o, quoniam in triangulo i o e lateri i e parallela est b c; vt i e ad b c, ita erit o e ad o b, & diuidendo vt b c ad excessum quo e i recta ipsam b c superat, ita o b ad b e. 33. primi. 4. sexti. in coroll.

Per o agatur recta o θ parallela rectæ k m, occurrens rectæ u x in puncto quod sit x: quoniam ergo in rectas x u, o k parallelæ incidunt e i, b c, o x; rectæ o e, x z similiter secabuntur in punctis e, b, o & z, y, x, & vt o b, b e, ita x y, y z. 10. sexti Eucl.

Rursus quoniam in rectam n z incidunt rectæ d y, h z parallelæ, si d y, h z fuerint æquales erunt n z, d h parallelæ; si verò sint inæquales, rectæ n z, d h conuenient in puncto x. Si enim fieri potest conueniant in π; quoniam ergo vt d y ad z h, ita est in triangulo d h π z π y ad z π, cùm lateri z h parallela sit y d, ergo diuidendo vt y d ad excessũ quo recta z h superat ipsam y d, ad ita erit π y ad y z. Et quoniam vt d y ad z h ita esse ponitur b c ad e i: ergo vt d y ad excessum quo recta z h ipsam d y superat, ita b c ad excessum quo ipsam b c recta e i superat, sed ita etiam ostensum est esse o b ad b e; ergo vt π y ad y z ita est o b ad b e; sed 2. sexti.

vt o b, b e, ita x y, y z, vt oſtenſum fuit; ergo vt π y ad y z, ita eſt x y ad y z: ergo π y, x y ſunt æquales, pars & totum quod eſt abſurdum, rectæ ergo h d, u x, o θ, concurrunt in idem punctum x.

9. quinti.

Quoniam ergo parallelæ ſunt y d, λ q, & in triangulo q d x λ lateri q λ parallela eſt d y; vt λ q, d y ita erunt x λ, x y. Similiter in triangulo i o e, vt r ſ, b c ita erunt o r, o b: ſed vt o r, o b ita ſunt x λ, x y, vt modo demonſtratum fuit: ergo vt d y, λ q, ita ſunt b c, r ſ.

10. ſexti Euc.

Quòd ſi tam c ſ, b r ſint inuicem parallelæ, quam d h, y z, erunt b c ſ r & y λ q d parallelogramma, ac proinde erunt latera oppoſita λ q, d y æqualia; item r ſ, b c: ergo vt d y, λ g, ita erunt b c r ſ. Quoniam igitur vt d y, λ q ita ſunt b c, r ſ; ergo alternando vt d y, b c ita ſunt λ q, r ſ; ſed ita etiam ſunt λ q, r t: ergo r ſ, r t ſunt æquales pars & totum, quod eſt abſurdum. Recta ergo d h non occurrit lineæ n g m, niſi in puncto d; quod erat probandum.

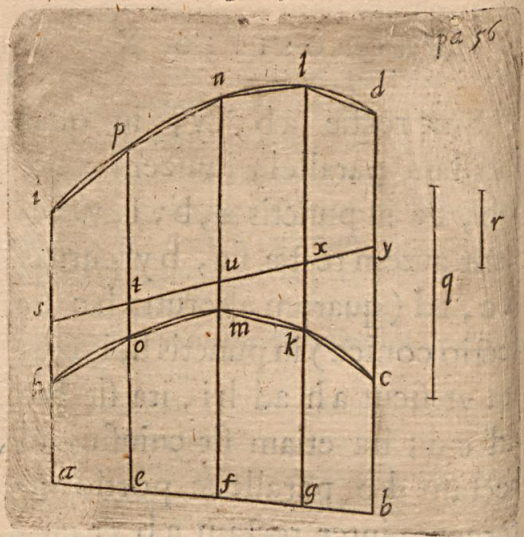
Non abſimili ratione oſtendetur ſi recta p c ſecet lineam curuam a l, ipſam quoque n m ſecari à rectâ d h, & eſſe curuam. Quamuis autem appoſita non ſit figura exhibens caſum quo recta a k ſit ad conuexa curuarum a d, c f; demonſtratio tamen ad eam pertinet, vt manifeſtum eſt.

Propositio X.

Sint rectæ a b, ſy, in quas incidant parallelæ inuicem rectæ y b, ſa in punctis a, b, ſ, y. Secent autem rectæ ſa, b y curuas h c, i d (quarum alterutra h c ſit ſectio conica) in punctis h, i, c, d, ita vt ſicut a h ad h i, ita ſit b c ad c d; ita etiam ſit cuiuſuis ad rectam d b parallelæ portio intercepta inter rectam a b & curuam h c, ad portionem interceptam inter rectam ſy & curuam i d. Dico ſpatium ſ i d y ſe habere ad ſpatium a h c b, vt recta ſ i ad rectam h a.

Vt recta ſ i ad rectam ſ a, ita ſit ſpatium ſ i d y ad ſpatium quod poteſt recta q. Si quadratum q nō eſt æquale ſpatio ahcb; ſit primùm ſi fieri poteſt minus; exceſſus autem ſit ſpatiū quod poteſt recta r; ſitque primò recta a b ad concaua curuæ h c.

Diuidatur arcus h c in tot portiones h o,



o m, m k, k c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m k, k c ſpatia ſegmentorũ ſint ſimul minora dato ſpatio r; hoc enim fieri poteſt per ſecundam huius. Per puncta o, m, k ducantur o e, m f, k g parallelæ ad rectam b d, occurrentes lineis h c, i d in punctis o, m, k, p, n, l, & rectis a b, ſ y in punctis e, f, g, t, u, x. Iunctis rectis i p, p n, n l, l d, quoniam vt a h ad ſi, ita eſt e o ad t p: ergo alternando vt h a ad e o, ita i s ad p t; ergo duo trapezia i ſ t p, h a e o habent latera proportionalia, & homologa ſe habent vt h a ad ſi. Similiter oſtendetur trapezia p t u n, o e f m, & n u x l, m f g k, & l x y d, k g b c habe

re latera proportionalia, & homologa se habere vt se habet si ad h a.

Quoniam igitur trapezia i s t p, h a e o habent ea latera quæ parallela sunt, proportionalia, eorumque est æqualis distantia; vt recta i s ad rectam h a, ita erit trapezium i s t p ad h a e o; & ita etiam erit p t u n ad o e f m, & n u x l ad m f g k, & l x y d ad k g b c: ergo omnia antecedentia simul, hoc est rectilineum i p n l d y s se habebit ad omnia consequentia simul, hoc est ad rectilineum h o m κ c b, vt se habet recta s i ad h a: Sed ita etiam se habet totum sub rectis i s, s y, y d & sub curuâ i n d contentum ad spatium q: ergo vt rectilineum i p n l d y s ad rectilineum h o m κ c b a, ita spatium sub curuâ i n d & sub rectis i s, s y, y d contentum, ad spatium q; & alternando vt rectilineum i p n l d y s ad spatium sub curuâ i n d, & sub rectis i s, s y, y d contentũ, ita rectilineũ h o m k c b a ad spatium q: ergo cùm spatium sub curuâ i n d & sub rectis i s, s y, y d contentum sit maius rectilineo i p n l d y s, erit etiam spatium q maius rectilineo h o m κ c b a, quod est absurdum, vt satis constat ex ijs quæ propositione sextâ huius demonstrata sunt. Vnde quoque sumi debent tres qui supersunt casus, nam iisdem ferme verbis, pauculis immutatis, huc transcribendi forent, sicuti & hunc primum transcripsimus, vt manifestum est.

3. huius in coroll.

Hinc pariter manifeſtum fit eandem eſſe demonſtrationis vim, ſi loco extremorum trapeziorum ſint triangula; vt pote quæ ſe habeant ſicuti altitudines, cum eorum baſis fuerit eadem, vel æqualis.

PROPOSITIO XI.

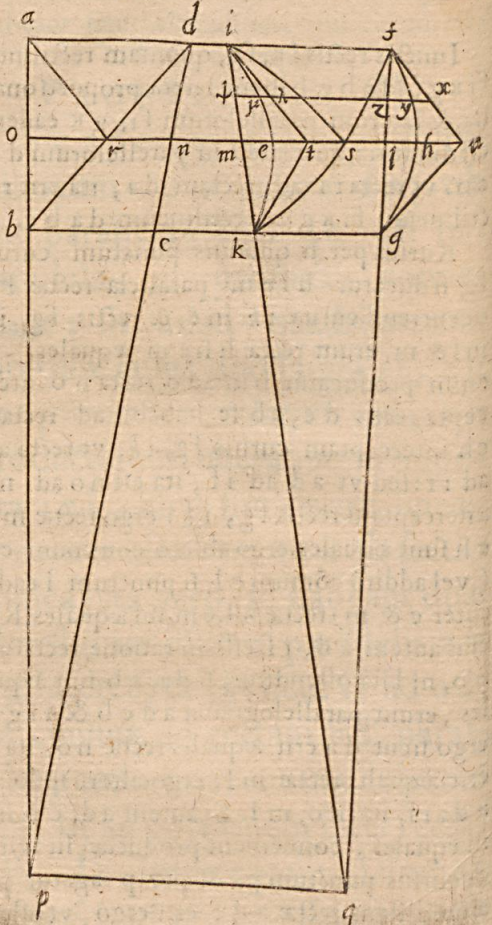
Sit a d c b quadrilaterum rectilineum cuius latera d a, c b ſint parallela, ſiue d c a b ſint parallela, ſiue producta conueniant: ſit aliud quadrilaterum mixtum cuius duo latera i f, k g ſint portiones rectarum a d, c b productarum, latera autem oppoſita i e k, f h g ſint curuæ lineæ, & earum alterutra i e k ſit ſectio conica; ita verò ſe habeant duæ iſtæ figuræ iiſdem parallelis a f, b g interceptæ, vt ſicut i f ad a d, ita cuiuſuis ad rectam a d parallelæ portio inter curuas interceptа, ſit ad portionem inter rectas a b, d c interceptam. Dico vt recta f i ad rectam d a, ita eſſe

quadrilaterum mixtum i f g k, ad quadrilaterũ rectilineum a d c b.

Iunctis rectis i k, f g, quoniam rectilinea f i k g, d a b c habent latera proportionalia, & laterum parallelorum f i, g k eadem est distantia, quæ laterum parellelorum d a, c b; vt recta f i ad rectam d a, ita erit rectilineum f i k g ad rectilineum d a b c. 3. huius in Coroll.

Rursus per h quoduis punctum curuæ f g sit ducatur h l e m parallela rectæ f i, occurrens curuæ i k in e, & rectis f g, i k in l & m, erunt rectæ h l, e m æquales. Si enim producatur h m ad o, recta n o intercepta rectis d c, a b se habebit ad rectam e h interceptam curuis f g, i k, vt recta a d ad i f; sed vt a d ad i f, ita est n o ad m l interceptam rectis f g, i k: ergo rectæ m l, e h sunt æquales: ergo ablato communi e l, (vel addito cõmuni e l, si punctum l cadat inter e & m) rectæ h l, e m sũt æquales. Rectas autem a d, i f esse in ratione rectarum n o, m l ita ostenditur; si d a, c b sint æquales, erunt parallelogrãma a d c b & i f g k; ergo sicut d a erit æqualis rectæ n o, ita f i erit æqualis rectæ m l: ergo alternando vt a d, i f, ita n o, m l. Si autem a d, c b sint inæquales, conuenient productæ; sit igitur occursus punctum p; & per p agatur p q æquidistans rectæ a d: erit ergo, vt ostentum est, occursus rectarum f g, i k in pa- 9. huius

pa. 60



rallela p q; ille sit q. Quoniam igitur triangula f i q, d a p in eisdem parallelis f a, p q constituta sunt, parallelæque sunt f a, h o; sicut a p ad p o ita erit i q ad q m: quoniam autem vt a p ad p o, ita est d a ad n o; & vt i q ad q m, ita est i f ad m l; erit vt f i ad l m, ita d a ad n o: & alternando vt d a, f i, ita n o, m l. 10. sexti Euc. 4. sexti Euc. in coroll.

Quoniam igitur sectioni conicæ i e ϰ ita respondet curua f h g, vt cuiuscunque ad rectam g k parallelæ portiones inter curuam f h g & rectam f l g interceptæ, sint æquales portionibus inter curuam i e k & rectam i m k interceptis; spatium f h g l erit per præcedētem æquale spatio i ϰ k m: ergo addito communi rectilineo f g ϰ i, conflatum ex rectilineo f g ϰ i & ex figurâ i e k m, erit æquale figuræ i m k g h f conflatæ ex rectilineo f g k i & ex segmento f l g h: ergo ablato communi i e k m, residuum i e k g h f erit æquale residuo rectilineo f g k i: Cùm ergo rectilineum f g k i ostensum sit se habere ad rectilineũ a d c b, sicut se habet recta f i ad d a: mixtũ i e k g h f se habebit ad rectilineũ d a c b vt recta f i ad d a, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM. I.

Manifestum est eandem esse demonstrationis vim siue recta i k sit ad conuexa siue ad concaua curuæ i e k quamuis duplex figura non sit expressa.

COROLLARIVM II.

Manifestum quoque est eandem esse demonstrationis vim si d a b c non esset quadrilaterum, sed triangulum cuius latera essent a b, d a, d b; trianguli autem mixti rect f i, curua i *k*, & altera curua f *k*.

COROLLARIVM III.

Hinc etiam patet eandem esse demonstrationis vim si sumatur triangulum rectilineum a r b, per cuius angulum r transeat r o, & si ita sit triangulum tribus curuis i s, f *k*, *k* e i contentum, vt sicut s e ad r o, ita sit cuiusuis ad rectam s o parallelæ portio triangulo curuilineo inclusa, ad portionem triangulo rectilineo clausam. Cæterùm quo minor erit proportio rectæ a b ad r o, magisque falcata erit curua i e *k*, eo similius lunulæ erit triangulum curuilineum i f *k*. Eiusmodi verò menoideos tetragonismus habetur ex præsenti propositione.

COROLLARIVM. IV.

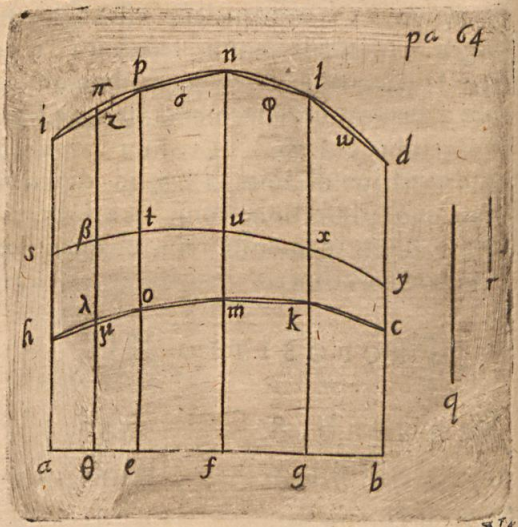
Hinc manifestum est si super sectione conicâ i e *k* constructur parallelogrammum mixtum i f h g *k* e, cum rectæ i *k*, f g, quæ curuas i e *k*, f h g subtendunt, compre-

hendant vnà cum ipsis curuis æqualia spatia; & cùm in segmento sectionis conicæ possit inscribi figura rectilinea iuxta præscriptum propositionis secundæ, posse quoque & in ipso segmento f h g pariter inscribi. Rursus cùm, si rectæ i t, t *k* ponãtur tangere sectionem conicam i e *k* in punctis i & *k*, concurrere verò in pũcto t, ipsique rectæ e t fiat h u æqualis, iunganturque rectæ f u, g u, manifestum sit vt m e ad e t, ita esse l h ad h u: & ita, ductâ quacunque ϕ x parallelâ ipsi l u, esse ϕμ ad μ λ; item z y ad y x: rectæ f u, u g non occurrent lineæ f h g nisi in punctis f, g: Cùm autem manifestum quoque sit figuræ i t *k* e æqualem esse figuram f u g h (triangula enim rectilinea f u g, i *k* t sunt æqualia, & ex æqualibus ablata sunt æqualia nimirũ segmenta f h g l, i e *k* m; ergo residua f u g h, i t *k* e sunt æqualia) poterit pariter de lineâ f h g id demonstrari quod de sectione conicâ i e *k* ex secunda huius demonstraretur, quantum ad tangentes attinet.

Propositio XII.

Sit recta a b, & sectio conica s y in quas incidant parallelæ inuicem y b, s a in punctis a, b, s, y.

Secent autem rectæ ſa, by ſectionem conicam hc, & curuam id in punctis h, i, c, d, ita vt ſicut a h ad h i, ita ſit b c ad c d; ita etiã ſit cuiuſuis ad rectam db parallelæ portio intercepta inter rectam ab & curuam hc, ad portionem interpoſitam inter curuas ſy, id. Dico ſpatium ſi dy ſe habere ad ſpatium a h c b, vt recta ſi ad rectam ha.



Vt

Vt recta ſ i ad rectam ſ a, ita ſit ſpatium ſ i d y ad ſpatium quod poteſt recta q. Si quadratum q non eſt æquale ſpatio a h c b, ſit primùm, ſi fieri poteſt, minus; exceſſus autem ſit ſpatiũ quod poteſt recta r, ſitque primò a b ad concaua curuæ h c.

Diuidatur arcus h c in tot portiones h o, o m, m *k*, κ c numero pares, vt iunctis rectis h o, o m, m κ, κ c, ſpatia ſegmentorum ſint ſimul minora dato ſpatio r; hoc enim fieri poteſt ex ſecunda huius. Per puncta o, m, κ ducantur o e, m f, κ g parallelæ ad rectam b d, occurrentes curuis lineis h c, ſ y, i d in punctis o, m, *k*, t, u, x, p, n, l; & rectæ a b in punctis e, f, g.

Intelligatur duci curua i z p ita vt quadrilaterum conſtans lateribus i s, t p, quæ ſunt rectæ; & curuis s t, i z p, ita reſpondeat rectilineo h a e o, vt cuiuſuis ad rectã h a parallelæ portio inter curuas i z p, ſt ſe habeat ad portionem inter rectas h o, a e, ſicut recta i ſ ad h a. Hoc autem ita peracto, ſi recta h o iaceat inter curuam h λ o, & rectam a e, erit quoque i z p inter curuas ſ β t, i π p; & ſi inter rectas h o, a e iaceat curua h λ o, iacebit quoque curua i π p inter curuas i z p & ſ β t. Sumatur enim λ quoduis punctum curuæ h o, & per illud agatur recta λ θ occurrens rectis h o, a e in punctis μ & θ; &, curuis ſ t, i z p, i π p in punctis β, z, π. Quo-

miam vt i ſ ad a h, ita eſt θλ ad βπ; & ita etiã eſt θμ ad βz: ergo vt θλ ad βπ, ita eſt θμ ad βz; & alternando vt θλ, θμ, ita βπ, βz: ergo ſi θλ ſit minor quàm θμ; hoc eſt, ſi curua h λ o ſit inter rectas h o, a e, erit quoque βπ minor quàm βz, hoc eſt, iacebit curua i π p inter curuas i z p, ſ β t. Et ſi θλ ſit maior quàm θμ, erit quoque βπ maior quàm βz; hoc eſt, ſi inter curuã h λ o & rectã a e iaceat recta h o; curua i z p iacebit quoque inter curuas i π p & ſ β t. Simili prorſus modo oſtendetur reliqua quadrilatera mixta habere eandem proprietatem collata ad quadrilatera rectilinea ſibi reſpondentia.

Quoniam igitur trapeziũ mixtum i ſ t p, cuius duo latera i z p, ſ β t ſunt curua, & trapezium rectilineum h a e o habent, ſicut in huius decimâ propoſitione oſtenſum fuit, ea latera proportionalia, quæ parallela inuicem ſunt: & curua ſ β t eſt ſectio conica; ita verò ſunt conſtituta vt cuiuſuis ad rectam i a parallelæ portio inter curuas i z p, ſ β t interpoſita, ſe habeat ad portionem inter rectas h o, a e interceptam, vt ſe habet recta i ſ ad h a; & ita etiam ſit mixtum p σ n u t ad rectilineũ o e f m; & mixtum n φ λ x u ad rectilineum m k g f; & mixtum l ω d y x ad rectilineum k c b g: ergo omnia antecedentia ſimul, hoc eſt mixtum i z p σ n φ l ω d y ſ ſe habebit ad omnia conſequentia ſimul, hoc eſt ad re-

ctilineum h o m k c b a, vt se habet recta si ad h a; sed ita etiam se habet totum sub rectis i ſ, d y, & sub curuis ſ y, i π n d contentum ad spatium q: ergo vt mixtum i z p σ n φ l ω d y ſ ad rectilineū h o m k c b a ita spatium sub curuis i π n d, ſ y, & sub rectis i ſ, d y contentum, ad spatium q: & alternando vt rectilineū i z p σ n φ l ω d y ſ ad spatium sub curuis ſ y, i π n d, & sub rectis i ſ, d y contentum, ita rectilineum h o m k c b a, ad spatium q. Ergo cùm spatium sub curuis i π n d, ſ y & sub rectis i ſ, d y sit maius mixto i z p σ n φ l ω d y ſ, erit etiam spatium q maius rectilineo h o m k c b a, quod est absurdum, ex ijs quæ propositione decima huius demonstrata sunt: est enim isti simillima, quapropter tres qui supersunt casus ex illâ, vel ex sexta huius peti debent.

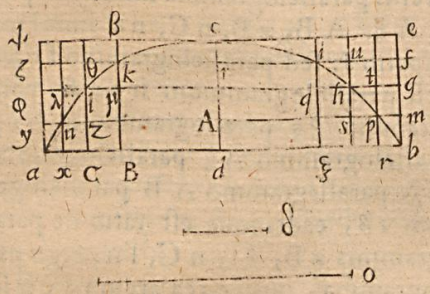
COROLLARIVM.

Inde manifestum est eandem esse demonstrationis vim, si loco extremorum trapeziorum sumantur triangula.

Propositio XIII.

Datum ſit ſpatium quod poteſt recta o, datum etiam ſit ſectionis conicæ ſegmentum a c b comprehenſum baſi a b, & arcu a c b, quem recta c e baſi a b parallela tangat in c, æquidiſtantes autem diametro c d non ſecent ſectionē a c b ad partes c, niſi in vno puncto; id enim fieri poſſe conſtat ex conicis. Dico arcum a c b diuidi poſſe in tot portiones numero pares per rectas baſi a b parallelas, quarum vna ſit c e, vt poſtquam per c ducta fuerit diameter c d, & per reliqua diuiſionum puncta æquidiſtantes ipſi c d, parallelogramma circa arcum conſiſtentia ſint ſimul minora ſpatio o.

Compleatur parallelogrammum a b e ♁, & ponatur ſpatium, quod recta ♃ poteſt, eſſe pars parallelogrammi a b e ♁ minor ſpatio o.



Vt a b recta, ad rectam ♂, ita fiat ♂ ad b m; & per m agatur m y parallela basi a b; & ad a b rectam in angulo dato ♃ ab applicetur parallelogrammum a b m y æquale quadrato ♂. Quoniam vt recta e b ad b m, ita est parallelogrammum a b e ♃ ad parallelogrammum a b m y: cùm a b m y sit pars parallelogrammi a b e ♃, erit quoque b m pars rectæ b e. Diuidatur b e in reliquas partes m g, g f, f c, & ducantur rectæ g φ, φ ζ: per puncta autem in quibus rectæ m y, g φ, f ζ secant arcum a c b ducantur ad b e parallelæ p t, h u, i q, *k* β, l θ, n λ. Dico parallelogramma b m p r, p t h s, h u i q, i s c r, *k* r c β, l m *k* θ, n z l λ, a x n y esse simul minora quadrato ♂.

44. primi Euc. 1. sexti Euc.

Quoniam enim parallelogrammum a b m eſt minus quadrato ſ, erunt portiones eius parallelogramma nimirum p b, ſ r, ξ s, A ξ, A B, z B, n C, n a ſimul minora ſpatio ſ: ſed parallelogrammo ſ r æquale eſt parallelogrammum h p; & parallelogrammo ξ s parellogrammum h i; & parallelogrammo A ξ parallelogrammum i c; & parallegrammo A B parallelogrammum r β, eademque eſt ratio de parallelogrammis z B, k l; n C, l n; ergo parallelogramma, quæ circa arcum a c b ſunt, omnia ſimul ſunt minora ſpatio o, quod erat oſtendendum.

1. ſexti. Euc.

COROLLARIVM I.

Hinc manifeſtum eſt primo ad arcum a c b conſtituta eſſe triangula mixta numero paria quorum vnum latus ſit portio ipſius arcus, reliqua duo ſint latera parallelogrammorum circa arcum conſiſtenſtentium, quæ omnia ſimul (ſiue interiùs ſiue exteriùs conſtituta intelligantur) ſint minora ſpatio o

COROLLARIVM II.

Manifeſtum eſt ſecundò nihil referre ad vim demonſtrationis, quod arcus a c, c b ſint vna continua linea; quamuis enim ſint diuerſæ & conſtituant angulum ad c, dum-

modo ordinatim ad c d vtrinque applicatæ sint æquales idem sequitur. Vnde vlteriùs apertum est non esse necessarium ad demõstrationis robur, vt lineæ a c, c b sint sectiones conicæ ; cùm eas esse conicas demonstratio non exigat, dummodo æquidistantes rectæ c d non secent arcum a c b, nisi in vno puncto ; & dummodo rectæ g φ, φ ζ non occurrant arcui a c b nisi in vno puncto ad rectæ c d partes a, & in alio ad eiusdem rectæ c d partes b.

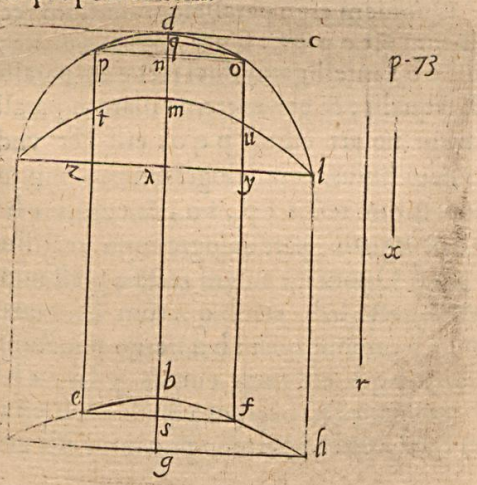
Propositio XIV.

Sint duæ sectiones conicæ κ d l, i b h ita constitutæ vt earũ diametri coincidant eidem rectæ d g, vertices verò sint d & b; ad diametros autem quæ ab vtraque sectione ordinatim applicantur, sint parallelæ, vel congruant eidem rectæ i h vtrinque ordinatim applicatæ à sectione conicâ i b h; per puncta verò i & h ductæ sint i κ, h l æquidistantes diametro b g, ita vt quæcunque æquidistans inter i k, b d ducetur in-

tercepta sectionibus conicis, sit maior ipsa i k, minor ipsâ b d, & eò maior quo minùs distabit ab ipsâ b d, & sectiones k d l, i b h non secet nisi in vno puncto iuxta cautionē adhibitam in præcedenti. Datum sit præterea spatium quod potest rectā r, & ipsum sit primò minus eo spatio quod comprehenditur sectionibus conicis k d l, i b h, & rectis i k, h l. Dico posse curuam i b h in tot portiones diuidi quæ sint bases parallelogrammorum mixtorum inuicem sibi ad vtrasque diametri partes pari numero, parique interuallo respondentium, ita vt ipsa simul sumpta sint maiora spatio quod potest rectā r; ipsorum autem latus curuum basi oppositum interijciatur inter sectionem k d l & ordinatim ab eo puncto sectionis k d l applicatam in quo eius-

modi parallelogrammi angulus conſtituitur à curuâ & à recta quæ ſit vel diameter, vel ei parallela.

Quadratum quod poteſt recta x ſit exceſſus quo figura rectis *k* i, h l, & ſectionibus conicis *k* d l, i b h contenta ſuperat ſpatium quod poteſt recta r: arcus verò *k* d l intelligatur ſectus in tot ſegmenta *k* p, p d, d o, o l per ordinatim vtrinque applicatas κ l, p o, & per a d c tangentem ipſi k l parallelam, vt triangula mixta *k* z p, p n d, d n o, o y l interiùs ad curuam l d κ conſtituta ductis ad diametrum parallelis p z, o y ſint ſimul minora ſpatio x; id enim fieri poteſt per præcedentem propoſitionem.



p. 73

Producatur p z donec occurrat ſectioni i b h; punctum autem occursûs ſit e, per quod agatur ordinatim applicata e f, & producatur donec occurrat ſectioni; ſit verò occursûs punctum f. Iunctâ rectâ o f, quoniam p o, e f ſunt parallelæ, vt pote ordinatim applicatæ vtrinque ad ſectiones k d l, i b h; & quoniam e p n f eſt parallelogrammum, erunt p n, e z æquales; ergo & p o, e f duplæ illarum (ſecantur enim bifariam in n & ſà diametro d g) ſunt æquales: cùm ergo p o, e f ſint æquales & parallelæ, erunt p e, o f parallelæ & æquales: eſt ergo e p o f parallelogrammum, ſicut & i k l h; eadem enim eſt demonſtratio aſſumptâ quacunque ordinatim applicatâ, & per eius extrema ductis rectis ad m b parallelis donec occurrant alteri ſectioni.

34. primi.

33. primi.

Quoniam ergo parallelogrammum rectilineum eſt e p o f: ſi per ſingula puncta arcus e b f intelligatur duci rectæ e p parallela & æqualis, & per extrema illarum parallelarum notari curua p q o: erit per vndecimam huius parallelogrammum mixtum contentum rectis e p, f o, & curuis e b f, p q o æquale parallelogrammo rectilineo e p o f. Quoniam autem recta e p eſt minor quam recta b d, erit b q, cùm ſit æqualis ipſi e p, minor quàm b d; ergo punctum q curuæ p q o eſt inter curuas p d o, e b f; & quoniam f n, b q ſunt æquales & b eſt inter f, n (cùm ad partes n ponantur eſſe con-

uexa sectionis i b h) erit ergo b n minor quàm n f, ac consequenter quàm b q: ergo punctum q cadit inter curuam p d o & rectam p o. Simili pacto ostendetur quodlibet aliud punctum curuæ p q o esse inter curuam p d o & rectam p o. Simili quoque pacto si ex parallelis per singula puncta arcûs e b f ductis abscindantur æquales lateri i κ parallelogrammi rectilinei i k l h, & extrema illarum parallelarum designet curua κ m l, erit per vndecimam huius parallelogrammum mixtum i k m l h b æquale rectilineo i k l h: vt modo ostendebatur de parallelogrammo e p o f; curuáque κ m l similiter ostendetur cadere inter curuam k d l & rectam κ l. Atque eadem est ratio de quotcunque alijs parallelogrāmis, si plures quàm p o, k l ordinatim vtrinque applicatæ fuerint ad diametrū d b à sectione κ d l, interualla autem k z, y l esse æqualia patet: cùm enim λ k, λ l sint æquales, item λ z, λ y seu n p, n o, erunt residua k z, y l æqualia.

Secet curua k l m rectas e p, f o in t & u. Quoniam ergo triangulorum mixtorum k z p, p n d, d n o, o y l pars sunt triangula mixta κ t p, p q d, d q o, o u l singula singulorum: cùm triangula k z p, p n d, d n o, o y l sint simul minora spatio x, erunt multò minora eodem spatio x triangula k t p, p q d, d q o, o u l simul sumpta. Cùm ergo si ex figura contenta parallelis

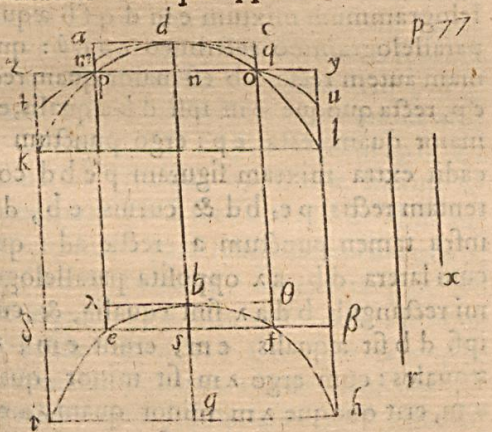
i k, h l, & curuis k d l, i b h auferatur spatium x reſtet ſpatium r, & cùm ex eadem figura ablata ſint triangula *k* t p, p q d, d q o, o u l quæ ſimul ſunt minora ſpatio x: ergo reſiduum ſpatium r eſt minus quàm reſidua parallelogrãma mixta i *k* t e, e p q b, b q o f, f u l h ſimul ſumpta. Ergo intra figuram rectis i *k*, h l, & curuis i b h, *k* d l contentam deſcripta ſunt parallelogramma mixta i k t e, e p q b, b q o f, f u l h, quæ ſimul ſunt maiora dato ſpatio r quod erat primo loco oſtendendum.

Secundò ſpatium quod poteſt recta r ſit maius ſpatio contento inter ſectiones conicas κ d l, i b h, atque inter rectas i *k*, h l. Dico poſſe curuam i b h in tot portiones diuidi quæ ſint baſes parallelogrammorum mixtorum inuicem ſibi ad vtraſque diametri partes pari numero parique interuallo reſpondentium, ita vt ipſa ſimul ſumpta ſint minora ſpatio quod poteſt recta r: ipſorum autem latus curuum baſi oppoſitum interijciatur inter ſectionem *k* d l, & ordinatim ab eo puncto ſectionis κ d l applicatam & productam, in quo eiuſmodi parallelogrammi mixti angulus conſtituitur à curua, & à recta quæ ſit vel diameter vel diametro parallela.

Quadratum quod poteſt recta x ſit exceſſus quo figura curuis k d l, i b h, & rectis i k, h l contenta ſuperatur à quadrato r: arcus verò k d l intelligatur ſectus in tot

segmenta k p, p d, do, ol per ordinatim vtrinque applicatas k l, p o, & per a d c actam per verticem d, ideóque & tangentem in d; vt ductis per p & o ad diametrum d b parallelis a p, c o triangula mixta k z p, p a d, d c o, o y l exteriùs ad curuam k d l constituta sint simul minora quadrato x: id enim fieri potest per præcedentem propositionem.

Producatur p a donec occurrat sectioni i b h; punctum autem occursûs sit e, per quod agatur ordinatim applicata e s, & producatur donec sectioni occurrat, sit verò occursûs punctum f. Iunctâ rectâ o f, quoniam p o, e f sunt parallelæ, vt pote ordinatim vtrinque applicatæ ad sectiones



k d l, i b h, & quoniam e p n s est parallelogrammum; ostendetur, vt in priori casu, rectas p e, o f esse æquales & parallelas, ac proinde figura a e f c erit parallelogramma. Eadem methodo idipsum ostendetur assumpta quacunque ordinatim applicatâ, & per eius extrema ductis ad rectam m p parallelis donec occurrant alteri sectioni. Per verticem b agatur θ b parallela rectæ e f, ideoque tangens, secet autem in λ, θ parallelas e a, c θ.

11. huius.

Quoniam parallelogrammum rectilineũ est λ a c θ, si per singula puncta arcûs e b f intelligatur duci parallela rectæ d b, ipsique æqualis; & per extrema illarum parallelarum notari linea m d q: erit parallelogrammum mixtum e m d q f b æquale parallelogrammo rectilineo λ a c θ: quoniam autem recta d b est maior quam recta e p, recta quoque e m ipsi d b æqualis, erit maior quàm recta e p: ergo punctum m cadit extra mixtam figuram p e b d contentam rectis p e, b d & curuis e b, d p, infra tamen punctum a rectæ ad: quia cùm latera d b, a λ opposita parallelogrãmi rectanguli b d a λ sint æqualia, & cùm ipsi d b sit æqualis e m, erunt e m, λ a æquales: cum ergo λ m sit minor quam e m, erit quoque λ m minor quam λ a: ergo punctum m cadit infra punctum a. Simili pacto ostendetur quodlibet aliud punctum curuæ m d esse inter curuam p d

& rectam d a: quod verò dictum est de curuâ m d ostendetur pariter de curuâ d q, ipsam nimirum iacêre inter curuam d o & rectam d c. Simili denique pacto si productâ e f donec parallelis z t, y u, occurrat in punctis ♌, ♍, ex parallelis per singula puncta arcuum i e, f h auferantur æquales ipsi e p lateri parallelogrammi rectilinei e p z ♌, vel ipsi f o lateri parallelogrammi rectilinei f o y ♍, & extrema illarum parallelarum describant lineas curuas p t, o u, erit per vndecimam huius parallelogrammum mixtum t p e i contentum rectis p e, t i & curuis p t, e ı æquale rectilineo e p z ♌; & mixtum o u h f rectilineo o y ♍ f: curuáque t p cadet inter rectam z p & curuam k p; Item curua o u inter rectam q y & curuam o l, prout modò ostensum fuit de curuis d m, d q. Atque eadem est ratio de quotcunque aliis parallelogrammis si plures quam p o, k l ordinatim vtrinque applicatæ fuerint ad diametrum d b à sectione ϰ d l. Esse autem interualla parallelogrammorũ d m e b, d q f b æqualia patet, cùm rectæ p n, n o sint æquales, vt pote ordinatim vtrinque applicatæ semisses; Cúmque tam p n, n o inuicem, quam z n, n y inuicem sint æquales, erunt residua z p, q y æqualia.

Quoniam ergo triangulorum mixtorum k z p, p a d, d c o, o y l pars sunt mixta triangula ϰ t p, m i d, d q o, o u l singu-

la ſingulorum: cùm triangula k z p, p a d, d c o, o y l ſint ſimul minora ſpatio x, erunt multò minora eodem ſpatio x triangula mixta k t p, p m d, d q o, o u l ſimul ſumpta: Cùm ergo ſi ad figuram contentam parallelis i k, h l, & curuis k d l, i b h addatur ſpatium x confletur ſpatiũ r; & cùm ad eandem figuram addita ſint triangula k t p, p m d, d q o, o u l quæ ſimul ſunt minora ſpatio x, conflatum erit minus ſpatio r: illud autem conflatum conſtat parallelogrammis mixtis i t p e, e m d b, b d q f, f q u β: Ergo curua i b h in tot portiones e b, b f, e i, f h diuiſa eſt, quæ ſint baſes parallelogrãmorum mixtorum i t p e, e m d b, b d q f, f q u β ſibi ad vtraſque diametri d b partes, pari numero parique interuallo reſpondentium, ita vt ipſa ſimul ſumpta ſint minora ſpatio quod poteſt recta r: ipſorum autem latus curuum baſi oppoſitum interijciatur inter ſectionem k d l, ordinatim ab eo puncto ſectionis k d l applicatam, in quo eiuſmodi parallelogrammi mixti angulus conſtituitur à curua, & à recta quæ eſt vel diameter, vt in angulis m d b, q d b, vel diametro parallela, vt in angulis t p e, v o f; quod poſſe fieri erat oſtendendum. Quòd ſi b d eſſet omnium minima, reliquæ autem eò maiores quo longius ab ipſa b d diſtarent,

tent, demonstratio erit eadem vt attentiùs considerati apertum fiet.

COROLLARIVM.

Ex his apertum est eandem esse vim demonstrationis quamuis linea k d l non sit sectio conica, sed linea qualis in corollario propositionis præcedentis illi æquiualere dicitur, quantum ad id quod possit diuidi in tot portiones &c.

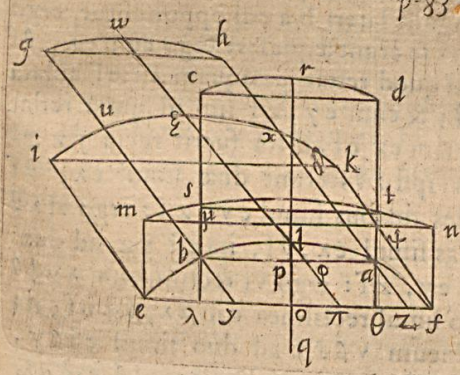
PROPOSITIO XV.

Sit sectio conica e l f cuius diameter l q, ordinatim ad illam applicata sit e o, quæ producta occurrat sectioni in f: ad diametrum sint quotcunque ordinatim vtrinque applicatæ b a, e f; & per e, b, a, f eductæ sint parallelæ, ita vt quæ ex b & a educuntur sint æquales & inter se, & ipsi l r. Completa intelligantur parallelogrãma mixta b c r l, l r d a: sint item b s, t a, e m, n f æquales inuicem, intelliganturque com-

pleta parallelogramma mixta e m s b, a t n f. Rurſus ſuper baſibus e b, b l, l a, a f conſtructa ſint parallelogramma mixta e i u b, b g ω l, l ω h a, x a f k, ita vt rectæ i e, b u, l ξ, a x, f k ſint parallelæ inuicem, nullaque earum ſecet curuam e l f quam ſubtendit maxima ordinatim eductarum, niſi in vno puncto; aut ſi in alio, illud ſit infra maximam eductarum: ſint autem rectæ lineæ i e, g b, h a, f κ æquales rectis lineis e m, b c, d a, n f. Dico vt eſt perpendicularis ex e in rectam b a demiſſa, ad perpendicularem ex u demiſſam in eandem b a; ita eſſe duo ſimul parallelogramma mixta b c r l, l r d a ad duo ſimul parallelogramma mixta b g ω l, l ω h a: item duo ſimul parallelogramma mixta e m ſ b, a t n f ad duo mixta e i u b, a x k f ſimul ſum-

pta; & sic consequenter si plures ordinatim applicatæ fuerint; ita vt duo simul quæ numero pari à diametro p q ad vtrasque partes numerantur, comparentur ad duo illis respondentia in aliâ laterum inclinatione.

Intelligantur compleri parallegramma mixta e i k f, m s t n, & iungantur rectæ g h, u x, i k, c d, s t, m n, & producantur c b, r l, t a, g b, ω l, h a donec occurrant rectæ e f in punctis λ, o, θ, γ, π z.



Quoniam rectilineum parallelogrammum b c d a (eſt enim parallelogrammum per primi Euclidis trigeſimam tertiam, eademque eſt ratio de alijs) eſt per vndecimam huius æquale mixto b c d a; & rectilineum b g h a mixto b g h a, & quoniam per tertiam huius vt perpendicularis ex c in rectam b a demiſſa ad perpendicularem demiſſam ex g in eandem b a; ita eſt quadrilaterum rectilineum b c d a ad rectilineum b g h a; ergo ita etiam erit parallelogrammum mixtum b c d a, hoc eſt duo mixta b c r l, l r d a ſimul ſumpta, ad parallelogrammum mixtum b g h a, hoc eſt ad duo mixta b g ω l, l ω h a ſimul ſumpta.

Rurſus quoniam rectilinea λ b a θ, y b a z ſunt parallelogramma, erunt λθ, yz æquales ſingulæ lateri b a cui opponuntur, ergo & inter ſe erunt æquales: ergo cùm eλ, θf ſint id quod reſtat poſtquam ex e f ablata eſt λθ; & cùm e y, z f ſint id quod reſtat poſtquam ex e f ablata fuerit recta y z æqualis ipſi λθ, erunt duæ ſimul eλ, θf æquales duabus ſimul e y, z f: ergo vt λθ ad duas ſimul eλ, θf, ita eſt y z ad duas ſimul e y, z f: ergo vt rectilineum λμ↓θ ad duo ſimul rectilinea e m μλ, θ↓nf; ita rectilineum yβδz ad duo ſimul e iβy, zδkf. Cùm ergo rectilineis λμ↓θ, e m μλ, θ↓nf, yβδz, e iβ y, zδkf æqualia ſint mixta b ſt a, e m ſb, a t n f, b u x a, e i u b, a x k f: vt mixtum parallelogrammū b ſta

34. primi Euc.

1. ſexti Euc.

11. huius.

ad duo mixta simul e m s b, a t n f, ita mixtum parallelogrammum b u x a ad duo mixta simul e i u b, a x k f: ergo alternando vt mixtum b s t a ad b u x a, ita sunt duo mixta e m s b, a t n f simul sumpta ad duo mixta e i u b, a x k f simul sumpta. Sed b s t a ad b u x a se habet vt perpendicularis ex s ad perpendicularem ex u in rectam b a demissa, siue vt perpendicularis ex c ad perpendicularem ex g, id verò probatur sicuti de mixtis b g t l, l t h a superiùs ostensum fuit: ergo vt perpendicularis ex c ad perpendicularem ex g in rectam b a demissa, ita duo mixta e m s b, a t n f simul sumpta, ad duo e i u b, a x k f simul pariter sumpta, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex his manifestum est demonstrationem esse eiusdem roboris si arcus e l, f l constituant angulum ad l, dummodo cætera non mutentur.

COROLLARIVM. II.

Manifestum quoque est eandem esse demonstrationis vim siue parallelogramma e i u b, b g ω l &c. constituantur ad sectionis conicæ e l f conuexa, siue ad concaua.

COROLLARIVM. III.

Manifeſtum denique eſt ex duobus parallelogrammis mixtis b g ω l, l ω h a, maius eſſe b g ω l, illud nimirum quod eſt ad partes rectæ ω l ad quas ipſa ω l cum rectâ b a angulum acutum intrinſecùs conſtituit. Quoniam enim recta b a diuiditur bifariam in p, erit b φ maior quàm φ a: Sed parallelogramma mixta g ω l b, l ω h a ſe habent vt rectæ b φ, φ a, cùm ſint æqualia parallelogrammis rectilineis φ g, φ h: ergo b g ω l eſt maius parallelogrammo mixto l ω h a. Simili ratione oſtendetur parallelogrammum mixtum e i u b eſſe maius parallelogrammo mixto a x k f; cùm recta e y ſit maior recta z f; ſunt enim e λ, θ f æquales; ergo e y maior quàm e λ, erit maior rectâ z f quæ pars eſt rectæ θ f.

PROPOSITIO XVI.

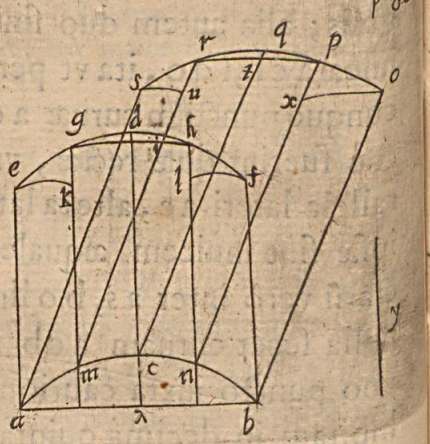
Sit ſectio conica a c b, cuius arcum ſubtendat recta a b bifariam ſecta in λ, & per λ acta ſit λ c diameter, cui parallela ſint latera a e, b f figuræ mixtæ cõprehenſæ

rectis a e, b f, & sectionibus conicis a c b, c d f, quarum diametri congruant rectæ c λ, & ordinatim ad istas applicatæ vel sibi congruant, vel sint parallelæ; parallelarum autem ad rectam d c portiones sectionibus conicis interceptæ eò sint maiores, quò minus distabunt ab earum maximâ c d. Sit præterea alia figura quadrilatera mixta a s o b cuius latera a s, o b sint recta & æqualia lateribus a e, b f singula singulis; alia autem duo sint curuæ lineæ a c b, s q o, ita vt per quodcunque punctum curuæ a c b ductæ fuerint duæ rectæ, vna parallela lateri a e, altera lateri a s, ipsæ sint inuicem æquales: ductarū verò inter a s, b o linearum nulla secet curuam a c b nisi in vno puncto iuxta cautionem adhibitam in decimâ quintâ huius;

quæ autem parallelæ erunt ipſi c d, conformes ſint cautioni traditæ ad decimam quartam huius. Dico figuram quadrilateram mixtam a e f b ſe habere ad quadrilateram mixtam a ſ o b, vt ſe habet perpendicularis ex e ad perpendicularem ex s demiſſa in rectam a b.

Vt ſe habet perpendicularis ex s ad perpendicularem ex e, ita ſit ſpatium figuræ mixtæ a ſ o b ad ſpatium quod poteſt recta y.

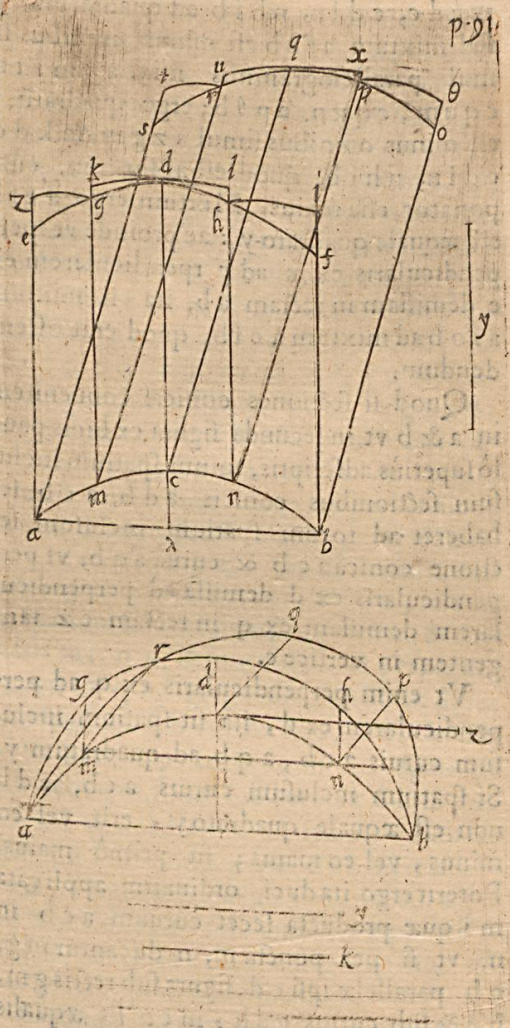
p 88



Si ſpatium figuræ mixtæ a e f b non eſt æquale quadrato rectæ y, ſit primo ſi fieri poteſt maius. Poterunt ergo per decimam quartam huius deſcribi tot parallelogrāma mixta intra figuram a e f b, vt ipſa ſimul ſint maiora ſpatio y. Sint illa a e k m, m g i c, c i h n, n l f b; per m,c,n agantur m r, c q, n p æquidiſtantes ipſi a s, intelliganturque compleri parallelogramma mixta a ſ u m, m r t c, n p t c, b o x n; ergo per præcedentem vt perpendicularis ex s in rectam a b demiſſa, ad perpendicularem ex e demiſſam in eandē a b, ita erunt duo ſimul parallelogramma mixta m r t c, n p t c ad duo ſimul m g i c, c i h n : & ita etiam erunt duo ſimul a ſ u m, n x o b ad duo ſimul a e g m, n h f b: ergo ſumptis ſimul antecedentibus ad conſequentia ſimul, vt perpendicularis ex s ad perpendicularem ex e, ita parallelogramma mixta a ſ u m, m r t c, c t p n, n x o b ſimul ſumpta ad parallelogramma mixtà a e k m, m g i c, c i h n, n l f b ſimul ſumpta: ſed vt perpendicularis ex s ad perpendicularem ex e, ita eſt ſpatium mixtum a ſ o b ad quatum y: ergo vt mixta a ſ u m, m r t c, c t p n, n x o b ſimul ad mixta ſimul a e k m, m g i c, c i h n, n l f b; ita eſt mixtum a ſ o b ad quadratum y: ergo alternando vt mixta ſimul a ſ u m, m r t c, c t p n,

n x o b ad mixtum a ſ o b, ita mixta ſimul a e k m, m g i c, c i h n, n l f b ad quadratum y: ſed mixta ſimul a ſ u m, m r t c, c t p n, n x o b ſunt ſimul minora mixto a ſ o b: ergo mixta ſimul a e K m, m g i c, c i h n, n l f b erunt minora quadrato y, quod eſt abſurdum, cùm ponantur eſſe eo maiora.

Secundò ſpatium figuræ mixtæ a e f b, ſit ſi fieri poteſt minus quadrato rectæ y poterunt ergo per decimam quartam huius deſcribi tot parallelogramma mixta quorum latera baſi in curuâ a c b exiſtenti oppoſita ſint extra figuram a e f b, vt ipſa ſimul ſint minora ſpatio y: ſint illa a z g m, m κ d c, c d l n, n h i b. Per m, c, n agantur m r, c q, n p æquidiſtantes ipſi a s, intelliganturque compleri parallelogramma mixta m r t a, c q u m, c q x n, n p θ b: ergo ſicut in præcedenti caſu oſtenſum fuit, vt perpendicularis ex ſ demiſſa ad perpendicularem ex e, ita erunt omnia ſimul parallelogrāma mixta m r t a, c q u m, c q x n, n p θ b ad omnia ſimul mixta a z g m, m k d c, c d l n, n h i b. Sed ita etiam eſt mixtum a ſ o b ad quadratum y, ergo vt omnia mixta ſimul m r t a, c q u m, c q x n, n p θ b ad omnia ſimul a z g m, m k d c, c d l n, n h i b, ita erit mixtum a s o b ad quadratum y: ergo alternando vt omnia ſimul m r t a c q u m, c q x n, n p θ b ad mixtum a ſ o b, ita omnia ſimul a z g m,


q
x
u
t
r
θ
p
o
s
k
d
l
i
z
g
h
e
f
y
m
c
n
a
λ
b
q
r
d
h
p
g
z
m
n
a
b
y
k

m k d c, c d l n, n h i b ad quadratum y: ſed mixtum a ſ o b eſt minus omnibus ſimul parallelogrammis mixtis m r t a, c q u m, c q x n. a p θ b; ergo quadratũ y eſt minus omnibus ſimul a z g m, m k d c, c d l n, n h i b, quod eſt abſurdum, cùm ponatur eſſe maius. Mixtum ergo a e f b eſt æquale quadrato y: ac proinde vt perpendicularis ex s ad perpendicularem ex e demiſſam in rectam a b, ita eſt mixtum a s o b ad mixtum a e f b, quod erat oſtendendum.

Quod ſi ſectiones conicæ conuenirent in a & b vt in ſecunda figura ex binis paulò ſuperiùs adſcriptis, totum ſpatium incluſum ſectionibus conicis a d b, a c b ſe haberet ad totum ſpatium incluſum ſectione conicâ a c b & curuâ a q b, vt perpendicularis ex d demiſſa ad perpendicularem demiſſam ex q in rectam c z tangentem in vertice c.

Vt enim perpendicularis ex q ad perpendicularem ex d, ita ſit ſpatium incluſum curuis a c b, a q b ad quadratum y. Si ſpatium incluſum curuis a c b, a d b non eſt æquale quadrato y, erit vel eo minus, vel eo maius; ſit primò maius. Poterit ergo ita duci ordinatim applicata m i quæ producta ſecet curuam a c b in n, vt ſi per puncta m, n ducantur m g, n h parallelæ ipſi c d, figura ſub rectis g m, h n & ſub curuis g d h, m c n ſit æqualis

ſpatio rectæ y. Per m & n agantur m r, n p parallelæ rectæ c q. Vt perpendicularis ex g in m n ad perpendicularem ex r in m n, ita eſt ex iam demonſtratis ſpatium ſub rectis g m, h n, & ſub curuis g d h, m c n ad ſpatium ſub rectis m r, n p, & ſub curuis r q p, m c n: Sed vt perpendiculares ex g & r in rectam m n demiſſæ ſe habent inuicem, ita ſunt inuicem perpendiculares ex d & q in tangentem c z demiſſæ (ponimus enim vt g m, m r ita eſſe d c, c q: item rectas m r, c q eſſe inuicem parallelas; item rectas m g, c d: tangentem autem c z eſſe parallelam ordinatim applicatæ m i conſtat ex quinta ſecundi conicorum) ergo vt perpendicularis ex d ad perpendicularem ex q demiſſam in tangentem c z, ita eſt ſpatium ſub rectis g m, h n & ſub curuis g d h, m c n, ad ſpatium ſub curuis r p q, m c n, & ſub rectis m r, n p; & inuertendo vt perpendicularis ex q ad perpendicularem ex d, ita erit ſpatium ſub curuis r q p, m c n & ſub rectis m r, n p contentum ad ſpatium ſub rectis g m, h n & ſub curuis g d h, m c n, hoc eſt ad quadratum y: ſed ita etiam eſt ſpatium ſub curuis a q b, a c b ad quadratum y: ergo ſpatium ſub curuis a c b, a q b eſt æquale ſpatio ſub curuis r q p, m c n & ſub rectis m r, n p contento: hoc eſt ſui parti; quod eſt abſurdum.

Secundò ſpatium incluſum curuis a c b,

a d b sit minus spatio y : atque vt perpendicularis ex d ad perpendicularem ex q, ita fiat spatium sub curuis a c b, a d b ad spatium quod potest recta *k*. Quoniam vt spatium sub curuis a c b, a d b ad spatium *k*, ita est spatium y ad contentum sub curuis a c b, a q b : ergo alternando vt spatium sub curuis a c b, a d b ad spatium y : ita spatium *k*, ad contentum sub curuis a c b, a q b : sed spatium sub curuis a c b, a d b est minus spatio y : erit ergo spatium *k* minus contento sub curuis a c b, a q b. Poterit ergo ita duci aliqua recta m n ordinatim vtrinque ad diametrum d λ à sectione a c b applicata, vt si per puncta m, n ducantur m r, n p parallelæ rectæ c q, figura sub rectis m r, n p & sub curuis m c n r q p sit æqualis spatio *k*. Hoc ita facto, per m & n agãtur m g, n h parallelæ ad rectã d c. Ergo ex iam demonstratis vt perpendicularis ex d ad perpendicularem demissam ex q in tangentem c z, ita est spatium sub rectis g m, h n & sub curuis g d h, m c n ad spatium sub curuis r q p, m c n & sub rectis m r, n p : hoc est ad quadratum *k* : sed ita etiam est spatiũ sub curuis a d b, a c b ad quadratum *k* : ergo spatium sub curuis g d h, m c n & sub rectis g m, h n est æquale spatio sub curuis a d b, a c b, hoc est pars toti, quod est absurdum. Ergo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Quod si recta c d esset omnium minima & reliquæ eò maiores euaderent, quo longiùs ab ipsa c d distarent, idem demonstratur ex ijsdem principiis vt attendenti manifestum est, dummodo cætera non mutentur.

COROLLARIVM II.

Ex his manifestum est eandem esse demonstrationis vim, quamuis arcus e d f non sit sectio conica, dummodo iuxta notata ad decimam tertiam huius possit diuidi in tot portiones &c.

COROLLARIVM III.

Manifestum quoque est eundem esse demonstrationis tenorem siue figura mixta a f o b constituatur ad sectionis conicæ a c b conuexa siue ad concaua: vnde conficitur æquales esse eas figuras quæ super eadem portione sectionis conicæ constituuntur, habentes latera modo dicto æqualia.

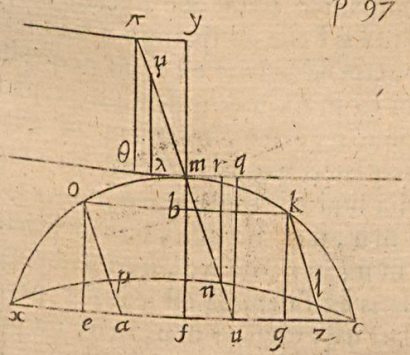
PROPOSITIO XVII.

Sit sectio conica x m c, cuius diameter m f, quam in vertice m secet recta m u; ad diametrum ordinatim applicata sit recta x f ex puncto x, quæ producta occurrat sectioni in c, ita vt quæuis parallela rectæ m u per quoduis punctum arcûs x m c inter x & c sumptum educta secet rectam x c in aliquo puncto inter x & c posito. Sumpti sint à vertice m arcus vtrinque æquales o m, m k, & per quæliber puncta arcûs o m k ductæ intelligantur rectæ ad rectam m u parallelæ, & ex illis abscindi o p, m n, k l &c. æquales rectis o e, m f, k g &c. parallelis ad diametrum m f, & rectam a c secantibus in e, f, g; extrema autem abscissarum describant

lineam

lineam continuam p n l. Dico primò vt recta m u ad rectam m f, ita esse spatium e o m k g f ad spatium p o m k l n.

Cùm enim triangula e o a, f m u, h κ z &c. sint similia; vt e o, o a ita erunt f m, m u; & g κ, k z &c. Quoniam verò rectæ e o, o p sunt æquales; item m f, f n; item k g, k l, & sic de alijs; vt recta m u ad m n, ita erit a o ad o p, & g k ad k l, & sic de alijs: ergo per diuisionem rationis vt m u, u n, ita erunt o a, a p: & k z, z l, & ita de alijs: ergo per sextam huius spatium a o m k z u se habet ad spatium a p n l z.



p 97

vt recta m u ad rectam n u: ergo per diuiſionem rationis vt recta m u ad m d ſiue ad m f, ita eſt ſpatium a o m k z u ad ſpatium p o m κ l n: Sed ſpatium e o m k g f eſt æquale ſpatio a o m κ z u (parallelogramma enim o e g k, o a z k cum habeant eandem baſim, & in eiſdem parallelis conſtituãtur ſunt æqualia; ergo addito cõmuni o m k b, cõponũtur æqualia a o m κ z u, e o m k g f) ergo vt recta m u ad rectã m f, ita eſt ſpatiũ e o m k g f ad ſpatiũ p o m k l n, quod erat demonſtrandum primo loco. Quòd ſi arcus m x, x c vtrinque ſumpti forent: demonſtrationis tenor idem foret qui paulò ante in ſimili caſu.

36. primi Euc.

Dico ſecundò ſi ex f & n demittantur perpendiculares ad rectam m q per m æquidiſtanter rectæ x c ductam, ſpatium e o m k g f eſſe ad ſpatium p o m k l n, vt eſt perpendicularis ex f ad perpendicularem ex n. Ex n & u demiſſis perpendicularibus n r, u q, quoniam in triangulo u m q lateri u q parallela eſt n r; ergo ſimilia ſunt triangula m u q, m n r: vt ergo m u, u q, ita m n, n r: & alternando vt m u, m n, ita u q, n r: ſed perpendicularis ex f demiſſa eſt æqualis perpendiculari u q: ergo vt m u, m n, ita perpendicularis ex f ad perpendicularem ex n: Sed vt recta m u ad m n, ita oſtenſum eſt eſſe e o m κ g f ad p o m κ l n: ergo vt perpendicularis ex f ad perpendicularem ex n,

4 ſexti Euc.

34. primi Euc.

ita est e o m k g f ad p o m k l n, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

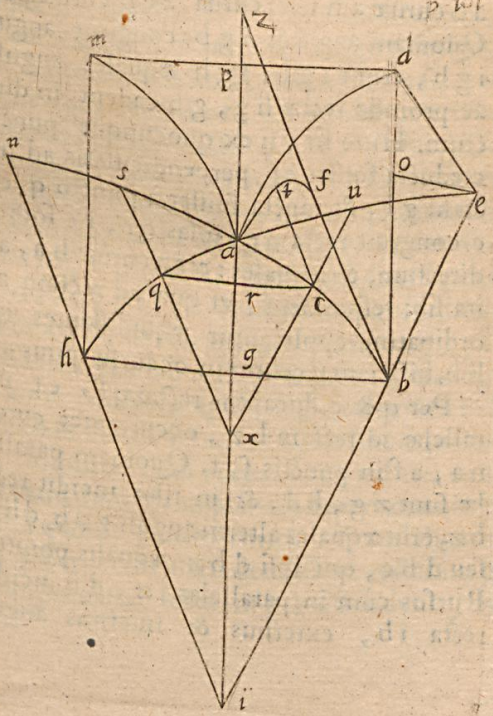
Ex his manifestum est si rectæ f m, u m producantur, & abscissa ex f m quacunque recta m y, ipsi m y abscindatur μ m æqualis, & ex μ atque y demittantur perpendiculares ad tangentem m q, perpendicularem ex y se habere ad perpendicularem ex μ, vt perpendicularis ex f se habet ad perpendicularem ex n. Agatur enim per y recta y π parallela rectæ f u, occurrens rectæ m μ in π: ergo cùm triangula π y m, u f m sint similia, vt m π ad y m seu ad m μ; ita erit u m ad f m seu ad n m; Cùmque triangula π m θ, u m q sint similia, eorumque latera homologa π m, m u secta sint similiter in μ & n; perque μ, n, π, u actæ sint parallelæ μ λ, n r, π θ, u q, erunt vt m u; m n, hoc est, vt π m, μ m, ita q u, n r, & π θ, μ λ: ergo vt perpendiculares q u, n r, ita perpendiculares π θ, μ λ: perpendiculari autem ex π æqualis est perpendicularis ex y: ergo vt perpendicularis ex f ad perpendicularem ex n, ita perpendicularis ex y ad perpendicularem ex μ. 4. sexti Euc. in coroll.

PROPOSITIO XVIII.

Super eadem baſi curuâ a c b ſint tres figuræ conſtitutæ a f b, a d b, a e b, ita vt latera f b, b e figurarum a f b, a e b ſint rectæ æquales, & cùm curuæ portione a c b non conueniant niſi in vno puncto, latus autem d b figuræ a d b ſit recta bifariam ſecans angulum f b e. Præterea tres figuræ a f b, a d b, a e b ita inuicem ſint diſpoſitæ, vt ex quocunque puncto curuæ a c b educantur tres lineæ tribus f b, d b, e b parallelæ non conueniant cum eadem curuæ portione a c b in alio puncto, & earum portiones tribus figuris interceptæ, ſint proportionales trtbus lineis f b, b d, b e. Demõſtrandum eſt, dẽmiſſâ ex e ad b d perpendiculari e o, duas ſimul fi-

guras afb, aeb se habere ad duplum figuræ adb, vt se habet recta db ad bo.

Per a & b extrema portionis acb ducantur rectæ ag, gb æquidistantes rectis eo, ob, earumque occursus sit in puncto g; conuenient enim, cùm eo, ob conueniant. Similiter quoniam eb & fb conueniunt cum recta bo, conuenient etiam



cum rectâ a g ipſi b o æquidiſtante; concurſus ſit in i & z. Quoniam recta e o eſt perpendicularis ex conſtructione ad rectam b d, erit b g perpendicularis ad rectam a g. Intelligatur planum z i e in quo ſunt tres figuræ a f b, a d b, a e b, circa rectam i z immotam circumuolui donec plano z g h congruat ad rectæ a i partes oppoſitas, ita vt punctum b congruat puncto h; punctum e puncto n; punctum d puncto m; recta i e rectæ i n; recta b d rectæ h n; recta g b rectæ g h; & curua a d curuæ a m; curua a e curuæ a n; & curua a c b curuæ a h. Quoniam angulus i g b congruit angulo i g h, erunt i g b, i g h æquales anguli, ac proinde rectæ h g, g b cadent in directum. Hinc fit, ſi ex quocunque puncto c educta fuiſſet e r perpendicularis ad rectam g k, & iuncta fuiſſet à puncto q cui c congruit recta q r, ipſas q r, r c fore in directum, & æquales: ergo curuæ h a, a b ita ſibi reſpondent, vt quæ ad rectam a g ordinatim applicantur æquidiſtantes ipſi h b, bifariam ſecentur in occurſu ipſius a g.

Per q & c ducantur rectæ q ſ, c t parallelæ ad rectam b z, occurrentes curuis n a, a f in punctis ſ, t. Quoniam parallelæ ſunt z g, b d, & in illas incidit recta b z, erũt æquales alterni anguli g z b, d b z, ſeu d b e, qui ipſi d b z æqualis ponitur. Rurſus cùm in parallelas i z, d b incidat recta i b, externus & internus anguli

dbe, zib erunt æquales: ergo cùm gzb, kib sint æquales vni tertio dbe; erunt gzb, zib æquales: sed hig, gib sunt etiam æquales: ergo anguli izb, hiz sunt æquales: ergo cùm sint alterni, erunt rectæ hn, bz parallelæ; ergo hn, qs, ct, bf sunt parallelæ. 34. primi Euc.

Rursus per c agatur recta cu parallela rectæ be, occurratque curuæ aein u, & rectæ az in x, iungaturque recta qx; erit qx parallela ipsi bz, sicuti ostensum fuit de rectâ ih; ergo rectæ sq, qx iacent in directum; ergo dum in impositione plani super plano recta ie congruit rectæ in, recta xu cõgruet rectæ xs: ergo punctum u congruet puncto s, rectæque qs, cu sunt æquales; sed ct, cu ponuntur etiam æquales; ergo rectæ qs, ct (quas esse parallelas modo ostendimus) sunt etiam æquales, & eductæ per extrema sunt ordinatim applicatæ ad rectam qc. Igitur super basi hqacb ita constructæ sunt figuræ hnsaq, bftac vt quæcunque ordinatim applicata ducatur ad rectam ag, parallela rectæ hb, si per eius extrema ducantur parallelæ ipsi hn, interceptæ basi hab & curuis nsa, acf, eæ sint æquales. 33. primi Euc.

Similiter cùm curuæ am, ad sibi congruant dum plano planum superimponitur, si à quouis puncto curuæ ad intelligatur dp perpendicularis demissa ad rectam zg, iungaturque recta mp; ostendetur, vt

paulò ante, rectas m p, p d, iacére in directum, & eſſe æquales; cumque d m h b ſit parallelogrammum, erunt m h, d b æquales terminatæ ad curuas a m, a d, & eductæ per extrema m, d, erunt ordinatim applicatæ ad rectam a g.

Quoniam igitur ſuper baſi h q a c b conſtructæ ſunt duæ figuræ compoſitæ vna n h q a ſ, b ſ t a c, altera h m a q, b d a c, & ita conſtructæ ſunt, vt ab externis ordinatim applicatæ eductæ lineæ æquidiſtantes rectæ n h ſint inuicem æquales in vna, & æquidiſtantes in altera rectæ h m ſint inuicem æquales, per præcedentem propoſitionem vnius ſpatium ſe habebit ad ſpatium alterius vt recta d b ad b o, (eſt enim d b perpendicularis ex d demiſſa ad ordinatim applicatam per b eductam, & b o eſt perpendicularis ex e demiſſa) ſed figura n ſ a q h eſt æqualis figuræ e u a c b cui ſuperimpoſita congruit, ergo duæ ſimul figuræ e u a c b, b ſ t a c, ſimul ſumptæ ſe habent ad duas h m a q, b d a c (hoc eſt ad duplam figuræ b d a c; congruunt enim ſibi ſuperimpoſitæ figuræ h m a q, b d a c) vt recta d b ad b o rectam, quod erat demonſtrandum.

Propositio XIX.

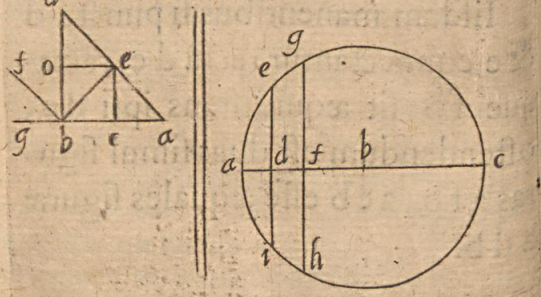
Iisdem manentibus si puncta d & e connectantur rectâ d e, rectaque f b sit æquidistans ipsi d e, ostendendum est duas simul figuras a f b, a e b esse æquales figuræ a d b.

Quoniam enim duæ simul figuræ a f b, a e b se habent ad duplum figuræ a d b vt recta b o ad b d ex præcedenti, cum recta b d sit dupla rectę b o, vt mox ostendemus, erit quoque figura a d b bis sumpta, dupla duarum simul a f b, a e b: ergo figura a d b semel sumpta erit æqualis duabus simul, quod erat demonstrandum.

Restat vt ostendamus quoties tres rectæ f b, b d, b e ita concurrunt in vnum punctum b, vt anguli f b d, d b e, sint æquales; si recta per d & e ducta sit parallela rectæ f b, & per e ducatur e o perpendicularis ad d b ipsam d b esse duplam rectæ b o. Per b agatur b a parallela rectæ e o, & rectæ d e productæ occurrat in a; per e verò agatur e c parallela rectæ b d occurratque rectæ b a in c. Quoniam rectæ d a, f b sunt parallelæ,

p-106

Figura prop - Sequentis



internus angulus d a b erit æqualis externo f b g: ſed f b g, e b a ſunt æquales (nam ſi ex æqualibus d b g, d b a vt pote rectis, auferantur æquales d b f, d b e, reſidui f b g, e b a ſunt æquales) ergo anguli e b a, e a b ſunt æquales: ergo triangulium b e a eſt iſoſceles, eiuſque latera b e, e a ſunt æqualia: ergo cùm ex e demiſſa ſit perpendicularis e c ad baſim b a iſoſcelis b e a, erunt ſegmenta b c, c a æqualia: ſed vt b c, c a in triangulo d b a, ita ſunt d e, e a, eò quod lateri d b parallela ſit e c: ergo ſegmenta d e, e a ſunt æqualia: ſed in eodem triangulo d b a, lateri ba parallela eſt e o: ergo vt d e, e a, ita d o, ob: ergo ſegmenta d o, o b ſunt æqualia: ergo recta d b eſt dupla rectæ o b, quod erat oſtendendum.

Propositio XX.

Rectangulorum sub segmentis inæqualibus eiusdem rectæ, illud est maius, cuius minus latus magis accedit ad semissem rectæ.

Sint rectangula a d c, a f b sub eiusdem rectæ a c bifariam in b sectæ segmentis inæqualibus comprehensa. Dico rectangulum a d c esse minus rectangulo a f c.

Ex centro b per a & c describatur circulus, atque ex punctis d & f excitentur ad rectam a c perpendiculares e d i, g f h; ergo cùm ex centro b recta b a extensa secet ad angulos rectos rectas e i, g h, bifariam illas secabit in d & f; & cùm distantia b f à centro b sit minor distantiâ b d, erit g h maior quàm e i, ac proinde & semissis g f maior quàm semissis e d. 3. Tertij Euc. 5. eiusd.

Rursus quoniam per corollarium decimæ tertiæ sexti Euclidis rectangula a d c, a f c sunt æqualia quadratis rectarum d e, f g; cùm quadratum d e ostensum sit esse minus quadrato f g, erit rectangulum a d c minus rectangulo a f c. Maximum autem esse rectangulum a b c ex iisdem constat: nam in circulo maxima linea est diameter ex eadem decimâ

quintâ tertij Euclidis ; idipſum etiam conſtat ex vigeſimâ ſeptimâ ſexti eiuſdem Euclidis.

ALITER.

Quoniam recta a c diuiſa eſt in b in æqualia, & in d in non æqualia, rectangulum a d c vnà cum quadrato d b erit æquale quadrato a b; ſimilique ratione oſtendetur rectangulum a f c vnà cum quadrato f b eſſe æquale quadrato a b: ergo rectangulum a d c vnà cum quadrato d b eſt æquale rectangulo a f c vnà cum quadrato f b: cùm ergo quadratum f b ſit minus quadrato d b, erit rectangulum a f c maius rectangulo a d c; nam ex æqualibus ſi inæqualia demantur, reſiduum illud eſt maius quod fit ex ſubductione minoris.

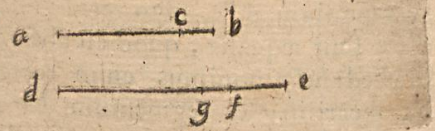
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt minoris rectanguli a d c minus latus a d, eſſe minus quocunque latere maioris rectanguli: Oſtenſum enim eſt eſſe minus minore, ergo & multò erit minus maiore. Quòd ſi rectangulum maius ſit a b c conſtans lateribus æqualibus, adhuc latus a d minus, erit minus latere a b: hoc enim ipſo quod a d eſt minus quàm d c, eſt etiam minus quàm a b ſemiſſis rectæ a c.

PROPOSITIO XXI.

Si sint duæ rectæ sectæ proportionaliter ; vt recta ad rectam, ita erit segmentum vnius ad segmentum homologum alterius : rectangula verò sub segmentis earum se habebunt vt quadrata ipsarum. Et si rectangula sub segmentis se habeant vt quadrata ipsarũ, sectæ sunt proportionaliter.

Sint rectæ a b, d e sectæ proportionaliter in c & f, ita vt quemadmodum a c ad c b, ita sit d f ad d e. Dico vt a b ad d e, ita esse a c ad d f; & c b ad f e; item vt quadratum a b ad quadratum d e, ita esse rectángulum a c b ad rectangulum d f e. Et si vt rectangulum a c b ad



rectangulum d f e, ita ſit quadratum a b ad quadratū d e, rectas a b, d e ſectas eſſe proportionaliter in c & f.

Quoniam enim vt a c ad c b ita ponitur eſſe d f ad f e; ergo componendo vt a b ad c b, ita erit d e ad f e; & per diuiſionem rationis vt a b ad a c, ita erit d e ad d f.

Rurſus quoniam rectangula a c b, d f e ſunt ſimilia, habent eam inter ſe rationem quam quadratum lateris c b, ad quadratum lateris homologi f e: ſed quadratum c b ſe habet ad quadratum f e vt quadratum a b ad quadratum d e, prout modo oſtendebatur, ergo vt quadratum a b ad quadratum d e, ita eſt rectangulum a c b ad d f e.

20. Sexti. Iam vt quadratum a b ad quadratum d e, ita ſit rectangulū a c b ad rectangulum d f e. Dico vt recta a c ad c b, ita eſſe rectam d f ad f e. Si enim fieri poteſt, vt a c ad c b, ita ſit d g ad g e: ergo ex demonſtratis rectangulum a b c ſe habet ad rectangulum a g e, vt quadratum a b ad quadratum d e: ſed ita etiam ſe habet ad rectangulum d f e, ergo rectangula d g e, d f e ſunt æqualia, quod eſt abſurdum ex præcedenti; ponimus enim rectam d e ita ſecari in g vt ſegmentum d g non ſit æquale ſegmento f e; ſi enim ſit illi æquale, recta d e ſecta eſt proportionaliter tam in f quàm in g, vt manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XXII.

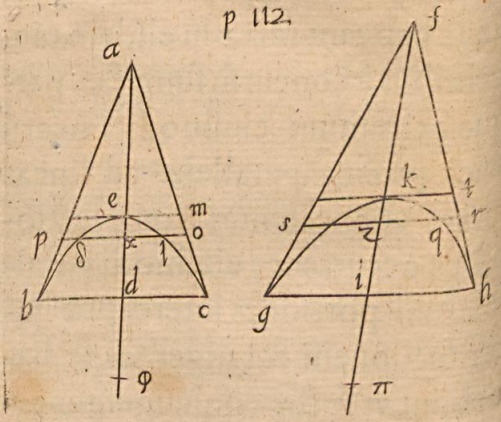
Si duæ sectiones conicæ tangentibus conuenientibus comprehendantur, & diametrorum per puncta concursûs ductarum portiones inter concursum, sectionem, & rectam tactus connectentem interceptæ sint proportionales; & si vt tangens vnius sectionis ad tangentem alterius, ita se habeant rectæ in eisdem tangentibus à concursu sumptæ; perque extremum eiusmodi linearũ duci possint parallelæ ad lineas tactus connectentes, quæ sectionibus occurrant; eiusmodi parallelarum portiones interceptæ inter sectionem & tangentes se habebunt vt rectæ coniungentes tactus; istiusmodi autem segmenta appellentur similia quantùm ad

diametri diuiſionem; & ſi æquales fuerint diametri, dicantur æqualia, & ſimilia quantum ad diametri diuiſionem.

Sint duæ ſectiones conicæ b e c, g k h comprehenſæ tangentibus b a c, g f h concurrentibus in a & f; diametrique per a & f ductæ ſint a e d, f k i, quæ lineas b c, g h tactus connectentes bifariam ſecabunt in d & i, ac proinde rectæ b c, g h erunt vtrinque applicatæ ordinatim ad diametros a d, f i: ſecent autem ſectiones in e & k, atque vt a e ad e d, ita ſit f k ad k i.

30. Secundi Conic.

p 112.



Si

Si in tangentibus a c, f h productis designentur lineæ a o, f r existentes in ratione tangentium a c, f h; & per o & r ducantur, rectæ o p, r s parallelæ rectis b c, g h, occurrentes primùm sectionibus in l & q, rectisque a d, f i in x & z; rectisque a b, f g in p & s. Dico vt b c ad g h; ita esse o l ad r q, & l p ad s q.

Per e & *k* ducantur rectæ e m, *k* t parallelæ rectis b c, g h quæ tangent sectiones in e & *k*. Quoniam rectæ e m, m c tangunt sectionem b e c; vt quadratum e m ad quadratum m c, ita erit rectangulum p l o siue ☍ o l (sunt enim p x, x o æquales, similiter vt b d, d c per corollarium quartæ sexti apud Clauium; sed ordinatim applicatę ☍ x, x l sunt etiam æquales; ergo rectangula ☍ o l, p l o sunt æqualia) ad quadratum o c. Eadem de causâ vt quadratum k t ad quadratum t h, ita rectangulum s q r ad quadratum r h: ergo alternando vt quadratum e m ad rectangulum p l o, ita quadratum m c ad quadratum o c: & vt quadratum K t ad rectangulum s q r, ita quadratum t h ad quadratum r h. 32. primi Conic.

Rursus quoniam in triangulis a d c, f i h lateribus d c, i h parallelę sunt e m, *k* t; vt a e ad e d, ita est a m ad m c: & vt f *k* ad *k* i, ita est f t ad t h: sed vt a e ad e d, ita ponitur esse f *k* ad *k* i; ergo vt a m ad m c, ita est f t ad t h: ergo componendo 2. sexti. Euc.

vt a c ad m c, ita a h ad t h; & inuertendo vt m c ad a c, ita t h ad f h. Quoniam verò vt a c ad f h, ita eſt a o ad f r: ergo alternando vt a c ad a o, ita eſt f h ad f r: ergo per conuerſionem rationis vt ac ad o c, ita eſt fh ad rh. Cùm igitur vt m c ad a c, ita oſtenſum ſit eſſe t h ad f h; & vt a c ad o c, ita oſtenſum quoque ſit eſſe f h ad r h: ergo ex æquo vt m c ad o c, ita erit t h ad r h; & vt quadratum m c, ad quadratum o c, ita erit quadratum th ad quadratum r h. Sed vt quadratum m c ad quadratum o c, ita oſtenſum eſt eſſe quadratum e m ad rectangulum p l o; & vt quadratum t h ad quadratum r h, ita oſtenſum eſt eſſe quadratum *k* t ad rectangulum ſ q r, ergo vt quadratum e m ad rectangulum p l o, ita quadratum k t, ad rectangulum ſ q r, & alternando vt quadratum e m ad quadratum k t, ita rectangulum p l o ad rectangulum ſ q r.

Rurſus quoniam vt c m ad m a; ita eſt h t ad t f: ergo componendo vt c a ad m a, ita h f ad f t, cúmque in triangulis a d c, f i h, lateribus d c, i h parallelę ductæ ſint rectę e m, *k* t: ergo per corollarium quartæ libri ſexti Euclidis, vt a c ad m a, ita eſt d c ad m e: & vt h f ad f t, ita i h ad k t. Simili prorſus modo oſtendetur vt d c ad x o, ita eſſe i h ad z r: & vt b c ad p o, ita g h ad r ſ. Quoniam ergo vt d c ad e m, ita i h ad k t:

ergo alternando vt d c ad i h, ita e m ad k t: & vt quadratum d c ad quadratum i h, ita quadratum e m ad quadratum k t. Sed vt quadratum e m ad k t, ita rectangulum p l o ad ſ q r, vt oſtenſum fuit, ergo vt quadratum d c ad i h, ſeu vt quadratum b c ad g h, ſeu vt quadratum p o ad ſ r, ita eſt rectangulum p l o ad ſ q r. Cùm igitur vt quadratum p o ad quadratum ſ r, ita ſit rectangulum p l o ad ſ q r: ergo vt recta p o ad ſ r ſeu vt recta b c ad g h, ita per præcedentem eſt recta p l ad ſ q, & recta l o ad q r quod erat oſtendendum.

Quòd ſi rectæ a b, a c eſſent aſymptoti, demonſtrari idem poſſet. Nam rectangula p l o, ſ q r forent æqualia quartæ parti figuræ, hoc eſt quadratis e m, k t. Quoniam ergo vt b c ad g h, ita oſtenſum eſt eſſe e m ad k t (quod & hîc habet locum) ergo vt quadratum b c ad quadratum g h, ita erit rectangulum p l o ad rectangulum ſ q r. Cætera quæ ad hanc demonſtrationem attinent, ſunt communia cum figurâ tangentium.

14. Secundi Conici.

1. Secundi Conic.

COROLLARIVM I.

Hinc manifeſtũ eſt ordinatim applicatas x l, z q eam interſe rationem habere, quam rectæ tactus coniungentes b c, g h; oſtenſũ enim eſt vt d c ad i h, ita eſſe x o, ad z r &

l o ad q r: & alternando vt x o ad l o, ita z r ad q r. Quoniam ergo vt x o ad l o, ita z r ad r q: ergo per conuerſionem rationis vt x o ad z r, ſeu vt d c ad i h, ſeu vt b c ad g h, ita eſt x l ad z q.

COROLLARIVM. II.

37. primi Conic. Hinc quoque apertum eſt ſi ſectiones b e c, g k h ſint centro præditæ, centraque earum ſint π, φ, tres rectas π ι, π k, π f eſſe proportionales: & tres item φ d, φ e, φ a; ergo cùm vt φ d ad φ e, ita ſit φ e ad φ a, erit diuidendo vt φ d ad d e, ita φ e ad e a; & alternando vt φ d ad φ e, ita d e ad e a. Similiter oſtendetur vt π i ad π k, ita eſſe i k ad k f: ſed vt d e ad e a, ita ponitur eſſe i κ ad k f: ergo vt φ d ad φ e, ita eſt π i ad π κ: ſi ergo duo ſegmenta b e c, e k h ſectionum centro prędita rum ita ſe habeant, vt rectæ φ e, π k ſimiliter ſecentur occurſu ordinatim ad ipſas applicatarum b c, g h; ipſa ſegmenta erunt ſimilia quantùm ad diametri diuiſionem.

COROLLARIVM. III.

Si ſegmenta b e c, e κ h non tantùm ſint ſimilia quantum ad diametri diuiſionem, verùm etiam quantum ad ipſius diametri ad baſim proportionem & inclinationem; ipſa ſegmenta erunt inter ſe, vt quadrata

diametrorum inter se. Quoniam enim vt b c ad d e, ita est g h ad k i; & vt d e ad perpendicularem ex e in basim b c demissam, ita est perpendicularis ex κ, in basim g h demissa, quando inclinatio rectarum e d, κ i est eadem; ergo ex æquo vt basis b c ad perpendicularem ex ε, ita basis g h ad perpendicularem ex *k*: ergo rectangulum sub b c & sub perpendiculari ex e demissâ est simile rectangulo sub g h & sub perpendiculari ex k demissâ: ergo eiusmodi rectangula sunt inter se vt quadrata basium b c, g h: sed vt rectangula eiusmodi, ita per præsentem sunt segmenta: ergo vt quadrata basium b c, g h, aut semidiametrorum φe, πκ, aut rectarum d e, i k, ita sunt segmenta b e c, e *k* h. 20. sexti. Euc.

COROLLARIVM IV.

Si segmenta b e c, e k h sint similia & quantum ad diametri diuisionem, & quantum ad ipsius diametri ad basim inclinationem, baseſque sint reciprocè vt diametri, erunt æqualia. Quoniam enim segmentum b e c est ad segmentũ g κ h vt rectangulum sub b c subque perpendiculari ex e, ad rectangulum sub g h subque perpẽdiculari ex *k*, cùm ipsæ perpẽdiculares sint inter se vt latera d e, i k analoga similium triangulorum comprehensorum sub perpendiculiaribus & sub d e, i k, atque sub portionibus basium b c, g h,

erunt ipſæ perpendiculares vt diametri; ſed ita etiam ponuntur eſſe baſes recì procè; ergo parallelogramma eiuſmodi ſunt
4. Sexti Eucl. æqualia; ergo & ipſa ſegmenta b e c, e k h ſunt æqualia.

COROLLARIVM. V.

Denique reliquis vt in proximè præcedenti corollario poſitis, ſi rectæ d e, k i ſint æquales, ſegmentum b e c ad g K h, erit vt baſis b c ad g h; quia rectangulum ſub b c & ſub perpendiculari ex e, ſe habet ad rectangulum ſub g h & ſub perpendiculari ex K, vt recta b c ad g h; cùm eadem ſit vtriuſque altitudo in iſto caſu. Eadem de causâ ſi baſes b c, g h forent æquales ſegmenta ſe haberent vt rectæ e d, k i.

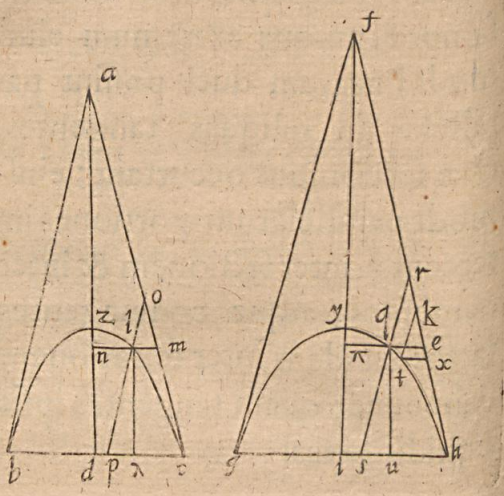
PROPOSITIO XXIII.

Si duæ ſectiones conicæ tangentibus concurrentibus cõprehendantur, & diametrorum per per puncta concurſûs ductarum portiones inter concurſum, ſectionem & rectam tactus connectentem interceptæ ſint pro-

portionales: Et si vt tangens vnius sectionis ad tangentem alterius, ita se habeant rectæ in eisdem tangentibus à concursu sumptæ, perque extremum eiusmodi linearum duci possint parallelæ ad reliquas tangentes, quæ sectionibus occurrant; eiusmodi parallelarum portiones interceptæ inter sectionem & inter tangentes, atque coniungentes tactus eandem inter se rationem habebunt, quam tangentes ipsis æquidistantes.

Sint duæ sectiones conicæ b z c, g y h comprehensæ tangentibus b a c, g f h concurrentibns in a & f, diametrique per a & f ductæ sint a d, a i, quæ secent lineas b c, g h coniungentes tactus in d & i; sectiones verò in z & y: atque vt a z, z d, ita sint f y, y i. Si in tangentibus a c, f h productis designentur lineæ a o, f r existentes in ratione ipsarum tangentium a c, f h; & per o & r ducantur rectæ o p, r s parallelæ tangentibus a b

pa 120



fg occurrentes primùm ſectionibus in l & q, rectiſque bc, gh in p & ſ. Dico vt ab ad fg, ita eſſe ol ad rq; & lp ad qs. Per l & q ducantur rectæ lm, qe parallelæ rectis bc, gh, occurrentes rectis ac, fh in m & e. Habebunt ſe am, fe, vt ac, fh; ſi enim aliter fieri poteſt, ſit vt ac ad fh, ita am ad fx, & per x agatur xt parallela rectæ gh, occurrens ſectioni in t. Ergo per præcedentem vt bc ad gh, ita erit lm

ad x t, & alternando vt b c ad l m, ita g h ad x t. Ducatur per t recta t k parallela rectæ f g. Quoniam triangula l o m, b a c habent latera parallela erunt æquiangula; eademque de causâ æquiangula sunt g f h, t k x: ergo vt b c ad c a, ita l m ad m o; & alternando vt b c ad l m, ita c a ad m o. Similiter vt g h ad h f, ita t x ad x k, & alternãdo vt g h ad t x, ita h f ad x k: sed eandem esse rationem b c ad l m, quæ g h ad x t ostensum est, ergo vt c a ad m o, ita h f ad x k, & alternando vt c a ad h f, ita m o ad x k: Sed vt c a ad h f, ita ponitur esse a m ad f x: ergo vt a m ad f x, ita o m ad k x, & alternando vt a m ad o m, ita f x ad k x; & per diuisionem rationis vt a m ad a o, ita f x ad f κ; & alternando vt a m ad f x, ita a o ad f κ; sed ita etiã sũt a o, f r: ergo f κ, f r sunt æquales, pars & totum; vt igitur a c ad f h ita est a m ad f e.

Rursus quoniam a c, f h sectæ sunt proportionaliter in m & e, vt b c ad g h, ita per præcedentem erit l m ad q e; & alternando vt b c ad l m, ita erit g h ad q e. Cùm igitur vt b c ad l m, seu vt g h ad q e, ita sit b a ad l o (sunt enim triangula b c a, l m o æquiangula & similia) eademque de causâ vt g h ad q e, ita sit g f ad q r, erit g f ad q r, vt b a ad l o, & alternando vt g f ad b a, ita q r ad l o:

cúmque in triangulis c b a, h g f lateribus b a, g f parallelæ ſint o p, r s: ergo (vt in præcedenti propoſitione in ſimili caſu oſtenſum eſt) vt a b ad f g, ita o p ad r s: Sed vt a b ad f g, ita etiam eſſe o l ad r q oſtenſum eſt: ergo vt p o ad r s, ita eſt l o ad r q; & alternando vt p o ad l o, ita r s ad r q, & per diuiſionem rationis vt p o ad l p, ita r ſ ad q ſ; & alternando vt p o, r ſ, ita p l, q ſ, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Ex primâ huius apertum eſt ſectiones b z c, g y h eſſe homogeneas, id eſt, ambas vel parabolas, vel hyperbolas, vel oxygonias. Si enim a z ſit ipſi z d æqualis, erit quoque f y ipſi y i æqualis, ac proinde ambę erunt parabolę; ſi a z ſit minor erit f y minor, ambęque erunt hyperbolę; ſi denique a z ſit maior, erit & f y pariter maior, ambęque erunt oxygonię, vt ex illâ primâ propoſitione planum eſt. Iſtud autem locum etiam habet in præcedenti propoſitione, vt apertum eſt.

COROLLARIVM II.

Hinc facile oſtenditur ſi per l ∝ agantur rectę l λ, q u parallelæ diametris n d, y i, occurrantque rectis b c, g h in λ & u,

rectam lλ se habere ad rectam qu, vt est recta zd ad rectam yi. Productę enim rectæ lm, qe occurrant diametris zd, yi in punctis n & π; quoniam vt ac ad fh, ita ostensum est esse am ad fe, erit alternando ac ad am, vt fh ad fe; & per diuisionē rationis erit ac ad mc, vt fh ad eh; sed vt ac ad mc, ita est ad nd (eō quòd in triāgulo adc lateri dc parallela sit mn) & vt fh ad eh, ita ob eandem causam est fi ad πi: ergo vt ad nd, ita fi ad πi: ergo alternando vt ad fi, ita nd ad πi: sed vt ad fi, ita zd ad yi; ergo vt zd ad yi, ita nd ad πi: sed rectis nd πi æquales sunt rectæ λl qu (eo quod figuræ ndλl, πiuq sint parallelogrammę, & latera eorum opposita sint nd, lλ; πi, qu) ergo vt zd ad yi, ita est lλ ad qu, quod erat ostendendum. 2. Sexti Euc. 34. primi Euc.

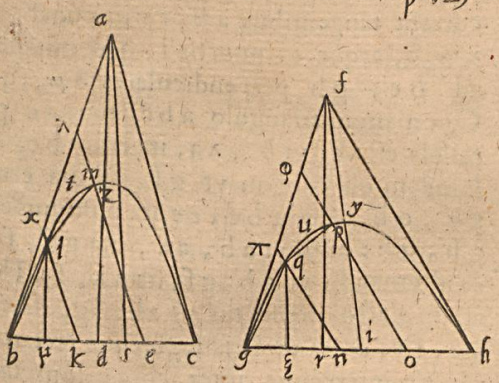
Propositio XXIV.

Iisdem positis ostendendum est segmentum bzc comprehensum sectione conicâ bzc & rectâ bc, esse ad segmentum gyh comprehensum sectione conica gyh & rectâ gh, vt est rectan-

gulum ſub b c & ſub perpendiculari ex z in b c demiſsâ, ad rectangulum ſub g h & ſub perpendiculari ex f in g h demiſsâ. Item ſi rectæ b c, g h in quotcunque ſegmenta proportionaliter ſecentur, perque interſectiones ducantur parallelæ diametris a d, f i; figuras comprehenſas ſub portionibus ſectionum conicarũ interceptas eiuſmodi parallelis, & ſub rectâ prædictas portiones ſubtẽdente eſſe in ratione eâdem, ſi portiones conferantur poſitæ inter parallelas quæ partes rectarum b c, g h analogas continent.

Sint vt in prȩcedenti ſectiones conicę b z c, g y h ita tangentibus b a c, g f h contentę vt ductis diametris a d, f i occurrentibus rectis b c, g h per tactus ductis, in d & i, & ſectionibus in z & y; ſicut a z ad z d, ita ſit f y ad y i. Ex a & f demiſſæ ſint perpendiculares a ſ, f r in re-

p 125



ctas b c, g h; & ipsæ rectæ b c, g h sectæ sint proportionaliter in quotcunque punctis k, e, o, ita vt segmentis b κ, k e, e c proportionalia sint segmenta g n, n o, o h; & per extrema duorum k c, n o analogorum ductæ sint k l, e m, n q, o p parallelæ tangentibus a c, f h, iunctęque sint rectæ l m, q p. Dico totum segmentum b z c contentum curuâ b z c & rectâ b c, esse ad totum segmentum g y h contentum curuâ g y h & recta g h, vt rectangulum sub b c, a s ad rectangulum sub g h, f r; & ita etiam esse segmentum l m comprehensum curua l t u & recta l m, ad segmentum q p comprehensum curua k u p & recta q p; & totum segmentum

k l t m e ad n q u p o.

Productæ rectæ l *k*, m e, q n, p o occurrant tangentibus a b, f g in punctis χ, λ, π, φ, atque ex punctis l, q demittantur ad b c, g h perpendiculares l μ, q ξ. Quoniam in triangulo a b c lateri a c parallela eſt λ e; vt b a, λ a, ita erunt b c, ec. Eandem ob cauſam vt g f, φ f ita erunt g h, o h, ſed vt b c, e c ita ponimus eſſe g h, o h: ergo vt a b, a λ, ita g f, f φ, & alternando vt a b, g f, ita a λ, f φ. Hoc etiam pacto oſtendetur vt a b, f g, ita eſſe a χ, f π, & ita de alijs ſegmentis rectarum a b, f g interceptis inter concurſum tangentium & parallelas ipſis a c, f h per quæcunque puncta rectarum b c, g h ductas, in quibus punctis ipſæ b c, g h proportionaliter ſecentur: ergo per præcedentem vt a c, f h, ita l *k*, q n, & m e, p o, eademque eſt demonſtratio de alijs parallelis ex tradita methodo ductis: ergo per ſcholium octauæ propoſitionis huius libri proportio figuræ b m z c d ad figuram g p y h o, & figuræ *k* l t m e ad figuram n q u p o componitur ex ratione baſium b c, g h (quæ eſt eadem quæ baſium *k* e, n o) & perpendicularium μ l, q ξ (quæ eſt eadem quæ perpendicularium a f, f r eò quod triangula c a f, κ l μ ſint ſimilia cùm habeant latera parallela, & triangula etiam h f r, n q ξ ſint eadem de cauſa ſimilia) ſed rectanguli ſub b c, a f ad rectan-

gulum sub g h, f i proportio componitur ex rationibus laterum b c, g h, a ſ, f r: ergo vt rectangulum ſub b c, a ſ ad rectangulum ſub g h, f r, ita eſt ſegmentum b z c ad ſegmentum g y h, & ita etiam eſt ſegmentum κ l t m e ad n q u p o.

Rurſus quoniam trapezia k l m e, n q p o habẽt latera parallela proportionalia (nam vt k l ad n q, ita m e ad p o) proportio illorum componetur per tertiam huius libri ex rationibus perpendicularium l μ, q ξ, & baſium k e, n o: ergo trapezia κ l m e, n q p o ſe habent vt rectangula ſub b c, a ſ, & ſub g h, f r: ſed ita etiam ſe habent ſegmenta k l t m e, n q u p o: ergo reſidua l t m, q u p habent ſe vt tota, hoc eſt, vt ſe habent rectangula ſub b c, a ſ, & ſub g h, f r, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quòd ſi ſegmenta b l, b q ſumpta fuiſſent; ductis rectis b l, g q idem ſequeretur, quia triangula b l k, g q n habent rationem compoſitam ex ijſdem rationibus ex quibus trapezia k l m e, n q p o vt demonſtratum extat apud Clauium in ſcholio propoſitionis vigeſimæ tertiæ ſexti Euclidis, prout diximus in tertia propoſitione huius libri.

Propositio XXV.

Si figuræ menoideos arcus ita subtendantur lineis rectis, vt segmentum vel segmenta arcûs interiùs caui sint æqualia simul segmento vel segmentis arcûs exteriùs caui, & nullam spatij partem habeant communem, ipsa figura est æqualis rectilineo eiusmodi segmentorum basibus, & alijs figuræ lateribus, si quæ habet, non curuis contento. Si autem vt numerus segmentorum vnius arcûs inter se æqualium, ad numerum segmentorum alterius arcûs inter se æqualium; ita sit reciprocè segmentum vnum huius arcûs, ad vnum illius; segmenta vnius arcus simul sumpta erunt æqualia segmentis alterius simul collectis.

Sit

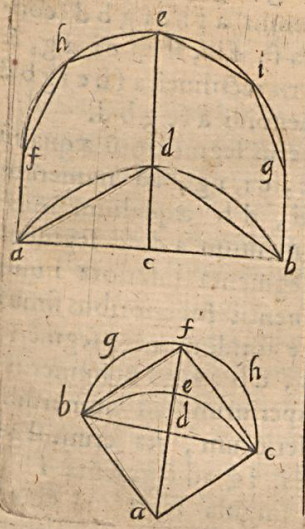
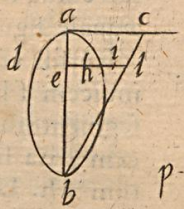
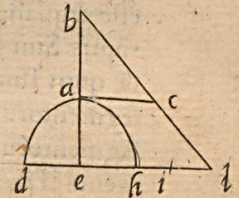


figura prop. 26



p. 129



Sit prima appositarum figura menoides, siue conuexo-caua a f e g b d contenta cauo interiùs arcu a e i g, & conuexo interiùs a d b, rectisque a f, g b. In arcu f e g subtensæ sint rectæ f h, h e, e i, i g, & in arcu a d b rectæ a d, d b, sintque segmenta f h, h e, e i, i g simul æqualia segmentis a d, d b. Dico figuram conuexocauam a f e g b d esse æqualem rectilineo a f h e i g b d, si nimirum segmenta superiora sint tota extra inferiora, rectæque f a, g b arcui a d b non occurrant nisi in punctis a, b.

Quoniam enim spatia f h, h e, e i, i g simul æquant spatia a d, d b simul sumpta,

ergo addito communi a f h e i g b d contento ſub rectis a f, f h, h e, e i, i g, & ſub curuâ d b a, erit rectilineũ a f h e i g b d æquale figuræ menoidi a f e g b d.

Rurſus vt numerus ſegmentorũ æqualiũ inuicem f h, h e, e i, i g, ad numerum ſegmentorum a d, d b æqualium inuicem, ita ſit ſegmentum a d ad ſegmentum f h. Dico ſegmenta inferiora ſimul eſſe æqualia ſegmentis ſuperioribus ſimul ſũptis. Sint f h, h e totidẽ numero ſegmenta quot ſunt a d, d b: ergo vt numerus ſegmentorum ſuperiorum ad numerum ſegmentorum inferiorum, ita erunt ſegmenta f h, h e, e i, i g ad ſegmenta f h, h e. (Sunt enim ſingula ſegmenta inter ſe æqualia, ac proinde rationem habent inter ſe quam numeri quibus numerantur) ſed, vt numerus ſegmentorum ſuperioris arcûs ad numerum ſegmentorum inferioris arcûs, ita eſt ſegmentum a d ad ſegmentum f h, & ita ſegmentũ d b ad ſegmentũ h e: ac proinde ita ſunt ſimul ſegmenta a d, d b, ad totidem ſegmenta f h, h e: ergo vt ſegmenta f h, h e, e i, i g ſimul, ad ſegmenta f h, h e ſimul; ita ſunt ſegmenta a d, d b ſimul, ad ſegmenta eadẽ f h, h e ſimul; ergo ſegmenta f h, h e, e i, i g ſimul, ſunt æqualia ſegmentis a d, d b ſimul, quod erat oſtendendum.

9. quinti Euc.

COROLLARIVM I.

Si segmentum f h sit simile segmento a d quantum ad diametri diuisionem simul & inclinationem, & si vt quadrata diametrorum, ita sint reciprocè numeri segmentorum, segmenta vnius arcûs simul sumpta erunt æqualia segmentis alterius simul sumptis. Quoniam enim quando sunt similia quantum ad diametri sectionem & inclinationem, se habent vt quadrata diametrorum per tertium corollarium vigesimæ secundæ huius; & quoniam si vt quadrata diametrorum ita reciprocè sunt numeri æqualium segmentorum, segmenta vnius arcûs sunt æqualia simul sumpta segmentis alterius simul etiã sumptis per præsentem propositionem: ergo si vt quadrata diametrorum, vel semidiametrorum ita sint reciprocè numeri prædicti, segmenta vnius arcûs simul erunt in isto casu æqualia segmentis alterius simul etiam sumptis.

COROLLARIVM II.

Hinc patet quo pacto Hippocratis Chij celebres illæ lunulæ siue menisci demonstrentur esse æquales rectilineo spatio. Sit enim vt in adiectorum schematum secundo, semicirculus b f c, cuius centrum d, diameter b c. Ex centro d excitata sit

perpendicularis d f ad diametrum b c; ſemidiametroque d f abſciſſa ſit æqualis d a: iungantur rectæ b a, c a, b f, f c; & centro a interuallo rectæ a b deſcribatur arcus b e, tranſiens per c; ſunt enim b a, a c æquales, eò quòd anguli ad d ſint recti, ideoque æquales; Oſtendendum eſt lunulam b g f h c e eſſe æqualem rectilineo b f c contento rectis b f, f c, c b. Quoniam rectæ f d, d a ſunt æquales, erit f d a diameter circuli cuius centrum d, ſemidiameter d c; ergo anguli a b f, a c f ſunt recti, vt pote in ſemicirculo exiſtētes; ergo rectæ b f, f c tangunt circulum b e c in b & c; ergo ſegmēta b g f, f h c nullam ſpatij partem habent communem cum ſegmentis b e, e c. Rurſus quoniam anguli b d f, b a c ad centra d & a circulorum b f c, b e d ſunt æquales; arcui b g f ſimilis erit arcus b e c: ergo cùm ſegmenta b g f, b e c ſint omnino ſimilia, erunt per corollarium tertium propoſitionis vigeſimæ ſecundæ huius ipſa ſegmenta inter ſe vt quadrata ſemidiametrorum a e, d f, ſed eiuſmodi quadrata ſunt in ratione duplâ: ergo ſegmentum b e c eſt duplum ſegmenti b g f: ſed ſegmento b g f eſt æquale ſegmentum f h c, cùm ſuper rectis b f, f c æqualibus ſint conſtituta; ergo duo ſimul ſegmenta b g f, f h c ſunt æqualia ſegmento b e c; ergo per præſentem, lunula b f c e contenta arcubus b f c, b e c

31. tertij Euc.

16. eiuſdē.

ex ſcholio 20. tertij. Euc.

24. tertij Euc.

est æqualis rectilineo b f c contento rectis b f, f c, b c.

Propositio XXVI.

Datâ rectâ, & in eâ productâ dato quouis puncto, in quo recta alia bifariam secetur, describere hyperbolã cuius data recta sit diameter, & alia sit ordinatim applicata. Item datâ rectâ, & intra ipsius extrema puncto, in quo recta alia bifariam secetur, describere ellipsim cuius data recta sit diameter.

Data sit recta a b, & extra vel intra illam datum punctum e, in quo recta d h bifariam secetur, oporteatque exequi quod proponitur.

Vt rectangulum a e b ad quadratum e h ita fiat recta a b ad rectam a c perpendicularem ad rectam b a; & data diametro b a, latereque recto a c, describatur hyperbola vel ellipsis cuius ordinatim applicatæ ad diametrum a b sint parallelæ ad rectam d e. Dico hyperbolam vel elli- 53. vel 54. primi Conic. 21. primi Conic.

pſim tranſire per d & h. Si enim non occurrit rectæ e h in h, occurrat in i: ergo rectangulũ a e b ad quadratũ e i erit vt recta a b ad rectam a c: ſed ita etiam eſt ex conſtructione rectangulum a e b ad quadratum e h: ergo quadratum e h eſt æquale quadrato e i, pars toti quod eſt abſurdum

Quòd ſi a e diameter ſit data, & recta d h in eam incidens, & bifariam in occurſu e ſecta, deſcribique debeat parabola cuius vertex ſit a, latus rectum eiuſmodi parabolæ erit e l, ſi vt a e ad e h, ita fiat e h ad e l, vt ex vigeſima primi conicorum apertum eſt; ac proinde noto latere recto, vertice, diametro, & poſitione ordinatim applicatarum, deſcribetur parabola per quinquageſimam ſecundam eiuſdem libri.



ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM.

LIBER II.

Qui est de librâ diuulsâ à materie, quatenus per eam indagatur proportio grauium vtrinque certo quodam modo appensorum.

DEFINITIONES.

1. LIbram siue iugum voco cum Archimede lineam horizonti æquidistãtem ex vno puncto suspensam, ex qua grauia vtrinque pendent. 2. Punctum illud à quo suspenditur,

vocatur libræ centrum. 3. Brachium libræ, illam libræ portionem intelligo, quæ à centro producta ſuſtinet ab extremo ſui puncto graue aliquod appenſum. 4. Linea directionis, ſiue perpendiculum dicatur recta quæuis ad libram perpendicularis. 5. Graue aliquod de libra pendêre cenſetur cui vel per ſe cohæret, vel connectitur per lineam directionis.

Cætera quæ ab Archimede vel explicantur, vel poſtulantur in libris de æquiponderantibus hîc ſumimus tanquam conceſſa, & ſatis nota. Quid ſit centrum grauitatis, eius libri prout hodie extant vulgati non explicant; Eutocius tamen centrum grauitatis planæ figuræ dicit ab illo definiri in primo de æquiponderantibus libro *illud punctum per quod vnicum ſi ſuſtineatur, poſtquam collocata fuerit in ſitu horizonti parallelo, manet in eodem ſitu, nec in vllam vergit partem.* Centrum grauitatis ſolidi ex Pappo definit Commandinus *punctum quoddam intra corpus poſitum, à quo ſi graue appenſum mente concipiatur, dum fertur quieſcit; & ſeruat eam, quam*

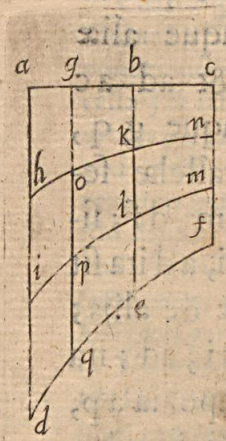
Initio Libri de centro grauit. ſolid.

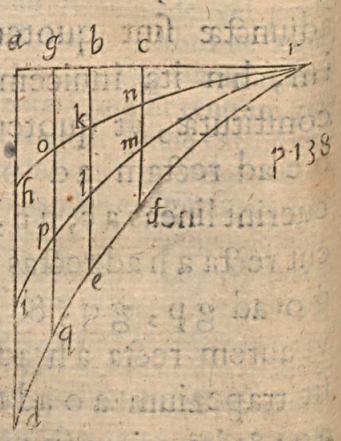
in principio habebat positionem: neque in ipsa latione circumuertitur. Hæc satis præsenti instituto erunt; nec putamus necessarium transferre huc quæ de istiusmodi definitionibus centri grauitatis scripsimus in libello de libræ principijs.

PROPOSITIO I.

Sit trapezium mixtum a c f d, cuius latera a d, c f sint rectæ lineæ & parallelæ, d f verò & a c sint curuæ vel rectæ; vel vna earum curua, altera recta; quibus adiunctæ sint quotcunque aliæ i m, h n ita inuicem & ad a c constitutæ, vt quotcunque g q, b e ad rectam a d parallelæ secuerint lineas a c, h n, i m, d f; sicut recta a h ad rectas a i, a d ita sit g o ad g p, g q, & sic de alijs; vt autem recta a h ad a i, ad; ita sit trapezium a o ad trapezia a p, a q; & ita etiam sit trapezium g k ad trapezia g l, g e, & sic de

alijs, deque ipſo toto trapezio a c n h ad trapezia a c m i, a c f d. Dico vt recta a h ad h i, ita eſſe trapezium a c n h ad trapezium h n m i; & trapezium g h ad trapezium o i; & trapezium g k ad trapezium o l, & ſic de alijs; Item vt eſt recta h i ad i d; ita eſſe trapeziũ h n m i ad trapezium i m f d; trapezium o i ad p d; o l ad p e, & ſic de alijs.





Quoniam enim vt recta a h ad a i, ita est trapezium a c n h ad trapezium a c m i; & trapezium a o ad a p; & trapezium g k ad g l, & sic de alijs; erit diuidendo vt recta a h ad h i, ita trapezium a c n h ad trapezium h n m i; & trapezium g h ad trapezium h p; & sic consequenter. Rursus quoniam vt recta a i ad a d, ita est trapezium a c m i ad a c f d; & trapezium a p ad a q, & g l ad g e &c. erit diuidendo vt recta a i ad i d, ita trapezium a m ad i f, & a p ad p d, & g l ad l q &c. Et quoniam vt spatium i q ad i g, ita recta i d ad i a, & vt spatium i g ad i o, ita recta i a ad h i, erit ex æquo vt spatium i q ad i o, ita recta i d ad i h. Similiter ostendetur esse vt spatium i f ad i n, ita rectam i d ad i h.

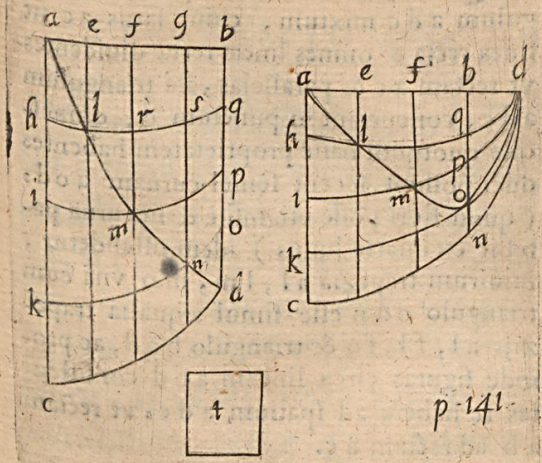
Hoc ipsum patet, si lineæ a c, h n, i m, d f concurrant in vnum punctum r, & constituant triangulum mixtum a d r, vt in adscriptarum figurarum alterâ.

Propositio II.

Sit trapezium mixtum a b c d cuius lineæ a c, b d sint rectæ & parallelæ; lineæ verò c d, a b sint vel ambæ curuæ, vel ambæ

rectæ, vel vna earum recta, altera curua; & diameter a d curua vel recta indiſcriminatim. Sit item linea a c diuiſa in quotcunque partes inuicem æquales a h, h i, i k, k c, perque extrema partium ductæ ſint curuæ h q, i p, k o lateri a c proportionaliter ſecantes rectam b d, ipſique parallelas, nec non ſpatium a b d c in trapezia a q, h p, i o, k d: curuæ autem h q, i p, k o occurrant diametro in vno tantùm ſingulæ puncto, & per illa puncta ducantur ipſi a c parallelæ e l, f m, g n. Dico trapezia a l, l m, m n, n d circa diametrum a d conſiſtentia ſe habere ſimul ad totum trapezium a d, vt ſe habet recta a h ad totam a c.

Quoniam enim ſpatia a q, h p, i o, k d ſe habent vt rectæ a h, h i, i k, k c, & ipſæ rectæ ſunt æquales, erunt ſpatia



etiam æqualia. Et quoniam ex anteriore propositione vt recta a h ad h i, ita est spatium e r ad l m, & vt a h ad i k, ita est spatium f s ad n m, & vt a h ad k c, ita est spatium g q ad n d, cùm a h recta sit æqualis rectis h i, i k, k c singulis seorsum, erit trapezium e r æquale trapezio l m, & trapezium f s trapezio m n, & trapezium g q trapezio n d: ergo addito communi a l, trapezia a l, l m, m n, n d erunt simul æqualia trapezijs a l, e r, f s, g q: sed ista sunt æqualia toti a q, totumque a q se habet ad trapezium a d, vt recta a h ad a c: ergo vt recta a h ad a c, ita se habent trapezia circa diametrum ad consistentia ad totum trapezium a d.

Quòd si, vt in secunda figura, sit triangulum a d c mixtum, cuius latus a c sit linea recta & omnes lineæ rectæ diuidentes vt rectam a c & parallelas, ita triangulum a d c, concurrant in punctum d, omnesque quotquot hanc proprietatem habentes duci possunt secent semel curuam a o d (quod fieri posse etiamsi c d sit curua patebit ex quarta huius) idem ostendetur, nimirum trapezia a l, l m, m o vnà cum triangulo o d n esse simul æqualia trapezijs a l, f l, f q & triangulo b q d, ac proinde figuras circa lineam a o d consistentes se habere ad spatium a d c, vt rectam a h ad rectam a c.

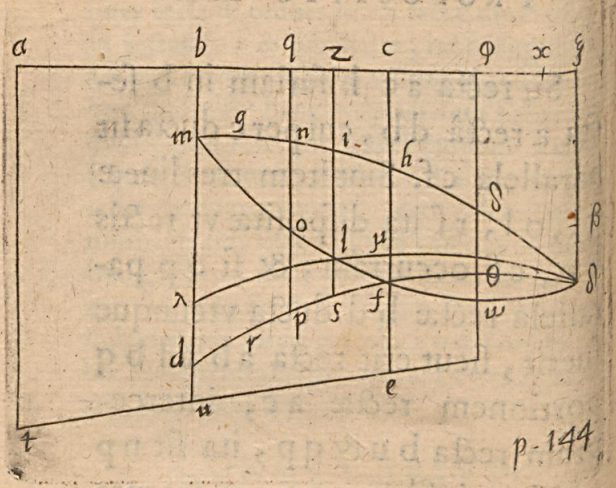
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est dato quo libet spatio metiente vel trapezium a d vt in prima figura, vel vt in secunda figura, triangulum a d c, si vt trapezium vel triangulum ad spatium t, ita fiat recta a c ad a h, quæ metitur rectam a c, abscissisque h i, i k, &c ipsi a c æqualibus, intelligantur duci per h, i & k lineæ h q, i m &c. occurrētes lineæ a m d in vno tantùm puncto, figuras circa lineam a m d consistentes esse simul æquales spatio t.

Propositio III.

Sit recta a c bifariam in b secta à rectâ d b, cui per c ducta sit parallela c f. Sint item tres lineæ g i, o l, r s ita dispositæ vt rectis b u, c f occurrant; & si q p parallela rectæ b d ducta vtcunque fuerit, sicut erit recta a b ad b q portionem rectæ a c, interceptam recta b u & q p, ita sit n p portio eiusdem q p intercepta lineis g i, s r ad portionem n o interceptam lineis g i, o l. Ostendendum est primò lineas o l, r s conuenire in aliquod punctum rectæ c f.

Linea g i occurrat rectis b d, c f in punctis m & h, linea verò r s in punctis d & f. Si igitur linea o l non occurrit rectæ c f in f, occurrat si fieri potest in e. Quoniam vt a b ad b c, ita ponitur esse h f ad h e: cùm a b, b c sint æquales,



erunt h f, h e æquales, pars & totum. Non ergo linea o l occurrit rectæ c f, in alio puncto quam in f, quod erat primo loco oſtendendum.

Iiſdem poſitis oſtendendum eſt ſecundò lineam o l occurrere lineæ g i in puncto m, in quo coire ponuntur lineæ g i, b d. Quoniam vt recta a b ſiue b c ipſi a b æqualis ad b q, ita, ducta vtcunque recta q p æquidiſtante ipſi b d, ponitur eſſe recta n p ad n o, ergo per diuiſionem rationis vt recta b c ad q c, ita erit n p ad o p. Ex b c abſcindatur c x ipſi b c ſeu b a æqualis: quoniam ergo recta x b ſecta eſt

est bifariam in c; & per c, b, ductę sunt æquidistantes c f, b d occurrentes lineis m h, d f in punctis h, f, m, d; lineę verò g i, o l, r s ita sunt dispositæ, vt quacunque q p æquidistāte ipsi b d ductâ, sicut recta x c ad c q, ita fit n p interceptа inter lineas r s, m h, ad portionem p o interceptam inter lineas r s, l o; ipsæ l o, g i occurrent sibi in eodem puncto rectæ b d, per ea quæ primo loco ostendimus; cùm ergo g i linea occurrere ponatur rectæ b d in m; linea l o occurret eidem rectæ b d in eodem puncto m, quod erat secundo loco demonstrandum.

Iisdem positis ostendendum est tertiò si lineæ g i, r s conueniant in aliquod aliud punctum extra rectam c f, vt in ♌, lineam l o conuenire quoque in idem punctum ♌. Per ♌ agatur ♌ξ parallela rectæ c f, occurrens rectæ b c in ξ. Si g i linea non occurrit lineæ ξ♌ in puncto ♌, occurrat, si fieri potest, in puncto β. Quoniam vt b ξ recta ad b a, ita ponitur esse β♌ interceptа inter lineas l o, g i, ad interceptam inter lineas g i, r s; conficitur inter lineas g i, r s aliquam portionem rectæ ξ♌ interponi, quod est absurdum; cùm ponantur g i, l o conuenire in punctū ♌: non ergo linea l o occurrit rectæ ξ♌ nisi in puncto ♌; quod erat tertio loco demonstrandum.

Iisdem positis ostendendū est quartò quæcūque linea λ μ ducta fuerit secans propor-

tionaliter parallelas ad rectam b d omnes inter g i & r s interceptas, illam incurrere in lineam l o in vnâ tantùm parallelâ ad rectam b d. Vt recta m d ad m λ, ita fiat a b recta ad b z, & per z agatur recta z i l s parallela rectæ b d, occurrens in z, i, l, s, lineis n h, o f, λμ, d f; quoniam vt m d ad m λ, ita eſt s i ad interceptam lineis g h, m f; & ita etiam eſt s i ad i l (eo quod linea λμ proportionaliter ſecet parallelas m d, i s) ergo intercepta lineis g h, m f eſt æqualis lineę i l: ergo lineæ m f, λμ occurrunt ſibi in puncto l. 9 quinti Euc.

Iam oſtendendum ſupereſt lineam λμ non occurrere lineæ l o in alio puncto extra parallelam z i ſumpto. Occurrat, ſi fieri poteſt, in puncto o; & per o acta ſit q n o p parallela rectæ b d, ſecans in q, n, p, lineas a b, m i, d s. Quoniam d m, n p parallelę, ſunt interceptæ lineis d s, λμ, mi, proportionaliter ſecantibus omnes parallelas, eiſque occurrunt in punctis n, o, p; vt d m ad m λ, hoc eſt vt a b ad b z, ita erit p n ad n o: & quoniam recta n p intercipitur etiam lineis d s, m l, m i; vt a b ad b q, ita erit p n ad n o: ergo vt p n ad n o, ita eſt a b ad b z; & ita etiam eſt a b ad b q: ergo b q, b z ſunt æquales pars & totum, quod eſt abſurdum: ergo linea λμ non conuenit cum l o in alio puncto ſumpto extra parallelam z i, quod erat demonſtrandum vltimo loco.

COROLLARIVM I.

Ex his manifestum est nihil referre vbicunque sit recta a b, loco enim illius eodem demonstrationis tenore potest sumi quæcunque t e intercepta parallelis a t, b d, c f. Imo nihil etiam refert ad vim demonstrationis si lineæ g i, o l, r s fuerint rectæ vel omnes, vel earum vna aut altera; & tunc officium rectæ a b præstari poterit, quantum ad demonstrationis huius energiam, per quamlibet illarum rectarum.

COROLLARIVM II.

Ex his apertum est lineam o l vltra punctum f productam, non cadere amplius intea lineas m i, d s; sed inter lineas m i, o l cadere ipsam d s. Sumatur enim vltra c quodlibet punctum φ in linea a c, & per φ agatur recta φ ω parallela rectæ b d, occurrens lineis g n, o l, p s in punctis ♌, ω, θ; quoniã vt a b ad b φ maiorẽ, ita est ♌ θ ad ♌ ω, erit ♌ ω maior quã ♌ θ: ergo cum punctum ω sit in linea l o, punctum θ in lineâ r s, erit linea r s inter lineas g i, o l vt propositum fuit.

COROLLARIVM III.

Ex his quoque manifestum est si recta m d sit asymptotus respectu curuæ r s demonstrationem qua ostendimus lineas g i, o l concurrere ad punctum m non habere locum in dicto casu, in quo linea r s non occurrit lineæ m d, vt ex primâ secundi conicorum constat, & ex ipso asymptoti nomine, quod *incoincidentem* reddit Interpres Eutocij.

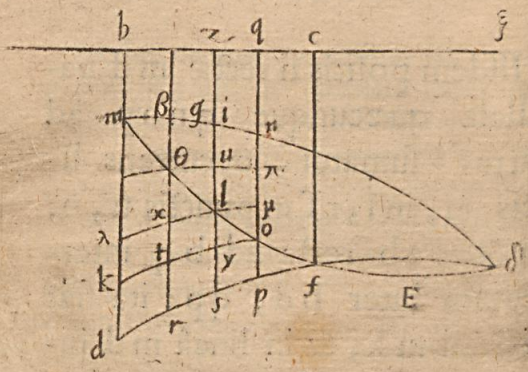
4. secundi de sphæra & cyl.

COROLLARIVM. IV.

Ex demonstratis facile etiam infertur, quæcunque linea λμ ducta fuerit non transiens per m communem concursum linearum g i, o l, & secans proportionaliter parallelas ad rectam b d omnes inter lineam g i & r s interceptas, & incurrens lineæ m o in puncto o concursu parallelæ q p; ipsam λμ non occurrere prædictæ parallelæ p q in alio insuper puncto; nisi ipsa q p incurreret in lineam g i in puncto q, & in alio insuper puncto; inque lineam r s in puncto s, & in alio præterea puncto.

Propositio IV.

Iisdem positis si rectæ m d parallela quæcunque q n o p ad partes ξ sumatur, occurrens lineis g i, m l, r ſ in punctis n, o, p; & vt a b recta ad b q interceptam inter b d, q p; ita fiat m d ad m k, & in lineâ m d inter m & k designetur quoduis punctum λ, perque illud ducta intelligatur linea λ μ secans proportionaliter omnes ad rectam m d parallelas ipsâ interceptas & lineis g i, r ſ. Dico primò lineam λ μ occurrere portioni lineæ d r p illi quæ inter parallelas b d, q p iacet: k y autem ductam per κ, occurrere lineæ m l in puncto o.



Quoniã enim parallelæ ſunt m κ, n o; & vt p n ad n o, ita eſt ab ad b q ex hypotheſi; atque vt a b ad b q, ita etiam eſt m d ad m k; ergo vt p n ad n o, ita eſt m d ad m k: ſed linea k y ita occurrit parallelis m d, n p, vt ſecet eas proportionaliter; ergo vt m d ad m k, ita eſt n p ad ipſius n p portionem interceptam lineis m g, k y; ſed ita etiam eſt eadem n p ad portionem n o interceptam lineis m g, k y; ergo linea k y tranſibit per o communem ſectionem rectæ q p & lineæ m l, quod erat oſtendendum ſecundo loco.

Rurſus vt m d recta ad m λ, ita

fiat recta a b ad b z. Quoniã vt b z ad a b, ita m λ ad m d; & vt a b ad b q, ita m d ad m k; ergo ex æquo vt b z ad b q, ita m λ ad m k; Sed m λ est minor quam m k, cùm punctum λ sumptum sit inter m & k: ergo b z erit minor quàm b q; cadit ergo punctum z inter b & q.

Quoniam ergo punctum z cadit inter b & q; si agatur per z recta z s occurrens lineis g i, l o, d p in punctis i, l, s vt a b ad b z, ita erit i s ad i l: sed vt a b ad b z, ita est m d ad m λ: ergo vt m d ad m λ, ita est i s ad i l: ergo cùm linea λ μ secet parallelas m d, i s proportionaliter modo supra explicato, secabit rectam i s in l: sed l est punctum in linea m o iacens inter parallelas m d, q o: ergo linea λ μ occurrit lineæ m o, in puncto quod iacet inter m & o, quod erat ostendendum primo loco.

Ex his manifestum est si parallela q p transeat per f vel ſ, vel per quodcunque aliud punctum in lineâ d r s designatum, vbicunque tandem sit, eandem esse demonstrationis vim. Manifestum quoque est lineam λ μ non occurrere lineę l o nisi in vna tantum parallela ad rectam m d, iuxta demonstrata in precedenti propositione: manifestum pariter est, si linea z s transeat per f, puncta k & d sibi congruere; cùm vt a b ad b c ita ponatur esse m d ad m k, & a b, b c sint equales. Si

ergo puncta f & c ſibi congruant, & recta z s tranſeat per f, exiſtet triangulum illud mixtum quod poſſibile eſſe diximus ſub finem propoſitionis ſecundæ huius libri; quodque ibidem deſcriptum dedimus.

Iiſdem permanentibus ſi inter n & o ſumatur quoduis punctum μ, & per illud ducatur linea $\mu\lambda$, proportionaliter ſecans parallelas modo ſupra declarato. Dico ſecundò lineam $\mu\lambda$ occurrere lineæ m o in aliquo puncto inter parallelas m k, n o poſito. Quoniam enim vt a b, b q, ita n p, n o; ſi vt n o ad n μ, ita fiat b q ad b z, erit ex æquo vt a b ad b z, ita n p ad n μ; ſed vt n p ad n μ, ita eſt i ſ ad i l, eò quòd $\lambda\mu$ proportionaliter ſecet parallelas n p, i ſ: ergo punctum l eſt communis ſectio linearum m o, $\lambda\mu$: iacet autem inter parallelas b d, q o; quia vt vt n o ad n μ minorem, ita facta eſt recta b q ad b z: ergo b z eſt minor quàm b q: ergo linea z ſ eiuſque punctum l cadit inter parallelas b d, q p, quod verum eſt etiamſi puncta d & m in vnum conueniant.

Iiſdem permanentibus ſi inter b & q ſumatur quoduis punctum ω, & per illud parallela $\omega\beta\theta$ t r ducatur, occurrens in β, θ, t, r, lineis m g, m o, K o, d ſ, perque θ communem ſectionem parallelæ $\omega\beta$ & lineæ m o ducatur linea $\theta\pi$ proportionaliter ſecans, & occurrens rectæ n p in π: & inter puncta π, o, vel t, θ ſu-

matur quodlibet punctum μ vel x, perque illud ducatur proportionaliter secans μx. Dico tertiò lineam μx occurrere lineæ θo inter parallelas ωr, qp.

Quoniam enim vt ab ad bω, ita est rβ ad $\beta\theta$; & vt rβ ad $\beta\theta$, ita est pn ad nπ, eò quòd parallelæ βr, np proportionaliter secentur per lineam $\pi\theta$; ergo vt ab ad bω, ita est pn ad nπ. Rursus quoniam vt bq, ab, ita no, pn; & vt ab, bω, ita pn, nπ; ergo ex æquo vt bq, bω, ita no, nπ. Iam vt no, nμ ita fiant bq, bz; & per z agatur parallela zs occurrens lineis mg, $\theta\pi$, xμ, to, ds, in punctis i, u, l, y, s. Quoniam vt bω, bq, ita ostensum est esse nπ, no; & bq, bz iussimus fieri vt no, nμ: ergo ex æquo vt bω, bz, ita sunt nπ, nμ: sed nμ est maior quàm nπ (cum μ sumptum sit inter π & o) ergo bz est maior quàm bω; ergo inter b & z cadit punctum ω. Rursus quoniam vt no ad nμ, ita facta est bq ad bz; cùm no sit maior quàm nμ erit bg maior quàm bz: ergo punctum z cadit inter ω & q; ergo & parallela zs iacet inter parallelas ωr, qp: ergo punctum l cadit inter parallelas βr, np.

Rursus quoniã vt ab, bq, ita np, no; & bq, bz fieri iussimus vt no, nμ: ergo ex æquo vt ab, bz ita np, nμ: sed vt np, nμ ita sũt si, il (eò quod lineæ gn, xμ, rp proportionaliter secent parallelas

11. quin ti Euc.

n p, i ſ) ergo vt a b, b z, ita i ſ, i l: ſed vt a b, b z, ita eſt i ſ intercepta lineis β g n, r ſ p ad interceptam lineis β g n, m θ o: ergo recta i l eſt æqualis portioni rectæ i ſ terminatæ lineis m i, m θ o: ergo punctum l eſt in lineâ m θ o: ergo linea μ x ſecat lineam θ o intra parallelas θ t, π o, quod erat tertio loco demonſtrandum. Demonſtratio ſimili modo procederet ſi poneremus inter θ & t ſumptum eſſe quoduis punctum x.

Conſectaria ſub finem aſſertionis primæ adiuncta, quæ ſecundæ & tertiæ aſſertioni conueniunt, hîc non repetimus; quoniam res eſt ſatis clara percipienti hactenus dicta.

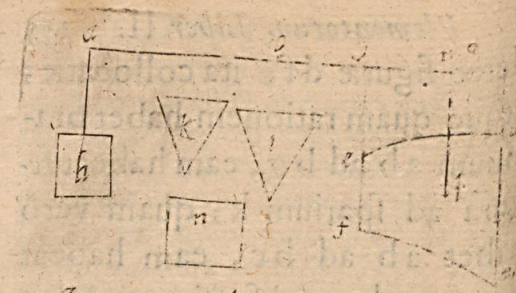
Propositio V.

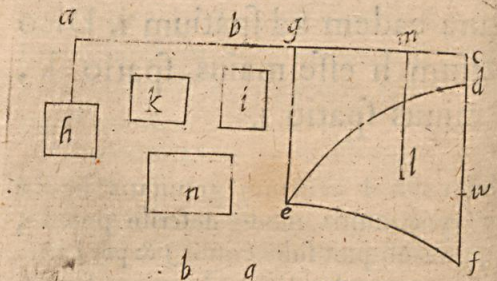
Sit libra a c ſuſpenſa ex b, & ex quibuſcunque rectæ b c punctis g, c demiſſæ ſint ad b c directionis lineæ g e, c d, ex quibus pendeat quæuis figura d f e, ita collocata intra perpendicula, vt ipſam vel tangant vel alicui eius lateri congruant: ſpatium autem h ſuſpendatur ex a, & æquipon-

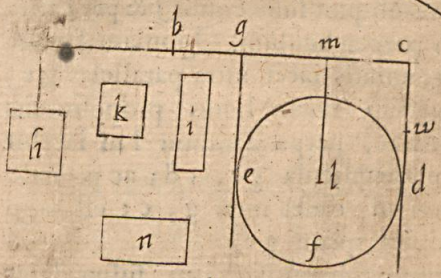
deret figuræ d f e ita collocatæ; atque quam rationem habet brachium a b ad b g, eam habeat figura ad ſpatium k; quam verò habet a b ad b c, eam habeat figura eadem ad ſpatium i. Dico ſpatium h eſſe maius ſpatio k, & minus ſpatio i.

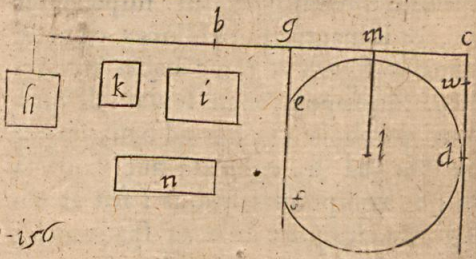
Sit enim l centrum grauitatis figuræ d f e (quæ multis modis deſcribi poteſt, ex quibus aliquot ſubiecimus) & per l agatur l m perpendiculum. Quoniam l centrum grauitatis iacet intra parallelas g e, c d, vt ſub finem huius propoſitionis oſtendemus, perpendiculum l m iacebit inter perpendicula g e, c d; ac proinde punctum m cadet inter g, c: eſt ergo g m minor quàm g c.

Rurſus quoniam ſi ex m ſuſpendatur figura, & ſoluantur ſuſpenſiones ex g & c, manebit figura vt nunc habet ex Archimede in propoſitionem ſextam de quadraturâ parabolæ; vt a b ad b m, ita erit figura d f e ad h, ex ſextâ aut ſeptimâ primi de æquiponderantibus: ſed vt a b ad b g, ita eſt figura d f e ad ſpatium k; eſt autem b g minor quàm b m: ergo k eſt minus quàm h. Item vt a b ad b c, ita


a
b
g
m
c
d
h
k
i
n
e
l
f


a
b
g
m
c
d
h
k
i
n
l
w
e
f


b
g
m
c
h
k
i
w
e
l
d
n
f


b
g
m
c
h
k
i
w
e
l
d
n
f

p-156

figura d f e ad i; est autem b c maior quàm b m: ergo & spatium i est maius spatio h, quod erat ostendendum.

Quòd si libra suspensa intelligatur ex g iisdē manentibus, atque vt a g ad g c, ita fiat figura d f e ad spatium n: manifestum est spatium h esse minus spatio n: nam vt a g ad g m, ita esse figuram d f e ad h ostensum est: sed eadem figura ponitur esse ad n, vt est recta a g ad g c: ergo cùm g c sit maior quàm g m, erit n maius quā h.

Restat vt ostendamus l centrum grauitatis iacēre inter perpendicula g e, c d, siue sit intra figuram e f d, siue extra ipsam. Si enim non est intra parallelas g e, c d erit vel in alterâ earum, vel extra vtramque. Sit itaque, si fieri potest, ω in alterâ earum centrum grauitatis figuræ f d e. Quoniam centrum grauitatis figuræ planæ ex Archimede (vt ait Eutocius in primam propositionem libri primi de æquiponderantibus) est *id ex quo suspensa manet æquidistans horizonti*, si intelligamus figuram e f d fieri parallelam horizonti, & suspensam ex vnico puncto ω liberè pendere, manebit in eodem situ per dictam definitionem, quod est euidenter falsum, cùm si per centrum grauitatis ducatur quælibet recta, figuram diuidat in duas partes hinc & inde sibi inuicem æquiponderantes: atqui linea c d per ω centrum grauitatis ducta ex vnâ parte habet integram figuram,

ex alia nihil, quod ipſi æquiponderare poſſit : ergo figura f d e inclinabitur ad partes e, nec manebit parallela horizonti. Multo minùs maneret eidem horizonti parallela ſi punctum ω eſſet extra parallelas g e, c d, vt apertum eſt: cadet ergo centrum grauitatis inter parallelas g e, c d.

COROLLARIVM.

Iſta propoſitio, vt patet, habet locum in ſolidis ſpatijs, ſi nimirum ſpatium c d m f intelligatur eſſe ſolidum inter plana per g f, & m ducta & parallela conſtitutum modo prædicto : & ſpatia h, k, i, ponantur eſſe ſolida.

PROPOSITIO VI.

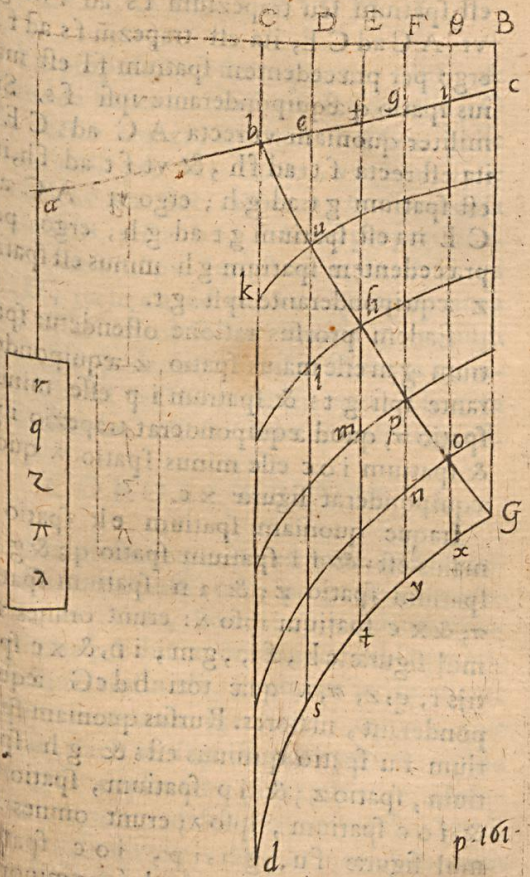
Sit libra A B ſuſpenſa ex C, ad quam ex A, C, B incidant perpendicula a A, b C, B c, quorũ b C, B c ſuſtineant quamcunque figũram b d G c coaptatam intra ipſas iuxta præſcriptum propoſitionis præcedentis; latera b C, d G ſint lineæ rectæ vel curuæ;

linea b o ita sit educta ex puncto b, vt quęcunque ad b d rectam parallela in ipsam incidat, sicut erit recta A C ad interceptam inter C & parallelam, ita sit portio eiusdem parallelæ intercepta inter lineas b c & d G, ad eiusdem portionem inter b c & b o clausam: possit autem spatium b d G c ita diuidi per alias lineas, vt sicut ipsæ parallelæ, ita sint trapezia mixta comprehensa parallelis, lineâ b c & lineis proportionaliter secantibus. His positis, secetur b c in partes quotcunque b e, e f, f g, g i, i c, & per extrema partium ducantur ad rectam b d æquidistantes e s, f t, g y, i x, à punctis autem in quibus istę secant lineam b o ductę intelligantur lineę u k, h l, p m, o n proportionaliter secantes vt dictum est. Si ex puncto A per perpendiculum

a A ſuſpendatur r æquiponderans trapezio d e; & q, trapezio f s; & z, trapezio t g; & π, trapezio i y; & λ, figuræ x c. Dico figuras e κ, f l, g m, i n & x c ſpatiis r, q, z π, λ eſſe maiores, & figuras f u, g h, i p, i o c eſſe minores ſpatijs q, z, π, λ, multóque minores ſpatijs r, q, z, π, λ totis b d G c æquiponderantibus.

Rectæ e ſ, f t, g y, i x productæ occurrant libræ A B in punctis D, E, F, θ. Quoniam vt recta A c ad C D, ita eſt recta e s ad e u, & vt e s ad e u ita eſt ſpatium e d ad e κ; ergo vt A C ad C D, ita eſt ſpatium e d ad e k; ergo per propoſitionis præcedentis ſecundam partem ſpatium e k eſt maius ſpatio r æquiponderante ipſi d e. Similiter quoniam vt recta A C ad C D, ita eſt recta e s ad e u, & vt e s ad e u, ita eſt ſpatium f s ad f u; ergo vt A C ad C D, ita eſt ſpatium f s ad f u ergo per præcedentem ſpatium f u minus eſt ſpatio q, æquiponderante ipſi f s.

Rurſus quoniam vt A C ad C E, ita eſt



p. 161.

eſt recta f t ad f n, & vt f t ad f n, ita eſt ſpatium ſeu trapezium f s ad f l: ergo vt A C ad C E, ita eſt trapeziũ f s ad f l, ergo per præcedentem ſpatium f l eſt maius ſpatio q æquiponderante ipſi f s. Similiter quoniam vt recta A C ad C E, ita eſt recta f t ad f h, & vt f t ad f h, ita eſt ſpatium g t ad g h; ergo vt A C ad C E ita eſt ſpatium g t ad g h; ergo per præcedentem ſpatium g h minus eſt ſpatio z æquiponderante ipſi g t.

Eadem prorſus ratione oſtendetur ſpatium g m eſſe maius ſpatio z æquiponderante ipſi g t; & ſpatium i p eſſe minus ſpatio π, quod æquiponderat trapezio i y; & ſpatium i o c eſſe minus ſpatio λ quod æquiponderat figuræ x c.

Itaque quoniam ſpatium e k ſpatio maius eſt; & f l ſpatium ſpatio q; & g m ſpatium ſpatio z; & i n ſpatium ſpatio π; & x c ſpatium ipſo λ: erunt omnes ſimul figuræ e k, f l, g m, i n, & x c ſpatijs r, q, z, π, λ quæ toti b d c G æquiponderant, maiores. Rurſus quoniam ſpatium f u ſpatio q minus eſt; & g h ſpatium, ſpatio z; & i p ſpatium, ſpatio π; & i o c ſpatium, ipſo λ; erunt omnes ſimul figuræ f u, g h, i p, i o c ſpatijs q, z, π, λ minores, multóque minores ſpatijs r, q, z, π, λ toti b d c G æquiponderantibus, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Ex propositione sexta prioris libri, & secunda huius manifestum est si linea d y G sit sectio conica, spatium b d G c posse ita diuidi per alias lineas, vt sicut ipsæ parallelæ ita sint trapezia comprehensa parallelis, recta b c, & lineis proportionaliter secantibus. Imò si vt recta A C ad C D, ita sit e a ad e u &c: quamuis linea b c esset etiam sectio conica, spatium b d G c posset perinde diuidi, atque quando b c est recta; vt ex ijs quæ ad sextam prioris libri adiecta sunt manifestum est.

COROLLARIVM II.

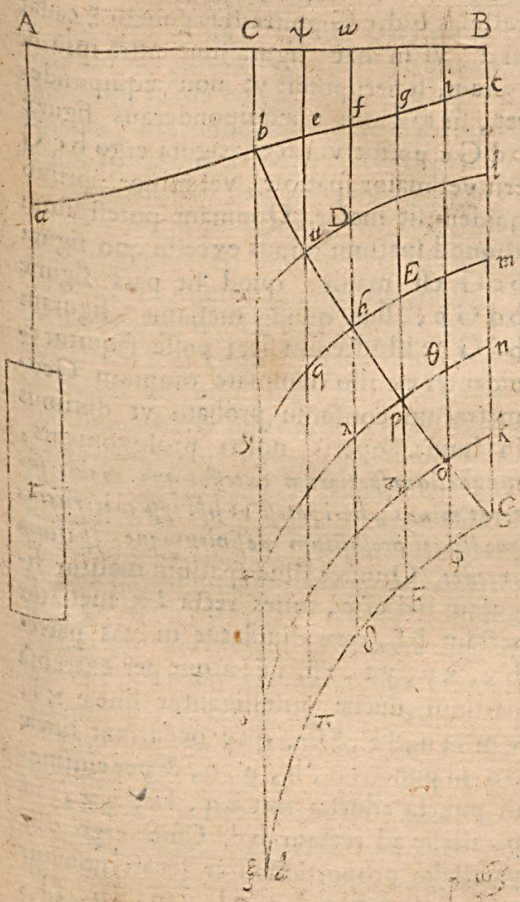
Manifestum quoque est hanc ipsam propositionem posse cum proportione transferri ad solida, sicuti in præcedenti monuimus, & hic monemus de subsequenti, aliisque eiusmodi, in quibus id inculcare prætermittemus breuitatis causâ, quæ etiam facit vt superfluum putemus istud longiùs explanare, præcipuè cùm solidarum figuram descripto in planâ chartâ, quando eæ vario multiplicique sectionum ductu distinguendæ sunt, vix vnquam fiat sine Lectoris magno & sæpe inutili labore. Monêre præterea hîc occasione data debeo propositionem sextam libri prioris

plurimasque alias cum eâ connexas posse non multùm absimili methodo applicari ipsis solidis, idque ita esse in nonnullis manifestum homini non penitus ignaro istarum disciplinarum, vt aliâ probatione non egeat; eam tamen, si quis flagitet, exhibere parati sumus. Adeatur propositio vigesima quarta libri quarti horum Elementorum. Cæterum quæ in planis demonstrantur ad solida posse nonnunquam referri habes exemplum inter alia insigne in Elementis Euclidis libri vndecimi propositione vigesimâ nonâ quæ persimilis est trigesimæ quintæ libri primi.

Propositio VII.

Iisdem positis, ostendendum est, si libra A B ex C suspendatur, & spatium æquale figuræ b G c ex A pendeat, ipsum æquiponderare figuræ b d G c permanenti vt iacet.

Vt a b, b c, ita iuxta præscriptum quartæ huius libri fiant b d, b ξ, vt habeatur recta b ξ per cuius quoduis punctum ducta linea proportionaliter secans parallelas rectæ b d interceptas lineis b c


A
C
B
a
b
e
f
g
i
c
l
D
u
E
m
h
n
θ
q
p
k
o
G
F
π

d G, incidat in lineæ bG portionē inter parallelas b d, c G poſitā, ſiue punctū ξ cadat in d (vt in hac figurâ) ſiue extra ipsū d.

Iam, ſi fieri poteſt vt non æquiponderet, ſit ſpatium r æquiponderans figuræ b d G c poſitæ vt iacet: figura ergo b c G erit vel maior ſpatio r, vel minor; primo quidem ſit maior. Quoniam poteſt ſumi aliquod ſpatium minus exceſſu quo figura b c G eſt maior, quod ſit pars figuræ b d G c, ſiue quod metiatur figuram b d G c: iſtud enim fieri poſſe ſequitur euidenter ex illo lemmate omnium Geometrarum conſenſu probato vt diximus in huius operis noſtri prologomenis, *inæqualium ſpatiorum exceſſus quo maius ſuperat minus, fieri poteſt vt ſibi ipſi coaceruatus quodlibet propoſitum definitumque ſpatium excedat.* Quoties illud ſpatium metitur figuram b d G c, toties recta l x metiatur rectam b ξ, quæ diuidatur in ſuas partes b x, x y, y t, t ſ, ſ ξ; atque per extrema partium ductæ intelligantur lineæ x l, y m, t n, ſ k, ξ G, quæ occurrant lineæ b o in punctis u, h, p, o, & per eiuſmodi puncta eductæ ſint e q, f λ, g z, i φ parallelæ ad rectam b d. Cùm ergo iſtæ parallelæ proportionaliter ſecari ponãtur occurſu linearum b c, x l, y m, t n, ſ k, ξ G, quæ occurrant lineæ b o in punctis u, h, p, o, & per eiuſmodi puncta eductæ ſint e q, f λ, g z, i φ, parallelæ ad rectam b d. Cùm ergo iſtæ parallelæ proportio-

naliter ſecari ponantur occurſu linearum b c, x l, y m, t n, ſ κ, ξ G, & trapezia ab ipſis effecta eſſe proportionalia ipſis parallelis, erunt per primam huius libri ſpatia b l, x m, y n, t k, ſ G æqualia, & vnumquodque ſe habebit ad totum ſpatium b d G c, vt recta b x ad b ξ: ſed ita etiam ſe habet pars figuræ b ξ G c minor exceſſu ad figuram b ξ G c; ergo vnumquodque eſt minus exceſſu dicto: ergo cùm per huius libri ſecundam figuræ b e u x, u D h q, h E p λ, p θ o z, o k G φ circa lineã b G cõſiſtentes ſint ſimul æquales figuræ b l; erunt ſimul minores exceſſu quo figura b c G ponitur ſuperare ſpatium r æquiponderans figuræ b d G c. Porrò apertum eſt illas figuras conſiſtentes circa lineam b G ſecundum aliquam ſui ſpatij portionem eſſe intra figuram b c G nimirum ſecundum figuras triangulares b e u, u D h, h E p, p θ o, o k G; & ſecundum aliam ſui portionem eſſe extra figuram b c G, nimirum ſecundum figuras triangulares b x u, u q h, h λ p, p z o, o φ G.

Cùm ergo figura b c G ponatur eſſe maior ſpatio r, & ex eâ ablatæ ſint b e u, u D h, h E p, p θ o, o k G, quæ omnes ſunt ſimul minores exceſſu quo ipſa ſuperat ſpatium r: quæ relinquuntur figuræ erunt omnes adhuc maiores ſpatio r, quod eſt abſurdum; cùm quæ relinquuntur ſint f u, g h, i p, i o c, quæ omnes ſunt per

præcedentem minores ſpatio r.

Sed neque etiam figura b c G eſt minor ſpatio r: ſi enim ſpatium r eſt maius, poterit dari ſpatium quod metiatur figuram b d G c, & quod ſit minus exceſſu quo r ſuperat figuram b c G. Vt pars illa metiens figuram b d G c ad figuram ipſam, ita intelligatur eſſe recta b x ad b ξ inuentam iuxta præſcriptum quartæ huius, vt paulò ante diximus; ſitque diuiſa b ξ in ſuas partes: ergo vti modo oſtendebatur circa lineam b G conſiſtent figuræ quæ omnes erunt minores exceſſu: ergo cum illarum aliqua portio ſit intra figuram b c G, alia portio addita ad figuram b c G erit minor exceſſu (cùm omnes ſint minores exceſſu) ergo ſpatium compoſitum ex figurâ b c G, & ex illa portione figurarum prædictarum quæ extra figuram b c G iacet, erit minus ſpatio r, quod eſt abſurdum; Cùm ſpatium illud compoſitum conflatum ſit ex ſpatijs e y, f q, g λ, i z, c φ quæ per præcedentem ſunt maiora ſpatio r. Non ergo eſt minor ſpatio r, neque maior vt oſtenſum eſt; quare relinquitur eidem eſſe æqualem: ergo ſpatium illi æquale ex A pendens æquiponderat figuræ b d G c vt iacet manenti libra A B ex centro C ſuſpenſa, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Ex his manifeſtum eſt figuram triangularem b u e æquiponderare trapezio

b e ϖ d : quoniam enim trapezium b e u x maius est perprecedentem spatio equiponderante ipsi b e ϖ d, poterit dari spatium minus eo, quo figura b u e & equiponderans trapezio b e ϖ d differre ponentur & figuram b e u x metiens; ac proinde, vt ex huius quarta confici potest, & paulo ante confectum fuit in simili casu, circa lineam b u consistent figuræ quæ omnes æquales erunt prædictæ differentiæ; dabiturque locus demonstrationi qua in hac propositione vsi sumus.

COROLLARIVM. II.

Manifestum quoque est trapezium e f h u æquiponderare trapezio e f ♂ ϖ. Nam figura quadrilatera u D h q, quæ est portio trapezij f q, vel minor vel maior dicetur eo spatio, quo figura e f h u & spatium æquiponderans trapezio e f ♂ ϖ differre ponentur: Si minor dicatur demonstrationi priori datur locus. Sin maior esse asseratur, poterit dari spatium prædictâ differentia minus, & trapezium u D h q metiens, atque ita procedet demonstratio eadem. Simili prorsus ratione ostendetur trapezio f g F ♂ æquiponderare trapezium f g p h: nam figura quadrilatera h E p λ vel minor vel maior dicetur &c. Atque hoc ipso demonstrationis tenore idem euincitur de alijs, nimirum g i ♀ F trapezio æquiponderare trapezium g i o p; & i c G ♀ trapezio, trapezium i c G o.

COROLLARIVM III.

Ex demonſtratis in iſta propoſitione & ex corollario præcedentis manifeſtum pariter eſt ſi linea d G ſit ſectio conica, figuram b c G ex A ſuſpenſam æquiponderare figuræ b d G c permanenti vt iacet; & figuram b d π e ex eadem A ſuſpenſam figuræ b u e permanenti vt iacet; & figuram e π ♂ f indidem ſuſpenſam figuræ e u h f &c. Atque hîc etiam illud animaduerſione dignum eſt demonſtrationem eandem permanere ſi b c ſit etiam ſectio conica, dummodo (ſicuti in præcedentis propoſitionis corollario adnotatum eſt) vt A C ad C ♃, ita ſit e π ad e u; & vt A C ad C ☉, ita ſit f ♂ ad f h, & ſic de quacunque alia parallela interiecta lineis b c, d G, ad eiuſdem portionem inter lineas b c, b G poſitam.

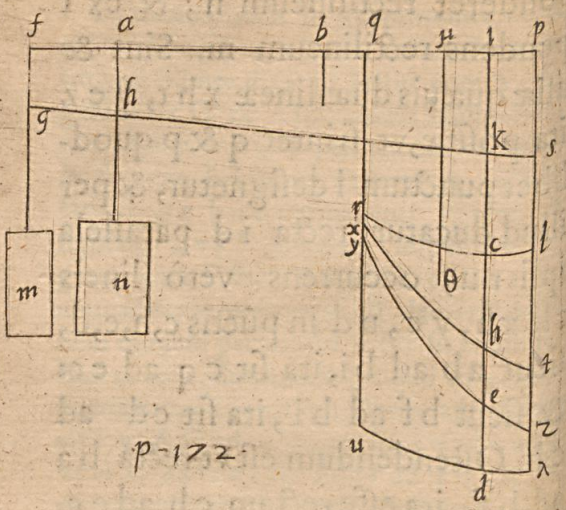
PROPOSITIO VIII.

Sit a b libra ſuſpenſa ex b, ex cuius punctis q, p pendeat figura r u d ^ l c contenta perpendiculis r u, l ^, lineiſque r l, u ^ quæ vel ſint rectæ, vel ſectiones conicæ: ipſi autem figuræ vt iacet permanenti ex a pendulum æqui-

ponderet rectilineum n; & ex f pendens rectilineum m. Sint & aliæ quæuis duæ lineæ x h t, y e z ita positæ, vt si inter q & p quodlibet punctum i designetur, & per illud ducatur recta i d parallela ipsi r u, occurrens verò lineis r l, x h, y e, u d in pũctis c, h, e, d, sicut a b ad b i, ita sit c q ad e c: & sicut b f ad b i, ita sit c d ad c h. Ostendendum est vt recta b a ad b f, ita esse rectam c h ad e c, ipsumque spatium r x h t l c ad r y e z l c.

Quoniam enim vt recta f b ad b i, ita ponitur esse c d recta ad c h; & vt b i recta ad b a ita ponitur esse e c ad [illegible] d; trium linearũ f b, b i, b a [illegible] c, c d, c h proportio erit perturb[illegible] go ex æquo vt f b ad b a, ita erit e c ad c h quod erat primo loco ostendendum.

Rursus quoniam r c l, v d λ sunt vel sectiones conicæ vel rectilineæ; & quoniã sumpto quouis puncto i inter q & p, &



per illud ducta i d parallela rectæ q r, ſicut a b, b i, ita c d, e c; & ſicut f b, b i, ita c d, c h, erit per ſeptimam huius rectilineum n æquale figuræ r y e z l c; & rectilineum m figuræ r x h t l c.

Præterea recta μ θ parallela ipſi q r tran; feat per grauitatis centrum figuræ r u λ l [illegible]ius puntæ Archimedes demonſtrat [illegible] quadraturæ paraboles vt a b, [illegible] reciprocè eſt figuræ ſpatium r u λ l ad ſpatium n; & vt f b, b i ita eſt figuræ eiuſdem r u λ l ſpatium ad ſpatium m: trium ergo rectarum f b, b i, a b, & triũ ſpatiorum n, r u λ l, m proportio eſt perturbata: ergo exęquo vt recta f b ad a b,

ita reciprocè est spatium n ad m: sed spatio n ostensum est figuram r y e z l c esse æqualem; & spatio m figuram r x h t l c: ergo vt recta f b ad a b ita est figura r y e z l c ad r x h t l c, quod erat secundo loco ostendendum.

COROLLARIVM.

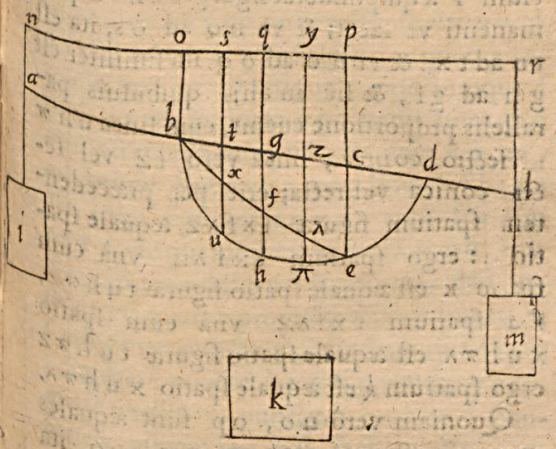
Hinc manifestum est si figuræ cuipiam ex duobus libræ punctis suspensæ æquiponderet spatium aliquod ex vno tantùm eiusdem libræ puncto pendens; & aliquod aliud ex alio; ita esse reciprocè rectas quæ inter punctum à quo libra suspenditur & inter puncta à quibus dicta spatia pendent, vt sunt ipsa spatia pendentia: Ostensum enim est vt est recta b f ad b a; ita esse spatium n quod ex a pendet, ad spatium m quod ex f pendet. Istud autem verum quoque esse apertum est, etiamsi figura ex solo puncto μ penderet.

PROPOSITIO IX.

Sit spatium k & libra n p suspensa primùm ex o, cuius portio o p sit ipsi n o æqualis. Per duo puncta in linea o p sumpta

actæ sint duæ parallelæ intra quas coaptata sit iuxta præscriptum propositionis quintæ huius libri figura rectis, vel sectionibus conicis vel vtrisque mixtim comprehensa; isti verò figuræ ita positæ & ex parallelis pendenti spatium i ex n per lineam directionis n a pendens ita æquiponderet, vt ipsum i vnà cum k sint simul æqualia spatio figuræ intra parallelas collocatæ, & ab eis pendenti. Abscissâ p r ipsi o p æquali, & actâ per r ipsi p c parallelâ r l, per quam pẽdeat spatium m æquiponderans (libra ex p secundò suspensa, postquam soluta fuerit prior suspensio ex o) figuræ in eodem situ permanenti. His ita positis ostendendum est spatium k esse æquale spatio m.

Duo in linea o p puncta sumpta sint s & y (siue congruant ipsis o & p singu-



p 175

la ſingulis, ſiue vnum vni congruat alterum non congruat, ſiue denique neutrum congruat) & per illa actæ ſint rectæ ſ t, y z perpendiculares ad libram n p, inter quas coaptata pendeat figura t u h π z cuius linea u h π ſit ſectio conica, t z ſit recta vel ſectio conica. Sumatur quodlibet punctum q in linea s y, atque vt n o ad ſ q, ita per q ducta q h linea directionis, fiat g h intercepta lineis u h π, t z, ad g f, noteturque punctum f; atque idem intelligatur factum de omni alio puncto in linea ſ y exiſtente: notata verò puncta deſcribant continuam lineam x f l quæ *quadratrix* vocetur:

Quoniam ergo libra ex o ſuſpenſa ſpatium i æquiponderat figuræ t u h π z permanenti vt iacet; & vt n o ad o s, ita eſt t u ad t x; & vt n o ad o q ita ſimiliter eſt g h ad g f, & ſic in alijs quibuſuis parallelis proportione euenit, cùm linea u h π ſit ſectio conica, linea verò t z vel ſectio conica vel recta; erit per præcedentem ſpatium figuræ t x f λ z æquale ſpatio i: ergo ſpatium t x f λ z vnà cùm ſpatio κ eſt æquale ſpatio figuræ t u h π z, ſed ſpatium t x f λ z vnà cum ſpatio x u h π λ eſt æquale ſpatio figuræ t u h π z ergo ſpatium k eſt æquale ſpatio x u h π λ.

Quoniam verò n o, o p ſunt æquales ex conſtructione: ergo vt o p, o q, ita g h, g f; & per cõuerſionem rationis vt o p, ſeu r p ipſi ex conſtructione æqualis, ad q p, ita g h ad f h: eadem ratione idipſum oſtendetur de aliis omnibus parallelis inter parallelas f t, y z ductis. Si igitur libra ſuſpendatur ex p ceſſetque ſuſpendi ex o; quoniam vt r p, p y, ita ſunt z π, π λ; & idem in aliis parallelis inter f t, y z ductis euenit; cùm ſpatium m ponatur æquiponderare figuræ t u h π z vt iacet permanenti, erit per præcedentem ſpatium m æquale ſpatio x u h π λ, hoc eſt ſpatio k, quod ipſi x u h π λ, æquale eſſe oſtenſum modò fuit. Ergo &c. quod erat oſtendendum.

Aſſumpſimus ſpatium t x f λ z vnà cum

ſpatio

spatio x u h π λ esse æquale spatio figuræ t u h π z, quod ita ostenditur. Cùm, sumpto in lineâ s y quouis puncto s, vt n o ad o s, ita sit t u ad t x: sitque n o ipsi o p æqualis ex constructione, punctumque s ponatur esse in linea o p; sicuti linea n o non est minor linea o s, ita linea t u non est minor lineâ t x: ergo linea x f l tota erit intra figuram t u π z: ergo spatium t u π z adæquatur duobus t x f λ z, x u h π λ. Ex quo manifestum est adiunctâ demonstratione quartæ propositionis, si punctum s congruat puncto o, punctum quoque x congruere puncto b: & si punctum y congruat puncto π, punctum quoque λ congruere puncto e: & si sectio u h π concurrat in b & d cum linea b c, punctumque z congruat puncto d, puncta etiam λ, π congruere eidem puncto d.

COROLLARIVM.

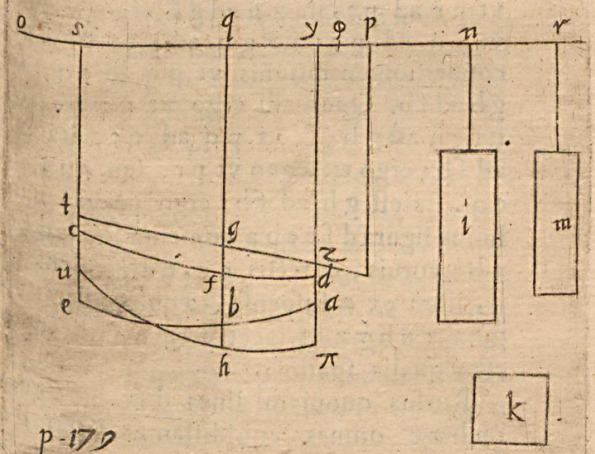
Hinc manifestum est duo spatia quæ per duas librationes æquiponderant figuræ t u h π z esse simul æqualia ipsi figuræ; ac proinde spatium quod æquiponderat suspensum ex n esse ipsam figuram imminutam spatio, quod æquiponderat suspensum ex r; & vicissim spatium quod ex r suspensum æquiponderat figuræ, esse ipsam figuram imminutam spatio quod suspensum ex n æquiponderat figuræ.

PROPOSITIO X.

Sit libra o p ſuſpenſa ex p, & ab eâ pendeat figura t u h ϖ z inter parallelas ſu, y ϖ conſtituta, ita vt inter puncta ſ & p iaceat punctum y, & linea u h p ſit ſectio conica, t z recta. Vltra p in recta p y ſumatur quodlibet punctum φ (ſiue ipſum φ congruat puncto y, ſiue iaceat inter y & p) & vt p r brachium quodcunque libræ ad p φ, ita ſit figura t u h ϖ z ad κ ſpatium. Spatium m pendens ex r libra ex p ſuſpensâ æquiponderet figuræ; fiantque φ n, p r æquales. Oſtendendum eſt ſpatium quod libra ex φ ſuſpenſa, priore ſuſpenſione ceſſante, pendens ex n, æquiponderat figuræ permanenti vt iacet, eſſe æquale ſpatio m quod

librâ ex p ſuſpenſâ, ceſſante ſuſpenſione ex φ, æquiponderat ex r pendens eidem figuræ; ſpatio inquam, m non integro, ſed imminuto eâ figurâ quæ ad totam t u h π z ſe habeat vt ſe habet recta φ p ad p r; eiuſmodi autem eſt ſpatium κ.

Oſtendendum igitur eſt ex ſpatio m poſſe demi ſpatium k, & reſiduum ex n pendens, libra ex φ ſuſpenſa, æquiponderare figuræ vt iacet permanenti. Sit ſpa-



p. 179

tium i quod pendens ex n, libra ex φ ſuſpenſa, æquiponderet figuræ t u h π z; & intelligatur deſcripta linea a b e ita vt quocunque puncto g ſumpto in linea t z, & per illud ducta g h æquidiſtante ipſi y z l, occurrente curuæ π h u in h; & lineæ a b e, in b; & rectæ f y, in q: ſicut r p ad p q, ita ſit g h ad g b: ſpatium ergo t e b a z erit æquale ſpatio m per ſeptimam huius.

Rurſus intelligatur deſcripta linea d f c, ita vt ſumpto in recta z t quouis puncto g, & ducta per illud g f æquidiſtante ipſi y z, occurrente rectæ y f in q, & lineæ d f c in f; vt r p ad p φ, ita ſit g h ad g f. Quoniam vt p q ad p r, ita g b ad g h, & vt p r ad p φ, ita g h ad g f; ergo ex æquo vt p q ad p φ, ita g b ad g f; ergo per conuerſionem rationis vt p q ad φ q, ita g b ad f b. Quoniam ergo vt p r ad p q, ita g h ad g b; & vt p q ad q φ, ita g b ad f b: ergo ex æquo vt p r, ſeu φ n, ad φ q, ita eſt g h ad f b: ergo per octauam huius figura d f c e b a contenta lineis d f c, a b e curuis, & rectis e c, d a pendens ex n, libra ex φ ſuſpenſa, æquiponderat figuræ t u h π z vt iacet permanenti; ergo eſt æqualis ſpatio i.

Rurſus quoniam linea d f c in figura t u h π z omnes æquidiſtantes lateri d a diuidit proportionaliter, ita vt quemadmodum ſe habet recta r p ad p φ, ita ſit

quælibet æquidistans intercepta curuis d f c π h u ad sui portionem interceptam curua d f c & recta t z; ergo vt recta r p ad p φ, ita est figura t u h π z ad figuram t c f d z, sed vt recta r p ad p φ, ita ex constructione ponitur esse eadē figura t u h π z ad spatium *k*: ergo figura t c f d z est æqualis spatio κ.

Rursus quoniam, vt supra ostendimus, sicut p q ad p φ, ita est g b ad g f, cùm p q non sit minor quam p φ (ponimus enim φ iacere inter y & p, vel congruere puncto y, & punctum q vel esse inter puncta f & y, vel alteri illorum congruere) erit g b vel maior, vel non minor quàm g f; ergo linea d f c tota cadit inter rectam t z & curuam a b e; & summùm puncta d & a sibi congruunt, si nimirum puncta φ & y sibi congruant; ergo tota figura t e b a z diuiditur in duo spatia t φ f d z, c e b a d f, quorum illud probatum est esse æquale spatio *k*, istud spatio i; totam autem figuram ostendimus esse æqualem spatio m: ergo spatium m est æquale duobus simul spatijs k & i: ergo ex spatio m demi potest spatium κ, & eo dempto relinquitur spatium i, quod ex n pendens, libra ex φ tantùm suspensa, æquiponderat figuræ t u h π z vt iacet permanenti, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

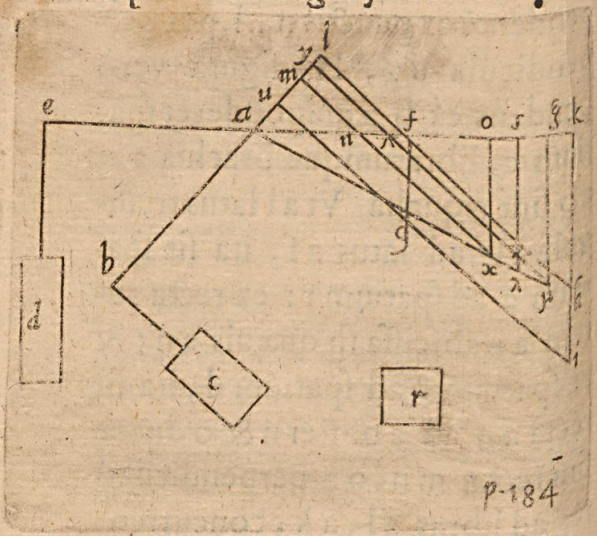
Quòd ſi reliquis iiſdem manentibus libra intelligatur ſuſpendi ex φ; & ex n extremo brachij eius cuiuſcunque φ n pendere ſpatium i æquiponderans figuræ t u h π z; & vltra φ verſus n, ſumi quoduis punctum p: ipſique φ n fieri æqualem p r; Ex demonſtratione huius propoſitionis apertum eſt, libra ex p tantùm ſuſpenſa, ſpatium m pendens ex r & æquiponderans figuræ t u h π z eſſe æquale ſpatio i; & inſuper ſpatio k quod ſe habeat ad ſpatium t u h π z vt recta φ p ad rectam φ n.

PROPOSITIO XI.

Sit libra a κ ſuſpenſa ex a ſuſtinens figuram f g i h pendentem ex punctis f, κ per lineas directionis f g, k i; figuræ verò pendens ex e ſpatium d æquiponderet. In eodem figuræ plano ſit alia libra a l mutata poſitione ſuſpenſa ex eodem puncto a, & ſuſtinens eandem figuram f g i h

pendentē ex punctis u, l per perpendicula u g, l f; figuræ verò pendens ex b æquiponderet ſpatium c, librarumque brachia a e, a b ſint æqualia. Vt a l latus trianguli a l f ad latus a f, ita ſit ſpatium c ad ſpatium r: ex recta autem a x abſciſſa ſit quæuis a n; & vt ſpatium r ad ſpatium d, ita ſit recta a n ad a o. Per n & o ductæ ſint rectæ m n, o x perpendiculares ad libras a l, a k, concurrentes in x, & per concurſum x punctumque ſuſpenſionis a ducta ſit recta a x. Oſtendendum eſt centrum grauitatis figuræ f g i h eſſe in recta a x.

Sit enim, ſi fieri poteſt, in puncto z extra lineam a x poſito, & per z agantur z f, z y perpendiculares ad libras a κ, a l; quarum y z occurrat libræ a l in y; libræ a k in π & lineæ a x in μ, linea vero ſz occurrat libræ a k in ſ, & lineæ a x in λ. Quoniam librâ a l ſuſpensâ ex a, recta



p-184

y z tranſit per centrum grauitatis z, & ſpatium c pendens ex b æquiponderat figuræ f g i h vt iacet permanenti; vt figura f g i h ad ſpatium c, ita erit recta b a ad a y, vt in octaua huius diximus. Similiter quoniam libra a k ſuſpenſa ex a, ſpatium d æquiponderat figuræ f g i h vt iacet permanenti, & recta ſ z tranſit per centrum grauitatis z; vt figura f g i h ad ſpatium d, ita erit recta e a ſeu b a ipſi æqualis ad rectam a ſ, & conuertendo vt recta a ſ ad b a, ita ſpatium d ad figuram f g i h. Quoniam igitur oſtenſum eſt vt ſpatium d ad ſpatium f g i h, ita eſſe rectam a ſ ad b a; & vt ſpatium f g i h ad ſpatium c, ita eſſe rectam b a ad a y: & vt ſpatium c ad ſpa-

tium r, ita esse rectam a y ad a π (sunt enim triangula a l f, y a π similia, & vt a l ad a f, siue vt spatium c ad r, ita a y recta ad a π) ergo ex æquo vt spatium d ad spatium c, ita est recta a f ad a y: Item ex æquo vt spatiũ d ad spatiũ r, ita erit recta a f ad a π; sed ita etiã est recta a o ad a n, ergo vt recta a f ad a π, ita recta a o ad a n, & alternando vt recta a f ad a o, ita recta a π ad a n, & diuidendo vt recta a o ad o f, ita a n ad n π.

Quoniam igitur in triangulo a π μ lateri π μ parallela est n x; vt a n, n π, ita erũt a x, x μ; & quoniam in triangulo a f λ lateri f λ parallela est o x, vt a o ad a f, ita erit recta a x ad x λ: ergo cùm ratio rectarum a o, o f, sit eadem quæ rectarum a n, n π, eadem quoque erit ratio rectæ n x ad x λ, & eiusdem rectę n x ad x μ; ergo x λ, x μ sunt ęquales, pars & totum quod est absurdum. Non ergo centrum grauitatis figurę f g i h est extra lineam a x, quod erat ostendendum. 2. sexti Euc.

COROLLARIVM I.

Sit libra a k suspensa ex a sustinens figuram f g i h pendentem ex punctis f, k per perpendicula f g, k i, cui pendens ex e spatium d ęquiponderet; centrum verò grauitatis eiusdem figurę sit in recta a x per punctum suspensionis ducta. Sit mu-

tata poſitione alia libra a l ſuſpenſa ex eodem puncto a, ſuſtinenſque eandem figuram f g i h pendentem ex punctis u, l per perpendiculares u g, l f, cui pendens ex b ſpatium c æquiponderet; ſint autem brachia a e, a b æqualia. Oſtendi poteſt ex dictis ſpatium d ad ſpatium c eſſe vt ſinum complementi anguli κ a x, ad ſinum complementi anguli l a x. Ponatur enim punctum μ in recta a x eſſe centrum grauitatis, & ex μ demiſſæ ſint ad libras a k, a l perpendiculares μ ξ, μ y. Quoniam oſtenſum eſt ex eò quòd ex centro z demiſſæ ſint ad libras rectę z s, z y perpendiculares; vt ſpatium d ad c, ita eſſe rectam a ſ ad a y, demiſſę verò ponuntur ex centro μ perpendiculares μ ξ, μ y; vt igitur ſpatium d ad c; ita erit recta a ξ ad a y. Sed poſito ſinu toto a μ, ſinus complemẽti anguli ξ a μ eſt recta a ξ; & ſinus complementi anguli y a μ eſt a y; ergo vt d ſpatium ad c, ita eſt ſinus complementi anguli k a x ſeu ξ a μ, ad ſinum complementi anguli l a x ſeu y a μ, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM II.

Ex priori corollario ſequitur portiones librę vtriuſque interceptas inter punctum ſuſpenſionis & inter perpendiculares ex centro grauitatis demiſſas eſſe inęquales, habent enim inter ſe rationem, quam ſinus

complementi angulorum kax, lax inæqualium, ac proinde habentium sinus complementi inæquales, puncta ergo n & o in priori figura non possunt sibi congruere; vnde rectè posuimus rectas n m, o x conuenire extra lineam n o ad partes figuræ f g i h.

PROPOSITIO XII.

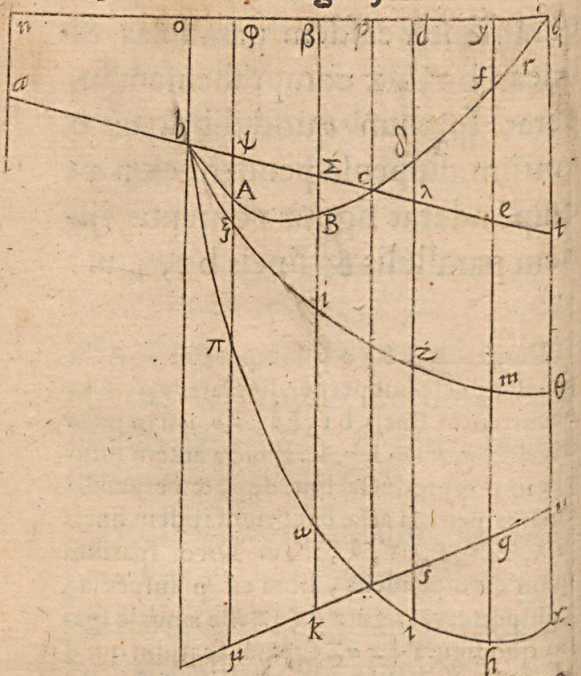
Sint libræ n q partes æquales n o, o p, p q; descriptæ insuper sint lineæ b t, ξθ, πx, μu quarũ b t sit recta, & ξθ, μu sint rectæ vel sectiones conicæ, ita verò sint dispositæ vt ξθ iaceat inter b t, μu, & sumpto in recta b t producta quocunque puncto e, & per e ductâ e y perpendiculari ad libram n o, occurrente prædictis lineis in m, h, g, sicut n o ad o y, siue (ductis per o, p perpendicularibus o b, p c) sicut a b ad b e ita sit g m ad m h, sintque g m, m h ad easdem partes lineæ ξθ. Osten-

dendum eſt ſpatium quod ex q pendens libra ex p ſuſpenſa æquipõderat figuræ ex duobus punctis rectæ p o ſuſpenſæ, interque duas perpendiculares ex illis punctis excitatas contentæ, & inter portiones linearum b t, ξ θ, eſſe æquale ſpatio quo figura quæ ex ijſdem punctis ſuſpenſa & comprehenſa ijſdem parallelis, & portionibus linearum b t, π x ſuperat ſpatium quod, libra ex o tantùm ſuſpensâ, pendens ex n æquiponderat figuræ comprehẽſæ ijſdem parallelis, & portionibus linearum b t, μ u. Oſtendendum præterea eſt ſpatium quod ex o pendens, libra ex p ſuſpensâ, æquiponderat figuræ ex duobus punctis rectæ p q productæ, interque duas perpendiculares ex illis punctis excitatas contentæ, & inter portiones linearũ b t, ξ θ, eſſe æquale ſpatio quo fi-

guram inter eaſdem parallelas & lineas b t, π x comprehenſam ſuperat ſpatium quod librâ ex o tantùm ſuſpenſa pendens ex n æquiponderat figuræ contentæ ijſdem parallelis & lineis b t, μ u.

Puncta in recta o p ſumpta ſint φ, β, & per illa ducte ſint perpendiculares φ μ, β k, occurrentes lineis b t, ξ θ, π ω, μ u in punctis ↓, ξ, π, μ, Σ, l, ω, k. Puncta autem ſumpta in p q producta ſint d, p, & perpendiculares per illa actæ occurrant ijſdem lineis in λ, z, i, ſ, t, θ, x, u. Dico ſpatium quod ex q pendens, libra ex p ſuſpenſa, æquiponderat figuræ ↓ξ lΣ eſſe æquale ſpatio quo figura ↓π ω Σ ſuperat ſpatium quod ex n pendens, libra ex o tantùm ſuſpenſa, æquiponderat figuræ ↓μ κ Σ vt iacet permanenti, & ſpatium quod ex o pendens, libra ex p tantùm ſuſpenſa æquiponderat figuræ λ z θ t vt iacet permanenti, eſſe æquale ſpatio quo figura λi x t ſuperatur à ſpatio quod ex n pendens, libra ex o tantum ſuſpenſa, æquiponderat figuræ λſu t vt iacet permanenti.

Intelligatur ducta linea A B ↓ fr ita vt ſumpto quocunque puncto ↓ in linea ↓Σ, vel e in linea λ t, & ductis ad libram per-



p. 190

pendicularibus φμ, y h occurrentibus lineæ θμz in punctis ξ & m, lineæ vero A B δfr in punctis A, f, ſicut n o ad oφ, vel a b ad bψ, ita ſit ψξ ad ξA, & ſicut n o ad oy: ſeu a b ad b c, ita ſit e m ad m f.

Quoniam vt n o ad oφ quoduis ſegmentum libræ ex puncto o ſumptum, ita ψξ ad Aξ, erit per ſeptimam huius figura ξA B l æqualis ſpatio quod ex n pendens, libra

ex o suspensa, æquiponderat figuræ ↓ξlΣ vt iacet permanenti. Similiter quoniam vt n o ad o φ quoduis segmentum libræ ex puncto o sumptum, ita ξμ ad ξπ, erit per septimam huius figura ξπωl æqualis spatio quod ex n pendens, libra ex o suspensa, æquiponderat figuræ ξμkl vt iacet permanenti. Eadem de causa figura zixθ erit æqualis spatio quod ex n pendens libra ex o suspensa, æquiponderat figuræ z ſg u θ m.

Quoniã igitur duæ figuræ ↓ξlΣ, ξμkl simul conflant totam figuram ↓μkΣ, spatia quæ libra ex o suspensa, æquiponderant duabus figuris ↓ξlΣ, ξμκl vt iacent permanentibus, æquiponderabunt & toti figuræ ↓μkΣ vt iacet permanenti. Cùm igitur ostensum sit duas figuras AξlB, ξπωl æquiponderare duabus ↓ξΣl, ξμκl, duæ figuaæ AξlB, ξπωl hoc est tota AπωB æquiponderabit toti ↓μkΣ: ergo si ex tota figura ↓πωΣ demat̃ur figura AπωB, hoc est spatium quod toti ↓μκΣ æquiponderat pendens ex n, libra ex o tantùm suspensa, restabit figura ↓ABΣ: nam portionem lineæ Ar interceptam parallelis o b, p c non cadere vltra b c ad partes o probatum est sub finem propositionis nonæ: sed figura ↓ABΣ, libra ex p tantùm suspensa, pendens ex q æquiponderat figuræ ↓ξlΣ vt iacet manenti, prout in illa eadem nona propositione demonstrauimus: ergo si ex figura

ψπωΣ detrahatur ſpatium quod pendens ex n libra ex o tantùm ſuſpenſa æquiponderat figuræ ψμkΣ vt iacet manenti, reſtabit ſpatium quod libra ex p tantùm ſuſpenſa, pendens ex q æquiponderat figuræ ψξlΣ vt iacet permanenti, quod erat primo loco demonſtrandum.

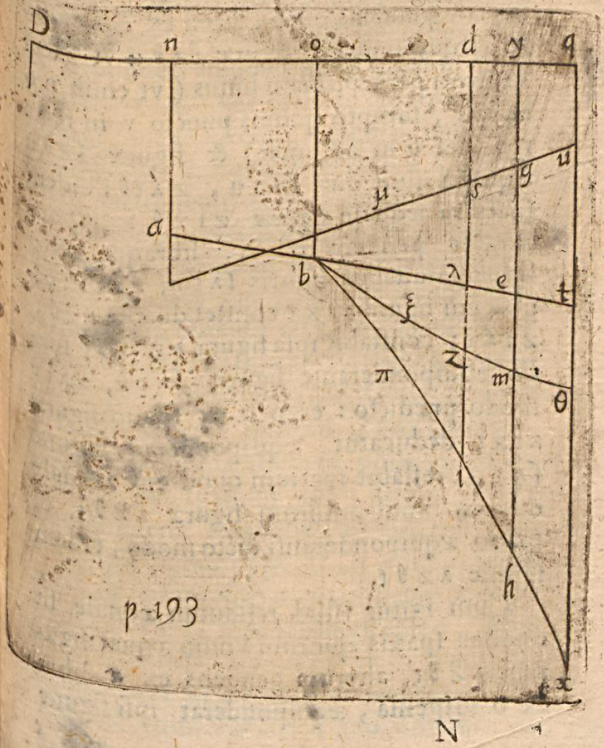
Rurſus ſicuti prius oſtenſum fuit totam figuram AπωB ęquiponderare toti ψμkΣ, libra ex o ſuſpenſa, & ipſa figura AπωB ex n pendente; ita demonſtrabitur totam figuram δixq pendentem ex n, libra ex o tantùm ſuſpenſa, ęquiponderare figurę λſut vt iacet permanenti: ergo ſi ex figura δixq, hoc eſt ex ſpatio quod prędicto modo ęquiponderat figuræ λſut, ſubducatur figura λixt reſtabit figura λδqt; nam lineam δq eſſe ſupra lineam ct, ex eadem propoſitionis nonæ demonſtratione apertum eſt.

Quoniam ergo vt no ſeu op ad od, ita eſt zλ ad zδ; erit diuidendo vt op ſeu no ad pd, ita zλ ad λδ, & idem quocumque alio pũcto inter d & q ſumpto actaque per illud perpendiculari demonſtratur; figura λδqt erit per ſeptimam huius æqualis ſpatio quod pendens ex o, libra ex p ſuſpenſa, æquiponderat figuræ λzθt vt iacet permanenti. Ergo ſi ex ſpatio quod ex n pendens libra ex o tãtùm ſuſpenſa, æquiponderat figuræ λſut dematur ſpatium λixt reſtabit ſpatium quod

quod pendens ex o libra ex p tantum suspensa æquiponderat figuræ λ z θ t, quod erat secundo loco probandum.

COROLLARIVM I.

Quòd si linea ξθ non iaceat inter lineas b t, μ u, sed ipsa b t iaceat inter lineas μ u, ξθ, & lineæ g m, m h sint ad oppositas partes lineæ ξθ; ostendi potest si ex



ſpatio λixt deducatur ſpatium quod ex n pendens æquiponderat figuræ λſut vt iacet manenti, libra ex o ſuſpenſa; reſiduũ, factis on, nD æqualibus, pendens ex D, libra ex n tantùm ſuſpenſa æquiponderare figuræ λzθt vt iacet manenti quomodocunque puncta d & q ſumpta fuerint in recta oq in infinitum producta ad partes q.

Quoniam enim figuræ zixθ ſpatium æquale, pendens ex n, libra ex o ſuſpenſa, æquiponderat figuræ ſzθu vt iacet manenti per ſeptimam huius (vt enim no ad oy, ſumpto quouis puncto y in recta no, ita gm ad mh) & figuræ ſzθu æquales ſunt duæ ſλtu, zλtθ; idem ſpatium æquale figuræ zixθ æquiponderabit pendens ex n, libraque ex o ſuſpenſa duabus figuris ſλtu, zλtθ: ergo cùm figura λixt conſtet duabus λzθt, zixt; conſtabit ipſa figurâ λzθt, & ſpatio æquiponderante figuris ſλtu, zλtθ modo prædicto: ergo ſi ex ſpatio figuræ λixt deducatur æquiponderans figuræ ſλtu, reſtabit ſpatium quod erit æquale duobus ſimul nimirum figuræ λzθt, & ſpatio æquiponderanti dicto modo, eidem figuræ λzθt.

Cùm igitur iſtud reſiduum æquale ſit duobus ſpatiis quorum vnum æquat figuram λzθt, alterum pendens ex n libra ex o ſuſpenſa, æquiponderat ipſi figuræ

λ z θ t vt iacet permanenti; erit per corollarium propositionis decimæ huius ipsum residuum æquale spatio quod libra ex n tantùm suspensa, pẽdens ex D æquiponderat figuræ λ z θ t vt iacet manenti, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM II.

Ex his apertè constat libra suspensa ex p in figura prima, quæ ipsi propositioni respondet, assignari posse spatium quod figurę ↓ ξ l Σ vel λ z θ t æquiponderet suspensum ex extremo brachij ipsi figuræ oppositi, & æqualis rectæ n o; si datum fuerit rectilineum æquale figuræ ↓ π ω Σ, vel λ i x t; & rectilineum quod, libra ex o suspensa, pendens ex n æquiponderat figuræ ↓ μ k Σ vel λ ſ u t vt iacent permanentibus. Ostensũ est enim excessũ quo differunt data rectilinea, esse æqualem eiusmodi spatio æquipõderanti: Cõstat quoque in figura secunda quæ ad corollariũ primum est apposita assignari posse, libra ex n suspensa, spatium quod figuræ λ z θ t æquiponderet suspensum ex extremo brachij ipsi figuræ oppositi, & æqualis rectæ n o; si datum fuerit rectilineum æquale figuræ λ i x t, & rectilineum quod, librâ ex o suspensa, pendens ex n æquiponderat figuræ λ ſ u t vt iacet manenti. Ostẽsum est enim excessum quo differunt da-

ta rectilinea esse æqualem eiusmodi spatio æquiponderanti.

Propositio XIII.

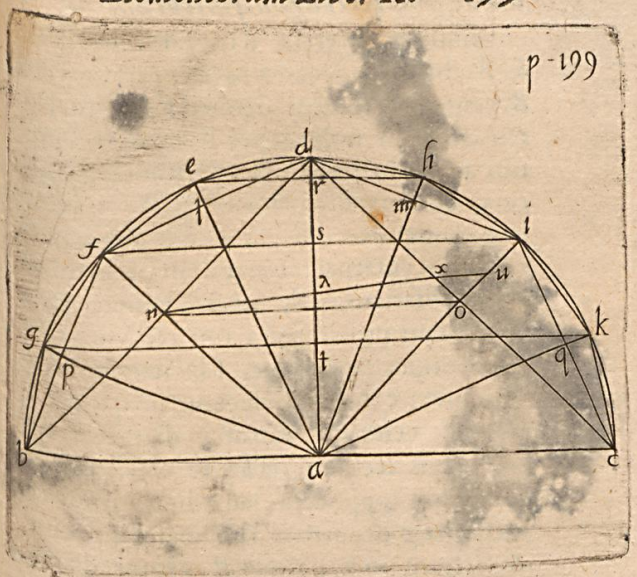
Segmentum hyperbolæ habet centrum grauitatis in diametro bifariam secante rectam quæ arcum segmenti subtendit; segmentum quoque circuli vel ellipsis quod maius non sit semicirculo vel semiellipsi centrum grauitatis habet in eadem diametro.

Istud de parabolâ ostendit Archimedes propositione quartâ libri secundi de æquiponderantibus; parique prorsus modo extendi potest ad alias sectiones conicas, vt benè aduertit Commandinus libro de centro grauitatis solidorum. Vt tamen de eiusmodi extensione nullus dubitare valeat, ostendendum est aliis sectionibus communem esse illam proprietatem, quam de parabola Archimedes demonstrauit; & ex qua demonstratio centri grauitatis in eiusmodi segmento pendet, ; ea autem proprietas hæc est.

Sit quoduis ſegmentum a d c ſectionis centricæ iuxta conditiones in propoſitione appoſitas, cuius baſis b c recta, bifariam ſecta in a; diameter ad quam b a eſt ordinatim applicata ſit a d. Iunctis rectis b d, c d, & bifariam ſectis in n, o; per n & o ductæ intelligantur diametri n f, o i, occurrentes ſectioni in f, i. Rurſus iunctæ rectæ b f, f d, d i, i c bifariam ſectæ intelligantur in p, l, m, q, & per eiuſmodi pũcta ductæ diametri p g, l e, m h, q k, occurrentes ſectioni in g, e, h, k; & idem obſeruetur procedendo ad alias quotcunque diuiſiones, iunctis rectis g b, g f, f e, e d, d h, h i, i k, k c. Puncta quæ pari numero ad partes oppoſitas puncti d diſtant iungatur rectis e h, f i, g k, occurrẽtibus diametro in r, ſ, t. Oſtendendũ eſt rectas e h, f i, g k

eſſe parallelas rectæ bc. *Eiuſmodi figuram appellat Archimedes inſcriptam γνωρίμως, quod verto, notâ & conditâ ratione.* Vel quod in idem rèdit, quantum ad præſens inſtitutum attinet, oſtendendum eſt ſi iunctis rectis bd, cd, recta dc bifariam ſecetur in o, & per o ducatur diameter ao, occurrēs ſectioni in i, & per i agatur iſf ordinatim ad diametrum da applicata, hoc eſt parallela rectæ bc, occurens diametro in in ſ, & ſectioni in f, & per f agatur diameter fa, occurrens rectæ bd in n, ipſam bd bifariam ſecari in n.

lungatur per puncta n, o recta no; erit no parallela rectæ bc, ac proinde in triāgulo bdc, latera bd, cd proportionaliter ſecabuntur in n & o, & ſicut dc ſecatur bifariam in o, ita & bd ſecabitur bifariam in n. Non ſit enim, ſi fieri poteſt, recta no parallela, & per n agatur



n x u parallela occurens rectæ a i in u & rectæ d c in x. Quoniã in triãgulo a f i lateri f i parallela ponitur n u occurrens diametro in λ, vt f s ad s i ita erit n λ ad λ u; sunt ergo n λ, λ u æquales, cùm ordinatim applicatæ f s, s i sint æquales. Similiter cùm in triangulo b d c lateri b c parallela ponatur n x, vt b a ad a c, ita erit n λ ad λ x; ergo cùm b a, a c sint æquales, erunt n λ, λ x æquales: ergo cùm λ x, λ u sint æquales eidem n λ erunt inter se æquales pars & totum. Non ergo recta n o conuenit cum recta b c, sed est illi parallela.

Similiter ſi rectæ d i, f d iungantur, & d i bifariam ſecetur in m; per m verò & centrum ducatur diameter m h occurrens ſectioni in h, & per h agatur ordinatim ad diametrum d a applicata h r ex recta occurrens diametro in r, & ſectioni in e; oſtendetur ſi per e ducatur diameter e l occurrens rectæ f d in l, ipſam f d ſecari bifariam in l, iuncta ſcilicet recta l m, ſicuti prius iuncta fuit recta n o.

Denique ſi rectæ i c, f b iungãtur, earumque i c bifariam ſecetur in q; per q verò & centrum ducatur diameter q k occurrens ſectioni in k, & per k agatur ordinatim applicata ad diametrum d a recta k t g occurrens ipſi diametro in t, & ſectioni in g, perque g agatur diameter g p occurrens rectæ b f in p, oſtendetur ipſam b f bifariam ſecari in p; ſimilitudinem, vti ſuperius, recta p q iungatur. Cùm enim in trapezio b f i c latera parallela f i, b c bifariam ſecentur occurſu diametri a f ad quam ordinatim ſunt applicata, omnes rectæ quæ inter latera f b, i c iacebunt parallelæ lateribus b c, f i, bifariam ſecabuntur occurſu rectæ a f, vt planum eſt ex iis quæ ad quartam ſextu demonſtrantur; ergo ſicuti oſtenſum eſt in primo caſu rectam n x, ſi parallela ponatur rectæ b c & non congruere rectæ n o, bifariam ſecari occurſu rectæ a d, ita hic oſtendetur quamuis aliam rectam non

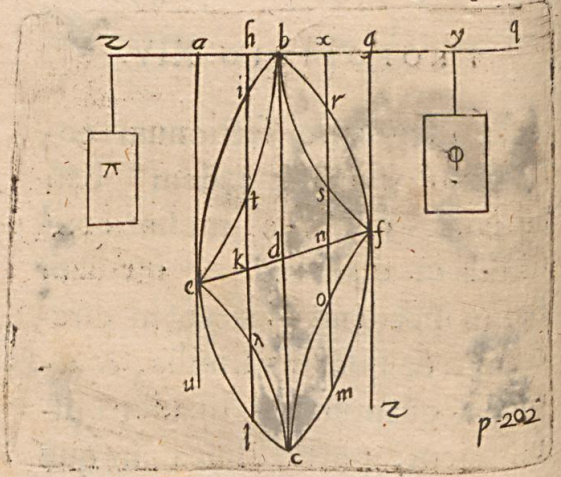
congurentem rectæ p q per p ductam, si parallela ponatur rectę b c, bifariam secari occursu rectę a d; ac proinde in idem absurdum primi casus fiet reductio; cætera enim eodem prorsus modo in isto & in illo casu se habent, & demonstrantur. Si ergo parallelæ dicta ratione ducantur quotcunque, & per extrema oppositæ ducantur diametri, ipsæ bifariam secabunt rectas subtendentes arcus oppositos inter easdem parallelas positos, ac proinde descripta erit figura γνωρίμως, & rectæ prædictæ h e, f i, g k erunt parallelæ, eritque locus demonstrationi Archimedis, hoc tantùm exigenti ad hoc vt possit planè transferri in segmentum sectionis centro præditæ.

Propositio XIV.

Si duo segmenta sectionum conicarum super eadem basi ad partes oppositas ita sint constituta vt diametri per mediam basim incedentes iaceant in directum, & ipsa sint similia, & æqualia quantum ad diametri diuisionem, portio lineæ in quâ

sunt diametri connectens centra grauitatis bifariam secatur occursu communis basis, iste verò occursus est centrum grauitatis figuræ compositæ ex vtroque segmento.

Sectionis conicæ segmenta sint b f c, b e c super basi communi b d c ita constituta, vt diametri eorum f d, d e secent basim b c bifariam in d iaceantque in directum; ipsa autem segmenta sint æqualia & similia quantum ad diametri diuisionem; eorum verò centra grauitatis sint puncta k & n; sunt enim per præce-



p 202

dentem in diametris d e, d f. Dico rectam k n secari bifariam in d; totiusque b c c f centrum grauitatis esse punctum d.

Per e & f ductæ sint rectæ e u, f z parallelæ basi b c, quæ cùm sint parallelæ ad ordinatim aplicatam b c, & per e, f vertices sectionum ductæ; tangent sectiones. Per b ducatur b q perpendicularis ad basim b c, occurrens tangentibus in a, g. Intelligantur ita ductæ lineæ b f f, f o c, c n e, e t b; vt sumpto quocunque puncto h in rectâ a b, sicut a b ad a h, ita sit (ductâ per h recta h n occurrente lineis b i e, b t e, e d, e n c, e l c in punctis i, t, κ, λ, l) i k ad k t, & k l ad k λ, ac proinde tota i l ad totam t λ; similiter sumpto quocunque puncto x in rectæ b g, & per illud ducta x m æquidistante rectę b c, occurrente lineis b r f, b f f, d f, f o c, f m c in r, s, n, o, m, sicut b g ad g x, ita sit r n ad n s, & n m ad n o, ac proinde tota r m ad totam s o. Rectæ b g fiat g y æqualis & rectæ b a recta a z. 32. secundi Conic.

Si igitur libra b y intelligatur suspendi ex g, & sustinere solum segmentum b c f pendens ex punctis b, g, cui ex puncto y spatium φ pendens æquiponderet, erit spatium φ æquale figuræ b f f o c d. Cùm enim sumpto quouis puncto x in recta g b, vt g y ad g x, ita sit r m ad s o, figura b f f o c d erit æqualis spatio φ per septimam huius. Similiter si libra a b intelli-

gatur ex a suspensa, & sustinere tantùm segmentum b e c ex punctis a, b pendens vt iacet, & ex z appendi spatium π ipsi segmento æquiponderans, figura b t e λ c d erit æqualis spatio π.

Rursus quoniam segmenta b e c, b f c sunt similia & æqualia quantum ad diametri diuisionem, erunt rectæ d e, d f æquales, & quæcunque ipsi e f ducta fuerit parallela secabitur bifariam occursu rectæ b c; & si in rectis d e, d f sumantur à puncto d portiones quæcunque d k, d n æquales, & per k, n applicentur l i, m r rectæ parallelæ basi b c, erũt ipsæ l i, m r æquales per vigesimam secundam & vigesimam tertiam propositiones libri præcedentis; & per vigesimam quartam, ipsa segmenta erunt æqualia, cùm se habeant vt perpendiculares ex punctis e & f ad basim b c demissæ, quæ sunt æquales, cùm rectæ e d, d f sint æquales, & anguli ad verticem d sint etiam æquales.

Rursus quoniam d e, d f sunt æquales, & e u, f z sunt parallelæ, erunt b a, b g æquales, ac proinde quatuor rectæ z a, a b, b g, g y erunt æquales. Præterea quoniam positis d κ, d n æqualibus ac proinde b h, b x, residua a h, x g sunt æqualia; & vt z a ad a h, hoc est g y ad g x, ita est h l ad λ t, & x m ad r o; ergo vt h l ad λ t, ita x m ad r o; & alternando vt h l ad x m, ita λ t ad r o; ergo cùm h l, x m sint

æquales; erunt quoque λt, ro æquales; ergo per sextam præcedentis figura b t e λ c d est æqualis figuræ b f t o c d; sed prædictis figuris æqualia sunt spatia π, φ ergo spatia π, φ sunt æqualia.

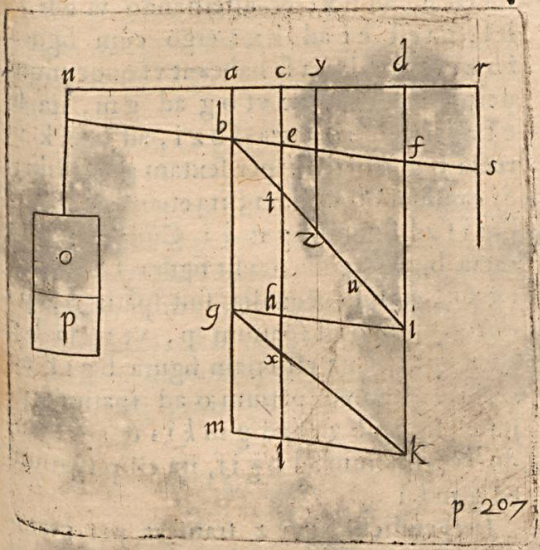
Cùm igitur centra grauitatis ponantur esse in k & n, vt brachium z a ad a h, ita erit segmentum b e c ad spatium π: & vt brachium y g ad g x, ita erit segmentum b f c ad spatium φ, per ea quæ ad sextam quadraturæ paraboles ab Archimede demonstrantur: ergo cùm segmentum b f c sit æquale segmento b e c, vt ostensum fuit, & spatium π spatio φ: vt segmentum b f c ad spatium φ, ita erit z a ad a h, & y g ad g x: ergo vt z a ad a h, ita y g ad g x: & alternando vt z a ad y g, ita a h ad g x: sed z a, y g sunt æquales; ergo a h, g x sunt æquales: ergo residuæ h b, b x sunt æquales, quod erat primo loco ostendendum. Aliunde cùm segmenta b e c, b f c sint æqualia, & recta k n connectens eorum centra bifariam secetur in d vt iam ostensum est, erit d centrum grauitatis magnitudinis compositæ b e c f per quartam libri primi æquiponderantium.

PROPOSITIO XV.

Si cuiuis figuræ contentæ ſub rectis vel ſectionibus conicis ita adiungatur alia figura vt rectæ omnes, quæ vni aſſignatæ æquidiſtantes in figuris duci poſſunt, ſint in eadem ratione; centra grauitatis vtriuſque figuræ ſunt in eadem illi aſſignatæ æquidiſtante.

Sit figura b g i f cui adiuncta ſit alia figura g m k i, dataque ſit recta r ſ: ita verò ſe habeat vna figura ad aliam, vt quæcunque recta e l ducatur æquidiſtans datæ r ſ, & ſecans figuras in e, h, l: vt b g ad g m, ita ſit e h ad h l. Dico centra grauitatis vtriuſque figuræ b g i f, g m k i eſſe in eadem rectâ ipſi r ſ æquidiſtante.

Ad rectam r ſ incidat perpendicularis n r, quæ ponatur eſſe libra ſuſtinens figuras b g i f, g m k i coniunctas per perpendicula a b g m, d f i k. Intelligãtur ductæ lineæ b u i, g x k ita vt deſignato quocunque n a brachio libræ, quouis perpendiculo c l ſecante figuras & occurren-



p. 207.

te lineis, nr, bf, bui, ghi, gxk, mk in punctis c, e, t, h, x, l; vt na ad ac, ita sit eh ad et; & hl ad hx libra ex a suspensâ, spatium o ex n pendens æquiponderet figuræ bgif vt iacet manenti; & spatium p indidem pendens figuræ gmki vt iacet manenti. Quoniam vt na ad ac, ita (sumpto quocunque puncto c & per illud ducto perpendiculo cl) eh ad et, & hl ad hx, erit per septimam huius figura befiu æqualis spatio o: & figura igxk æqualis spatio p. Rursus quoniam vt na ad ac, ita est eh ad et, & hl ad hx: ergo vt eh ad et,

ita eſt h l ad h x; & alternando vt e h ad h l, ita eſt e t ad h x: ergo cùm figuræ f b z i, i g x k ita ſe habeant vt quocunque perpendiculo ſectæ vt b g ad g m, ita ſit e t ad h x; erit figura f b z i, ad i g x k vt recta b g ad g m, per ſextam primi libri; & eandem ob cauſam, ita etiam erit figura b g i f ad figuram g m k i. Cùm igitur vt recta b g ad g m, ita ſit figura f b z i, ad i g x κ, & ipſis æqualia ſint ſpatia o, p, erit ſpatium o ad ſpatium p, vt recta b g ad g m: ſed ita eſt etiam figura b g i f ad g m κ i; ergo vt ſpatium o ad ſpatium p, ita eſt figura b g i f ad g m k i, & alternando vt o ſpatium ad b g i f, ita eſt p ſpatium ad g m k i

Perpendicularis y z tranſeat per grauitatis centrum figuræ b g i f, & occurrat libræ in y: ergo per ſextam quadraturæ paraboles vt n a recta ad a y, ita eſt figura b g i f ad ſpatium o. Si fieri poteſt, centrum figuræ g m κ i non ſit in perpendiculo y z, ſed in perpendiculo e c occurrente libræ in c: ergo vt n a recta ad a c, ita eſt ſpatium g m k i ad ſpatium p: ſed vt ſpatium g m κ i ad ſpatium p, ita oſtenſum eſt eſſe ſpatium b g i f ad ſpatium o, & vt ſpatium b g i f ad ſpatium o, ita eſſe rectam n a ad a y; ergo vt n a ad a c, ita eſt n a ad a y; ergo rectæ a y, a c pars & totum ſunt æquales. Non igitur centrum grauitatis

figuræ

figuræ g m k i est extra perpendiculum y z, in quo positum est iacere centrum grauitatis figurę b g i f, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

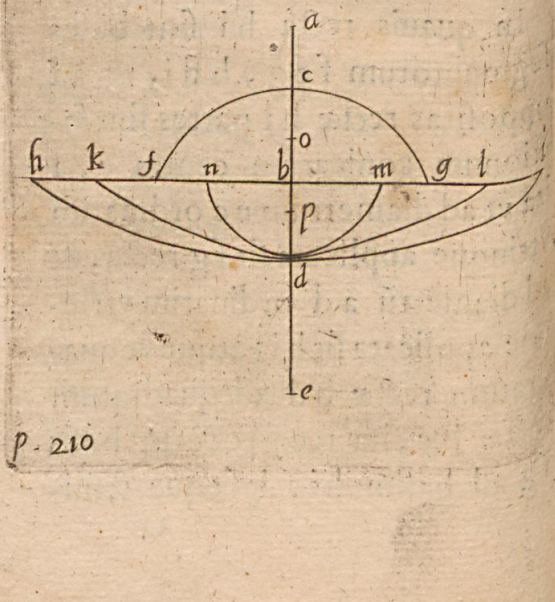
Hinc apertum est centrum compositę magnitudinis b m k f esse in eadem parallelâ, in qua sunt centra partium duarum componentium; nam centrum compositę magnitudinis, est in rectâ coniungente centra partium duarum ipsam componentium per quartam primi ęquiponderantium.

PROPOSITIO XVI.

In quauis rectâ h i sint bases segmentorum f e g, h d i, & ad oppositas rectæ h i partes sint sectionum conicarum centra e, a ita vt ad diametrum e c ordinatim vtrinque applicata sit f g recta, & ad diametrũ a d ordinatim vtrinque applicata sit h i; atque vt quadratum rectæ b d ad quadratum rectæ b c, ita reciprocè sit basis f g ad basim h i, ipsæque semi-

diametri a d, e c ſint ſimiliter diuiſæ in b; ac proinde vt b d, b c, ita ſint a d, e c. Oſtendendum eſt centrum grauitatis figuræ f c g i d h compoſitæ ex vtroque ſegmento f c g, h d i eſſe in puncto b.

Quoniam enim vt quadratum rectæ b d, ad quadratum rectę c b, ita ponitur eſſe baſis f g ad baſim h i, ſi vt recta b d ad c b, ita fiat f b recta ad b k, ſeu b l, ac



p. 210

proinde tota f g ad *k* l; erit ipsa κ l ad h i, vt b d ad c b: nam ratio quadrati b d ad c b est duplicata rationis rectę b d ad c b. Intelligatur segmentum k d l cuius centrum a; quoniam segmenta f c g, k d l sunt similia quantum ad sectionem diametri, & ad inclinationem; & quoniam vt b d recta ad c b, ita reciprocè est f g recta ad κ l, segmentum f c g erit æquale segmento *k* b l, per corollarium quartum propositionis vigesimę secundę libri primi. Quoniam verò segmenta κ d l, h d i non discrepant nisi in basibus, habebunt se vt bases k l, h i, per quintum corollarium eiusdem propositionis.

Rursus vt c b ad f b g bifariam sectam in b, ita fieri intelligatur b d ad n b m bifariam sectam in b, & per n, d, m intelligatur descriptum segmentum n d m ex centro a; erunt segmenta n d m, f c g omninò & absolutè similia, ac proinde rectæ c b, b d, in quibus sunt centra gravitatis segmentorum f c g, n d m per huius decimam tertiam proportionaliter secabuntur. Sint ea centra o & p: ergo vt c b ad b d, ita erit o b ad b p: sed segmenta h d i, n d m cùm sint similia quantum ad diametri sectionem, & habeant bases in rectâ *k* l secantur secundum rationem rectarum h i, n m, per primum corollarium propositionis vigesimæ secundæ citatæ: ergo per præcedentem habent cen- 26. primi huius.

trum grauitatis in eadem ad baſim k l parallela: ergo cùm illud etiam habeant in recta e a per decimam tertiam huius: centrum grauitatis erit in p occurſu parallelæ per p ductæ & rectæ e a.

Quoniam ergo vt recta o b ad b p (hoc eſt vt recta c b ad b d) ita oſtenſum eſt eſſe ſegmentum h d i ad ſegmentum f c g, recta o p centra o & p connectens ſecta erit in b ſecundum rationem reciprocam grauium inde pendentium; ergo punctum b eſt centrum magnitudinis compoſitæ ex vtroque ſegmento h d i, f c g, quod erat demonſtrandum.

26. primi huius.

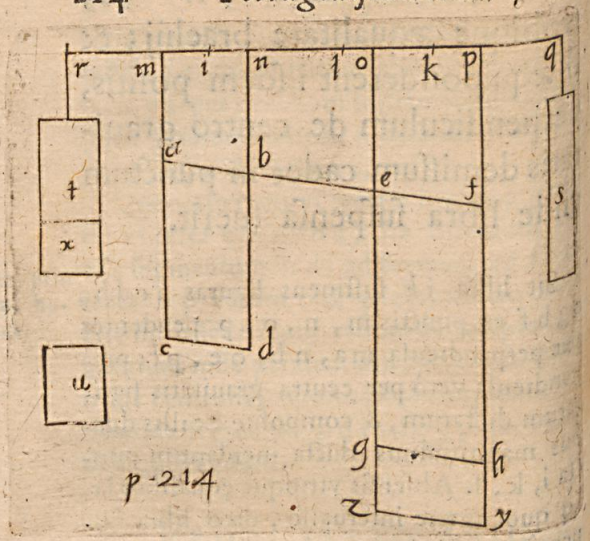
Propositio XVII.

Si duo ſegmenta pendeant ſingula à libræ duobus punctis, ipſa verò libra ſuſpendatur à puncto in quod cadit perpendiculum tranſiens per centrum grauitatis compoſitæ ex vtrâque figurâ magnitudinis; ſpatium quod æquiponderabit vni ſeorſum libratæ, æquiponderabit & alteri ſeorſum etiam appenſæ, poſitâ v-

trobique æqualitate brachij; & si æquiponderent iisdem positis, perpendiculum de centro grauitatis demissum cadet in punctum vnde libra suspensa fuerit.

Sit libra i *k* sustinens figuras a c d b, e g h f ex punctis m, n, o, p pendentes per perpendicula m a, n b, o e, p f; perpendicula verò per centra grauitatis figurarum dictarum, & compositę ex illis duabus magnitudinis ducta incidant in puncta i, k, l. Abscissis vtrinque æqualibus l r, l q quocunque interuallo, dico libra suspensa ex l spatium quod pendens ex r æquiponderat figurę e g h f vt iacet manenti, esse æquale spatio quod pendens ex q æquiponderat figuræ a c d b vt iacet manenti. Et si sit æquale dico perpendicularem per l ductam transire per centrum magnitudinis compositæ ex duabus a c d b, e g h f.

Quoniam per puncta i, *k* perpendicula ducta transeunt per centra grauitatis, si figuræ suspendantur ex i & *k* tantùm, non mutabunt positionem vt dictum est in octauâ huius. Et quoniam perpendicularis per l ducta transit per centrum magnitudinis compositæ ex a c d b, e g h f; libra ex l suspensa, æquiponderabit figura ex *k* tantùm pendens figuræ ex i tantùm pendenti.



Si ergo vt recta l q ad l k, ita fiat ſpatium e g h f ad ſpatium ſ, quod ex q pendeat, ipſum ſ æquipõderabit eidem figuræ a c d b vt iacet manenti, cui figura e g h f æquiponderat ex k pendens, ſicut probatum eſt in octaua huius. Similiter ſi vt eſt l r recta, ſeu l q ipſi æqualis, ad l i ita fiat ſpatium a c d b ad ſpatium t quod ex r pendeat, ipſum t æquiponderabit eidem figuræ e g h f vt iacet manenti, cui figura a c b d æquiponderat ex i pendens.

Vt recta l q ad l i ita fiat ſpatiũ e g h f ad ſpatium u. Quoniam vt l k recta ad l q, ita eſt ſpatiũ ſ ad e g h f; & vt l q recta ad

li, ita est e g h f spatiū ad u: ergo ex æquo vt l k recta ad l i, ita est spatium ſ ad spatium u, & inuertendo vt recta l i ad l k, ita est u ad ſ. Rursus quoniam vt rectâ l q ad l i, ita est spatium e g h f ad spatiū u, & ita etiā est spatiū a c d b ad t, ergo vt spatium e g h f ad u, ita est spatium a c d b ad t; & alternando vt spatium e g h f ad a c d b, ita est spatium u ad t: sed vt spatium e g h f ad a c d b, ita est recta i l ad l k per sextam aut septimam æquiponderantium, cùm libra ex l suspensa sibi inuicem æquiponderēt ex i & k pendentia; ergo vt recta i l ad l k, ita est u ad t: sed vt recta i l ad l k, ita ostensum est esse ipsum spatium u ad ſ: ergo spatia t & ſ sunt æqualia. 9. quinti Euc.

Iam spatia t & ſ sint æqualia. Dico perpendiculum per l ductum transire per centrum grauitatis magnitudinis compositæ ex a c d b, e g h f. Si enim fieri potest vt partes a c d b, e g h f magnitudinis compositæ ex a c d b, e g h f libra ex l suspensa non inuicē æquiponderent, fiet inclinatio libræ ad aliquam partium, fiat ad partes i, & ad partem e g h f addatur spatium g z y h quod necessarium est ad hoc vt æquilibrium fiat. Quoniam ergo, libra ex l suspensa, perpendicularis per l transit per centrum compositæ ex magnitudinibus a c d b, e z y f; eadem libra ex l suspensa, & sustinente tantùm partem e z y f,

cui ex r pendens æquiponderabit ſpatium, id erit æquale ſpatio ſ, quod ex q pendens libra ſuſpenſa itidem ex l æquiponderat figuræ a c d b; quod eſt abſurdum, cùm ſpatium ex r pendens ſit maius. Addito enim g z y h ſpatio æquiponderet ſpatium x; cùm ſpatium t æquiponderet figuræ e g h f, totum t x æquiponderabit toti e z y f: ergo t x eſt maius ſpatio t; atqui t ponitur æquale ipſi ſ: ergo ſpatium t x eſt maius ſpatio ſ. Non ergo &c.

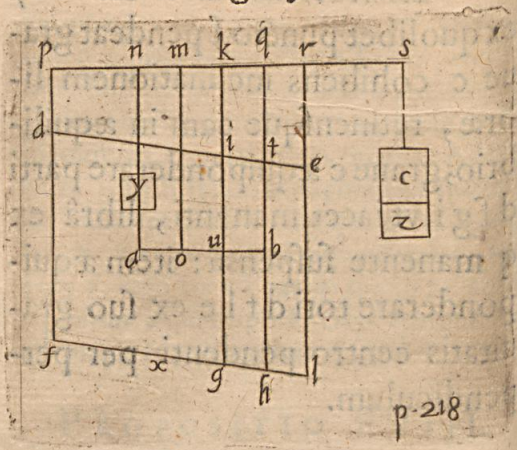
PROPOSITIO XVIII.

Sit figura quæcunque d f l e, diuiſa in duas d f g i, i g l e, & earum alterutrius l e g i centrum grauitatis ſit b. Sit libra p ſ ſuſtinens figuram eandem d f l e ſuſpenſam ex punctis p, r. Ex centro b perpendiculum ad libram incidens ſit b q, quod non ſecet figuram d i g f. Oſtendendum eſt ſuſpenſione libræ facta ex puncto q illam inclinatum iri ad partem d f g i: Et ſi ad partes oppoſitas

ex quolibet puncto ſpendeat graue c cohibens inclinationem libræ, retinenſque eam in æquilibrio; graue c æquiponderare parti d f g i vt iacet manenti, librâ ex q manente ſuſpensâ: item æquiponderare toti d f l e ex ſuo grauitatis centro pendenti per perpendiculum.

Partis d f g i centrum grauitatis ſit a, iunctaque recta a b ita diuiſa ſit in o, vt ſicut ſpatium d f g i ad ſpatium i g l e, ita ſit recta b o ad o a, erit igitur o centrum grauitatis totius figuræ d f l e per ſextam aut ſeptimam propoſitionem libri primi Æquiponderantium: ergo libra ſuſpenſa ex q inclinatio eius fiet ad partes p, donec punctum o congruat perpendiculari ad horizontem ex q puncto demiſſæ.

Rurſus quoniam in ſecunda propoſitionis parte ponitur graue c ſuſpenſum ex ſ cohibere libram, & retinere eam in ſuo ſitu ex q ſuſpenſam; ſi recta q b intelligatur produci vltra totam figuram, eamque diuidere in duas partes d f h, t h l e; eaſque pendêre ex punctis p, q, r duæ ſimul magnitudines t h l e & c manentes vt



iacent æquiponderabunt magnitudini d f h t manenti vt iacet. Quoniam verò recta q b tranſit per b centrum grauitatis figuræ i g l e, pars i g h t ſuſpenſa ex punctis k, q æquiponderabit parti t h l e ſuſpenſæ ex punctis q, r. Cùm ergo libra ſuſpenſa ex q, magnitudo d f h t æquiponderet magnitudini compoſitæ ex t h l e & ex c: & ablata i g h t æquiponderet ablatæ t h l e: reſidua d f g i æquiponderat reſiduæ c.

Demum ex o centro grauitatis magnitudinis d f l e demiſſa ſit linea directionis o m, ſolutiſque ſuſpenſionibus ex p & r, remaneat ſuſpenſa tantùm ex m, manebit ex demonſtratis ab Archimede in eo-

dem situ. Similiter si ex a centro figuræ d f g i emittatur linea directionis & figuræ d f g i suspensio tantùm fiat ex n, ipsa quoque manebit in suo situ; ergo quoniam ligata ex punctis p, k æquiponderare ostensa est graui c; suspensa ex n æquiponderabit eidem spatio c, cum maneat in eodem situ. Rursus quoniam parallelæ sunt n a, m o, q b; vt recta b o ad o a, ita erit q m ad m n: sed vt recta b o ad o a, ita esse ponimus reciprocè spatium d f g i ad i g l e: ergo vt q m recta ad m n, ita est spatium d f g i ad i g l e; ergo inuertendo vt m n ad q m, ita i g l e ad d f g i: ergo componendo vt n q ad m q, ita d f l e ad d f g i: Quoniam igitur libra ex k suspensa figura d f g i pendens ex n æquiponderat spatio c: & quoniam figura d f g i ad figuram d f l e pendentem ex m se habet vt q m recta ad q n ex iam demonstratis: ergo per octauam huius spatium d f l e pendens ex m æquiponderat eidem spatio c, cui spatium d f g i pendens ex n æquiponderare demonstratum fuit. 6. de quadr. parab.

COROLLARIVM I.

Ex his conſequitur ſi libra ſuſtineat figuram d f l e, ex punctis p, r, ſuſpendaturque ex q quod reſpondet centro b; & vt q ſ recta ad q m, ita fiat ſpatium d f l e ad ſpatium c; ipſum c æquiponderare figuræ d f g i vt iacet manenti, & pendenti ex punctis p, κ. Cùm enim figura d f l e ex punctis d, e pendens æquiponderet eidem ſpatio, cui æquiponderat ex puncto m ſolo pendēs; & cùm ex puncto m pendens æquiponderet eidem ſpatio cui figura d f g i, ex puncto n pendens, ſeu quod idem eſt ex punctis p, κ, pendens; & cùm vt q ſ longitudo libræ vna ad q m longitudinem oppoſitam, ita ſit ſpatium d f l e ad ſpatiū c; ipſum c æquiponderabit tàm figuræ d f l e vt iacet manenti; quàm ſoli figuræ d f g i vt iacet manenti.

COROLLARIVM II.

Si quæuis figura d f l e cohæreat libræ p r ſuſpenſæ ita ex q, vt perpendicularis q h diuidens figuram non tranſeat per centrum grauitatis ipſius, ſed illud relinquat ad partes p; diuidat autem in duas partes d f h t, t h l e; & ſumptis vtrinque brachiis æqualibus q ſ, n q, ſuſpenſione

vna figurę d f h t, libra ex q suspensa, vt iacet manenti æquiponderet spatium c z ex s pendens; altera autem libratione figuræ h t e l vt iacet manenti æquiponderet spatium y, libra ex q suspensa; ostendi potest si spatium z fiat æquale spatio y, residuum spatium c æquiponderare toti figuræ d f l e vt iacet manenti. Quoniã enim spatia y & z sunt æqualia, si figura i g h t abscindatur æquiponderans vt iacet spatio z, libra ex q suppensa, recta q h transibit per centrum grauitatis magnitudinis i g l e compositæ ex duabus i g h t, et h l, vt ex præcedenti propositione apertum est. Quoniam ergo spatium cz æquiponderat toti d f h t; & spatium z parti g h t i, reliquum c æquiponderabit parti d f g i. Ergo cùm figura d f l e diuisa sit in duas d f g i, i g l e, & libra ex q suspensa perpendiculum g h transeat per centrum grauitatis figurę i g l e, spatium c æquiponderabit, vt in præsenti ostendimus, toti figuræ d f l e vt iacet manenti libra ex q suspensa.

SCHOLIVM.

Primo aspectu videbimur alicui concludere pugnantia cum illo axiomate Archimedeo, *si granibus secundum quandam distantiam æquiponderantibus, alteri eorum adyciatur aliquod graue, tunc ea non æqua-*

liter ponderant, sed illua deorsum fertur, cui graue fuerit adiunctum: libra etenim ex q suspensa magnitudini d f g i æquiponderat magnitudo c, & eadem magnitudo d f g i accessione nouæ magnitudinis non alleuat pondus c; sed manet pondus c adhuc æque ponderans vti demonstratio præsens contendit. Dubij huius solutio aperta est; quia enim accedit pondus i g l x, cuius centrum grauitatis incidit in præpendiculum ex libræ centro demissum, fit vt magnitudo accedat æque vtrinque ponderans. Non ergo mirum est, quod libra hæreat in æquilibrio, cùm ad partes vtraque lineæ q h grauia i g h t, t h l e æquiponderantia accesserint.

ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM LIBER III.

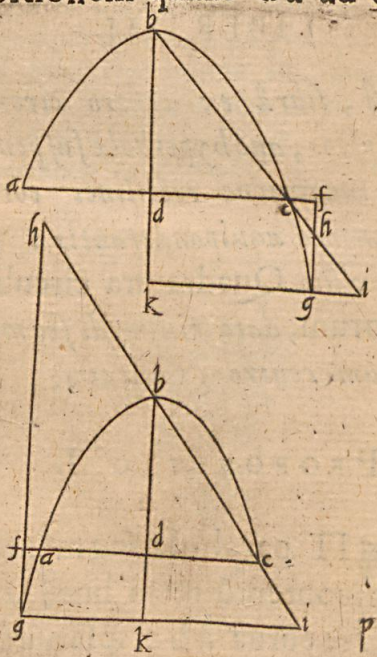
Qui est, librâ ex centro circuli, ellipseos, aut hyperbolæ suspensâ, de inuentione rectilinei eorum segmento æquiponderantis: vnde existit Quadratura circuli & aliorum, *dato eiusmodi segmentorum centro grauitatis.*

PROPOSITIO I.



SIT parabolæ segmentum contentũ rectâ lineâ a c, & curuâ a b c: ipsa autem b d à medio lineæ a c educatur

diametro æquidiſtans, aut ipſa diameter: & b c iuncta producatur. Si alia quæuis linea f h ducatur æquidiſtãs ipſi b d, & ſecans vtraſque a c, c b in f & h, ipſam verò parabolam in g; habebit f h ad h g eandem proportionem quam d a ad d f.



p. 224.

Hæc

Hæc propositio est quarta quadraturæ paraboles, quia tamen in vulgatis libris, diagramma non exibet casum qui nobis in præsenti necessarius est : apponimus eam hîc cum illo. Casus prętermissus est quando punctum g est infra rectam a c, punctumq; f non cadit inter a & c, sicut nec puncta h, i inter b, c, & inter k, g.

Ducatur igitur per g linea κ g æquidistans ipsi a c; quæ occurrat diametro in k, & rectæ b c in i : est igitur vt b d ad b k longitudine, ita d c ad k g potestate per libri primi conicorum vigesimam. Quoniam vero in triangulo b κ i lateri k ι parallela est d c, vt b d, d k ita erunt b c, b i; & componendo vt b d, b k ita b c, b i : quoniam igitur vt b d, b κ longitudine, ita ostensum est esse potestate d c, k g, ergo vt b c, b i longitudine, ita potestate d c, κ g : sed ipsi k g æquale est d f oppositum latus parallelogrammi κ d f g : ergo vt b c, b i longitudine, ita potestate sunt d c, d f.

2. sexti Euc.

33. primi Euc.

Rursus quoniam triangula b c d, h c f sunt similia, (habent enim angulos ad verticem c æquales, & alternos ad d & f item æquales) vt h c, c f, ita erũt b c, c d, & alternando vt h c, b c, ita c f, c d: & componendo in prima figura, dividendo autem in secunda, vt b c, b h, ita d c, d f; quoniam ergo vt b c, b i longitudine, ita ostensum fuit paulò antè esse potestate

d c, d f: & vt d c, d f ita iam monſtratum eſt eſſe b c, b h: ergo vt b c, b i longitudine, ita b c, b h poteſtate: ergo tres rectæ b c, b h, b i ſunt proportionales. 20. ſexti Euc.

Rurſus quoniam vt b i ad b h, ita eſt b h ad b c, ergo diuidendo in prima figura, & componendo in ſecunda, vt b h, h i, ita b c, h c: & alternando vt b h, b c, ita h i, h c, & inuertendo vt b c, b h, ita h c, h i: ſed ſicut d c ad d f, ita oſtenſum eſt eſſe b c ad b h: ergo vt d c ad d f ita eſt h c ad h i: ſed vt h c ad h i, ita eſt f h ad h g (ſunt enim triangula f h c, g h i ſimilia ob eandem rationem qua b c d, h c f oſtenſum fuit eſſe ſimilia) ergo vt c d, d f, ita h f, h g; ipſi autem d c æqualis eſt d a, conſtat ergo d a ad d f eandem habere proportionem quam f h ad h g.

COROLLARIVM.

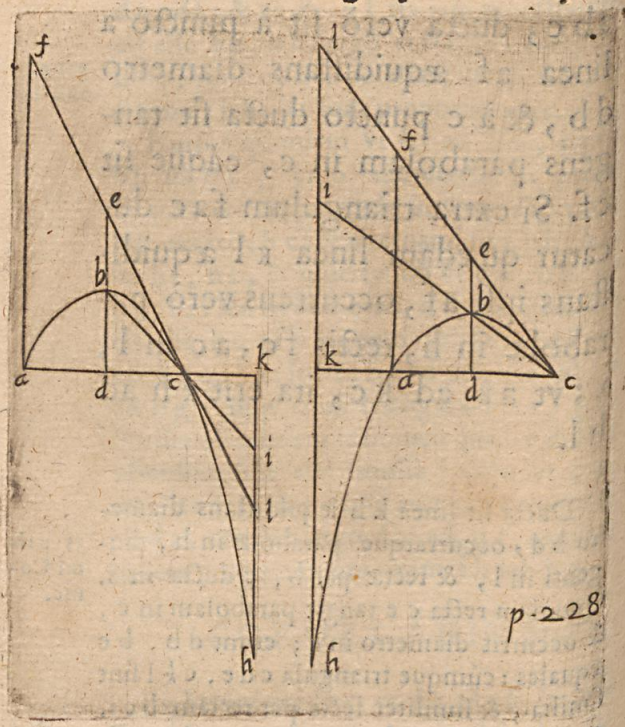
Ex his inferre licet vt d a ad a f, ita eſſe f h ad f g: quoniam enim vt d f, d a, ita h g, f h: ergo componēdo in prima figura, & diuidendo in ſecunda vt a f, d a, ita f g, f h, & inuertendo vt d a, a f, ita f h, f g.

PROPOSITIO II.

Sit parabolæ ſegmentum contentum recta lineâ a c, & curuâ

abc, ducta verò sit à puncto a linea af æquidistans diametro db, & à c puncto ducta sit tangens parabolam in c, eáque sit cf. Si extra triangulum fac ducatur quædam linea κl æquidistans ipsi af, occurrens verò parabolæ in h, rectis fc, ac in l, κ; vt aκ ad kc, ita erit κh ad hl.

Ducta sit linea kh æquidistans diametro bd, occurratque parabolæ in h, tangenti in l, & rectæ per b, c ductæ in i. Quoniam recta ce tangit parabolam in c, & occurrit diametro in e; erunt db, be æquales: cúmque triangula cde, ckl sint similia, & similiter secta per rectam bci, erunt ki, il, vt db, bc; ac proinde erunt ki, il æquales. Quoniam igitur ki, il sunt æquales; æquales verò etiam sunt ad, dc; vt ac ad da, ita erit kl ad ki: sed vt da ad ak, ita ex corollario præcedentis est ki ad kh: ergo ex æquo vt ac ad ak, ita est kl ad kh; & inuertendo vt ak, ac, ita kh, kl: ergo per conuersionem rationis in primâ figurâ, & componendo in secunda vt ak, kc, ita kh, 35. primi Conic.



l h, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex demonstrationis progressu manifestum est vt a c, a *k*, ita esse *k* l, k h, quod perinde verum est in casu quo punctum k cadit inter a & c.

SCHOLIVM.

Cæterum ista quoque propositio est quinta quadraturæ paraboles, sed casus describitur omissus in editionibus illius libelli: in vtraque autem nonnulla restituimus seu vitio temporis intercepta, seu ab ipso Authore omissa, vt benè aduertit Commandimus. Quòd si ab ipso Archimede hæc & alia plurima quæ in eius operibus substituunt Eutocius, Commandinus, aliique, prætermissa fuerunt; confitendum est cum eodem Eutocio theoremata Archimedis esse δυσθεώρητα, atque vt intelligantur necessariam esse ἐπίτασιν ἀκριβοῦς καὶ ἐνεπίβολον φαντασίαν. Quare quod Plutarchus in Marcelli vita asseruit viam qua ille ad rem demonstrandam pergit esse breuem, in confesso est apud omnes; at quod addit, eandem quoque esse planam & expeditam nescio vtrum vllus mathematicarum disciplinarum peritus concesserit.

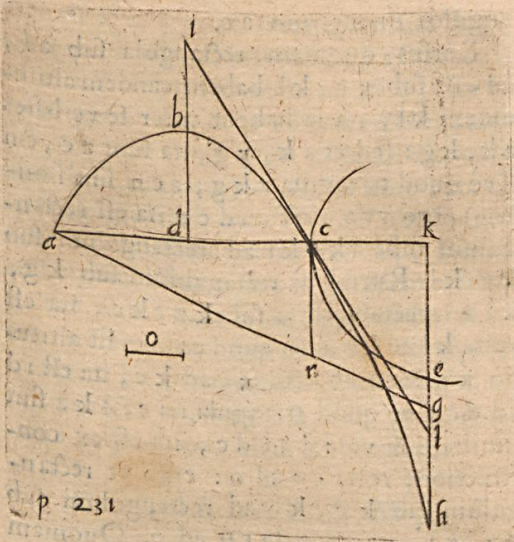
PROPOSITIO III.

Sit parabolæ segmentum contentum rectâ a c, & curuâ a b c, cuius diameter b d, tangens verò

in c ſit c l, occurrens diametro in i. Sit præterea ſectionum oppoſitarum alterutra e, earumque diameter trāſuerſa a c, ad quam quæ ordinatim applicantur, ſint ipſi b d parallelæ. Per c acta ſit recta c n æquidiſtans ipſi b d, abſciſſaque ſit c n lateri recto æqualis; ſi vt d i recta ad c d, ita fiat recta c n ad quartam o; & ordinatim applicetur quæcunque recta k e, occurrens tangenti in l, & parabolæ in h: rectangulum ſub o & ſub k h comprehenſum æquale erit quadrato ordinatim applicatæ k e; ac proinde tres rectæ o, k e, k h proportionales erunt.

17. ſexti Euc.

Quoniam enim recta c n eſt æqualis lateri recto ſectionum oppoſitarum, & eſt parallela ordinatim applicatæ k e, erit rectangulum ſub c *k*, *k* g æquale quadrato ordinatim applicatæ *k* e: ſi enim c n ſit perpendicularis ad a c, rectæ a n, c f de-



terminabunt figuram vt Appollonius loquitur in vigesimâ primâ primi conicorum, hoc est rectangulum sub c κ, *k* g, erit æquale quadrato κ e : sed quamuis c n non sit perpendicularis ad diametrum a c, dummodo c n, κ g sint parallelæ, vt c *k* ad a c, ita est *k* g ad c n : ergo sive c n sit perpendicularis ad diametrum a c sive non sit, semper recta k g est eiusdem magnitudinis ; ergo cum rectangulum sub c k & sub *k* g sit tunc æquale quadrato rectæ κ e, quando c n est perpendicularis ad diametrum ; erit quoque idem rectangulum sub c k & k g eidem quadrato *k* e æquale

2. sexti Euc.

etiam tunc, cum c n non ſecabit ad rectos angulos diametrum a c.

Rurſus quoniam rectangula ſub a k, k l, & ſub κ g, k l habent eandem altitudinem k l, ita ſe habent inter ſe vt baſes a k, k g: ſed vt a k, κ g, ita ſunt a c, c n (eò quod triangula a k g, a c n ſint ſimilia) ergo vt a c recta ad c n ita eſt rectangulum ſub a k, k l ad rectangulum ſub k g k l. Rurſus vt rectangulum ſub k g, k l ad rectangulum ſub k g, k c, ita eſt recta k l ad k c (eò quod eadem ſit altitudo κ g) ſed vt recta κ l ad k c, ita eſt i d ad d c (eò quòd triangula i d c, l k c ſint ſimilia) & vt i d ad d c, ita eſt ex conſtructione recta c n ad o: ergo vt rectangulum ſub k g, k l ad rectangulum ſub k g, κ c, ita eſt recta c n ad o. Quoniam igitur vt rectangulum ſub a k, k l ad rectangulum ſub κ g, κ l, ita oſtenſum eſt eſſe rectam a c ad c n, & vt rectangulum ſub k g, k l ita oſtenſum eſt eſſe rectam c n ad o: ergo ex æquo vt rectangulum ſub a k, k l, ad rectangulum ſub k g, κ c, ita eſt recta a c ad rectam o.

1. ſexti Euc.
4. ſexti Euc.

Quoniam autem vt recta a c ad a k, ita per corollarium præcedentis eſt recta k l ad κ h; erit rectangulum ſub a c, κ h æquale rectangulo ſub a k, k l: ſed rectangulum ſub a κ, κ l ſe habet ad rectangulum ſub k g, k c vt recta a c ad rectam o: ergo rectangulum ſub a c, k h ſe habet ad re-

16. ſex. 11 Euc.

ctangulum sub k g, κ c, hoc est ad quadratum k e (quod rectangulo sub k g, κ c æquale esse ostensum fuit) vt recta a c ad o. Cùm igitur vt recta a c ad o, ita sit rectangulum sub a c, κ h ad rectangulum sub o & k h (eò quod eandem altitudinem k h habeant) & vt a c ad o, ita sit rectangulum sub a c, k h ad quadratum κ e: erit vt rectangulum sub a c, k h ad rectangulum sub o & κ h, ita idem rectangulum sub a c, κ h ad quadratum κ e: ergo rectangulum sub o & κ h est æquale quadrato k e per nonam quinti Euclidis; & tres rectæ o, κ e, k h sunt proportionales, quod erat demonstrandum. 17. sexti Euc.

COROLLARIVM I.

Quòd si punctum k cadat inter a & c, & circa diametrum a c, datâ lateris recti magnitudine c n, descripta sit ellipsis ad cuius diametrum a c ordinatim in dato angulo i d c applicatæ conueniant; eadem erit demonstrationis vis, ostendeturque tres rectas o, k e, k h esse proportionales; erit autem punctum e in perimetro ellipseos.

COROLLARIVM II.

Quoniam tres rectæ o, k e, k h & rectangulum sub o & k h est æquale quadrato

rectæ k e ordinatim applicatæ ad diametrum a c, quadrata ordinatim applicatarum erunt inter se, vt ipsarum portiones inter diametrum k c & parabolam interceptæ, cùm sint æqualia rectangulis contentis sub eadem altitudine o, & sub ipsis interceptis inter diametrum & parabolam, quæ hoc ipso se habent vt ipsæ interceptæ.

1. sext. Euc.

COROLLARIVM III.

Quòd si rectæ a c, d i, c n sint æquales, & d i sit ad a c perpendicularis, recta o erit æqualis semidiametro c d, & figura circa diametrum a c descripta erit circulus, vt ex demonstratis apertum est. Quoniam enim vt d i ad c d, ita est c n ipsi d i æqualis ad o, erit recta o æqualis rectæ d c; & quoniam ordinatim applicatæ ad diametrum a c sunt perpendiculares ad ipsam, & recta c n est ipsi a c æqualis, figura circa diametrum a c descripta erit circulus, vt ex vigesimâ prima primi conicorum apertum est.

PROPOSITIO IV.

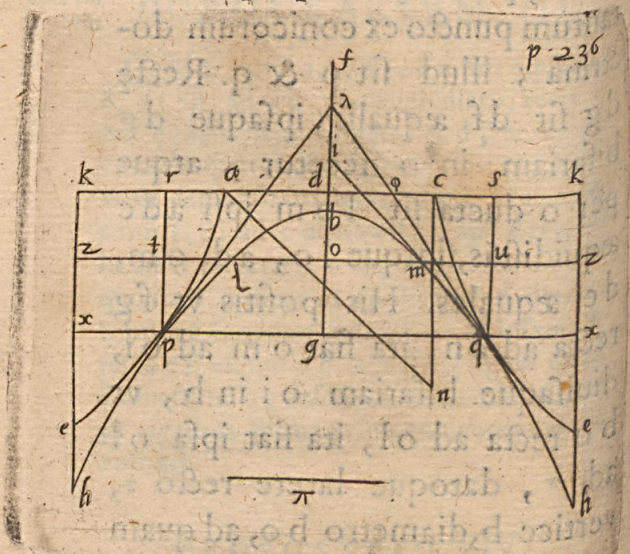
Sint sectiones oppositæ a & c, quarum diameter transuersa

a c, centrum d, tangens c n, sitque ipsa c n æqualis lateri recto sectionum oppositarum, & per d acta sit d g parallela tangenti c n. Diametro a c æquidistet p q, quæ occurret vtrique hyperbolę a & c in vno tantùm puncto ex conicorum doctrinâ; illud sit p & q. Rectę d g sit d f æqualis, ipsaque d g bifariam in o secetur, atque per o ducta sit l o m ipsi a d c æquidistãs, sintque l o, a d, o m, d c æquales. His positis vt f g recta ad c n, ita fiat o m ad o i, diuisaque bifariam o i in b, vt b o recta ad o l, ita fiat ipsa o l ad π, datoque latere recto π, vertice b, diametro b o, ad quam ordinatim applicatæ æquidistent ipsi o l, describatur parabola b l m; ostendendũ est primò parabolam transire per puncta l & m,

26 primi Conic.

52. primi Conic.

atque occurrere hyperbolæ vtrique in punctis p & q; & ſi per quodlibet punctum e vltra p & q ſumptum ducatur recta x e h ipſi d g æquidiſtans, & occurrens rectæ p q in x, tres rectas f g, x e, h e eſſe proportionales.



Per p & q ducantur p r, q s ipsi d g parallelæ, occurrentes rectæ o l in t & u. Quoniam rectangulum sub rectis π & o b est æquale quadrato ordinatim applicatæ per o ductæ, erit illa æqualis ipsi o l; cùm quadratum rectæ o l sit æquale ex constructione rectangulo sub rectis π & b o contento. Rursus quoniam l b m est parabolæ segmentum contentum recta l m & curuâ l b m, eiusque diameter est o b, ipsique o b abscissa est æqualis b i; si per i & m ducatur recta i m, tanget parabolam in puncto m, ex Conicis. Præterea quoniam a & c sunt sectiones oppositæ quarum diameter transuersa a c, ad quam quæ ordinatim applicantur sunt ipsi o b parallelæ; per c verò acta est recta c n æquidistans ipsi b d, & lateri recto sectionum oppositarum æqualis; & vt o i recta inter basim l m & tangentem m i intercepta ad c d, vel ad o m (est enim d o m c parallelogrammum) ita ponitur esse recta c n ad f g quartam; tres rectæ f g, κ e, z h erunt per præcedentem proportionales, & rectangulum sub f g, z h erit æquale quadrato rectæ z e: tres item rectæ f g, r p, & portio rectæ r t intercepta parabola l b m & recta m l erunt proportionales per eandem propositionem: idemque dicendum est de tribus rectis f g, f q, & portione rectæ f u intercepta inter parabolam l b m & rectam m l. Quo-

33 primi Conic.

niam igitur recta f g ponitur dupla rectæ d g ſeu r p, ipſa autem d g ponitur dupla rectæ o g ſeu t p: vt recta f g ad rectam r p, ita erit recta r p ad t p, & recta ſ q ad u q: ſed vt recta f g ad rectam r p ſeu ſ q; ita eſt etiam recta r p ad portionem rectæ r t, vel ſ u interceptam inter rectam l m & parabolam l b m: ergo vt recta r p ſeu ſ q ad t p ſeu u q, ita eſt ipſa r p ſeu ſ q ad portionem rectæ r t vel ſ u interceptam inter rectam l m & parabolam l b m: ergo rectæ t p ſeu u q æqualis eſt portio rectæ t p ſeu u q interceptæ inter rectam t u & parabolam; ergo rectæ r t, ſ u occurrunt parabolæ in punctis p & q, quæ eſt prima pars eius quod erat demonſtrandum primo loco.

9. quinti. Euc.

Rurſus quoniam quadratum k e eſt æquale quadratis k x, x e, & bis rectangulo k x e; rectangulum ſub f g, z h cùm ſit æquale quadrato k e, erit æquale quadratis k x, x e, & bis rectangulo k x e: Quoniam verò rectangulum ſub f g, z h eſt æquale tribus rectangulis ſub f g, z x; ſub f g x e; ſub f g, e h: rectangulum autem ſub f g, z x eſt æquale quadrato k x (ſunt enim z x, k x, f g proportionales, cùm vt f g ponitur dupla rectæ g d, ita x k dupla rectæ z x ponatur eſſe) rectangulum autem ſub f g, x e eſt æquale bis rectangulo ſub k x, x e (rectangula enim ſub k x, x e, & ſub f g, x e

4. ſecũdi Euc.

2. ſecundi. Euc.

17. ſexti. Euc.

cùm eandem altitudinem x e habeant, sunt inuicem vt bases κx, fg; est autem fg; dupla rectæ κx) ergo cùm rectangulum sub fg, zh sit æquale quadrato κx, bis rectangulo kxe, & quadrato xe; & cùm rectangulum sub fg & sub ze sit æquale vt ostendimus, quadrato kx, & bis rectangulo kxe: rectangulum sub fg & sub ze erit minus rectangulo sub fg & sub zh: est ergo zh recta maior quam ze: ergo cùm ex rectangulo sub fg, zh sit ablatum rectangulum sub fg, ze: hoc est quadratum kx & bis rectangulum kxe: relinquetur rectangulum sub fg, eh quod erit æquale quadrato xe; quæ est altera pars eius quod erat primo loco demonstrandum. 5. sext. Euc.

Dico secundò si rectæ gb fiat bλ æqualis, & iungãtur rectæ λp, λq; ipsas λp, λq tangere parabolam & hyperbolã in punctis p, q.

Quoniam gb, bλ sunt æquales erunt rectæ λp, λq tagentes paraboläm in p, q. Rursus quoniam ad parabolæ lbm diametrũ bg ordinatim applicatæ sunt om, gq, erunt vt om, gq, potestate, ita bo, bg longitudine. Præterea quoniam rectæ ob, bi sunt æquales ex hypothe- 33. primi Conic.

21. primi Conic. si, item g b, b λ; ergo, ablatis æqualibus, reſidua o g, i λ erunt æqualia : ſed o g, od ſunt etiam ex hypotheſi æquales : ergo rectæ o d, i λ ſunt æquales; ergo addita communi i d compoſitæ rectæ d λ, i o ſunt æquales; ergo ſi ex recta d λ dematur æqualis rectæ o b, reſiduum erit æquale rectæ b i, cúmque b i, b o ſint æquales, item b g, b λ; vt b o ad b g, ita erit b i ad b λ: ergo vt b o ad b g ita erit o i compoſita ex antecedentibus ad g λ compoſitam ex conſequentibus: Sed d λ, o i ſunt æquales, ergo vt bo, b g, ita d λ, g λ: ſed vt d λ ad g λ, ita eſt d φ ad g q, eò quod in triangulo λ g q lateri g q parallela ſit d φ: ergo vt b o, b g, ita d φ, g q.

12. quinti Euc.

4. ſexti Euc.

Quoniam ergo vt b o ad b g longitudine, ita oſtenſum eſt eſſe o m ad g q poteſtate; & vt recta b o ad b g, ita oſtenſum eſt eſſe rectam d φ ad g q: ergo vt d φ ad g q longitutine, ita o m ad g q poteſtate: ergo tres rectę g q, o m, d φ ſunt proportionales; ſed o m, d c ſunt æqualia latera parallelogrammi d o m c: item g q, d ſ ſunt æqualia latera parallelogrammi d g q ſ: ergo tres rectæ d φ, d c, d ſ ſunt proportionales; cùm ergo ex puncto q ordinatim applicata ſit q ſ ad diametrum c k hyperbolæ c, recta q λ tanget hyperbolam c in puncto q ex conicis. Simili prorſus methodo oſtendetur rectam

37. primi Conic.

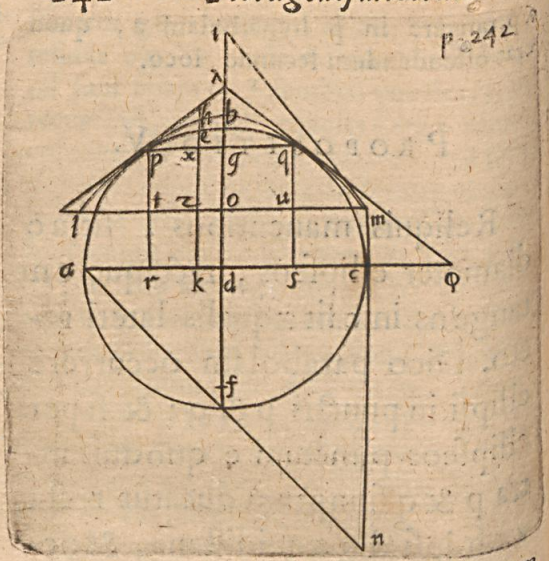
λ p

λp tangere in p hyperbolam a, quod erat ostendendum secundo loco.

Propositio V.

Reliquis manentibus, sit ac diameter ellipseos, rectaque cn tangens in c sit æqualis lateri recto. Dico parabolam occurrere ellipsi in punctis p & q: & si per ellipseos punctum e quoduis intra p & q sumptum ducatur recta κeh ipsi dg æquidistans, & occurrens rectæ pq in x, tres rectas fg, xe, he esse proportionales: & si rectæ gb fiat bλ æqualis, iungaturque λq occurrens diametro ac in φ rectam λq tangere in q parabolam lbm.

Hæc omnia iisdem prorsus verbis ostenduntur, quibus vsi sumus paulò ante idipsim de sectionibus oppositis demonstrando: eandem verò rectam λq tangere ellipsim in eodem puncto q, ita ostendetur paucis immutatis.



Quoniam ad parabolæ l b m diametrum b g ordinatim applicatæ ſunt g q, o m, erunt per vigeſimam primam primi Conicorum vt o m, g q poteſtate, ita b o, b g longitudine. Præterea quoniam rectę o b, b i ſunt ęquales ex hypotheſi, item g b, b λ: ergo ablatis æqualibus reſidua o g, i λ erunt æqualia: ſed o d, o g ſunt etiam ex hypotheſi æquales: ergo rectæ o d, i λ ſunt æquales: ergo additâ communi o λ, compoſitæ d λ, i o ſunt æquales: ergo ſi ex recta d λ dematur recta æqua[illegible] rectæ o b, reſiduum erit æquale rectæ i b; cúmque b i, b o ſint ęquales, item b g, b λ, vt b o ad b g ita erit b i ad b λ: ergo vt b o

ad b g, ita erit o i composita ex antecedentibus b o, b i, ad g λ compositam ex consequentibus b g, b λ: sed d λ, o i sunt æquales; ergo vt b o, b g, ita d λ, g λ. *Cætera nihil differunt ab ijs quæ in priori, quare nec hîc sunt repetenda vsque ad illud* cùm ergo ex puncto q ordinatim applicata sit q f ad diametrum a c ellipseos, recta q λ tanget ellipsim in puncto q. Simili prorsus methodo ostendetur rectam λ p tangere in p eandem ellipsim. 37. primi Conic.

COROLLARIVM I.

Cùm parabola l b m & ellipsis tangant se in duobus punctis p & q manifestum ex conicis est in alio puncto sibi ipsis non occurrere; eademque de causâ apertum est parabolam l b m & sectiones oppositas non occurrere sibi in alio puncto quam in p & q. 27 quarti conic.

COROLLARIVM. II.

Ex his quoque istud manifestum est. Data sit ellipsis cuius centrum d diameter a c, & in ellipsi ita aptata p q vt sit ipsi diametro parallela; atque per puncta p & q eductæ sint tangentes p λ, q λ conuenientes in λ (conuenient enim per vigesimam septimam secundi conicorum) iungaturque λ d occurrens rectę p q in g,

& eam bifariam ſecans per trigeſimam ſecundi Conicorum ; ipſaque gλ bifariam ſecetur in b, atque per p, b, q deſcribatur parabola cuius axis b g, & ordinatim vtrinque applicata p g ; ellipſis & parabola contingent ſe in punctis p, q nec in alijs ſibi occurrent. Item ſi à quouis puncto e peripheriæ intra triangulum λ p q deſcriptæ ducatur recta h e x parallela rectæ λ d, occurrens parabolæ in h, rectæ p q in x, fiantque d g, d f æquales, erunt tres rectæ f g, x e, e h proportionales.

COROLLARIVM III.

Ex his iſtud inſuper manifeſtum eſt. Datæ ſint ſectiones oppoſitæ a, c, quarum centrum d, diameter tranſuerſa a c, & illi parallela p q occurrens ſectionibus in p & q, atque per puncta p & q eductæ ſint tangentes p λ, q λ conuenientes in λ (cõuenient enim per trigeſimam primam ſecundi Conicorũ) iungaturque λ d occurrens rectæ p q in g, & eam bifariam ſecans ; ipſaque g λ bifariam ſecetur in b ; atque per p, b, q deſcribatur parabola, ſectiones oppoſitæ & parabola contingent ſe in punctis p & q, nec in alio ſibi occurrent. Item ſi à quouis puncto e ſectionum oppoſitarum vltra puncta p & q ſumpto ducatur recta h e x parallela re-

30. ſecundi Conic.

ctæ λ d, occurrens parabolæ in h, & rectæ p q in x, fiantque d g, d f æquales, erunt tres rectæ f g, x e, e h proportionales.

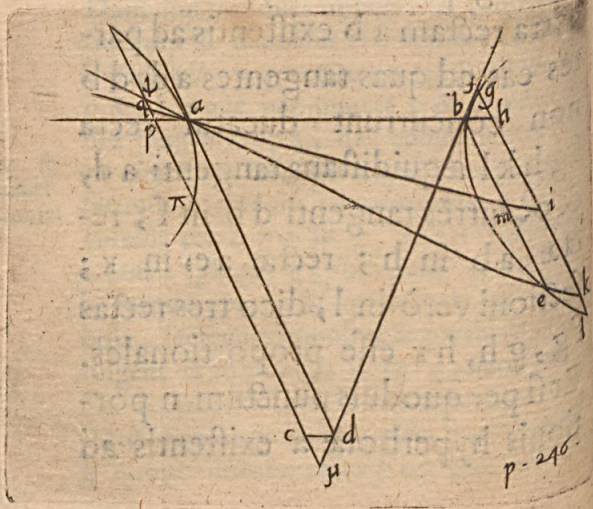
Propositio VI.

Sint sectiones oppositæ a, b, & per a & b ductæ tagentes a d, b d conueniant in d: per b ducta sit b e æquidistans tangenti a d & occutrens sectioni in e. Iuncta recta a e, per quoduis punctum g portionis hyperbolæ b extra rectam a b existentis ad partes eas ad quas tangentes a d, d b non concurrunt ducatur recta f g h k l æquidistans tangenti a d, & occurrēs tangenti d b in f; rectæ a b in h; rectæ a e in κ; sectioni verò in l; dico tres rectas f g, g h, h κ esse proportionales. Et si per quoduis punctum n portionis hyperbolæ a existentis ad

easdem partes, ducatur recta $n\psi p\pi\mu$ occurrens rectæ ea in ψ; rectæ ab in p, & tangenti bd in μ; tres rectas $n\mu$, pn, $p\psi$ esse proportionales.

Quoniam enim tangentes ad, bd conueniunt in b, & tangenti ad æquidistat fl, erit vt quadratum ad ad quadratum db, ita rectangulum lfg ad quadratum fb lineæ inter æquidistantem fl & tactum b interiectæ; sed vt quadratum ad ad quadratum db, ita est quadratum fh ad fb (eò quòd triangula adb, hfb sint similia; habent enim angulos ad verticem

18. tertij Codic.



p. 246.

b æquales; & alternos ad a, d, h, f æquales) ergo vt quadratum f h ad quadratum f b, ita rectangulum l f g ad idem quadratum f b: ergo rectangulum l f g est æquale quadrato f h: ergo tres rectæ f g, f h; f l sunt proportionales. 9 quinti Euc. 17. sexti Euc.

Diuidatur b e bifariã in m, & per m & a ducatur recta a m occurrẽs rectæ f l in i; erit a m diameter; ac proinde ordinatim applicatæ f i, i l æquales erunt: sed h i, i κ sunt etiam æquales (nam in triangulo a h k lateri h k parallela est b e; ergo vt b m, m e, ita h i, i k) ergo h g, k l sunt æquales. 34. secundi Conic. 4. Sexti Euc.

Rursus quoniam vt f g, f h, ita sunt f h, f l; ergo diuidendo vt f g, ad g h, siue ad l k; ita erit f h ad h l; & alternando vt f g f h, ita l k, l h: ergo diuidendo vt f g, g h, ita l k siue g h ad h k, ergo tres rectæ f g, g l, h κ sunt continuè proportionales.

Rursus quoniam a d, b d conueniunt in d, & tãgenti ad æquidistat μ n, erit vt quadratum a d ad quadratum d b, ita rectangulum m μ π ad quadratum μ b lineæ inter æquidistantem n μ & tactum b interiectæ: sed vt quadratum a d ad quadratum d b; ita est quadratum p μ ad quadratum μ b (eò quòd triangula a b d, p b μ sint similia ex corollario quartæ sexti Euclidis) ergo vt quadratum p μ ad quadratum μ b, 18. tertij Conic.

ita eſt rectangulum $m\mu\pi$ ad idem quadratum μb: ergo quadratum $p\mu$ eſt æquale rectangulo $n\mu\pi$: ac proinde tres rectæ $n\mu$, $p\mu$, $\mu\pi$ ſunt proportionales.

9. quinti Euc. 17. ſexti Euc.

Producatur diameter am, donec occurrat rectæ $n\mu$, punctum verò occurſûs ſit q. Quoniam $n\pi$ eſt tangenti ad æquidiſtans, & aq eſt diameter, erit $n\pi$ ordinatim ad diametrum vtrinque applicata: ergo nq, $q\pi$ ſunt æquales: ſed pq, $q\downarrow$ ſunt etiam æquales (eò quod triangula $a\downarrow p$, aeb ſint ſimilia & ſimiliter ſecta per rectam qam) ergo $\downarrow n$, $p\pi$ ſunt æquales; ergo tres rectæ $\mu\pi$, πp, ſeu $\downarrow n$ & $p\downarrow$ ſunt proportionales, vt in ſimili paulò ſuperiùs oſtendimus.

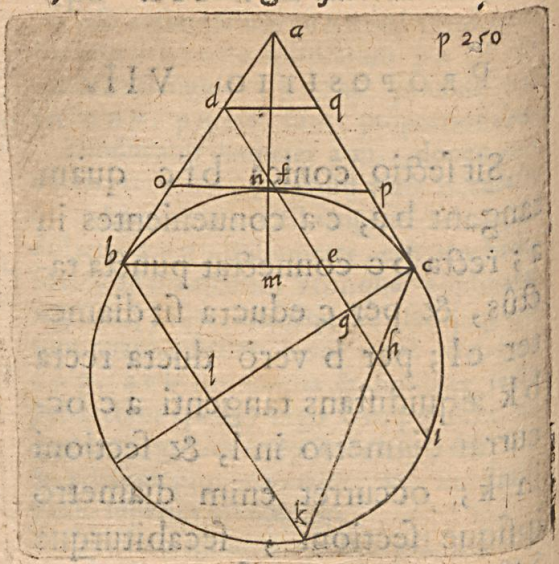
3 2. primi Conic.

Quoniam igitur tres rectæ $p\downarrow$, $\downarrow n$ ſeu πp, & $\mu\pi$ ſunt proportionales & vt $p\downarrow$ ad $\downarrow n$ ſeu ad πp, ita eſt $p\pi$ ad $\pi\mu$: ergo componendo vt $p\downarrow$ ad pn, ita $p\pi$ ad $p\mu$: ergo vt $p\downarrow$ ad pn, ita $\downarrow\pi$ compoſita ex antecedentibus, ad $n\mu$ compoſitam ex conſequentibus: quoniam autem $\downarrow n$, $p\pi$ ſunt æquales, vt oſtenſum eſt, erunt addita communi $\downarrow p$, rectæ pn, $\downarrow\pi$ æquales: cùm ergo vt $p\downarrow$ ad pn, ita ſit, vt oſtendimus, $\downarrow\pi$ ipſi pn æqualis ad $n\mu$, erunt tres rectæ $p\downarrow$, pn, $n\mu$ proportionales, quod erat oſtendendum.

Propositio VII.

Sit sectio conica b f c quàm tangant b a, c a conuenientes in a; recta b c connectat puncta tactûs, & per c educta sit diameter c l; per b verò ducta recta b k æquidistans tangenti a c occurrat diametro in l, & sectioni in k; occurret enim diametro ipsique sectioni, secabiturque bifariam in l, cùm sit parallela rectæ a c tangenti in c. Si per f quodlibet punctum sectionis b f c ducatur recta d h parallela tangenti a c, secans rectas b c, c l, c k, in e, g, h; dico tres rectas d f, f e, e h esse proportionales.

Quoniam enim tangens a c est parallela ordinatim applicatæ ad diametrum c l, cùm f g sit tagenti parallela erit ad diametrum ordinatim applicata, ac proinde pro- 32 primi Conic.



ducta occurret ſectioni, & bifariã ſecabitur in g: occurrat ergo ſectioni in puncto i. Quoniã a b, a c contingunt ſectionẽ & contingenti à c parallela ducta eſt d i, rectangulum i d f ſe habebit per decimam ſextam tertij conicorum ad quadratum d b vt quadratũ à c ad quadratum a b; ſed vt quadratum a c ad quadratum a b, ita ſe habet quadratum e d ad quadratum d b (cõ quòd ſimilia ſint triangula c a b, e d b) ergo vt rectangulum i d f ad quadratum d b, ita eſt quadratum d e ad quadratum idem d b: ergo rectangulum i d f eſt æquale quadrato d e: ergo tres rectæ d f, d e, di ſunt proportionales.

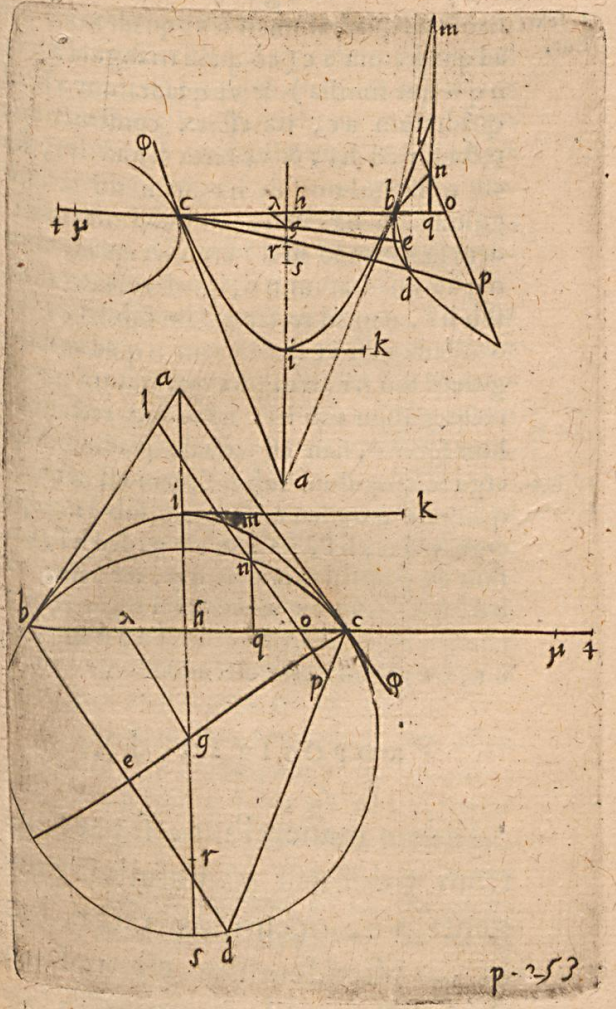
Rursus quoniam g f, g i sunt æquales, ergo ablatis æqualibus e g, g h (cùm enim in triangulo c b k lateri b κ parallela sit e h, vt b l, l k, ita erũt e g, g h) reſiduæ f e, h i sunt æquales: quoniã igitur vt d f, d e, ita sunt d e, d i: ergo diuidendo vt d f ad f e siue ad h i; ita erit d e ad e i: & alternando vt d f, d e; ita h i, e i: ergo diuidendo vt d f f e, ita h i ipsi f e æqualis ad h e. Tres ergo rectæ d f, f e, e h sunt continuè proportionales quod erat demonstrandum.

Propositio VIII.

Sit circuli, ellipseos, vel sectionum oppositarum centrum g; rectæ in b & c tangentes conueniant in punctum a; iuncta sit c g, & ad eam ex b ordinatim applicata b e occurrens ex alterâ parte sectioni in d; iunctis c d, a g, b c, sit h intersectio rectarum b c, a g, & portio a h bifariam secetur in i; atque vt i h recta ad h c, ita fiat h c recta ad i k perpendicularem ad rectam i h. Dato latere

recto ik, diametro ih, vertice i deſcribatur parabola cuius ordinatim ad diametrum ih applicatæ æquidiſtent rectæ cb; tranſibit per b & c vt in quartâ huius oſtenſum eſt. Rurſus vt quadratũ ah ad quadratum ac, ita fiat hr dupla rectæ hg ad hſ, & vt recta bd ad bc, ita fiat recta hſ ad ct. Si per o quodlibet punctũ rectæ bc ducatur ad rectam ac parallela lnop occurrens ſectioni in n, & rectis ab, dc in l & p: & per n ad diametrum ih parallela agatur mnq, ſecans parabolam in m, & rectam bc in q: Dico vt eſt recta ct ad co, ita eſſe rectam ln ad nm.

Quoniam enim rectangulum ſub po, nl eſt æquale quadrato no per ſextam & ſeptimam huius; & rectangulum ſub hr duplâ rectę hg, ſubque nm eſt æquale quadrato rectę qn, per quartam & quintam huius; & quoniam quadratum qn ſe



p. 253

habet ad quadratum n o vt quadratum a h ad quadratum a c (eò quòd triangula a h c, n q o ſint ſimilia) & vt quadratum a h ad quadratum a c, ita eſt ex conſtructione recta h r ad h ſ; & vt recta h r ad h ſ, ita eſt rectangulum ſub h r, n m ad rectangulum ſub h ſ, n m, (eò quòd eorum eadem ſit altitudo m n) ergo vt quadratum n q ad quadratum n o, ita eſt rectangulum ſub h r, n m ad rectangulum ſub h ſ, n m; & alternando vt quadratum n q ad rectangulum ſub h r, n m; ita quadratum n o ad rectangulum ſub h ſ, n m: ſed rectangulum ſub h r, n m eſt æquale quadrato n q: ergo rectangulum ſub h ſ, n m eſt æquale quadrato n o, ſeu rectangulo ſub l n, o p: ergo vt l n, h ſ, ita n m, o p: ſed h ſ, c t, ſunt ex conſtructione vt o p, o c, ſiue vt b d, b c: ergo ex æquo vt l n, c t, ita n m, o c; & alternando vt l n, n m, ita c t, o c, quod erat oſtendendum.

5. ſexti Euc.

16. ſexti Euc.

Propositio IX.

Iiſdem manentibus, ſi per centrum g ducatur g λ parallela tangenti a c, occurrens rectæ b c in λ, oſtendendum eſt rectam c t ſe habere ad c λ, vt recta a c ſe habet ad a h.

Vt recta a c ad a h, ita fiat c t ad c μ; & vt h a ad a c ita fiat a c ad a φ. Quoniam rectæ g λ, a c sunt parallelę, & in illas incidit recta a g, anguli alterni c a h, h g λ sunt æquales; triangula ergo c a h, h g λ sunt similia, vtque c a, a h, ita λ g, g h. Similiter quoniam parallelę sunt b e, g λ, triangula c λ g, c b e sunt similia; ac proinde vt e b, b c, ita g λ; λ c.

Rursus quoniam tres rectæ h a, a c, a φ sunt proportionales vt recta h a ad rectam a φ, ita erit quadratum rectæ h a ad quadratum a c: Cum igitur proportio quam habet recta h r ad c t componatur ex rationibus rectę b d ad b c, & quadrati a h ad quadratum a c; componetur quoque ex rationibus rectarum b d ad b c, & h a ad φ a; & cùm proportio rectæ h a ad a φ componatur ex rationibus rectarum h a ad a c, & a c ad a φ, proportio rectæ h r ad c t componetur ex rationibus rectarum b d ad b c, & h a ad a c, & a c ad a φ. 20. sexti Euc. in coroll.

Rursus quoniam proportio quam habet h g recta ad λ c componitur ex rationibus rectarum h g ad g λ, & g λ ad λ c, componetur quoque ex rationibus rectarum e b ad b c, & h a ad a c; & ratio quam h r dupla rectæ h g habet ad λ c componetur ex rationibus rectarum d b quæ est rectæ b e dupla, ad b c, & h a ad a c.

Quoniam igitur proportio rectæ h r ad c t componitur ex rationibus rectarum b d

ipſa ad b c, & h a ad a c, & a c ad a φ; autem proportio c t ad c μ eſt ex conſtructione eadem quæ rectæ a φ ad a c: proportio rectæ h r ad c μ componetur ex rationibus rectarum b d ad b c, & h a ad a c: Sed proportio rectæ h r ad λ c componitur, vt oſtenſum eſt, ex rationibus earundem rectarum b d ad b c, & h a ad a c: ergo rectæ c μ, c λ ſunt æquales: ſed recta c t ſe habet ad c μ ex conſtructione vt c a recta ad a h: ergo c t ſe habet ad c λ, vt c a recta ad a h, quod erat demonſtrandum.

DEFINITIONES.

I. Syſtema notâ methodo deſcriptum, vel abſolutè ſyſtema appello figuram in ſuperiori propoſitione exhibitam, in qua parabola circulum, vel ellipſim, vel ſectiones oppoſitas tangit in duobus punctis iuxta modum ibidem & in præcedentibus traditum & demonſtratum.

II. Lunulam parabolicam ſyſtematis, vel abſolutè lunulam parabolicam

rabolicam appello figuram parabolâ & circulo, vel ellipsi comprehensam : aut etiam figuram parabolæ & circuli vel ellipseos portionibus, & rectâ insuper vel rectis diametro rectæ æquidistantibus contentam ; curuas verò quibus continetur appello arcus superiorem & inferiorem : superioris autem nomine intelligo parabolam.

III. Cuspides xystroides appello figuras conuexis parabolæ & sectionum oppositarum, rectâque diametro directæ æquidistante contẽtas : curuas verò quibus continẽtur appello falces superiorem & inferiorem : superioris autem nomine intelligo parabolam.

IV. Tactus systematis appello puncta c & b ; rectam c b voco connectentem tactus ; punctum g, centrum systematis ; lineam

a h, diametrum rectam ſyſtematis; eam quæ per g ducitur parallela tactus connectenti, nomino diametrum tranſuerſam ſyſtematis; rectas a c, a b, tangentes ſyſtematis; & lineam c a cui parallelæ ducuntur reliquæ appello tangentem notam.

v. Rectam c λ interceptam tangente c a & ei parallelâ g λ appello brachium libræ ſyſtematicum.

v i. In ſyſtemate ſi rectarum diametro rectæ æquidiſtantium portiones contentæ lunula vel cuſpide intelligantur à puncto in quo occurrunt arcui vel falci inferiori eò vſque inclinari dum fiât diametro tranſuerſæ æquidiſtantes; curua per earum extrema incedens appelletur exparabola, figura autem contenta arcu vel falce inferiori, ipſa exparabolâ,

& rectâ vel rectis æquidistantibus diametro transuersæ, appelletur cuspis vel lunula exparabolica.

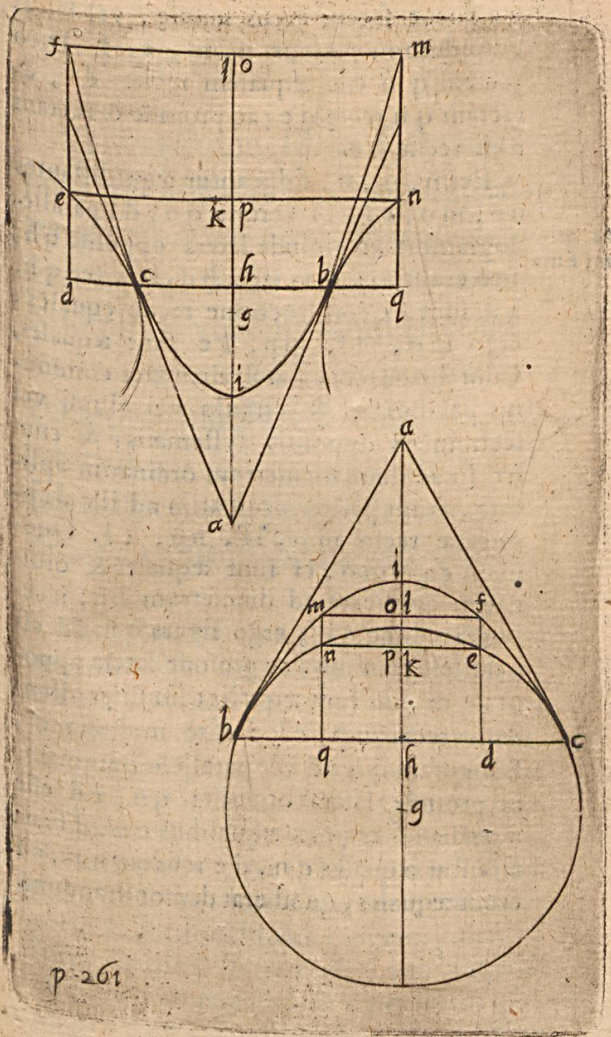
VII. Si in systemate à quouis puncto inferioris arcûs vel falcis ducantur rectæ cuidã alteri quàm systematis diametris æquidistantes, & ex eis à pũcto arcus vel falcis inferioris versus superiorem abscindantur portiones, quæ se habeant ad æquidistantem diametro rectæ per idem arcûs vel falcis punctum ductam & lunulâ vel cuspide interceptam, vt portiones earundem ab eodem puncto ad lineam tactus connectentem extensæ; curua per earum extrema incedens appelletur quadratrix genita ex positione illius rectæ, figura autem contenta arcu vel falce inferiori, ipsa quadratrice, & recta vel rectis æquidistantibus lineæ illi ex cuius positione

quadratrix genita fuerit, dicatur lunula vel cuſpis media.

Propositio X.

Si in recta tactus ſyſtematis cõnectente deſignentur duo puncta ab eius cum diametro rectâ occurſu æqualiter remota, & per ea ductæ æquidiſtantes rectæ diametro, interſecent lunulam vel cuſpides; ipſarum æquidiſtantium portiones interceptæ lineâ tactus coniungente & arcubus lunularum vel cuſpidum falcibus erunt æquales.

Sit ſyſtema cuius centrum g; tangentes b a, a c; tactus c, b; recta tactus connectens b c, diameter recta g a; parabola b i c; ſitque circulus vel ellipſis vel ſectiones oppoſitæ per b & c ex centro g notâ methodo deſcriptæ; interſectio diametri rectæ & tactus connectentis ſit h; atque vtrinque ita ſumptæ ſint æquales h q, h d; vt rectæ per q & d æquidiſtantes diametro



p. 261

g a ductæ ſecent arcus lunulę, vel falces cuſpidum in punctis n, m, e, f. Dico rectam q m eſſe æqualem rectæ d f, & rectam q n rectę d e; ac proinde & rectam n m rectæ f e.

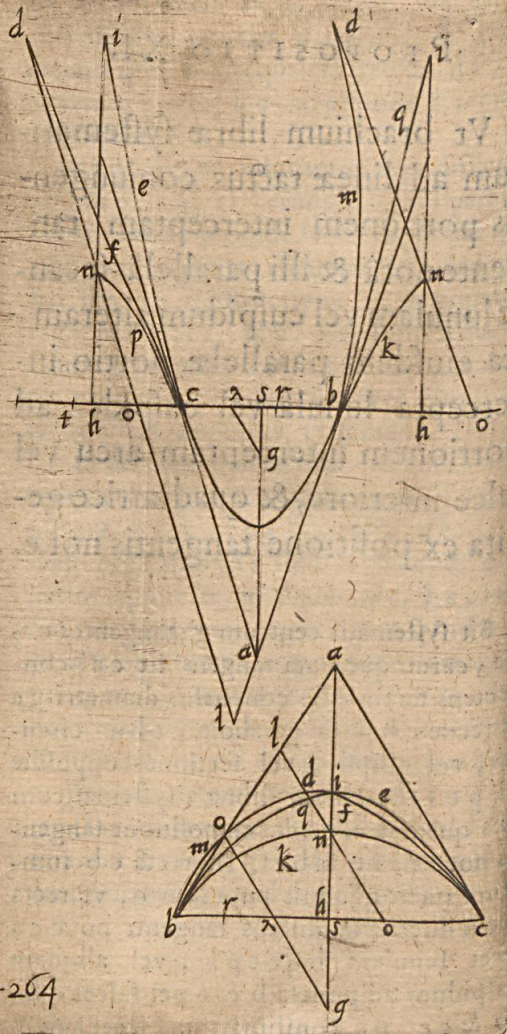
Per n, m, e, f ducantur æquidiſtantes n p, m o, e k, f l; erunt q o, d l parallelogramma ac proinde latera oppoſita q h, m o erunt æqualia; item h d, l f: ſed q h, h d ſunt ex conſtructione rectæ ęquales; ergo m o, l f, m p, k e ſunt æquales. Cùm igitur recta a h ſit diameter communis parabolæ, & circulo vel ellipſi vel ſectionibus oppoſitis ſyſtematis; & cùm b c ſit ad illam diametrum ordinatim applicata, erunt pariter ordinatim ad illam applicatæ rectæ m o, l f, n p, e k. Quoniam ergo m o, l f ſunt æquales & ordinatim applicatę ad diametrum h a, iacebunt in directum; ergo figura q m f d eſt parallelogramma, ac proinde latera oppoſita q m, d f ſunt æqualia; ſimiliter oſtendetur rectas n p, e k iacêre in directum, & figuram q n e d eſſe parallelogrammam, ac proinde latera oppoſita q n, e d eſſe æqualia: ſi ergo ex æqualibus q m, d f auferantur æquales q n, d e reſiduæ n m, e f erunt æquales, quod erat demonſtrandum.

34 primi Euc.

Propositio XI.

Vt brachium libræ ſyſtematicum ad lineæ tactus coniungentis portionem interceptam tangente notâ & illi parallelâ ſecante lunulam vel cuſpidum alteram; ita eiuſdem parallelæ portio intercepta lunulâ vel cuſpide, ad portionem interceptam arcu vel falce inferiore, & quadratrice genita ex poſitione tangentis notæ.

Sit ſyſtematis centrum g; tangentes c a, b a; earumque nota tangens ſit c a; connectens tactus c b; concurſus diametri g a & rectæ c b ſit f; parabola e c b q; circulus, vel ellipſis, vel ſectiones oppoſitæ b k p c; brachium libræ ſyſtematicum c λ; quadratrix genita ex poſitione tangentis notæ c a ſit m b c f. In rectâ c b ſumptum ita ſit quoduis punctum o, vt recta per o ducta æquidiſtans tangenti notæ c a ſecet lunulam b q e c p k, vel aliquam cuſpidum ad puncta b & c per falces q b, k b & e c, p c conſtitutarum; ſecet autem



p-264

in puncto n inferiorem arcum vel falcem, tangentem a b in l, quadratricem in d. Dico vt est c λ recta ad c o, ita esse l n rectam ad d n.

Per n agatur h n i parallela diametro g a, occurrens tactus connectenti in h, & parabolę in i. Vt ſa recta ad a c, ita fiat λ c ad r c. Ergo per octauam huius vt r c recta ad c o, ita est recta n l ad n i: sed ex generatione quadratricis vt n h recta ad n o, hoc est vt ſa recta ad a c, ita est n i recta ad n d: ergo tres rectæ n l, n i, n d ita se habent ad tres λ c, r c, c o, vt sicut n l ad n i, ita sit r c ad c o; & sicut n i ad n d, ita sit λ c ad r c: ergo cùm earum ratio sit perturbata, erit ex æquo vt n l recta ad n d, ita λ c recta ad c o, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex his manifestum est in syſtemate sectionum oppositarum rectam d n terminatam ad hyperbolam b esse maiorem rectâ n l; terminatam verò ad sectionem c factis c λ, c t æqualibus esse minorem rectâ n l sibi respondente; si punctum o iaceat inter c & t; maiorem si cadat vltra t; æqualem si congruat ipsi t. Similiter in circuli vel ellipsis syſtemate, si punctum o cadat inter λ & c esse minorem; si vltra λ esse maiorem; si ipsi λ congruat esse æqualē. Quoniam enim rectæ c a, g λ sunt ex con-

ſtructione ſyſtematis parallelæ, erit in ſyſtemate ſectionum oppoſitarum recta c λ minor rectâ c ſ; cùm ſe habeat ad c ſ, vt a g pars ad a ſ totum: erit ergo, quando o eſt intra hyperbolam b, recta c o cõpoſita ex c ſ & ſ o multò maior quàm c λ: ſed vt c λ ad c o, ita eſt l n ad n d: ergo l n eſt minor quam n d. Quando autem recta d n terminatur ad hyperbolam c; ſi punctum o cadat inter t & c, erit c λ maior quàm c o; ſed vt c λ ad c o, ita eſt n l ad n d; ergo n l eſt maior quàm n d. Eâdem ratione oſtendetur eſſe æqualis ſi punctum o congruat puncto t; & eſſe maior, ſi vltra punctum t iaceat; quod ipſum pariter ad ſyſtema ellipſeos transferri poſſe aperrum eſt.

COROLLARIVM II.

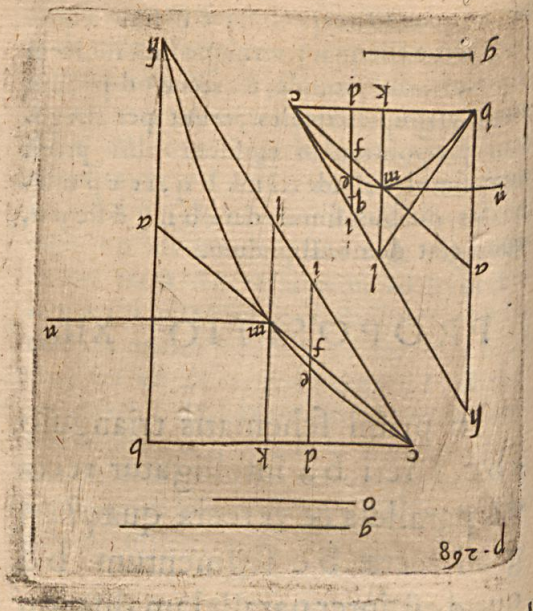
Præterea facile oſtendi poteſt lunulæ ſyſtematis eſſe æqualem lunulam contentam arcu inferiore & quadratrice: cuſpidibus autem duabus ſimul b i n, c n i terminatis rectâ n i, quando rectæ b h, c h ſunt vtrinque æquales, eſſe æquales duas alias cuſpides contentas falce inferiore, quadratrice, & lineâ n d. Quoniam enim recta d n ad n i ſe habet vt recta n o ad n h, erit per oſtenſa in primo libro lunulæ b q i e c p k æqualis alia lunula b o d e c p k. Et quoniam per decimam

17. primi huius.

huius quando rectæ b h, c h sunt æquales, rectæ etiam n i vtrinque sunt inuicem æquales, ac proinde & rectæ d n sunt etiam vtrinque æquales, erunt per allegatam propositionem eiusdem libri primi duæ simul cuspides i n k b q, i e c p n æquales duabus simul d n k b m, d f c p n, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

In primi schematis triangulo a b c, lateri b a intelligatur recta d f parallela & vt recta quæpiam g ad rectæ b c segmentum b d quod est inter parallelam ductam & latus b a, ita intelligatur fieri recta f d ad d e: & quod in rectâ f d factum est, intelligatur similiter fieri in parallelis cæteris per quodlibet punctũ rectæ b c inter b & c ductis. Ostendendum est quartam eiusmodi proportionalem terminari parabola per b, e, c descripta cuius diameter sit rectę b a parallela.



Vt recta g ad b c, ita fiat recta b a ad b h, iunctâque rectâ h c, diuidatur bifariam b c in k, & per k agatur ad rectam b h parallela κ l: eritque h c secta bifariam in l, cùm l k sit parallela lateri b h trianguli b h c. Diuisâ κ l bifariam in m, & excitata ad l k perpendiculari m n, vt recta m κ ad k c, ita fiat k c ad m n; datoque latere recto m n, & diametro m k describatur parabola b m c quæ per b c & m transibit cùm rectæ m n, m k, k c sint proportionales; recta autem c l tanget in c parabolam,

2. sexti Euc.

ipſaque b l in b per trigeſimam tertiam primi conicorum, cùm k l ſecta ſit bifariam in m.

Si ergo parabola non ſecat rectam d i in puncto e, ſecet, ſi fieri poteſt in puncto q: quoniam ſicut recta g ad b c, ita eſt b a ad b h: & vt b a ad b h, ita eſt d f ad d i, vt oſtenditur ad quartam ſexti Euclidis: ergo vt g ab b c, ita eſt d f ad d i: ſed vt b c ad b d, ita eſt i d ad d q (nam vt b d, c b: ita d q, q i per huius ſecundã: ergo inuertẽdo & componendo vt b c, b d, ita d i, d q) ergo ex æquo vt g recta ad b d, ita f d recta ad d q: ſed ita etiam ponitur eſſe ipſa f d ad d e: ergo d e, d q ſunt æquales, pars & totum quod eſt abſurdum. Non ergo &c.

Oſtendendum præterea eſt in eodem triangulo a b c ſecundi ſchematis ſi vt g ad aliud rectæ b c ſegmentum d c, ita intelligatur fieri recta f d ad d e, & idẽ in alijs parallelis fiat, quartam proportionalem terminari parabolâ quam linea b c in puncto c tangat.

Vt recta g ad b c, ita permaneat recta b a ad b h; diuisâ bifariam b c in k, & iuncta recta h c, per k agatur l k parallela lateri h b; erit ergo sicuti priùs ostensum est recta h c secta bifariam in l. Recta l k bifariam secetur in m; vtque recta m l ad l h, ita fiat l h ad m n perpendicularem ad rectam l k. Datâ diametro m l, & latere recto m n describatur vt priùs, parabola transiens per h, m, c, cuius vertex sit m. Vt recta h b ad h a, ita fiat recta h c ad o: erit ergo cõuertendo vt o recta ad h c, ita h a ad h b. Cùm igitur h c secta sit bifariam in l, per l ducta sit l k ipsi h b parallela, per bisectionem m perque puncta h, c descripta sit parabola h m c, & cùm vt recta o ad h c, ita sit recta h a ad h b, si ducta d i quacunque ad rectam h b parallela secante rectam h c in i, vt o recta ad h i, ita fi intercepta lateribus h t, a c trianguli h c a fiat ad i e, punctum e erit in parabola h m c, & recta c b, tanget eandem parabolam in c, ex priori huius propositionis, parte.

52. primi Conic.

Rursus quoniam in triangulo h b c lateri h b parallela est i d, ergo (prout demonstratur apud Clauiũ) vt h b ad h a, ita erit i d ad i f; & quia h c ad o est ex constructione vt h b ad h a; ergo vt h c ad o, ita est i d ad i f. Quoniam igitur vt h c ad o, ita ostensum est esse i d ad

4. sexti Euc.

if; & vt o ad h i, ita i f ad i e : ergo ex æquo vt h c ad h i, ita erit i d ad i e : sed vt h c ad h i, ita b c ad b d (eo quod in triangulo h b c latera h c, b c proportionaliter secentur per rectam d i lateri b h parallelam) ergo vt b c, b d, ita i d, i e : ergo per conuersionem rationis vt b c, d c, ita i d, d e. Rursus quoniam vt g ad b c, ita est b a ad b h ex constructione; & vt b a ad b h, ita est f d ad i d (nam in triangulo h b c lateri b h parallela est d i; ergo ex demonstratis apud Clauium vt b a, b h ita f d, i d) ergo vt g ad b c, ita est f d ad i d; sed vt b c ad d c, ita ostensum est esse i d ad d e : ergo ex æquo vt g ad d c, ita est f d ad d e, quod erat demonstrandum. 4. sexti Euc.

COROLLARIVM.

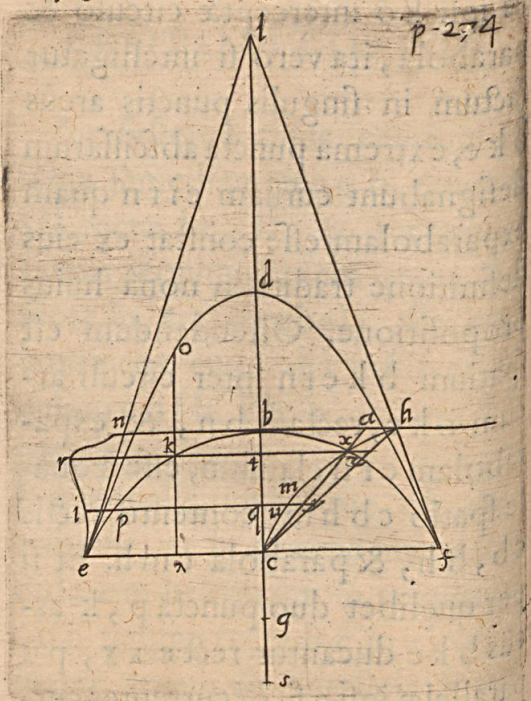
Ex his patet cum ex demonstratis ab Archimede figura h m c, quæ comprehenditur curua h e c & & recta h c sit tertia pars trianguli rectilinei h b c : figuram c b h e, quæ curua h e c, & rectis h b, b c continetur, æqualem esse duabus tertijs partibus rectilinei trianguli h b c. 15. & 16 quadr. parab.

PROPOSITIO XIII.

Sit syſtema cuius centrum g, recta ſemediameter g b, tangentes rectæ l e, l f; & rectam e f tactus coniungentem recta b g ſecet in c; parabola ſit e d f continens cum aliâ ſectione lunulam e d f b. Per b ducatur b h parallela rectæ e f ipſique b d æqualis, iunctâque c h deſcribatur, vt in præcedenti, parabola c m h, quam in triangulo c b h tangat recta b c in c, diameter autem ſit parallela lateri b h. Rurſus ex recta b h abſcindatur n b ipſi b d æqualis, ſimiliter per k quodlibet punctum inferioris arcûs vel cuſpidis b k e duci intelligãtur duæ rectæ k o, k t parallelæ rectis c l, e f, & ex recta t k abſcindi recta k r æqua-

lis

lis ipsi k o interceptæ circulo & parabola, ita verò si intelligatur factum in singulis punctis arcûs b k e, extrema puncta abscissarum designabunt curuam e i r n quam exparabolam esse constat ex eius definitione tradita in nonâ huius propositione. Ostendendum est spatium b k e r n inter circuli arcum b k e, rectam b n, & exparabolam e r n clausum, esse æquale spatio c b h m contento rectis c b, b h, & parabola c m h. Et si per quælibet duo puncta p, k arcûs b k e ducantur rectæ κ x, p u parallelæ ipsi e f, occurrentes curuæ n r e, rectæ b c, & parabolæ c m a in punctis r, i, t, q, z, u, spatium r i p k contentum rectis r k, i p, & curuis r i, p k esse æquale spatio t q u x contento rectis t q, q u, t z, & curua u z.



Rectæ b c æqualis b a abſcindatur ex recta b h, & iungatur recta c a: item rectæ c g abſcindatur g ſ æqualis. Quoniam per quartam & quintam huius vt recta c ſ ad c b, ita eſt c b ſeu b a ipſi æqualis ad b d ſeu b h ipſi æqualem; & inter b & c quodlibet punctum t ſumptum fuit, perque illud ducta eſt t x parallela lateri b h, occurrens rectæ c a in x, & parabolæ in z, erit recta t x ad t z

vt recta f c ad c t, ſicuti in precedenti oſtenſum eſt: ſed, producta recta o k donec rectæ e f occurrat in λ, vt c f ad c t ſeu ad κλ ipſi t c æqualem (eſt enim t κ λ c parallelogrammum cuius κλ, t c ſunt latera oppoſita) ita per quartam & quintam huius eſt k λ ad k o ſeu ad k r ipſi κ o æqualem. Cùm ergo recta t x ſit æqualis rectæ t c (ſunt enim ſimilia triangula c b a, c t x, ergo cùm c b, b a ſint ex conſtructione æquales, erunt c t, t x æquales) erit vt c f ad c t, ita c t ſeu t x ad k r; ſed ita etiam oſtenſum eſt eſſe ipſam t x ad t z: ergo rectæ t z, k r ſunt æquales. Simili prorſus ratione oſtenditur rectas p i, q u eſſe æquales, & quæcunque inter parallelas n b, e f ducatur ipſis parallela, eius ſegmentum interceptum arcu b k e & curua n r e eſſe æquale ſegmento eiuſdem inter rectam b c & parabolam poſito.

Quoniam ergo quæcunque ipſi n h parallelæ incidant in rectam c b, in ſectiones conicas c m h, b k e, & in curuam n r e ipſarum incidentium portio interceptа recta c b & parabola e m h, e ſt æqualis earundem portioni interceptæ circulo & curua n r e, erit per duodecimam primi libri ſpatium a b c m æquale ſpatio b n r e k, & ſpatium t x u q ſpatio k r i p, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Ex his patet cùm spatijs a b c m, t x u q spatia rectilinea æqualia inueniantur prout Archimedes demonstrauit in libello de paraboles quadratura; illa ipsa spatia rectilinea ita inuenta esse æqualia spatijs b n r e k, k r i p; ac proinde problema quo spatia b n r e k, k r i p proponerentur quadranda, ex dictis confectum euadere.

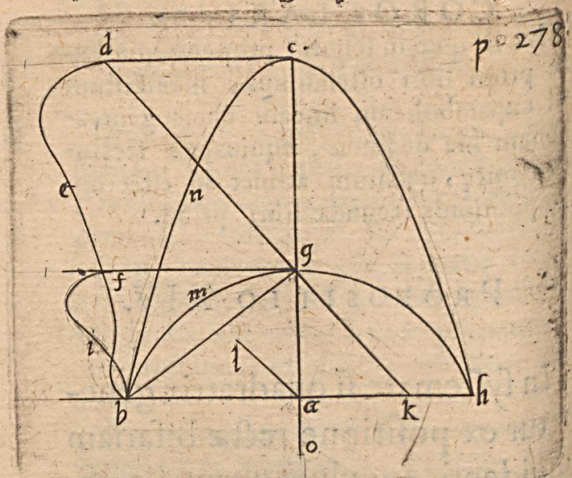
Vt autem res manifestior appareat sit figura e k r i quadranda: vt recta c s ad λ k, ita fiat λ k seu c t ad t x & iungatur c x recta. Dico duas tertias partes trianguli c t x esse æquales figuræ c t x u. Quoniam enim recta t c tangit parabolam c u x in c, & per x acta est x t parallela diametro, erit per corollarium præcedentis, & per citati libri Archimedis decimam sextam segmentum x m c y æquale tertiæ parti trianguli c t x: ergo figura c t x u quæ cum segmento componit triangulum c t x, est æqualis duabus tertijs trianguli eiusdem c t x: Si ergo vt c s ad λ k, ita fiat λ k seu c t ad t x, & iungatur recta c x, duę tertiæ trianguli rectanguli c t x erunt ęquales figuræ k r i e p.

COROLLARIVM.

Ex iis quæ in scholio propositionis sextæ primi libri ostendimus, manifestum est exparabolicam lineam cuius generationem hîc dedimus, æquiualere sectioni conicę, quantum attinet ad effectum propositionis secundæ libri primi.

PROPOSITIO XIV.

In systemate si quadratrix generetur ex positione rectæ bifariam diuidentis angulum quem diameter recta cum transuersa constituit; & si arcûs vel cuspidis inferioris portio designetur, ad easdem diametri directæ partes ad quas angulus secatur; lunula vel cuspis media, cuius vnum latus sit eiusmodi portio designata, est æqualis lunulæ vel cuspidi parabolicæ, & simul exparabolicæ, quarum commune latus sit illa ipsa portio designata.



In ſyſtemate ſit centrum o, diameter recta o c ; recta connectens tactus b h æquidiſtans diametro tranſuerſæ ; parabola c n b ; exparabola f i b ; quadratrix ſit d e b genita ex poſitione rectę a l bifariam ſecantis angulum c a b quem duæ diametri recta & tranſuerſa, vel eis parallelæ conſtituunt ad b partes diametri o c directæ. Ad eaſdem partes ſumpta ſit falcis vel arcûs inferioris portio g m b, & per eius duo extrema, vel per vnicum g (ſi nimirum ad aliud extremum conueniant parabola, exparabola, atque quadratrix) ducatur parallela rectæ a l, eaque ſit g d per extremum g tranſiens, & occurrens qua-

dratrici in d; ducatur item parallela rectæ b a; eaque sit g f occurrens exparabolæ in f; ducatur denique g c parallela rectę a g (nisi sit eius portio vt in isto casu) occurrens parabolæ in c. Dico cuspidem vel lunulam mediam g d e b m esse æqualem cuspidi vel lunulæ parabolicæ g c n b m l, & exparabolicæ g f i b m.

Connectatur recta d c, & producta recta d g occurrat rectæ b h in k. Quoniam ex definitione quadratricis vt g a ad a k, ita est g c ad g d, triangula g a k, c g d, habentia angulos ad verticem g æquales, & circa illos latera proportionalia, erunt æquiangula; ergo anguli c d k, a k d alterni sunt æquales; ergo rectæ d c, a κ sunt æquales, & parallelæ. 6. sexti Euc.

Rursus quoniam super eadem basi curua b m g sunt tres figuræ constitutæ sicut propositio decima octaua & decima nona libri primi requirunt, figura g d e b m erit per eandem decimam nonam æqualis duabus simul g c n b m, g f i b m, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Hinc apertum est segmentum quadratricis contentum rectis b g, g d & quadratice b e d esse æquale spatio b g c n contento rectis b g, g c & parabola c n b, quod ex demonstratis ab Archimede qua-

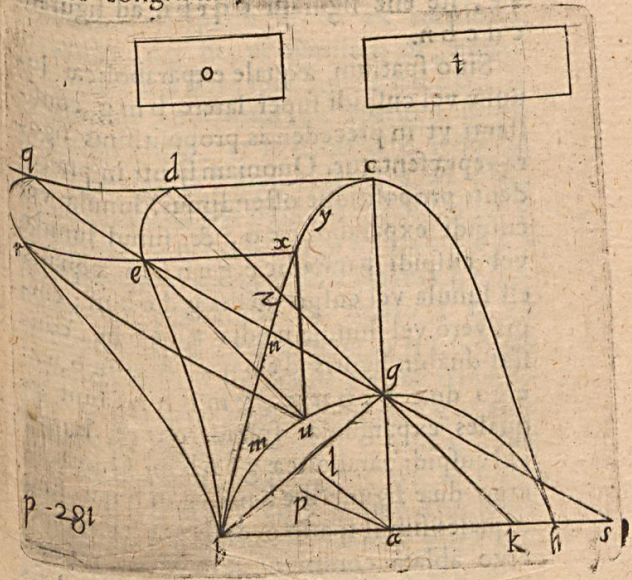
drari poteſt; & ſimul figuræ g f i b m, quod ex præcedenti quadrari etiam poteſt. Cùm enim oſtenſum ſit figuram g d e b m eſſe æqualem duabus g c n b m, g f i b m; addito vtrinque communi b m g: duæ ſimul g d e b m, b m g, hoc eſt tota b g d e cõtenta rectis b g, g d & quadratrice b e d eſt æqualis tribus ſimul g c n b m; g f i b m, b m g, hoc eſt prædictis duabus b g c n, b g f i: nota eſt ergo ratio quadrandi ſegmentum quadratricis prædictum.

Propositio XV.

Iiſdem permanentibus ſi intelligatur angulus g a b ſecari per rectam a p in partes inæquales, & deſcribatur quadratrix q r b ex poſitione rectæ a p genita; ducatur autẽ per g recta g ſ parallela ad rectã a p, occurrens rectæ b h in ſ, & quadratrici q r b in q. Oſtendendum eſt lunulam vel cuſpidem mediam cuius quadratrix ſit q r b, & latus u m g portio arcûs vel falcis inferioris terminata tactu b,

esse æqualem lunulæ vel cuspidi parabolicæ g c n b m & insuper spatio quod sit ad lunulã vel cuspidem ex parabolicam vt est recta a ſ ad a k.

Iungatur q c recta, quæ ostendetur esse parallela ipsi a h, sicuti in priori propositione recta d c ostensa est esse æquidistans eidem a h: rectæ ergo c d, c q sibi mutuò congruunt, & vt a ſ ad a k, ita est



o q ad c d; cùm triangulo g a k ſimile ſit triangulum g c d, & triangulo g a s triangulum g c q. Rurſus ex quocunque puncto x parabolę c n b agatur u x parallela ipſi c g, occurrens arcui vel falci inferiori in u; & per u rectæ u e, u r parallelæ rectis l a, p a, occurrentes quadratricibus in e & r; iunganturque rectæ x r, x e. Oſtendetur vt priùs rectas e x, r x eſſe parallelas rectę b h, & congruere ſibi inuicem; & præterea vt eſt recta a ſ ad a k; ita eſſe rectam x r ad x e; oſtendetur denique ex ſexta primi vt eſt recta a ſ ad a k, ite eſſe figuram c q r b n ad figuram c d e b n.

Sit o ſpatium æquale exparabolicæ lunulæ vel cuſpidi ſuper latere b m g conſiſtenti vt in precedentis propoſitionis figurâ repræſentatur. Quoniam ſicuti in præcedenti propoſitione oſtendimus, lunulæ vel cuſpidi exparabolicæ o, & ſimul lunulæ vel cuſpidi parabolicæ g c n b m æqualis eſt lunula vel cuſpis media g d e b m; cuſpis verò vel lunula media g d e b m conſtat duabus figuris d e b n z, & g m b n z: ergo duæ d e b n z, g m b n z ſunt æquales exparabolæ ſpatio o; & lunulæ vel cuſpidi parabolicæ g c n b m. Quoniam ergo duæ figuræ d e b n z, g m b n z ſunt æquales ſimul ſpatio o, & figuræ g c n b m; ergo ablatâ communi g m b n z, reſidua figura d e b n z erit æqualis ſpatio o & ſi-

mul figuræ z g c y : ergo addita cõmuni figura c d z y, figura c d e b n erit æqualis ſpatio o & ſimul rectilineo triangnlo c d g.

Rurſus vt recta c d ad c q, ſeu a k ad a ſ ita fiat ſpatium o ad t : quoniam igitur triangulum d g c ſe habet ad triangulum q g c vt baſis d c ad c q; ſpatium autem o ſe habet ad ſpatium t, vt eadem recta d c ad c q; vt recta d c ad c q, ita erit conflatum ex ſpatio o & ex triangulo rectilineo c d g antecedentibus, ad conflatum ex ſpatio t & ex rectilineo triangulo c q g conſequentibus : cum igitur conflatum ex ſpatio o & ex rectilineo triangulo c d g ſit, vt oſtenſum eſt, æquale figuræ c d e b n; ipſa figura c d e b n ſe habebit ad conflatum ex ſpatio t & ex triangulo c q g, vt ſe habet d c recta ad c q; ſed vt ſe habet recta d c ad c q, ita oſtenſum eſt eſſe figuram eandē c d e b n ad figuram c q r b n : ergo figura c d e b n habet eandem rationem ad figuram c q r b n, quam ad conflatum ex ſpatio t & ex triangulo c q g : ergo figura c q r n b eſt æqualis conflato ex ſpatio t & ex triangulo c q g : ergo figura c q r b m g, cùm conſtet figuris c q r b n, c n b m g, erit æqualis ſpatio t, triangulo c q g & ſimul figuræ c n b m g : ergo ablato communi triangulo c q g figura reſidua g q r b m eſt æqualis ſpatio t, & figuræ c n b m g : quod erat demonſtrandum.

1. ſexti. Euc.

12. quinti. Euc.

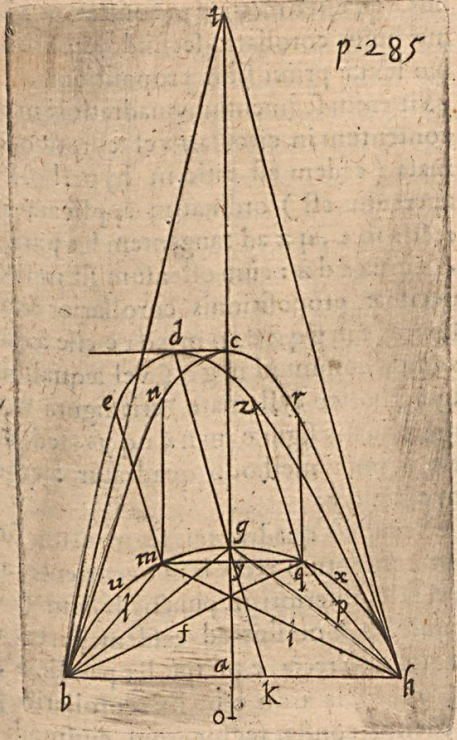
COROLLARIVM.

Sicuti in præcedentis corollario oſtenſum eſt quo pacto quadretur ſegmentum quadratricis contentum rectis b g, g d & quadratrice b e d; ita pari ratione hîc tradi poteſt methodus quadrandi ſegmentum quadratricis contentum rectis b g, g q, & quadratrice q r b : nimirum ſi ad rectilineum æquale figuræ g c n b λ (quod cognitum eſt) addatur ſpatium t, quod etiam notum eſt.

PROPOSITIO XVI.

Inuenire rectilineum æquale ſegmento cuicunque dato quadratricis genitæ ex poſitione vnius ex tangentibus ſyſtematis, vel alicuius alterius rectæ diuidentis angulum quem tangentes comprehendunt in concurſu, & quem recta tactus connectens ſubtendit.

Sit ſyſtematis centrum o; tangentes b t, h t; puncta tactus b, h connexa rectâ b h; diameter o t; parabola b n c r h; arcus vel



falx inferior sit b m g ; quadratrix ad positionem tangentis h t descripta sit b e d z h, (idem sequeretur si ad positionem cuiusuis rectæ diuidentis angulũ b t h vt dicemus.)

Primo quidem si quadratricis segmentum sumatur contentum ordinatim ad diametrum t o applicatâ totâ, vt in ellipsi vel circulo ; vel eius partibus intra sectiones oppositas æquali interuallo excurrenti-

bus; quæſita methodus conſtat ex vndecimæ huius corollario ſecundo, & coroll. primo ſextæ primi libri propoſitionis.

Sit enim ſegmentum quadraticis m e d z q contentum in circulari vel elliptico ſyſtemate (eadem eſt ratio in hyperbolico vt apertum eſt) ordinatim applicata m q, rectis m e, q z ad tangentem h t parallelis; & curua e d z: cùm oſtenſum ſit in illo vndecimæ propoſitionis corollario ſecundo figuras e m g q z d, n m g q r c eſſe æquales, addita communi m g q (vel æqualibus in hyperbolico ſyſtemate) erit figura m e d z q y æqualis figuræ m n c r q y; ſed m n c r q y nota methodo quadratur: ergo & m e d z q y.

Secundò quadratricis ſegmentum ſumatur contentum recta b m occurrente arcui vel falci inferiori in punctis b & m (quæ puncta b & m ſint ad eaſdem partes diametri t a) recta e m ipſi h t parallela, & quadratricis arcu e b. Ex corollario præcedentis conſtat ſegmentum eiuſmodi eſſe æquale parabolæ ſegmento b l m n, & ſpatio quod ad cuſpidem vel lunulam reſpondentem arcui vel falci inferiori b u m ſe habeat, vt recta g κ ſe habet ad g a rectam.

Tertiò quadratricis ſegmentum ſumatur contentum recta m g occurrente arcui vel falci inferiori in punctis b & m (quæ puncta non ſint ad diuerſas partes diametri t a, ſed vel ambo ſint ad partes b, vel eorum

vnum, quando alterum est in ipsa diametro; neutrum verò illorum sit punctum tactûs systematicum) rectis g d, m e ipsi h t parallelis, & quadratricis arcu e d. Ex priori casu quadrabitur figura b g d e contenta rectis b g, g d, & quadratricis portione d e b; quadrabitur etiam figura b m e contenta rectis b m, m e, & quadratricis portione e b; & si ex prioris figuræ spatio dematur spatium posterioris vnà cum triangulo rectilineo b m g; relinquetur spatium figuræ m g d e quæsitum; vt apertè constat.

Quartò quadratricis segmentum sumatur contentum recta b q occurrente arcui vel falci inferiori in punctis b, q (quæ sint ad partes oppositas diametri t a; & arcus b m g, g q sint inæquales; nã si sint æquales redit casus huius propositionis primus; sit autem arcus b m g, maior arcu g q) rectâ q z ipsi h t parallela, & quadratricis portione z d e b. Per m agatur m e ipsi h t parallela, & iungatur m b. Per primum huius propositionis casum quadrabitur figura m y q z d e; & per secundum aut tertiũ quadrabitur figura b l m e, & si duobus istis spatijs addatur triangulum rectilineum b m q habebitur, vt patet, spatium figuræ b f q z d e quęsitum.

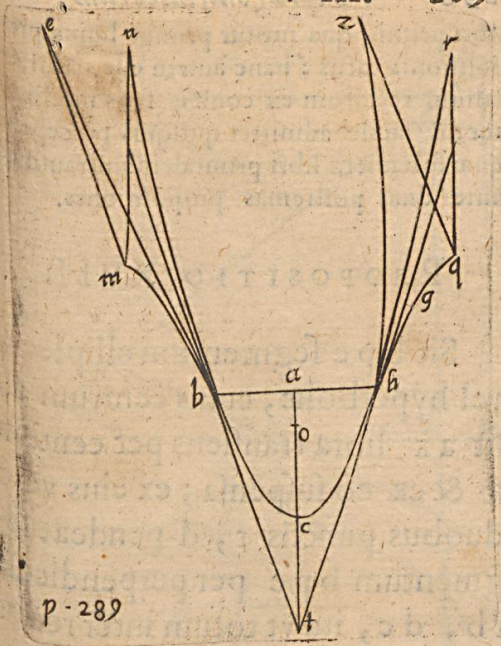
Quintò datum sit quadratricis segmentum cuius basis portio arcûs vel falcis inferioris sit tota ad partes k diametri a t, & iaceat inter ordinatim ad diametrum ap-

plicatas duas quaſcunque h b, q m. Inueniatur per primum caſum ſpatium æquale figuræ m y q z d e; inueniatur per eundem caſum primum ſpatium æquale figuræ b e d z h; ex hoc dematur ſpatium primò inuentum & trapezium b m q h; reſiduum vt liquet, erit æquale duabus figuris b l m e, h p q r: ſed ſpatium figuræ b l m e habetur ex ſecundo vel tertio caſu, ergo ſi hoc deducatur de reſiduo proximo, relinquetur vltimò ſpatium æquale figuræ h p q r.

Sextò denique vt in quarto caſu omnia ponantur, cum hoc diſcrimine quòd ſegmenti quadrandi portio quæ eſt ad partes b ſit minor. Sit igitur ſegmentũ h i m e d z h quadrandum, & eius portio m g ſit minor portione g h (minorem voco quæ continetur inter ordinatim applicatas minùs diſſitas) per m agatur m q ordinatim applicata, & per q recta q z æquidiſtans tangenti h r. Quadretur primò ſegmentum h p q r ex caſu præcedenti, tum ex primo quadretur ſegmentum m y q z d e; vtrique ſpatio addatur triangulum m q h; ſpatium compoſitum erit, vt perſpicuè patet, illud quod quæritur.

Hæc omnia locum habent in ſyſtemate ſectionum conicarum, ijſdemque verbis concipi poſſunt, paucis admodum mutatis vt ex inſpectione ipſius ſchematis quod ſubijcimus, liquet.

SCHO-



SCHOLIVM.

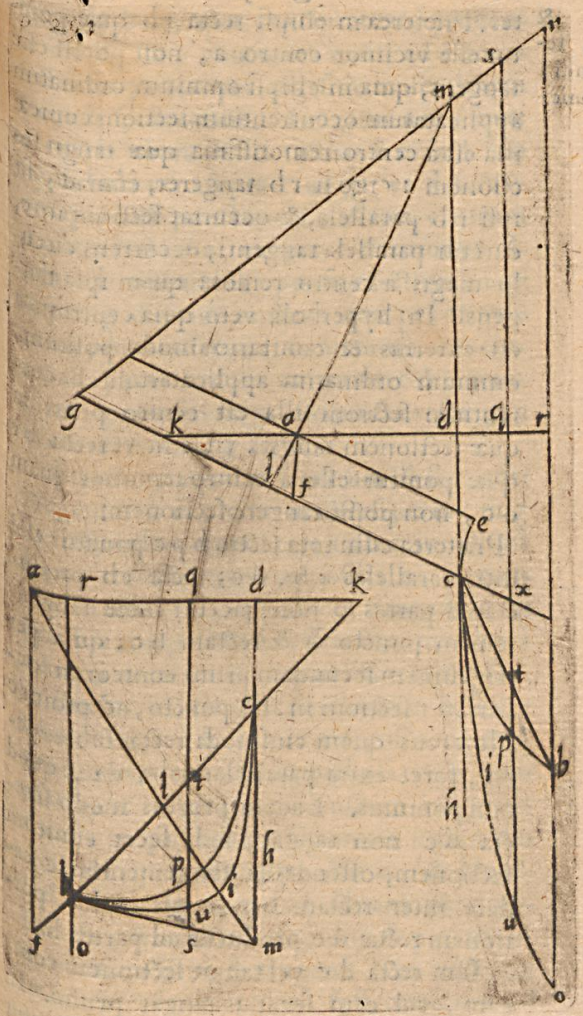
Ratio cur requisiuerimus vt recta ad cuius positionem describitur quadratrix vel sit vna tangentium vel angulum b t h diuidat, est quia parallelæ tangenti vel illi quæ angulum b t h diuidit, non occurrunt inferiori arcui, aut falcibus nisi in vno puncto, quod exigit sexta propositio

libri primi, qua nititur primus huius propoſitionis caſus: hanc autem eſſe naturam talium rectarum ex conicis ſatis intelligitur, & facile admittet quiſquis perceperit quæ ſub finem libri primi demonſtrauimus ante duas poſtremas propoſitiones.

PROPOSITIO XVII.

Sit b p c ſegmentum ellipſeos, vel hyperbolæ, cuius centrum a; ſit a k libra tranſiens per centum a & ex eo ſuſpenſa; ex eius verò duobus punctis r, d pendeat ſegmentum b p c per perpendicula r b, d c, ita vt totum inter rectas r b, d c contineatur. Propoſitum ſit inuenire rectilineum æquiponderans ſegmento vt iacet permanenti.

Rectas r b, d c non poſſe eſſe ambas tangentes apertum eſt; quæ enim ſunt parallelæ tangentes eæ ſunt in eiuſdem diametri extremis, & centrum habent in mediâ diametro tactus cõnectente vt cõſtat ex conicis, puncta verò r & d ſunt ad eaſdẽ centri a par-


n
s
m
g
k
a
d
q
r
l
f
e
c
x
t
p
i
b
h
u
o
a
r
q
d
k
c
l
t
h
p
i
b
u
f
o
s
m

27. & 31. secundi Conic. tes. Præterea in ellipsi recta r b quæ ponitur esse vicinior centro a, non potest esse tangens, quia in ellipsi omnium ordinatim applicatarum occurrentium sectioni conicæ illa est à centro remotissima quæ tangit sectionem: ergo si r b tangeret, cùm d c sit ipsi r b parallela, & occurrat sectioni in c, daretur parallela tangenti, occurrens circulo magis à centro remota quàm ipsa tangens. In hyperbolâ verò quia centrum a est exterius & contrario modo positum, omnium ordinatim applicatarum occurrentium sectioni illa est centro proxima quæ sectionem tangit; vnde fit vt recta b r quæ ponitur esse à centro remotior quàm d c, non possit tangere sectionem.

Præterea cum tota sectio b p c ponatur esse intra parallelas r b, d c; recta r b producta ad partes o non jacebit inter tangentem in puncto b & rectam b c; quia per trigesimam secundam primi conicorum occurret t sectioni in alio puncto, ac proinde ille arcus quem eiusmodi recta subtenderet, foret extra parallelas r b, d c, quod non ponimus. Eodem prorsus modo si recta d c non tangat, sed secet conicam sectionem, ostendetur tangentem in c cadere inter rectam b c & rectam h c portionem rectæ d c productæ ad partes h.

Iam recta d c vel tangit sectionem conicam, vel eam secat; tangat primò. In ellipsis schemate per b ducta intelligatur

tangens b m, quæ concurrat cum tangente d c in m, concurret enim ad easdem sectionis partes per vigesimam septimam secundi Conicorum. Iungatur a m, quæ occurrat connectenti tactus b c in l. In hyperbolâ verò supra c ad partes d sumatur quoduis punctum e, & per centrum ducatur recta e a, cui per c ducatur parallela c l occurrens oppositæ sectioni in g; & per g ducatur tangens quæ per trigesimam primam secundi conicorum concurret ad partes a cum tangente c d; punctum concursûs sit m, & iuncta recta m a occurrat rectæ c g in l.

Ponatur itaque a centrum systematis; tangentes b m, c m in ellipsi; c m, m g in sectionibus oppositis; tactus in ellipsi b, c; in sectionibus oppositis c, g connexi rectis b c, c g; nota tangens c m; brachium ergo libræ systematicum, ductâ a f ipsi notæ tangenti parallelâ, erit c f.

Rursus in ellipsi intelligatur describi quadratrix c i b genita ex positione tangentis notæ c m; in hyperbolâ vero quadratrix c i o genita ex eiusdem tangentis notæ c m positione. Quoniam sumpto in rectâ d r quocunque puncto q, & per illud ductâ q t quæ ad libram pendicularis sit, & occurrat sectioni b p c in p, quadratrici in u & tangenti b m vel g m in s, vt f c brachium systematicum ad c x, hoc est vt a d ad d q, ita per vnde-

cimam huius ſp ad pu; ſpatium autem quod quadratrice & rectâ cb continetur, habetur per propoſitionem præcedentem: & per librum Archimedis de quadraturâ paraboles habetur ſpatium quod figuræ rectilineæ bmc, vel mcbn æquiponderat libra ex d ſuſpenſa, eiuſmodi ſpatiorum differentia cognita erit, quam æquiponderare ſegmento cbp, libra ex a ſuſpenſa, pendentem ex brachio quod ipſi ad ſit æquale, & oppoſitum ſegmento bpc oſtendimus in corollario ſecundo popoſitionis duodecimæ libri ſecundi.

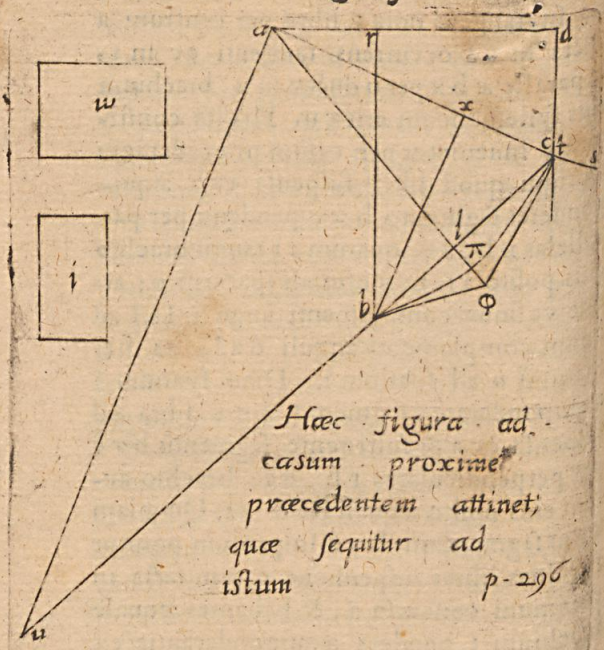
Secundò recta dc ſecet ſectionem conicam, & ſecta bifariam recta bc in l, recta al juncta occurrat ſectioni in π; vt autem al ad aπ, ita fiat aπ ad aφ; jungantur bφ, cφ quæ tangent ſectionem per trigeſimam octauam primi Conicorum.

In Schemate igitur ellipſis, rectæ φc per a ducatur parallela au, erunt alterni anguli uaφ, cφa æquales; ac proinde non cadet recta au intra ſegmentum bπc, ſed erit totum ipſum ſegmentum ad eaſdem partes rectæ au, cùm recta au cadat ad u partes rectæ rb oppoſitas eiuſdem rectæ rb partibus l ad quas totum continetur ſegmentum. Ad rectam au ex a excitetur perpendicularis as; occurrat autem in u recta au rectæ cb productæ.

Si ergo a intelligatur centrum ſyſtematis; tactus b, c; tangentes bφ, cφ quarum

c φ sit tangens nota; libra per centrum a ducta sit a ς occurrens tangenti φ c in t, & parallelæ b x per b ductæ in x: brachium eius systematicum erit c u. His ita constitutis, inuenietur per casum præcedentem spatium quod libra suspensa ex a æquiponderet segmento b π c pendenti per parallelas x b, φ t, quarum φ t tangit brachio eius posito a t, sit eiusmodi spatium ω; atque vt sinus complementi anguli s a l ad sinum complementi anguli d a l, ita fiat spatium ω ad spatium i. Dico spatium i æquiponderare segmento b π c libra a d suspensa ex a & sustinente segmentũ b π c per perpendiculares r b, d c; brachio autem eius posito æquali rectæ a t. Quoniam enim segmentum b π c suspensum ponitur per duas libras suspensione earum facta in communi concursu a, & habentes æquale brachium; pondera æquiponderantia ex extremo brachiorum erunt inter se vt sinus complementi angulorum prædictorum ex corollario primo propositionis vndecimæ libri secundi: recta enim a l transit per centrum grauitatis segmenti b π c ex demonstratis in decima tertia libri secundi.

In schemate vero hyperbolæ sumpto quouis puncto e in hyperbola extra segmentum ad partes c iungatur a e, & per c ipsi parallela c g quæ occurrat sectioni oppositæ in g: per g ducatur tangens g m, quæ vt in primo casu diximus occurret

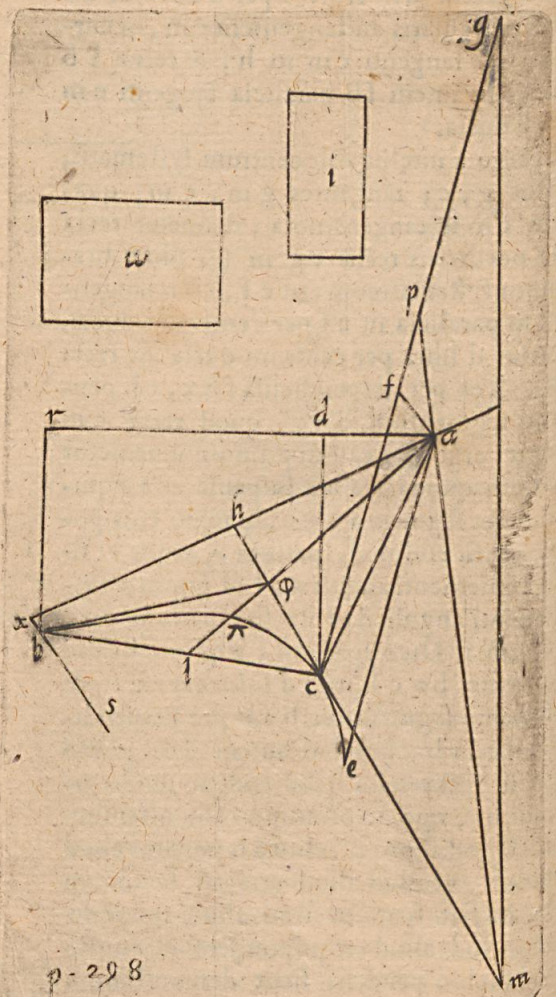


Hæc figura ad casum proximè præcedentem attinet, quæ ſequitur ad iſtum p. 296

tangenti c m ad a partes rectæ c g; punctum occurſûs ſit m; per a ducatur a f parallela tangenti c m, & occurrat rectæ c g in f: ipſa a f cum ſit parallela tangenti c m & per centrum a ducta non occurret ſectionum vlli, erit quippe diameter directa, eiuſque cõiugata trãſuerſa erit a c per decimam ſextam primi Conicorum, multò minus ergo occurret ſegmento b π c, proinde totum ſegmentum b c erit ad eaſdem

parte, rectæ a f. Rursus per a ducatur a x perpendicularis ad tangentem c m, occurrens ipsi tangenti c m in h, & rectæ f b in x; sit autem f b parallela tangenti c m per b ducta.

Si ergo a intelligatur centrum systematis; tactus g, c; tangentes g m, c m; quarum c m sit tangens nota; diameter recta m a occurrens rectæ c g in l; libræ brachium systematicum erit c f, cùm tangenti c m parallela sit a f per centrum a ducta. Rursus si libra per centrum ducta sit recta a x, ab ea per perpendicula f b x, c h pendebit segmentum b ϖ c, quod recta c m tangit: ergo per casum primum inuenietur spatium quod libra a x suspensa ex a æquiponderet segmento b ϖ c, brachio eius posito a h; sit eiusmodi spatium ω, atque vt sinus cõplementi anguli x a l ad sinum complementi anguli d a l ita fiat spatium ω ad spatium i. Dico spatium i æquiponderare segmento b ϖ c libra a d suspensa ex a, & sustinente segmentum b ϖ c per perpendicula d c, r b, brachio autem eius posito æquali rectæ a h, quod eodem modo ostenditur, quo in proximo casu ostensum fuit. Quod si pro brachio a h ponatur aliud quoduis, vt illud aliud erit ad brachium a h, ita fiat spatium i ad aliud spatium; nam istud aliud æquiponderabit ex illo alio brachio pendens sicut demonstratum est in secundo libro. 8. secũdi huius.

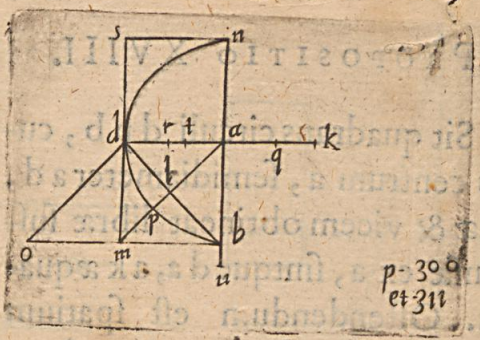


p - 298

PROPOSITIO XVIII.

Sit quadrans circuli d p b, cuius centrum a, semidiameter a d, quæ & vicem obtineat libræ suspensæ ex a, sintque d a, a k æquales. Ostendendum est spatium quod ex k pendens æquiponderat quadranti a d p b vt iacet permanenti esse æquale duobus trientibus trianguli rectanguli a d b, siue vni trienti quadrati quod potest semidiameter a d; toti verò semicirculo b d n quod ijsdem positis æquiponderat esse æquale duobus trientibus quadrati eiusdem.

Si enim ad d a excitetur ex d perpendicularis d m, & per b agatur b m ipsi d a parallela, erit d a m b parallelogrammum, & quia d a, a b ex centro eductæ sunt æquales, angulusque d a b rectus, erit figura a d m b quadrata; rectæ verò d m, b m tangent circulum in punctis d, b, cùm sint perpendiculares ad semidia- 16. tertij Euc.



metros a d, a b. Ducta recta d b, iunctaque recta a m, quoniam d p b ſegmentum circuli pendet ex libræ punctis d, & a; & tangentes in d & b conueniunt in punctum m; ſpatium quadratricis deſcriptæ ad poſitionem tangentis d m erit æquale ſegmento parabolæ cuius baſis ſit d b, & tangentes d m, m b, diameterque m l. Cùm ergo eiuſmodi ſegmentum parabolæ ſit æquale triẽtibus duobus trianguli d m b, erit ſegmentum quadratricis æquale trientibus duobus trianguli rectanguli d m b, hoc eſt trienti quadrati d a b m.

2. corollar. propoſ. 11. huius.

Rurſus quoniam libra ex d ſuſpenſa latus d m trianguli d m b eſt ad ipſam libram perpendiculare, ab eaque idem triangulum d m b, pendet ex punctis d, a, eo planè modo quo ſuperiùs diximus indidem

16. quad. parab.

pendẽte segmentum d p b : brachio posito æquali ipsi d a, spatium æquiponderans triangulo d m b vt iacet manenti, erit æquale trienti ipsius trianguli. Cùm ergo differentia segmenti quadratricis & huius æquipõderantis spatij sit æqualis spatio quod libra ex a suspensa, & brachio a *k* æquiponderat, eaque differentia sit triens trianguli d m b, libra ex a suspensa spatium quod ex *k* pendens æquiponderat segmento d p b erit æquale trienti trianguli d m b. Quoniam verò triangulum d a b ita pendet ex punctis d, a, vt eius latus a b sit perpendiculare ad libram, spatium ex *k* pendens, æquiponderansque illi, libra ex a suspensa, erit æquale trienti trianguli d a b. Cùm igitur duę figuræ d a b, d p b simul constituant quadrantem circuli a d p b, & segmento d p b æquiponderet triens trianguli d m b, figuræ verò a d b, triens ipsius a d b; triangula autem d a b, d m b sint æqualia; toti quadranti a d p b vt iacet manenti libra ex a centro circuli suspensa spatium ex *k* æquiponderans erit æquale duobus trientibus trianguli d m b, seu vni trienti quadrati a d m b super diametro a d constructi: ac proinde spatium quod toti semicirculo b d n ijsdem positis æquiponderat æquale erit duobus trientibus quadrati a d m b, quod erat ostendendum.

7. quad. parab. 17. huius.

6. quad. parab.

LEMMA.

Sumpsimus segmentum parabolæ cuius basis d b, diameter l m, tangentes d m, b m conuenientes in m, esse æquale duobus trientibus trianguli d m b, citata ad marginem propositione decima sexta quadraturæ paraboles, ex qua id satis apertè sequitur. Ne quis tamen dubitare quicquam possit, per d agatur diametro l m parallela d o occurrens tangenti b m in o: ergo segmentum parabolæ erit æquale tertiæ parti trianguli d o b per decimam sextam quadraturæ parabolæ: sed triangulum d m b est semissis trianguli d o b (quoniam enim lateri d o trianguli d o b parallela est l m, vt d l ad l b, ita erit o m ad m b; 2. sexti Euc. sunt ergo o m, m b æquales; ergo triangula d o m, m d b habentia bases o m, m b 1. sexti Euc. æquales, & eandem altitudinem ex b demissam, sunt æqualia) ergo segmentum parabolæ se habens ad triangulum o d b vt duo ad sex se habebit ad triangulum d m b semissem trianguli o d b vt duo ad sex.

COROLLARIVM I.

Hinc apertum est libra suspensa ex centro a posita quacunque longitudine brachij, æquiponderans circuli se habere ad æquiponderans rectanguli b s continentis semi-

circulum vt duo ad tria. Si enim longitudo sit a κ i. modo ostendimus, nimirum semicirculum b n d æquiponderare duobus trientibus quadrati d b; rectangulum autem f b æquiponderare toti quadrato d b apertum est; nam diuisa recta d a bifariam in r, erit r centrum grauitatis rectanguli f b; ergo vt k a longitudo ad a r longitudinem, ita est graue f b, ad graue ex k æquiponderans: ergo cùm a κ sit dupla rectæ r a, erit f b duplum æquiponderantis ex *k*: ergo æquiponderans ex k est æquale quadrato a m. Quòd si longitudo quæuis alia a p ponatur idipsum apertum est ex corollario octauæ secundi libri. 10. primi æquip.

COROLLARIVM. II.

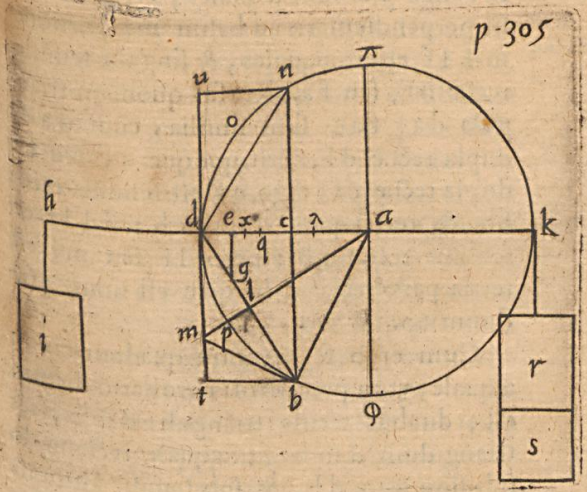
Si sectio d p b sit hyperbola cuius centrum u; axis u b a vertex b; ordinatim applicata a d; sitque b a rectæ b u dupla, ipsique b a sit d a æqualis; inuenietur simili calculi methodo (nisi paralogismus aliquis me fallit) positâ librâ d *k*, & ex puncto a in quo bifariam secetur, suspensa, spatium quod ex *k* pendens æquiponderat figuræ d a b contentæ rectis d a, a b, & curuâ d b, esse æquale quinque vigesimis quartis quadrati d a, hoc est vni octauæ & vni duodecimæ parti quadrati d a. Cæterùm istud aliâ viâ ostenditur in libri quarti propositione vigesimâ tertiâ sub finem vltimi corollarij.

PROPOSITIO XIX.

Sit n d b ſegmentum circuli cuius centrum a, contentum rectâ n b & arcu n d b graduũ 120. quæ eſt tertia peripheriæ circuli pars, ex centro a in baſim n b cadat perpendicularis a c d, per d extremum ſemidiametri a d ducta ſit d u tangens, & compleatur parallelogrammum u b. Dico poſitâ libra h k ſuſpenſa ex a, ſpatium quod ex k altero diametri d k termino pendens æquiponderat ſegmento n d b vt jacet permanenti eſſe æquale medietati rectanguli u b.

Quoniam enim recta d b eſt hexagoni latus, erit d b ipſi d a. æqualis, ac proinde cum d b, b a ſint æquales triangulumque d b a ſit æquilaterum, perpendicularis b c ex b in baſim d a demiſſa ſecabit bifariam rectam d a in c. Similiter

quoniam



quoniam recta a l est perpendicularis ad rectam d b, cùm latera d a a b sint æqualia anguli d a l, b a l erũt æquales; item d b c c b a, & cùm anguli tres trianguli æquilateri d a b sint æquales, eorum semisses erunt æquales, ergo anguli f a b, f b a sunt æquales; ergo angulus m f b externus est æqualis duobus internis f b a, f a b, hoc est toti d b a: Sed angulus m b a est rectus, cùm m b tangat circulum in b, & angulus f b a est vna tertia recti anguli; ergo reliquus angulus m b f est duæ tertiæ recti anguli: sed angulus l f b est etiam duæ tertiæ recti, ergo triangulum m f b est æquiangulum & æquilaterum; ergo rectæ

m f m b f b ſunt æquales; ergo cum b l ſit perpendicularis ad baſim m f, portiones m l l f erunt æquales, & ſingulæ ſemiſſes rectæ b f, ſeu f a. Rurſus quoniam triangula d a l f a c ſunt ſimilia, cùm d a ſit dupla rectæ d l, erit quoque a f ſeu f b dupla rectæ c f; ergo c f eſt ſemiſſis rectæ f b & tertia pars totius c b: ſed l f eſt ſemiſſis rectæ f b: ergo l f ſeu m l eſt tertia pars rectæ c b quæ eſt ſinus graduum 60.

Cum ergo ſegmentum quadratricis ſit æquale, vt in precedenti corollario dictum eſt, duabus tertiis trianguli d m b, & triangulum d m b ſit æquale rectangulo ſub ſinu toto d b, & ſub ſemiſſe altitudinis m l, hoc eſt ſub ſextâ parte rectæ b c ſinûs graduum 60. erit ſegmentum quadratricis æquale duabus tertiis rectanguli ſub ſinu toto & ſub ſextâ parte ſinûs graduum 60.

Rurſus factis d a d h æqualibus, & abſciſſâ e d tertia parte rectæ d c, hoc eſt ſextâ totius d a ſeu h d; ſi per e agatur e g ipſi d m ſeu c b parallela, ſicut d e eſt tertia pars rectæ d c ita erit d g tertia rectæ d b. Quoniam ergo de libræ h c punctis d, c pendet triangulum d m b, ita vt eius latus m d ſit ad libram perpendiculare, libra ſuſpenſa ex d, triangulum d m b ex e tantùm pendens manebit vt iacet, ergo vt recta h d ad d e rectam, ita er-

2. ſexti.

triangulum d m b ad spatium i, quod ex h pendens ipsi d m b æquiponderet; ergo spatium i est sexta pars trianguli d m b, hoc est rectanguli sub sinu toto, & sub sexta parte sinûs graduum 60. Si ergo ex duabus tertiis eiusmodi rectanguli deducatur vna eiusdem sexta pars, relinquentur tres sextæ, siue medietas eiusdem rectanguli sub sinu toto & sub sexta sinus graduum 60. contenti: ergo medietas prædicti rectanguli est spatium quod libra suspensa ex a pendens ex k æquiponderat segmento circuli d p b vt jacet manenti: ergo totum rectangulum sub sinu toto & sub vna sexta totius b c, æquiponderat duobus segmentis d p b, d o n vt jacent permanentibus. 6. quadrat. parab.

Rursus fiat c q tertia pars rectæ d c; erit ergo q centrum grauitatis trianguli n d b: ergo si ex solo puncto q pendere ponatur manebit vt jacet, ergo libra ex a suspensa spatium r quod ex k pendens æquiponderet triangulo d n b, erit ad ipsum triangulum d n b vt q a ad a k: sed q a continet quatuor partes, cuiusmodi a κ continet sex, hoc est duas, cuiusmodi a k continet tres; ergo spatium r est æquale duabus tertiis trianguli d n b. Ergo si ex k pendeat ſ æquale rectangulo sub sinu toto, & sub sexta sinus graduum 60. totum r ſ æquiponderabit toti segmento n o d p b vt jacet manenti: sed triangulum d n b est æquale rectangulo sub d c & c b contento, 6. quadrat. parab.

liue rectangulo ſub d a ſinu toto & ſub medietate rectæ b c : ergo duæ tertiæ trianguli d n b ſunt æquales duabus tertiis rectanguli ſub ſinu toto & ſub ſemiſſe rectæ c b : ſed rectangulum ſub ſinu toto & ſub duabus tertiis medietatis rectæ c b eſt æquale duabus tertiis rectanguli ſub ſinu toto & ſub ſemiſſe rectæ c b : ergo rectangulum ſub ſinu toto & ſub duabus tertiis medietatis rectæ c b, eſt æquale ſpatio r ; ſed duæ tertiæ medietatis ſunt vna tertia totius : ergo ſpatium r eſt æquale rectangulo ſub ſinu toto & ſub vna tertia rectæ c b. Cum ergo ſ ſpatium ſit æquale rectangulo ſub ſinu toto & ſub vna ſextâ rectæ c b, vt oſtenſum fuit : ſi vni tertiæ addatur vna ſexta, conſient tres ſextæ ſiue vna medietas : ergo duo ſpatia r, ſ ſunt ſimul æqualia rectangulo ſub ſinu toto & ſub medietate rectæ c b. Hoc eſt ſub dc ſemiſinu recto & ſub tota c b : ſed rectangulum d b eſt ſemiſſis rectanguli u b ; ergo ſpatium r ſ quod ex *k* pendens æquiponderat ſegmento n d b eſt æquale medietati parallelogrammi u b.

16. ſexti.

1. ſexti.

COROLLARIVM. I.

Hinc apertum eſt diceratoidi n u t d b manenti vt iacet librâ ex a ſuſpenſâ æquiponderare ſpatium æquale quadranti rectanguli u b. Quoniam enim diuiſa rectâ

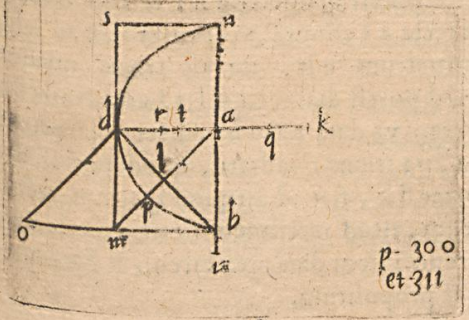
d c bifariam in x, punctum x est centrum grauitati rectangui u b, & quoniam recta x a habet se ad rectam a x vt 4. ad 3. spatium toti rectangulo u b vt iacet manenti æquiponderans erit æquale tribus quadrantibus rectanguli u b: sed æquiponderans segmento n d b est æquale duobus quadrantibus, vt ostensum est, eiusdem rectanguli; ergo diceratoidi n u t d b æquiponderat quadrans rectanguli u b. 10. primi æquip. 6. pri. æquip.

COROLLARIVM II.

Hinc patet quoniam semicirculi π d φ æquiponderans libra k d suspensa ex a sunt duo trientes quadrati c a, segmenti autem b d n est rectangulum b c d, si ex quadrati d a duobus trientibus auferatur rectangulum b c d restabit æquiponderans figuræ π φ n b vt iacet manentis. Quoniam verò rectangulo b c d æquale est rectangulum sub semisse rectæ c b & sub d a, si ex duobus trientibus rectæ d a auferatur semissis rectæ b c; rectangulum sub residuo & sub rectâ d a erit æquale spatio quod æquiponderat figuræ φ π n b contentæ rectis n b, φ π, & arcubus π n, φ b.

PROPOSITIO XV.

Vt ſe habet recta centrum circuli & centrum grauitatis ſemicirculi connectens ad ſemidiametrum; ita tertia pars quadrati, quod poteſt diameter eiuſdem circuli eſt ad ipſius circuli aream. Vnde datâ rectâ quæ iſtiuſmodi centra connectit, ſi vt data recta ad diametrum ita fiat triens quadrati quod poteſt diameter ad aliud ſpatium, iſtud ſpatium erit æquale areæ circuli. Item datâ areâ circuli ſi vt area circuli ad trientem quadrati quod poteſt diameter, ita fiat ſemidiameter ad rectam quandam, iſta erit interuallum quo centrum grauitatis ſemicirculi diſtat à centro ipſius circuli.



p. 300 et 311

Resumptâ figurâ propositionis decimæ octauæ; quoniam spatium, quod ex K pendens æquiponderat semicirculo b d n, æquale est duobus trientibus quadrati quod potest recta d a; si punctum t ponatur esse centrum grauitatis semicirculi (est enim in rectâ a d, vt probatum est in secundo) vt semidiameter a k ad a t rectam connectentem centra t & a, ita erit semicirculus pendens ex t ad duos trientes pendentes ex k; ergo ita etiam erit circulus ad quatuor trientes quadrati d a; sed quadratum diametri d k cum sit quadruplum quadrati d a, continet quadrati d a trientes duodecim; ergo quatuor trientes quadrati d a sunt vnus triens quadrati d k; ergo vt se-

13. secundi huius.

midiameter a k ad a r iacentem inter t & a, ita eſt area circuli ad trientem quadrati quod poteſt diameter d k; & inuertendo, vt recta a t connectens centra a, t ad ſemidiametrum a k, ita eſt triens quadrati quod poteſt diameter d k ad aream circuli: ſi ergo vt data recta a t ad ſemidiametrum d a, ita triens quadrati, quod poteſt diameter d k, fiat ad aliquod ſpatium rectilineum, iſtud rectilineum erit æquale areæ circuli; item datâ areâ circuli ſi &c. quod erat propoſitum.

COROLLARIVM I.

Eodem pacto oſtendetur ſi d p l ſit portio hyperbolæ de quâ in corollario ſecundo decimæ octauæ egimus, & ſi per t tranſeat perpendiculum ex eius grauitatis centro emiſſum, vt recta a t ad rectam a κ, ita eſſe duodecimam & octauam ſimul partem quadrati quod poteſt a κ, ad figuram b p d a: ac proinde ſi vt data a t ad rectam a k, ita fiat octaua ſimul & duodecima pars quadrati a k ad ſpatium aliquod rectilineum iſtud rectilineum eſſe æquale figuræ b p d a.

COROLLARIVM II.

Ex demonſtratis hactenus liquido conſtat quadrationem circuli & hyperbolæ à nobis traditam & inuentam dato duorum

centrorum memoratorum interuallo, nihil habere mechanicum in ipsa exequutione, quatenus vox illa denotat in perficiendo aliquo problemate, aliud instrumentum vsurpari præter ea quæ Euclides adhibet ad conficienda elementorum suorum problemata, hoc est nullo alio postulato quàm vt à quouis puncto ad quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur, & vt quouis centro & interuallo circulus describatur.



ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM.

LIBER IV.

Qui demonstrat centrum grauitatis peripherieorum, & eorum inuicem proportionem.

PRÆFATIO.

EX quo prolegomena huius operis typis cusa sunt, mutaui consilium circa ordinem eorum theorematum, quæ præsenti libro nunc adscribo; cùm enim demonstratis in antecedenti primùm cohærerent, secernenda iudicaui, tùm quia tertius liber præmissorum quorum molem longè superabat,

cùm quòd ea quæ iſto loco tractantur ſuapte naturâ ſatis ſeiuncta à reliquis mihi viſa fuerunt. Cæterùm quantum epilogiſmorum ſit ſubſidium ad occultiora Matheſeos theoremata indaganda, licet ſatis conſtet ex Archimedis operibus, Ptolemæi magnâ ſyntaxi, & ex ijs quæ ſub proximè prioris libri finem ad calculum prælucente Zygoſtaticâ reuocauimus; manifeſtum tamen ampliùs fiet ex ſequentibus, quæ euincunt circuli dimenſionem non ſecus ac vniuerſum mundum *numero & pondere*, ἀριθμῷ καὶ σταθμῷ, Sap. 11. perfici. Porrò in numerorum rationibus computandis (præcipuè quando integris *fractiones*, quas vocant, illigantur) facile fit vt etiam diligentiſſimo ratiocinatori paralogiſmus aliquis ſubrepat; quare eiuſmodi erratorum

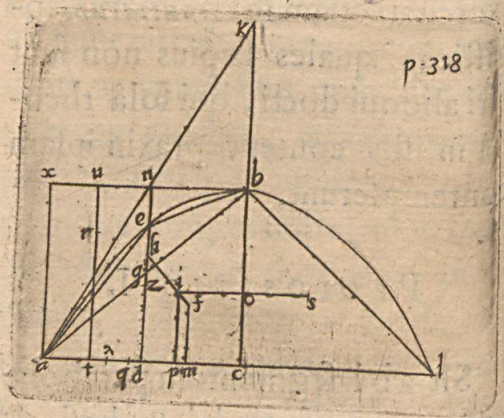
venia, vltro cõceditur ab æquis huius artis æstimatoribus, nec illam ego respuo, si quid forte tale, vt homo sum, peccauerim. Sæpe diagrammatis ratio stat, sed dum ad numeros reducitur, calculi error interuenit; is exigui momenti est, cùm manente demonstrationis robore, nullo negotio emendari possit: non est tamen calculatoris cuiuscunque hæc ratiocinia examinare, sed Arithmetici imprimis exercitati etiam in *minutiarum* logisticâ, quales sæpius non sunt viri alioqui docti, qui solâ theoriâ in istis contenti praxin ipsam contempserunt.

Propositio I.

Sit a b l segmentum parabolæ contentum arcu a b l & basi a l, diuisum per rectã b c diametrum

aut diametro parallelam in duas portiones; propositumque sit in portionis alterutrius a e b c rectâ a c determinare punctum in quod incidit æquidistans rectæ b c ducta per centrum grauitatis portionis a e b c.

Recta a c diuidatur bifariam in d; & in m ita vt a m sit dupla rectæ c m; producatur per d æquidistans rectæ b c, occurratque sectioni conicæ in e, recta verò a b eidem d e occurrat in g; ita diuidatur d m



in p, vt sicut junctis a c c b rectis, triangulum a c b ad trianguli a e b quatuor trientes, ita sit recta d p ad p m; per p agatur p i ipsi c b parallela. Dico rectam p i transire per centrum grauitatis portionis a e b c.

Quoniam enim recta d e secat bifariam basim a b, & est parallela diametro segmenti, erit g e diameter segmenti a e b g; ergo g e transit per centrum grauitatis segmenti a e b g, & ipsum segmentum est æquale quatuor trientibus trianguli a b e. Rursus quoniam c m est tertia pars lateris a c triāguli a c b & recta m f est lateri c b æquidistās, transibit per centrū grauitatis trianguli a c b. Cùm igitur portionem a e b c duæ eius partes a e b g a c b g æquēt, & rectæ g e, m f trāseant per centra earum, si per centrum totius ducatur æquidistans diuidet rectam d m in duas portiones quarum ea quæ adiacebit puncto d erit ad aliam sicut triangulum b c a est ad segmentum a e b g hoc est ad quatuor trientes trianguli a e b g; sed ita etiam est ex constructione d p ad p m: ergo punctum p est illud quod erat determinandum.

49. primi Cō. 4 secūdi æquip. 17. quæ parab. 6 quad. parab. 6 aut 7. æquip.

COROLLARIVM I.

Hinc facile intelligitur qua methodo inueniri deberet centrum portionis

inter duas quaſcunque parallelas, e d, b c interceptas; ductâ nimirum e b, trapezij d e b c inuenitur centrum grauitatis & per illud ducitur parallela rectæ i p reſpondens; cætera ſe habent eodem prorſus modo, ſubſtituto in locum trianguli a b c trapezio e d c b.

15. primi æquip.

COROLLARIVM II.

Ex his patet ſi compleatur parallelogrammum x c parallelam ductam per portionis b x a e centrum grauitatis inueniri, ſi ex parallelogrammo x c auferatur portio b e a c conſtans triangulo b a c & trientibus quatuor trianguli a e b & ſi vt reſiduum ad portionem a e b c, ita fiat recta p d ad d t. Quoniam enim recta a c bifariam ſecatur in d, centrum grauitatis parallelogrammi x c erit in rectâ d e lateri b c parallelâ. Cum ergo recta p i tranſeat per centrum grauitatis partis a e b c, & vt altera pars a x b e ad a e b c ita ſit d p recta ad d t: recta t u parallela rectæ t b tranſibit per centrum grauitatis partis b x a e.

COROLLARIVM III.

Hinc patet quoniam punctum p cadit inter d & m, rectam a p eſſe ſemper maiorem ſemiſſe rectæ a c; eſt enim maior quàm

quàm, a d quæ rectæ a c est semissis & semper esse minorem duobus trientibus rectæ a c; est enim minor quàm a m quæ duos trientes rectæ a c continet: proportio ergo rectæ a p ad p c est maior proportione æqualitatis, & minor proportione duplâ.

COROLLARIVM IV.

Segmento parabolæ quouis diuiso in duas partes per diametrum, centrum grauitatis earum cuiuslibet est in recta æquidistante eidem diametro & semibasim secante in duas portiones quarum quæ diametro adiacet est ad aliam vt 3. ad 5. Centrum autem grauitatis semi-diceratoidis dictæ portioni respondentis est in parallela diuidente semi-basim in duas partes quarum quæ adiacet diametro se habet ad alteram vt 3. ad 1. Sit a b l quoduis parabolæ segmentum, cuius basis a l, diameter b c, diuidens ipsum segmentum in duas partes a b c, l b c. Cuiusuis illarum a b c centrum grauitatis sit i, & per i ducta sit ipsi b c æquidistans i p, occurrens basi a l in p. Dico vt 3. ad 5. ita esse rectam p c ad p a.

Ducatur recta a b & trianguli a b c centrum grauitatis sit f, portionis autem a e b centrum grauitatis sit h, recta connectens centra h, f transibit per i, atque vt triangulum a b c ad segmentum a e b, 8. libri primi æquip.

4. secũdi æqu. ita erit recta h i ad i f; per h & f ducantur rectæ h d, f m; erit h d diameter segmenti a e b, ac proinde occurrens basi a b in g, eam bifariam secat; cùm igitur

2. sexti Eucl. lateri b c trianguli a b c parallela sit g d, vt b g ad g a, ita erit c d ad d a; sunt ergo c d, d a æquales. Et quoniam f m est pa-

6. quad. rallela lateri b c & per f centrum grauitatis transit, erit m c tertia pars rectæ a c.

10. sexti Eucl. Denique quoniam rectæ d h, p i, m f sunt parallelæ, vt h i ad i f ita erit recta d p ad p m.

17. qua. par. Quoniam igitur ducta recta b l segmentum a b l continet triangulum a b l semel & eius trientem; segmenti verò a b l portio a e b c est medietas, triangulique a b l triangulum a b c est etiam medietas,

6. primi huius in 1. coroll. portio a e b c continebit triangulum a b c semel & eius trientẽ, hoc est a e b c se habet ad a b c vt quaternarius ad ternarium; ergo cum ternarius ad excessum quo à quaternario superatur habeat triplam proportionem, triangulum a b c habebit quoque triplam ad portionem a e b, qua superatur à figura a e b c. Cum igitur vt triangulum a b c ad portionem a e b, ita ostensum sit esse rectam h i ad i f, seu d p ad p m, erit d p tripla rectæ p m. Diuisa igitur recta a c in viginti quatuor partes; semissis d c continebit duodecim ex illis; m c verò triens rectæ a c continebit octo; d m ergo habebit quatuor. Et quoniam

d m ita est in p diuisa vt d p ad p m sit vt ternarius ad vnitatem; ex illis quatuor quas d m continet, attribuentur tres ipsi d p: recta ergo a p constabit quindecim partibus, & recta p c residuis nouem: ergo recta a p se habet ad c p vt 15. ad 9. siue vt quinarius ad ternarium quod erat primò loco ostendendum.

Rursus quoniam portio a e b g est tertia pars trianguli a b c; completo parallelogrammo x c, tota figura a e b c continebit quatuor sextantes parallelogrammi x c; ac proinde pars a x b e se habet ad partem b e a c vt vnitas ad binarium. Sit recta u t diametro a b c parallela, transeatque per centrum figuræ b x a ç: vt vnitas ad binarium ita erit d p ad d t: sed d p est vna octaua rectæ a c, ergo t d erit duæ octauæ: ergo a t continet duas octauas, & t c sex residuas; ergo recta a t ad t c est vt 2. ad 6. siue vt vnitas ad ternarium, quod erat secundo loco ostendendum. 6. aut 7. quad. parab.

Quòd si alia portio segmenti parabolæ quam semisegmentum sit proposita & in ea dererminari per numeros debeat punctum in quod cadit parallela per centrum grauitatis ducta in portione tam segmenti quàm diceratoidis; illud præstari debebit insistendo methodo traditæ, vel alteri faciliori quæ ex principiis ab Archimede traditis fortasse occurret.

COROLLARIVM V.

Si opus ſit, oſtendi poterit rectam i p continere duas rectæ b c quintas. Sit enim o centrum grauitatis totius parabolæ, & iungatur i o, cui æqualis abſcindatur o ſ; erit ſ centrum grauitatis ipſius b c l, cùm partes a b c, b c l ſint æquales; ſed recta i ſ eſt parallela rectæ a l ex demonſtratis, & recta o c continet duas quintas rectæ c b: ergo p i ipſi c o æqualis continet duas quintas rectæ c b.

10. primi æquip. 15. ſecundi huius. 8. ſec. æquip.

COROLLARIVM. VI.

Ex his apertum eſt ſi duo parabolæ ſegmenta habuerint baſim eandem, rectas diametris parallelas & tranſeuntes per centra grauitatis ſemiſegmentorum ad eaſdem diametrorum partes iacentium concurrere in idem baſeos punctum, & eius ſegmentum adjacens diametro ad aliud eſſe vt 3. ad 5. Idem dici debet de parallelis per centra grauitatis ſemidiceratoidum ductis; Eas nimirum in idem baſeos punctum incidere, & partem eius diametro adjacentem eſſe triplam reliquæ quæ ad eaſdem diametri partes iacet.

COROLLARIVM VII.

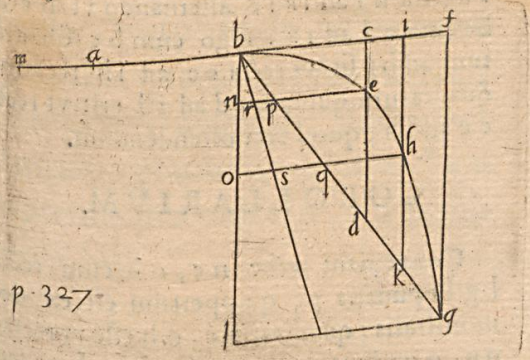
Si fiant c b, b k æquales, & jungatur a κ, erit a k tãgens in a; & sicut a c est dupla rectæ a d, ita k c erit dupla rectæ d n, sunt ergo d n, b c æquales: cùm ergo d e contineat tres quadrantes seu dodrantem rectæ b c, erit e n reliquus quadrans; & quia triangula a n e, a e d habent eandem altitudinem a d, erunt vt bases d e, e n hoc est vt nouem ad tria; & quia parabolæ segmentum e g est tertia pars trianguli a n e, triangulum a e d erit ad segmentum e g vt nouem ad vnum. Si ergo recta a d diuidatur in partes sexaginta quarum q d contineat viginti, a t continebit triginta, & t q decem; Et si t q ita diuidatur in λ, vt t λ contineat nouem, & q d residuam ex decem, erit a λ ad λ d vt triginta nouem ad viginti & vnum, hoc est vt tredecim ad septem. Dico si per λ agatur parallela rectæ c k, in illa esse centrum grauitatis portionis parabolicæ a e d. Quoniam enim a e d triangulum habet latus a d diuisum in tres partes, quarum vnam continet q d, si per q agatur æquidistans rectæ d e, erit in æquidistante centrum grauitatis trianguli a e d; sed centrum grauitatis segmenti parabolici a e est in recta t u bifariam secante, vt ponimus, rectam a d; ergo cum triangulum a e d sit ad seg- 16. quadrat. parab.

mentum a e vt nouem ad vnum, & ita etiam sit t λ ad λ q, erit in parallela per λ centrum grauitatis portionis parabolicæ a e d.

Propositio II.

In triangulo quouis quadrata rectarum æquidistantium vni ex tribus lateribus sunt vt portiones earundem æquidistãtium clausæ tangente & parabolâ, cuius vertex sit in angulo subtenso à prædicto latere; diameter sit ipsi parallela, & tangens sit alterum ex trianguli lateribus ad verticem conuenientibus; tertium verò latus subtendat portionem parabolæ intra triangulum inclusam.

Sit triangulum b f g cuius lateri f g parallelæ ductæ sunt i c, c k; per b angulum oppositum lateri f g ducta sit b l ipsi f g parallela; ad b l ex b excitetur b a perpendicularis, vtque f g recta ad b f, ita fiat b f ad tertiam quandam b m ex b a abscissam. Rursus dato latere recto b m,



p 327

diametro b l, eiusque vertice b, describatur parabola b e, cuius ad diametrum b l ordinatim applicatæ sint parallelæ rectæ b f: tanget ergo recta b f parabolam in b: completoque parallelogrammo f g l b, quoniam rectangulum m b l est æquale quadrato rectæ l g seu b f ipsi æqualis, parabola transibit per g; ergo recta b g subtendit arcum b e g. Rectæ igitur c d, i k occurrant parabolæ in e & h; dico vt recta c e ad i h rectam, ita esse quadratum c d ad i k quadratum. 52. primi Có. 32. eiusdem.

Compleantur parallelogramma c e n b, i h o b: ergo eorum latera opposita erunt æqualia, hoc est rectæ n b, b c, i h, b i rectis c e, n e, b o, o h. Quoniam ergo vt recta b n ad b o, ita est quadratum n e ad o h, erit quoque vt recta c e ad i h, ita quadratum b c ad b i: Cùm igitur trià- 34. primi Eucl. 20. primi Cō.

gula b c d, b i k ſint ſimilia, erit vt b c ad c d, ita b i ad i k: & alternando vt b c ad b i, ita c d ad i k: ergo cùm b c quadratum ad b i ſit vt recta c e ad i h rectam, quadratum quoque c d ad i d erit vt recta c e ad i h; quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

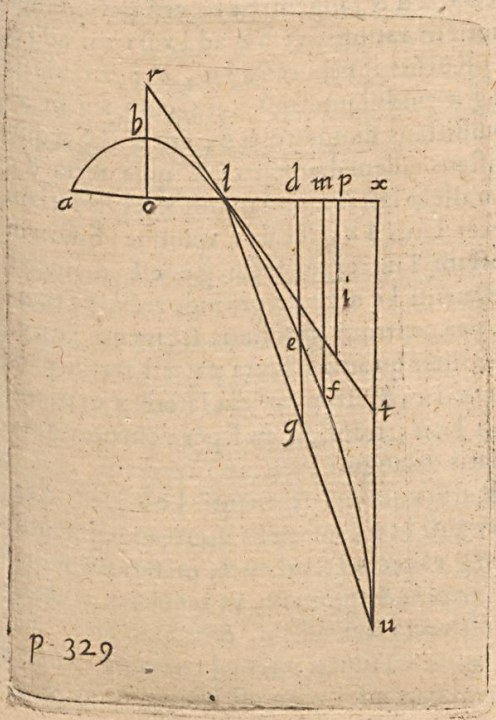
Conueniant rectæ n e, o h cum rectâ b g in punctis p, q; apertum eſt ex demonſtratis, quadrata n e, o h eſſe vt rectas n p, o q: ſunt enim vt rectæ b n, b o: ſed b n ad b o, eſt vt n p ad o q, eò quòd triangula b n p, b o q ſint ſimilia; ergo vt recta n p ad n q, ita eſt quadratum n e ad o h quadratum. Quia verò ductâ quacunque ex puncto b recta b ſ occurrente rectis n e, o h in r & ſ, vt n p ad o q, ita ob ſimilitudinem triangulorum b n p, b o q, eſt recta n r ad o ſ; vt quadratum n e ad o h, ita erit ductâ quacunque recta n ſ, recta n r ad o ſ.

20. primi Cõ.

PROPOSITIO III.

Sit a b l ſegmentum parabolæ, & productis extra ipſum baſi & parabolâ, ductaque recta x u diametro r b æquidiſtante, & oc-

currente in x & u basi atque parabolæ, propositum sit inuenire sectionem quam in recta l x facit æquidistans diametro ducta per centrum grauitatis figuræ l x u contentæ sub rectis l x, x u & sub curua l u.



P 329

Fiant c b, r b æquales, & iungatur r l, quæ vt oſtenſum fuit in prioribus tanget ſectionem in l; recta l x diuidatur bifariam in d, & ita in m, vt l m ſit dupla rectæ m x. Vt recta a m ad m x, ita fiat recta d m ad m p. Dico parallelam p i per p ductam tranſire per centrum grauitatis figuræ propoſitæ l x u.

Quoniam enim vt recta a x ad a l, ita eſt x u recta ad x t (eſt autem t occurſus rectæ x u & tangentis r l) erit per conuerſionem rationis vt a x ad l x ita x u ad t u.

2. tertii huius.

Rurſus iuncta recta l u, & per d ducta d g æquidiſtante ipſi x u; cùm x u ſit æquidiſtans diametro b c, erit & d g æquidiſtans eidem diametro; & quia recta d g parallela lateri x u trianguli x u l bifariam ſecat latus l x, ſecabit quoque bifariam rectam l u: ergo recta g e eſt diameter ſegmenti l e u g: ac proinde recta g e tranſit per centrum grauitatis ſegmenti l e u g. Similiter quoniam recta p x eſt tertia pars rectæ l x, & eſt parallela lateri x u trianguli l x u, tranſibit m f per centrum grauitatis trianguli l x u.

2. ſexti Euc.
49. primi Cõ.
4. ſecũdi æqu.
6. qua. parab.
16. qua. parab.

Rurſus quoniã ſegmentũ l e u g eſt triẽs trianguli l t u, ipſum l t u erit ad ſegmentũ l e u g vt recta l x ad m x, in ratione ſcilicet triplá; & quoniam vt recta a x ad l x, ita eſt recta x u ad t u, & vt x u baſis ad t u baſim ita ſunt x u l, t u l triangula; ergo vt recta a x ad l x ita eſt triangulum l x u

1. ſexti Euc.

ad triangulum l t u: sed vt recta l x ad m x, ita est l t u triangulum ad segmentum l e u g: ergo ex æquo vt recta a x ad m x ita est triangulum x u l ad segmentum l e u g: ergo diuidendo vt recta a m ad m x, ita est figura l x u e ad segmentum l e u g: sed ita etiam est d m interuallum inter parallelas d c, m f transeuntes per partis l e u g & per totius l x u g centra, ad aliam rectæ d m portionem ad partes x sumptam, & iacentem inter m f & aliam parallelam ductam per centrum alterius partis l x u e: ergo cùm ita sit d m ad m p, recta p i transibit per centrum grauitatis partis l x u e, quod erat faciendum. 6. aut 7. primi æquip.

COROLLARIVM I.

Ex his apertum est, rectam l p esse maiorem besse rectæ l x, hoc est recta l m: ac proinde proportionem rectæ l p ad p x esse maiorem dupla. Esse autem tripla minorem ita ostenditur. Quoniam proportio rectæ l m ad m x est ex constructione dupla, & recta a m est maior recta l m, proportio rectę a m ad m x erit maior dupla: sed vt a m recta ad m x, ita est ex constructione d m recta ad m p: ergo proportio rectæ d m ad m p est dupla minor. Rursus si recta l x diuidatur in viginti-quatuor partes æquales, recta l d semissis continebit duodecim; & recta d m sextans 8. quinti.

continebit quatuor; tota verò l m continebit ſexdecim. Quoniam ergo proportio rectæ d m ad m p eſt duplâ maior, nunquam m p continebit duas, cuiuſmodi d m continet quatuor, ſed continebit ſemper pauciores quàm duas: ergo quando l x continet viginti quatuor, & l m ſexdecim, nunquam recta l p continet octodecim, ſed pauciores quam octodecim. Cùm ergo octodecim ad viginti quatuor proportio ſit ternarij ad quaternarium, proportio rectę l p ad p x erit minor proportione ternarij ad quaternarium: ergo quando l x continet qnatuor ſemper l p continet pauciores quàm tres: ergo ſemper proportio rectæ l p ad p x eſt minor triplâ; quod erat oſtendendum.

8. quinti.

COROLLARIVM II.

Propoſitum ſit numeris deſignare punctum p poſita recta l x æquali rectæ a l. Dico l p ad p x eſſe vt ſeptenarium ad ternarium.

Quoniam vt a x recta ad l x ita eſt triangulum l x u ad triangulum l t u, cum a x ſit dupla rectæ l x, erit triangulum l x u duplum trianguli l t u, ergo diuiſo triangulo l x u in ſex partes, l t u continebit tres, & l e u vnam; & l x u e quinque; ergo pars l x u e ad partem l e u eſt vt quinarius ad vnitatem: ergo recta d m eſt ad

m p vt quinarius ad vnitatem : diuisa ergo recta l x in triginta partes, recta d m continebit quinque ex illis ; & recta m p vnã; ergo tota d m continet sex ; & tota l p viginti vnam ; & p x residuas nouem : ergo recta l p est ad p x vt 21. ad 9. hoc est vt 7. ad 3.

COROLLARIVM III.

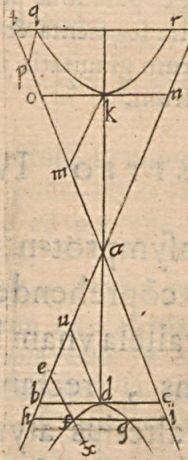
Ex his quoque apertum est si duo parabolæ segmenta habuerint basim eandem, eaque extra segmentum in eodem puncto secta fuerit, & per sectionis punctum ducta parallela diametro, figuras contentas sub portionibus baseos, & parabolæ productarum iacentibus extra segmenta & sub parallela, habere centrum grauitatis in eadem parallela ad diametrum.

PROPOSITIO IV.

Si duarum asymptotõn sectiones oppositas cõprehendentium vni ducatur parallela vnam hyperbolarum secans, rectangulum sub segmento alterius asymptoti inter duas parallelas clauso, & sub segmento parallelæ inter se-

ctionem & aſymptotum intercepto eſt æquale ſpatio quod poteſt portio aſymptoti clauſa inter centrum ſectionum oppoſitarum & parallelam alteram per terminum axis ductam.

Sint ſectiones oppoſitæ d, k comprehenſæ aſymptotis t a i, ſa h (ſunt enim oppoſitarum ſectionum aſymptoti communes per 15. ſecundi Conicorum) axiſque



parabolæ d sit a d, si producatur a d donec occurrat sectioni *k* in puncto k, erunt a d, a k æquales per 30. libri primi Conicorum, & si per d & K ducantur tangentes b d c, o K n, erunt parallelę per 31. secundi Conicorum : quoniam ergo b d est perpendicularis ad axem a d ; erit quoque *k* o perpendicularis ad diametrum a k; est ergo a *k* axis parabolæ k : quapropter sectiones oppositæ habent communem axem : & si per *k* & d ducantur rectę d u, k m parallelę alterutri asymptotorum, erunt a u, a m æquales, cùm triangula d a u, k m a habeant angulos ad d, a, *k* æquales : ergo sunt isoscelia super basibus d a, *k* a similia : cùm igitur bases sint æquales erunt quoque & reliqua latera æqualia. Quòd autem anguli ad d, a, *k* sint æquales manifestum est, angulus enim b a c cùm diuidatur per rectam a d cadentem perpendiculariter in tangentem b d, & cùm b c diuisa sit bifariam in tactu d per 3. secundi Conicorum, bifariam secabitur per rectam a d ; cùm autem u d, a c sint parallelę, item m K, a n erunt anguli alterni æquales, ac proinde anguli ad d, a, *k* sunt æquales. Quæ ergo de hyperbola d demonstrabuntur intelligenda pariter erunt cùm proportione de hyperbola *k*, cùm rectæ a u, a m sint æquales vt ostensum fuit. 9. prim.

Rectę igitur a i ducta sit æquidistans e f

13. secundi Conic. secans hyperbolam d in puncto f: nam in pluribus non secat, secat tamen in vno eò quòd per locum asymptotis h a i terminatum duci ponatur. Dico rectangulum a e f esse æquale quadrato rectæ a u. Per f agatur recta h f g i parallela tangenti b d.

Quoniam augulus b a c diuisus est bifariam per axem a d, vt ostensum fuit, & angulus b d a est æqualis angulo a d c: anguli ergo ad b & c sunt æquales in trian-
3. primi Euc. gulo b a c: ergo b a, a c sunt æquales. Simili ratione ostendentur u b, u d; item a h, a i esse æquales.

Rursus quoniã in triangulo a h i basi a i ducta est parallela e f: ergo vt a e ad e h, ita est i f ad f h: ergo rectangulũ a e h seu a e f est ad rectangulum i f h in duplicata ratione homologorum laterum e h, h f, seu b u, b d: sed rectangulum i f h, est per decimam secundi Conicorum æquale
2. sexti Euc. quadrato rectæ b d: ergo rectangulum a e f est æquale quadrato rectæ b u: nam
20. sexti Euc. quadrata b d, b u duplicatã habent rationẽ laterum, cùm quadratũ quadrato sit simile vt constat ex prima definitione sexti Euclidis. Quoniam verò in triangulo a b c basi a c parallela ducta est u d; vt b d, d c, ita erunt b u, u a, cúmque b d, d c
2. sexti Euc. sint æquales, erunt b u, u a etiam æquales; ergo rectangulum a e f, cùm ostensum sit esse æquale quadrato rectæ b u, est etiam æquale quadrato rectæ u a quæ ipsi

b u est

bu est æqualis. Quòd si punctum e incidat in punctum u, quoniam ostensum est rectas b u, u a, u d esse æquales, rectangulum a u d erit æquale quadrato rectæ a u: si igitur duarum &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Hinc manifestum est si recta e f sit parallela asymptoto a c, & rectangulum a e f sit æquale quadrato a u, punctum f esse in hyperbolâ. Si enim recta e f non occurrit hyperbolæ in f, occurrat si fieri potest in x (occurret enim per decimam tertiam secundi Conicorum) ergo rectangulum a e x erit æquale quadrato a u, cui etiam æquale cùm ponatur esse rectangulum a e f, erunt rectangula a e f; a e x æqualia, quod est absurdum, cùm sub eâdem basi a e altitudines habeant inæquales, ac proinde sint inæqualia. 1. sexti. Euc.

Eiusmodi parallelogrammum appelletur *conditum*, Græcè δητόν.

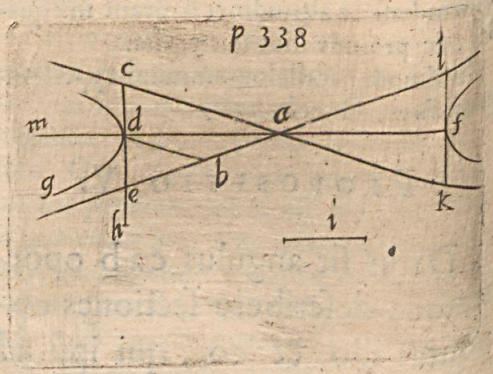
PROPOSITIO V.

Datus sit angulus c a b oporteatque describere sectiones oppositas illo & eo, qui ipsi ad

verticem a reſpondet, comprehenſas, ita vt rectangulum condictum ſit æquale ſpatio quod poteſt recta i data.

Rectæ i fiat a b æqualis, diuiſóque angulo c a b bifariam per rectam a m, ducatur per b recta b d parallela rectæ a c, occurratque rectæ a m in d. Rectæ d a fiat a f æqualis, & ex puncto d excitetur ad f d perpendicularis d e; vtque f d ad c e, ita fiat c e ad d h. Dato axe f d, & latere recto d h deſcribantur ſectiones oppoſitæ d, f. Dico condictum rectangulum a b d, vel quoduis aliud de quo agitur in præcedenti propoſitione eſſe æquale quadrato rectæ a b, & hyperbolas d, f comprehendi aſymptotis c a k, e a l.

55. primi Có.



Quoniam enim figura f d h est æqualis quadrato rectæ c e, cùm c d, d e sint æquales (sunt enim anguli c a d, e a d æquales, & anguli c d a, a d e item æquales) erit quadratum d e quarta pars figuræ: ergo rectę c a e sunt asymptoti hyperbolæ d g. Et quoniam per d terminum axis f d acta est d b parallela rectæ a c, condictum rectangulum, de quo in præcedenti agitur, erit æquale quadrato rectæ a b, siue rectæ i, per eandem propositionem præcedentem; quod erat faciendum.

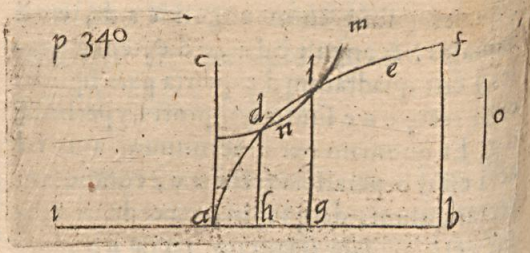
4 secũdi Euc. in corollar. 1. secundi Conic.

Propositio VI.

Datum sit spatium quod recta o potest; datæ item sint rectæ i a, a b, oporteatque ita diuidere rectam a b in g, vt sicut recta i a ad a g rectam, ita sit quadratum rectæ g b ad quadratum rectæ o.

Ex puncto a ad rectam a b excitetur perpendicularis a c æqualis ipsi i a. Dato latere recto a c, vertice a, diametro a b, describatur parabola a e f cuius ordinatim applicata b f sit parallela rectæ c a, vel cuicunque alteri in rectam ab incidenti. Rursus intra asymptotos a b, b f descri-

52. primi Cõ.



batur per præcedentem hyperbola m n cuius condictum rectangulum ſit æquale rectangulo ſub rectis i a & o comprehenſo; occurrat autem hyperbola parabolæ in puncto l (ſi enim non occurrat res quæ proponitur, nequit fieri vt paulò poſt dicemus) & per l agatur l g parallela rectæ b f. Dico punctum g eſſe illud quod quæritur.

Quoniam enim rectangulo c a g æquale eſt quadratum ordinatim applicatæ g l, tres rectæ c a ſiue a i, g l, a g erunt proportionales, ergo vt recta a i ad rectam a g, ita erit quadratum rectæ a i ad rectæ g l quadratum. Rurſus quoniam rectangulum b g l eſt æquale rectangulo ſub rectis i a & o contento, erunt rectæ i a, g l, b g, o proportionales, & vt i a recta ad g l rectam, ita b g recta ad o rectam; & vt i a quadratum ad g l quadratum, ita b g quadratum, ad quadra-

20. primi Cō. 20. ſexti in coroll. 16. ſexti Euc.

tum o: sed vt i a quadratum ad g l quadratum, ita esse ostendimus i a rectam ad a g: ergo vt i a recta ad a g, ita g b quadratum ad quadratum o: inuentum est ergo punctum g, quod erat faciendum.

Quòd si hyperbola m n non conueniret cum parabolâ a e f, problema solui non posset: si enim fieri potest, non conueniat, & tamen vt i a recta ad a g rectam, ita sit quadratum g b ad quadratum o; quoniam ducta per g recta g l parallelâ rectæ b f occurrente in l parabolæ; rectangulum b g l est æquale rectangulo condicto hyperbolæ m n, punctum l iacebit in hyperbola m n ex demonstratis, conueniet ergo cum parabola & non conueniet quod est absurdum, si ergo non conueniat, fieri nequit quod faciendum proponitur. 4. huius in coroll.

COROLLARIVM.

Hinc apertum est problema solui posse duobus modis quando parabola & hyperbola occurrunt sibi in duobus punctis, vt in presenti diagrammate in l & d. Si enim per d agatur d h æquidistans rectæ b f, ostendetur vt paulò antè, sicut recta i a est ad a h rectam ita esse quadratum h b ad quadratum o.

SCHOLIVM.

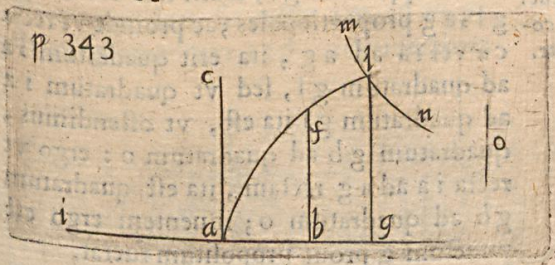
Iſtud problema aſſumpſit Archimedes vt datam ſphæram ſecaret in data proportione quacunque; Cum autem aſſumendo polliceretur eius demonſtrationem ſub finem, vel promiſſis defuit, vel quod æquius eſt exiſtimare, ſtetit quidem, ſed iniuria temporum periit eius iſte labor, quem ſupplevit Eutocius alia via quæ & longior apertè eſt & fortaſſe videbitur nonnulli obſcurior noſtra. Quod ſequitur iſti germanum eſt problema, & à nullo, quem ſciam, traditum, eritque nobis vſui ad diuiſionem parabolici conoidis quam prætermiſit Commandinus, ſub finem Commentariorum in librum de conoidibus & ſphæroidibus, licet ſcribendi ratio poſtularet vt cùm modum diuidendi coni, ſphæroidis, & conoidis parabolici tradidiſſet, adjungeret parem modum diuidendi conoidis hyperbolici ſeu amblygonij. Verùm ex principiis ab Archimede traditis eum elicere non potuit. Cæterum quamuis hæc duo problemata non conficiantur geometricè per ſolam regulam & circinum, peraguntur tamen ductu ſectionum conicarum, quod in rebus neceſſariis nec facilè parabilibus primarium eſt ſupplementum.

4 ſecũdi de ſphæra & cylindro.

PROPOSITIO VII.

Datum sit spatium quod recta o potest; datæ item sint rectæ i a, a b, oporteatque ad rectam a b ita adjungere rectam b g, vt sicut recta i a ad a g rectam, ita sit quadratum rectæ g b ad quadratum rectæ o.

Ex puncto a excitetur recta c a ad rectam a b perpendicularis, & ipsi i a æqualis. Dato latere recto a c, vertice a, diametro a b describatur parabola a e cuius ordinatim applicata sit parallela rectæ c a 52. primi Cō.



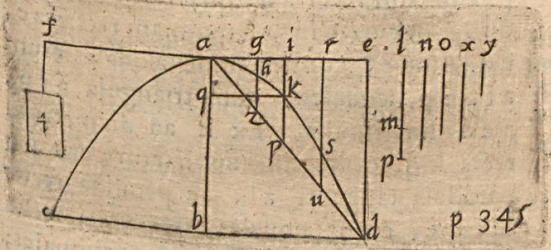
(poſſet & alteri cuiuis in rectam a b incidenti eſſe parallela) & per b agatur b f
5. huius ipſi g l parallela, datiſque aſymptotis f b, b g concurrentibus in b deſcribatur hyperbola n m angulo f b g comprehenſa, cuius conductum rectangulum ſit æquale rectangulo ſub rectis i a & o contento. Occurrat hyperbola n m parabolæ a e in l (ſi enim non occurrat fieri res propoſita nequit, vt ex præcedentis ſimili caſu apertum eſt) & per l agatur l g ordinatim ad diametrum a b applicata. Dico punctum g eſſe illud quod quæritur.

Quoniam enim rectangulum ſub rectis g b, g l eſt æquale rectangulo ſub rectis i a & o contento, vt recta i a ad g l, ita
16. ſexti Euc. erit g b recta ad o. Rurſus quoniam re-
20. ſexti Euc. ctangulum c a g æquale eſt quadrato ordi-
in corollar. natim applicatæ g l, erunt tres rectæ c a, g l, a g proportionales; ac proinde vt recta c a vel i a ad a g, ita erit quadratum i a ad quadratum g l, ſed vt quadratum i a ad quadratum g l ita eſt, vt oſtendimus, quadratum g b ad quadratum o: ergo vt recta i a ad a g rectam, ita eſt quadratum g b ad quadratum o; inuentem ergo eſt punctum g prout propoſitum fuerat.

Propositio VIII.

Sit parabolæ segmentum c a d, cuius axis a b, latus rectum f a, & semibasis b d sint æqualia, tangens sit a e, & per d acta sit d e æquidistans diametro a b; Figuram a e d voco complementum parabolicum, quod oporteat secundum quamcunque proportionem datam diuidere rectâ ad diametrum parallelâ.

Proportio data sit rectæ l m ad m p, & sit complementum a e d ita diuidendum



ductâ rectâ r f æquidistante ipsi a b, vt sicut l m ad m p ita sit portio a r f ad portionem d e r f. Quadrati a e d b duæ tertiæ partes fiant ad spatium quod potest recta u, sicut l p recta se habet ad l m rectam. Rursus vt nouem ad quatuor ita fiat spatium n ad spatium quod potest recta o. Inter datas a b & o inueniantur duæ mediæ proportionales, quarum ipsi o proxima sit a i, ipsiusque a i semissi fiat i r æqualis, & per r ducatur r u æquidistans rectæ e d. Dico sicut est recta l m ad m p rectam, ita esse portionem a i k ad portionem i k d e. Duæ porro mediæ proportionales inueniuntur pluribus modis quos refert Eutocius initio Commentariorum in librum secundum de sphæra & cylindro; & quamuis nullus eorum sit geometricus, vt diximus in prolegomenis, tamen necessitate adigente vsurpantur. Cadet autem punctum r inter puncta i & e vt in fine huius ostendemus.

Iungatur recta a d, quæ rectæ i k productæ occurrat in p, quoniam rectæ a e, e d sunt ex constructione æquales erunt a i, i p æquales, cùm triangula a i p, a e d sint similia. Ex k ad diametrum recta k q ordinatim applicetur; erit k q parallela tangenti a i, ac proinde rectæ a i, q k, erunt æquales; tres ergo rectæ f a, a i, a q seu i k sunt proportionales; ergo vt f a recta ad a i rectam, ita est i p

4. sexti Euc. in coroll. 32. primi Cō. 34. primi Euc.

ipsi a i æqualis, ad rectam i k. Idipsum verò ostendetur ducta quacunque alia parallela occurrente parabolæ & lineæ a d.

Quoniam igitur recta e a tangit parabolam in a, ac proinde est perpendicularis ad axem a b, & f a vt pote latus rectum est etiam perpendicularis ad diametrum a b, rectæ f a, a e iacebunt in directum. Recta r u occurrat parabolæ in s, & rectæ a d in puncto u.

Ponatur recta f r esse libra ex a suspensa sustineus triangulum vt iacet rectilineum a r u, & illi ex f pendens æquiponderare spatium t. Quoniam recta a i ad a r est vt duo ad tria, recta i p lateri r u parallela transibit per centrum grauitatis trianguli a r u, & si triangulum idem suspendatur ex solo puncto i, manebit vt iacet ex Archimede; ergo vt recta f a ad rectam a i, ita erit triangulum a r u ad spatium t. Aliunde verò quoniam triangulum a r u & figura a r s k ita iacent, vt quacunque recta i p æquidistante ipsi e d quæ ad libram f r est perpendicularis, vt f a ad a i, ita sit i p ad i k, figura a r s k est æqualis spatio t ex demonstratis à nobis: ergo vt recta f a ad rectam a i, ita est triangulum a r u ad figuram a r s k.

6. quadrat. parab.

6. aut 7. æquip.

7. secundi huius.

Rursus quoniam recta f a ad rectam a i habet duplicatam ex constructione rationem eius quam habet recta a i ad rectam o, vt recta f a ad a i rectam, ita erit

20. sexti in Cor. quadratum rectæ a i ad quadratum rectæ o. Rursus quoniam quadratum a i ad quadratum a r est in duplicata ratione laterum a i, a r cùm a i, a r sint ex constructione vt duo ad tria, quadratum a i erit ad quadratum a r vt quatuor ad nouem.

Quoniam ergo vt recta f a, ad a i rectam, ita esse ostendimus quadratum a i ad quadratum o, & ita etiam esse triangulum a r u ad figuram a r s k; erit vt quadratum a i ad quadratum o, ita triangulum a r u ad figuram a r s κ, & alternando vt quadratum a i ad triangulum a r u, ita quadratum o ad figuram a r s k: Sed vt semissis quadrati a i ad triangulum a r u, hoc est ad semissem quadrati a r, ita ostendimus esse quatuor ad nouem, & vt quatuor ad nouem ita est ex constructione quadratum o ad quadratum n, siue semissis quadrati o ad semissem quadrati n; ergo vt semissis quadrati a i ad triangulum a r u, ita semissis quadrati o ad semissem quadrati n; & alternando vt semissis quadrati a i ad semissem quadrati o, ita triangulum a r u ad semissem quadrati n: sed vt semissis quadrati a i ad semissem quadrati o, hoc est vt quadratum a i ad quadratum o, ita ostendimus esse rectam f a ad a i rectam; ergo vt recta f a ad a i rectam, ita triangulum a r u ad semissem quadrati n; sed ita etiam

ostensum est esse triangulum a r u ad figuram a r ſ *k*; ergo figuræ a r ſ κ est æqualis semissis quadrati n. 9. quinti Euc.

Denique quoniam sicut l p recta se habet ad l m, ita ex constructione sunt duæ tertiæ quadrati a e d b ad quadratum n; vt recta l p ad l m, ita erit vna tertia quadrati a e d b ad semissem quadrati n, hoc est ad figuram a r ſ *k*. Cùm ergo complementum a e d k sit tertia pars quadrati a e d b, vt ostendimus in hoc libro, complementum a e d k se habebit ad figuram a r ſ *k* vt recta l p ad l m: ergo diuidendo vt m p recta ad l m rectam, ita portio e d ſ r ad portionem a r ſ, quod erat faciendum. 1. huius in Corroll. 4.

Reliquum est vt ostendamus punctum r cadere inter i & e; id autem ostenditur ex analysi in hunc modum. Quoniam spatium complementi a e d potest diuidi secundum rationem datam, sit id factum; sitque vt l m ad m p, ita portio a r ſ ad portionem e d ſ r: productâ r ſ ad u, fiat i r tertia pars rectæ a e, & per punctum i ductâ rectâ i *k* parallela rectæ e d, occurrente parabolæ in *k*, rectæ a d in p, erit sicut ostendimus vt f a recta ad a r, ita r u ad r ſ, & sicut f a ad a i, ita i p ad i *k*, & ita de alia quacunque parallela rectæ e d: ergo, vt ostendimus, triangulo a r ſ vt iacet manenti librâ f a r suspensa ex a, spatium t æquale portioni a r ſ *k* æquiponderabit; & si

triangulum a r s suspendatur ex solo puncto i, manebit vt iacet. Potest ergo fieri vt trianguli a r s, cui portio a r s κ æquiponderat pendens ex f, latus a r sit minus latere a e, ac proinde vt cùm ex a i duæ eius tertiæ abscissæ fuerint, residuum i e sit maius portione i r, punctumque r cadat inter i & e.

COROLLARIVM.

Si quæcunque portio g h d e inter duas parallelas g h, e d vel quamcunque aliam contenta proponatur diuidenda secundum rationem datam, ita vt ductâ rectâ i κ p ipsi e d parallelâ, portio i k g h sit ad portionem i k e d sicut recta l m ad m p, res ex dictis conficietur in hunc modum. Inueniatur spatium rectilineum x æquale figuræ g h d e ex demonstratis ab Archimede in libro de quadraturâ parabolæ; atque vt recta l p ad l m rectam, ita fiat quadratum x ad quadratum y. Inueniatur spatium n quod sit æquale duobus simul spatiis, nimirum quadrato y & spatio figuræ a g h. Rursus vt nouem ad quatuor ita fiat spatium n ad spatium o, *cætera se habent prout in ipsâ propositione iam demonstratâ, vt attendenti planum fiet.*

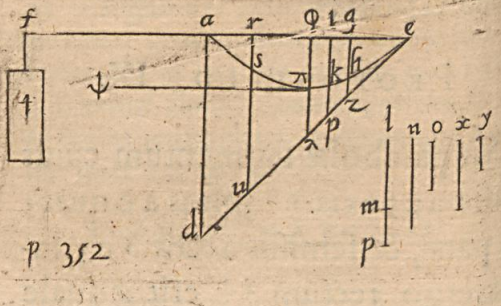
Istud corollarium, & duo ipsi similia in duabus sequentibus demonstranda, præstabunt modum diuidendi ex datâ ratione

frustum coni, sphæræ, sphæroidis, & conoidis hyperbolici; quod ex dicendis liquido constabit.

Propositio IX.

Sit parabolæ segmentum cuius basis a e; axis φπ ipsius a e quarta pars, & semissis rectæ φe; latus ergo rectum π↓ erit æquale ipsi basi; nam rectangulum ↓πφ est æquale quadrato ordinatim applicatæ φe; ergo sicut φe est dupla rectæ φπ, ita π↓ erit dupla rectæ φe. Oporteat segmentum aπe secundum quamcunque proportionem datam diuidere rectâ ad axem parallelâ.

Proportio data sit rectæ l m ad m p, & sit segmentum aπe ita diuidendum ductâ rectâ r s æquidistante ipsi a b, vt sicut l m ad m p, ita sit portio e r s ad portionem a r s. Duplum parabolæ a s e erit quadrati a e tertia pars: nam abscissa π λ ipsi πφ æquali, recta eλ iuncta tanget parabolam in e; & quoniam recta φπ est semissis rectæ



P 352

33. primi Cō. φe, erunt φλ, φe æquales, ac proinde & ad, ae ſunt æquales; cùm ergo parabolæ ſegmentum aπe ſit tertia pars trianguli dae, hoc eſt ſemiquadrati ae, duplum parabolæ aπe erit tertia pars quadrati ae. Duplũ parabolę aπe fiat ad quadratum n ſicut lp recta ad lm. Rurſus vt nouem ad quatuor, ita fiat ſpatium n ad ſpatium quadrati o. Rectę ae abſcindatur æqualis
σ. huius af, datiſque rectis af, ae, & quadrato rectę o, ita diuidatur ae in i vt ſicut recta fa ad ai rectam, ita ſit quadratum rectæ ie ad quadratum rectę o; abſcindatur ex ia recta ir æqualis ſemiſſi rectæ ie, cadet r inter a & i vt oſtendetur inferiùs; per r agatur ru parallela rectæ ad occurrens parabolæ in ſ, & rectæ ed in u. Dico ſicut eſt recta lm ad mp, ita eſſe portionem eik ad portionem aik.

Quoniam

Quoniam rectæ a e, a d sunt æquales, quæcunque parallela r u ducatur, erunt triangula e a d, e r u similia, ac proinde sicut e a, a d sunt æquales, ita e r, r u erunt æquales. Rursus quoniam a f, a e rectæ sunt æquales, sumpto r quocunque puncto in recta a e, & per illud ducta recta r u ipsi a d æquidistante, & occurrente parabolæ in f, tangenti e d in u, erit ex demõstratis vt f a recta ad a r rectam, ita r u recta ad r f rectam: si ergo recta f r ponatur esse libra ex a suspensa sustinens triangulum vt iacet rectilineum e r u, & illi ex f pendens æquiponderare spatium t, ostendetur vt in præcedenti, sicut recta f a ad rectam a i, ita esse triangulum e r u ad figuram e r f k.

4. sexti Euc. in Coroll.

2. tertij huius in Coroll.

Rursus quoniam quadratum e i ad quadratum e r est in duplicata ratione laterum e i, e r; cùm e i, e r sint ex constructione vt duo ad tria, quadratum e i erit ad quadratum e r vt quatuor ad nouem.

Quoniam ergo vt recta f a ad a i rectam, ita est ex constructione quadratum e i ad quadratum o, & ita etiam ostendimus esse triangulum e r u ad figuram e r f k; erit vt quadratum a i ad quadratum o, ita triangulum e r u ad figuram e r f k: sed vt semissis quadrati e i ad triangulum e r u, hoc est ad semissem quadrati e r, ita ostendimus esse quatuor ad nouem, & vt quatuor ad nouem ita est

ex conſtructione quadratũ o ad quadratum n, ſiue ſemiſſis quadrati o ad ſemiſſem quadrati n; ergo vt ſemiſſis quadrati ei ad triangulum e r u, ita ſemiſſis quadrati o ad ſemiſſem quadrati n; ergo, &c. *vt in præcedenti* figura e r ſ κ eſt æqualis ſemiſſi quadrati n.

Denique quoniam ſicut l p recta ſe habet ad l m rectam, ita ex conſtructione ſe habet duplum parabolæ a π e ad quadratum n; vt recta l p ad l m rectam, ita erit parabola a π e ad ſemiſſem quadrati n, hoc eſt ad figuram e r ſ κ: ergo diuidendo vt m p recta ad l m rectam, ita portio a r ſ ad portionem e r ſ κ; & inuertendo vt l m recta ad m p, ita portio e r ſ k ad portionem a r ſ. quod fuit faciendum.

Reliquum eſt vt oſtendamus punctum r cadere inter i & a. Id autem oſtenditur ex analyſi ſicut in præcedenti, vt inutile ſit hîc eadem verba reponere. Id tantùm admonitione dignum eſt, ſi forte in rectâ a e punctum i inueniretur poſitione duplex, illud ſumendum eſſe quod eſt vicinius puncto e, & in eo tantùm habere vim demonſtrationis huius analyticæ. Imò ſi punctum remotiùs ſumeretur, punctum r neceſſariò caderet vltra punctum a; ſi enim non caderet vltra, conſequens foret parabolam a π e poſſe ſecundum eandem rationem eodem modo ſumptam ſecari per

duas parallelas rectæ ad quod est absurdum. Ponatur enim secari secundum eandem rationem per rectas si fieri potest i k, π φ, esséque vt e i k ad i k a, ita e π φ ad π φ a. Quoniam e i k est minor quàm e φ π, ratio portionis e i k ad φ a π erit minor ratione e φ π ad eandem φ a π. Rursus quoniam a i k est maior parte a φ π, ratio quantitatis e i k ad quantitem a i k erit minor quàm ad quantitatem a φ π: ergo ratio quantitatis e i κ ad a i k erit multò minor quàm ratio quantitatis e φ π ad a φ π; cùm tamen ponatur esse æqualis; non ergo a π e quantitas secundum eandem rationem eodem modo sumptam per dictas parallelas secari potest. 10. quinti Euc.

COROLLARIVM.

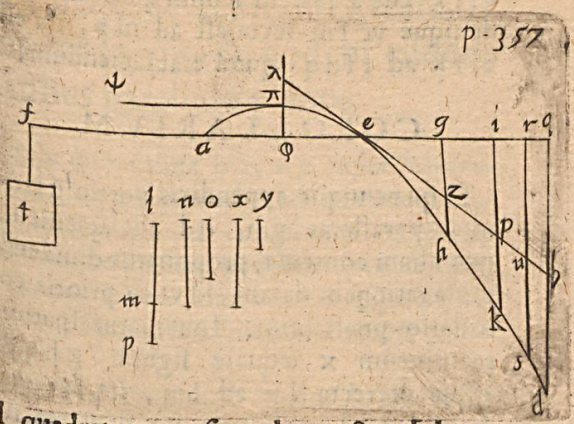
Si quæcunque portio g h d a, inter duas parallelas g h, a d vel quamcunque aliam contenta ponatur diuidenda secundum rationem datam, ita vt ductâ recta i k p, ipsi a d parallela portio i κ g h sit ad aliam portionem sicut recta l m ad m p, perficietur problema ex dictis in corollario antecedentis. Inueniatur spatium rectilineum x æquale figuræ g h a, atque vt recta l p ad l m, ita fiat quadratum x ad quadratum y. Inueniatur spatium n quod sit æquale simul quadrato y & spatio figuræ e g h. Rursus vt nouem ad quatuor ita fiat spa-

tium n ad ſpatium o &c. vt in iſtâ propoſitione.

PROPOSITIO X.

Sit vt in præcedenti parabola a π e cuius axis φ π, latus rectum π ↓ ipſi baſi a e æquale, tangens e λ, rectaque a f vt ibidem. Producta ſit baſis a e vtcunque ad punctum q, & per q acta ſit recta g d parallela axi φ π, occurrens parabolæ productæ in d, tangenti verò λ e etiam productæ in b; figuram e q d voco appendicem ſegmenti parabolæ. Oporteat eiuſmodi figuram iuxta quamcunque proportionem datam diuidere rectâ ad axem parallelâ.

Proportio data ſit rectę l m ad m p, & ſit appendix e q d ita diuidenda ducta recta r ſ æquidiſtante ipſi φ π vt ſicut l m ad m p, ita ſit portio e r ſ ad portionem r ſ d q. Duplum appendicis e q d (quæ nota eſt ex propoſitione 3. huius) fiat



ad quadratum n ſicut l p recta ad l m. Rurſus vt nouem ad quatuor, ita fiat quadratum n ad quadratum o. Datis rectis a f, a e, & quadrato rectæ o, ita ad rectam a e adjiciatur recta e i, vt ſicut recta f a ad a i, ita ſit quadratum rectæ e i ad quadratum o, ad rectam e i adiungatur i r æqualis dimidio rectæ e i, cadet r inter i & q (id enim probatur ſicut in præcedenti per analyſim mathematicis familiarem) per r agatur r u parallela rectæ q d occurrens parabolæ in ſ, & rectæ e b in u. Dico ſicut eſt recta l m ad m p, ita eſſe portionem e r ſ ad portionem reliquam r ſ d q. 7. huius.

Iiſdem enim verbis quibus in antecedenti vſi ſumus, oſtendetur ſicut eſt recta f a ad rectam a i, ita eſſe triangulum e r u ad figuram e r ſ k; ipſamque figuram

erſk eſſe æqualem ſemiſſi quadrati n, & denique vt lm recta eſt ad mp, ita eſſe erſk ad rſdq, quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Si quæcunque appendicis portio ghdq inter parallelas gh, qd aut quamcunque aliam contenta, proponatur diuidenda juxta rationem datam, id vt in prioris corollario præſtabitur. Inueniatur ſpatium rectilineum x æquale figuræ ghqd, atque vt recta lp ad lm, ita fiat quadratum x ad quadratum y; præterea inueniatur quadratum n æquale ſimul quadrato y & ſpatio figuræ egh; denique vt nouem ad quatuor ita fiat ſpatium n ad ſpatium o, &c. *Vt in anterioris corollario monuimus.*

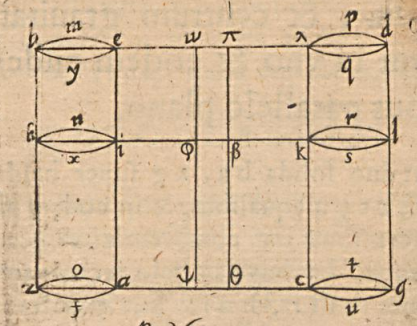
PROPOSITIO XI.

Si duo ſint ſolida ſuper baſes æquales in eodemque plano conſtitutas conſiſtentia, ita vt ipſæ baſes ſint æquales, & eorum cum plano quocunque baſibus parallelo communes ſectiones ſint quoque æquales; ipſa ſolida ſunt

æqualia, & centrum grauitatis habent in vno & eodem eisdem basibus parallelo plano.

Sint duo solida b a, λ g super basibus z o a f, c t g u æqualibus, & in eodem plano iacentibus ita consistentia vt plano quocunque basibus parallelo secante ipsa, sectiones k s l r, h n i x sint æquales inuicem. Peto ipsa solida esse inuicem æqualia.

Præsens propositio varios habet casus omnes quidem verissimos, alios tamen aliis probatu difficiliores. Omnes essent facillimi si continuum componeretur ex finitis indiuisibilibus Zenonicis, cùm enim singulæ partes singulis forent æquales, necesse esset tota ipsa esse inuicem æqualia. Ex istâ opinione quamuis absurdâ & principiis Mathematicis maximè repugnante videtur rectè confici idipsum quoque verum esse quamuis continuum sit semper diuisibile: quia nimirum eiusmodi æqualitas non tollitur per hoc quod diuisibile ponitur; si enim per hoc tolleretur, tolleretur etiam æqualitas duarum planarum figurarum super basibus æqualibus in eademque recta constitutis ita consistentium, vt ducta vtcunque recta basibus parallela portiones eius figuris interceptæ sint quoque æquales: quod tamen verissimum esse



oſtendimus propoſitione ſexta libri primi huius operis. Tolleretur pariter æqualitas duorum ſolidorum quando baſes z o a f, c t g u non tantum ſunt æquales verum etiam ſimiles; ſi enim ſint circuli & baſes cylindrorum aut conorum id oſtenditur à Clauio in Euclidem; ſi ſint parallelepipeda ab ipſo Euclide in vndecimo libro; ſi autem ſint priſmata etiam cum baſes non fuerint ſimiles, nec æqualium laterum à Clauio ibidem; ſi ſint pyramides, ab eodem Euclide libri duodecimi propoſitione ſexta; & à Clauio in ſcholio ad eandem propoſitionem etiam tum cum baſes z o a f, c t g u lateribus numero inæqualibus, & quotcunque conſtiterint.

Cla. 11. duode. Euc. in ſcholio. 29 vnd. Euc. 7. duod. in ſcholio 1. Clauius.

Extra prædictos caſus ſi lineæ h i, k l ſint communis plani paralleli baſibus per i k ducti ſectio cum plano ſolida ipſa

secante secundum altitudinem totam, ipsiusque plani cum solidis communes sectiones sint figuræ planæ b e a z, λ d g c comprehensæ lineis aut rectis, aut conicis, aut æquiualentibus iuxta cautionem corollarij tertij sextæ propositionis libri primi, ipsæ verò figuræ k r l s, h n i x sint similes, & lineæ h i, κ l sint æquales demonstratio est aperta ex sexta propositione libri primi citata adjecto corollario propositionis sextæ libri secundi. Istud tamen in vniuersum & ad omnes casus extensum si probare velim, obscurius effecero. Ex primo rei intuitu apertum existimo si puteo exempli causa b z a e proposito affirmes eum ad fundum vsque plano horizonti parallelo dissectum paris & æqualis vbique inueniri amplitudinis; apertum inquam existimo quocunque plano horizonti parallelo h n i x in duas portiones diuidatur, superioris ad inferioris capacitatem esse vt est altitudo b h ad altitudinem h z. Nec verò animus inquiret vtrum amplitudo illa seu capacitas per planum horizontis parallelum dimensa, non solùm sit vbique æqualis, verùm etiam vbique perimetro & figura simili constet; id enim *per accidens* esse decernet dummodo capacitas b y e m sit æqualis capacitati h x i n aliisque omnibus interiectis quamuis figura b y e m sit rotunda, & h x i n quadrata, aut alterius cuiusuis modi. Istud itaque

inter *petitiones* ſiue ἀιτήματα huius ſcientiæ colloco; ſicuti & collocatur illud ab Archimede & ab aliis omnibus, *cuiuſuis figuræ grauis ſiue planæ ſiue ſolidæ dari centrum grauitatis*; quod quis probet aliter, quam nuda rei ipſius explanatione, adiuncta aliorum omnium mira conuenientia, ſicuti à nobis in hoc negotio factum eſt, & fiet ampliùs.

Centrum verò grauitatis vtriuſque ſolidi eſſe in plano vno eodemque oſtendi ſimili methodo poteſt ex doctrina propoſitionis decimę quintæ eiuſdem ſecundi libri tranſlata ad ſolida. Quod ſi ſolida b a, λ g fuerint cylindri, aut coni, aut pyramides, aut priſmata, aut parallelepipeda, aut ſphæræ, aut ſolida in ſphæra deſcripta, aut conoidis rectanguli portio, demonſtratio extat apud Commandinum in libello quem de centro grauitatis ſolidorum ſcripſit. His omnibus prætermiſſis res in vniuerſum facile poteſt in hunc modum demonſtrari.

In plano b g ſecundum altitudinem ſolidorum b a, λ g ducto ducatur recta quæcunque π θ, occurrens plano baſium in θ, & plano parallelo intra quod & planum baſium ſolida b a, λ g proximè continentur, in π; ducatur & alia iſti parallela ω ↓ ita vt ω θ ſit parallelogrammum. Præterea intelligatur grauitas ſolidi b a tota tranſferri in rectam ω ↓ hac lege, vt

ductis duobus quibuscunque planis parallelis ad bases, grauitas in lineæ ω↓ portionem eiusmodi planis interceptam traducta sit illa quæ portioni solidi b a eisdem planis interceptæ competebat; atque pari pacto grauitas solidi l g transferatur in lineam πθ. Manifestum his positis est si planum βλ parallelum basibus transeat per centrum grauitatis solidi λg, transire quoque per centrum grauitatis πθ; grauitas enim portioni πβ attributa est æqualis grauitati portionis λl, nec tantum est æqualis, sed proportionaliter dispensata, ita vt inter parallela duo quæuis plana ad bases, sit par grauitas in interceptis portionibus lineæ πβ & solidi λl. Ex his verò aperte conficitur in puncto φ esse centrum grauitatis ponderis in lineam ω↓ dispensati; ac proinde & in plano per lineam hl ducto parallelos basibus esse centrum grauitatis solidi b a. Quoniam enim solida λg, b a sunt ita æqualia vt eorum portiones inter quæcunque parallela ad bases plana interceptæ sint inuicem æquales, & quoniam vt magnitudines solidorum ita ponimus esse grauitates ipsis magnitudinibus insitas, apertum est lineas ω↓, πθ continere grauitates æquales, & proportionaliter dispensatas: cùm ergo lineæ ω↓, πθ secentur ita proportionaliter in φ & b occursu rectæ φβ ipsis ωπ, ↓θ parallelæ, vt ωφ recta sit rectæ πβ æqualis, & φ↓ recta rectæ βθ; grauitas

34. primi huius.

etiam diſpenſata in lineam $\omega\varphi$ erit æqualis grauitati proportionaliter diſpenſatæ in lineam $\pi\beta$: eademque de cauſa grauitates diſtributæ in lineas $\varphi\downarrow$, $\beta\theta$ erunt æquales, & æqualiter diſpenſatæ: ergo cùm grauitatis in rectam $\pi\theta$ collectæ centrum ſit punctum β, grauitatis in lineam $\omega\downarrow$ tranſpoſitæ centrum quoque erit punctum φ; ita vt ſi linea $\omega\downarrow$ ſuperponatur lineæ $\pi\theta$, punctumque ω congruat puncto π, & punctum $\downarrow$ puncto θ, ſicut grauitas par pari ſemper congruet, ita & centrum centro congruere neceſſe ſit. Solida ergo ba, λg habent centra grauitatis in vno eodemque plano baſibus parallelo, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex preſentis propoſitionis priore membro, quod poſtulatis adſcribimus, apertum eſt, ſi ſectiones hnix, rklſ non ſint æquales, ſed in quadam aliâ inæqualitatis ratione, quæ conſtanter reperiatur quomodocunque planum hl parallelum baſibus ducatur, ipſa ſolida ba, λg eſſe in eadem ſectionum ratione; centrum verò grauitatis eſſe in vno eodemque plano baſibus parallelo clarè perripit quiſquis ſecundi membri rationibus aſſentitur.

SCHOLIVM.

Hîc rogatum te velim, Lector, vt sustineas te tantillum, ne concluſi argumenti vim in preſentis propoſitionis primâ parte improbes, ſi quæ fortaſſe ad id te ſollicitant. Non peto vt à nobis modo adducta attentiùs contempleris, analogiæque vires attendas, ex ijs quæ jam demonſtrata ſunt ab alijs, aut à quocunque demonſtrarentur ſi quantitas continua conſtaret ex indiuiſibilibus; id tantum in præſentiâ flagito vt nouem proxime ſequentes propoſitiones quæ ex iſtâ vt à ſuo fonte promanant priùs velis perlegere quàm ſententiam contra nos feras. Cernes ex eâ inueniri centrum grauitatis coni, & pyramidis cuiuſcunque, item conoidis parabolici (quod Archimedes docet circumuolutione parabolæ deſcribi diametro eius manente) centrumque ita inuentum illud ipſum eſſe quod ab Archimede ipſo pronuntiatum fuit de conoide parabolico; quodque tam de illo conoide quàm de cono & pyramide demonſtrauit ſingulari ſagacitate Commandinus in libro ad id tantummodo, quod Archimedes ſine demonſtratione ſcripſerat, confirmandum elaborato. Cernes nos porro progreſſos inuenire centrum grauitatis hemiſphærij ſeu mediæ ſphæræ, necnon conoidis hyperbolici

Lib. de ijs quæ vehuntur in aquâ.

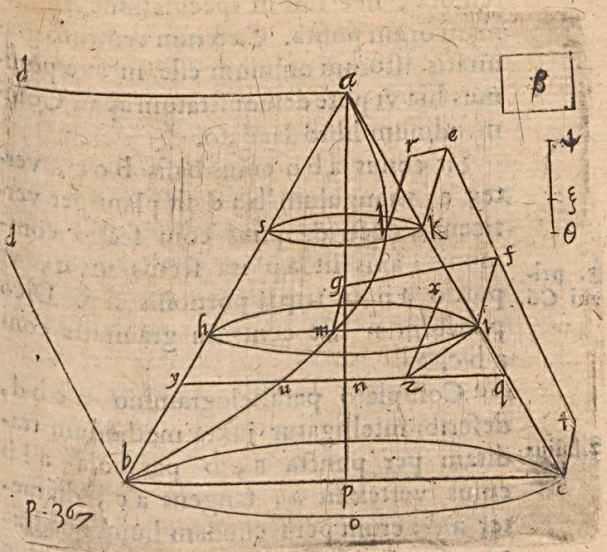
Arch. Initio lib. de conoi. & sph.

quod reuolutione hyperbolæ diametro eius manente gignitur; cernes & alia plurima quæ ad proportionem & sectionem corporum attinent, istaque omnia adeo consonare cum ijs quæ ab anterioribus ostensa sunt, vt ipsa consonantia maximi sit momenti ad inclinandum animum in assensionem huius propositionis, etiamsi aliunde nihil stabilita foret; & vel vna sufficiat ad hoc vt non immeritò præsens theorema inter ἀξιώματα reponatur, & ex eo dato ad alia inuestiganda gradus fiat.

Propositio XII.

Axis cuiuslibet pyramidis vel coni à centro grauitatis ita diuiditur, vt pars quæ terminatur ad verticem reliquæ partis quæ ad basim tripla sit.

Hæc propositio demonstratur à Commandino in libro de centro grauitatis solidorum, & est vigesima secunda; nos hic eam aliter probamus vt nostrorum principiorum cum veritate concordia pateat. Hîc autem cum eodem Commandino definimus axem *lineam quæ à vertice ad centrum grauitatis basis perducitur*; prismatis



autem & cylindri, *rectam lineam quæ oppositorum planorum centra grauitatis conjungit*; in conoidibus verò & sphæroidibus axem definimus cum ipso Archimede initio libri de istis solidis ab eo scripti, *diametrum illam quæ manet, dum circumductu circuli, ellipsis, parabolæ, hyperbolæ, figuræ istæ solidæ describuntur*, quarum nomina, qui Mathematicus non est, licet ignoret, res ipsas tamen tenet; cùm in ædificiorum partibus, in ipsisque vasis quibus ad potum aliáue eiusmodi commoda vitæ vtimur, passim visantur. Quod obiter dico, ne quis putet ista esse longè ab vsu hominum

vide scholiũ præsentis propositi.

remota, nec niſi in ſpeculatione Mathematicorum poſita. Cæterùm centrum grauitatis iſtorum omnium eſſe in axe ponimus hîc vt pote demonſtratum apud Commandinum libro laudato.

Sit conus a b c cuius baſis b o c, vertex a, triangulum b a c ſit plani per verticem a ducti & ipſius coni ſectio communis; axis ſit a p ita ſectus in n, vt portio a n ſit tripla portionis n p. Dico punctum n eſſe centrum grauitatis coni a b c.

3. primi Cō.

Completo parallelogrammo a c b d, deſcribi intelligatur juxta methodum traditam per puncta a, b parabola a l b cuius vertex ſit a, tangens a c, diameter a d: erunt per ſecundam huius quadrata rectarum k ſ, h i in triangulo a b c ipſi b c parallelarum, vt ſunt rectæ l κ, m i interceptæ inter parabolam a l b & rectam a c. Super rectâ l k conſtructum intelligatur in plano ſ k baſi parallelo rectangulum l κ e r æquale figuræ k ſ; & ſuper rectâ m i rectangulum m i f g æquale figuræ h i & in eodem cum ipſa plano. Quoniam ipſæ figuræ k ſ, h i ſunt circuli, quorum diametri ſunt rectæ k ſ, h i, erunt ipſorum circulorum ſpatia, vt quadrata diametrorum k ſ, h i; ſed vt quadrata diametrorum k ſ, h i ita eſſe oſtendimus rectas l k, m i; ergo vt rectæ l κ, m i, ita ſunt circuli k ſ, h i; ſed ipſis

2. huius

4. primi Conic. & 2. duod. Eucl.

circulis

circulis *k f*, *h i* æqualia sunt rectangula *l k e r*, *m i f g*; ergo rectangula *l k e r*, *m i f g* sunt in ratione basium *l k*, *m i*: ergo rectæ *k e*, *i f* sunt æquales per conuersam secundæ sexti Euclidis apud Clauium: ergo cùm rectæ *r e*, *f g* sint parallelæ rectis *m i*, *l k* & ipsa plana *m i f g*, *l k e r* sint parallela, planum per rectas *r e*, *g f* erit parallelum plano trianguli *a b c*. Si ergo per parabolam *a l b* intelligatur ferri linea perpendicularis ad planum *a b c* æqualis lineæ *l r* describet superficiem, cui incumbet planum *r e f*; solidum ergo inclusum plano *b g a c*, superficie illâ, rectangulo comprehenso sub *a c* & sub *κ e*, aliorum rectangulo comprehenso rectâ *b c* & *c t* ex *c* ad planum *b a c* excitatâ parallelos ipsi *i f* vel *κ e*, & denique sub planâ figurâ in plano *r e t* aliarum superficierum ipsi non parallelarum, occursu terminata, illud inquam solidum continebitur inter extrema parallela similia & æqualia, quorum vnum est figura *b m a c* contenta curua *b m a*, & rectis *a c*, *b c*, alterum est in plano *r e t* omninò alteri *b m a c* æquale, simile, similiterque positum: demonstratio enim quàm Serenus adhibet in libro de sectione cylindri vt ostendat sectionem cylindri cum plano basi parallelo esse ipsi basi similem, & centrum in axe habere perinde locum hîc habet: & quo pacto Commandinus libro de centro gra- prop. 5. prop. 5.

uitatis solidorum ostendit *si prisma secetur plano oppositis planis æquidistante sectionem esse figuram æqualem & similem ei quæ est oppositorum planorum, centrum grauitatis in axe habentem*; ostenditur in nostro casu prædictam figuram esse similem similiterque positam figuræ b m a c, ac proinde & axem siue lineam per vtriusque figuræ centrum grauitatis ductam, esse lineæ if parallelam. Denique demonstratio qua idem Commandinus vtitur vt probet *cuiuslibet prismatis & cuiuslibet cylindri vel cylindri portionis grauitatis centrum in medio ipsius consistere*, euincit in nostro casu centrum grauitatis eiusmodi solidi, quod *prismatoides* appello, esse in medio axis, siue rectæ connectentis centra grauitatis prædictarum figuram parallelōs oppositarum.

prop. 8.

His ita constitutis, quoniam prismatoidis prædicti vnum ex parallelis extremis est figura semidiceratoidis b m a c, ergo centrum grauitatis habet in rectâ u q per n ductâ parallelōs rectæ b c, vt initio huius libri ostendimus; eiusmodi centrum sit punctum z, junctâque rectâ z i, in plano f i z per z agatur z x parallela rectæ i f. Quoniam rectæ n z, z x conuenientes in z parallelæ sunt rectis m i, i f conuenientibus in i, planum m i f erit parallelum plano u z x; cùm ergo planum m i f sit parallelum basi b c o, planum u z x erit etiam parallelum basi b c o, &

1. huius corol. 4.

15. vnd. Euc.

cùm z x sit recta parallela rectæ i f, axisque prismatoidis per z transiens sit parallelus, vt ostendimus, eidem rectæ i f, erit z x axis prismatoidis in plano per rectam u q parallelo basi, cúmque centrum grauitatis prismatoidis sit, vt diximus, in axe, idem centrum erit in plano per rectam u q parallelo basi b c o.

Quoniam igitur prismatoides & conus a b c ita sunt inter se vt sectiones eorum cum plano basi b o c parallelo sint æquales; prismatoides & conus erunt æquales, & habebunt centrum grauitatis in eodem plano basi parallelo, vt in precedenti ostendimus; ergo cùm centrum grauitatis prismatoidis sit in plano per u q basi parallelo, erit quoque centrum grauitatis coni in eodem plano per u q ducto; ergo cùm planum per u q parallelum basi secet coni axem a p in n; & cùm centrum grauitatis sit in axe coni (vt de cono & pyramide demonstrat Commandinus libro sæpiùs laudato) necesse est ipsum centrum esse in puncto n, quod vnicum est axi & plano u z x commune: ergo, &c. quod erat demonstrandum. propos. 14.5

COROLLARIVM I.

Quod si in pyramidis frusto quouis inter plana basi parallela intercepto inueniendum sit centrum grauitatis, præstabitur

in simili modo. Sit enim frustum inter plana per rectas y q, b c contentum; inuenienda est recta æquidistans rectæ b c in plano b a c, in qua sit centrum figuræ planæ b u q c contentæ rectis u q, q c, c b & curuâ b u, nam in communi eiusmodi rectæ & axis n p concursu esse centrum grauitatis quæsitum cõstat ex demonstratione præsentis propositionis, huic casui applicatâ; recta autem per centrum grauitatis figuræ u q c b ducta inuenitur ex prima huius.

COROLLARIVM II.

Eadem prorsus est demonstratio cuiuscunque figuræ sit basis b o c, dummodo quæ fient à plano basi parallelo sectiones sint ipsi basi similes, & se habeant vt quadrata rectarum b c, h i, f k &c. interceptarum lateribus a b, a c trianguli a b c, & parallelarum lateri b c eiusdem trianguli; eiusmodi solidum appelletur *homœoconicum*.

COROLLARIVM III.

Ex his apertum est, si ducto plano quocunque m i f g parallelo basi b o c prismatoides diuidatur in duas portiones, cum singulæ earum sint æquales portionibus coni inter eadem plana parallela basi b o c

interceptis, vt erunt portiones prismatoidis, ita esse partes coni, aut homœoconici. Partes autem prismatoidis esse inter se vt partes figuræ b m a c p semi-diceratoidis, eodem modo ostendi potest quo de alijs eiusmodi ostenditur à Clauio scholio primo septimæ duodecimi Elementorum; & in scholio vndecimæ eiusdem libri, & ab ipso Euclide eodem libro in propositione sexta: ergo partes coni aut homœoconici sunt inuicem vt partes semidiceratoidis b m a c p.

COROLLARIVM IV.

Vnde vlteriùs consequitur methodus diuidendi datum conum aut homœoconum iuxta datam proportionem. Sit enim proportio data rectæ ↓ξ ad ξθ, oporteatque ita diuidere conum per planum basi b a c parallelum, vt sicut ξθ recta ad ↓ξ ita fit portio basi adiacens ad aliam; id conficietur si semidiceratoides b a c diuidatur in datâ proportione. Vt igitur compositâ ↓θ ad ξθ, ita fiat rectilineum æquale semidiceratoidi b a c ad spatium ß. Ductâ rectâ m i ipsi b c æquidistante, fiat figura a m i æqualis spatio ß ex huius octuâ; liquet spatium a m i esse ad spatium b m i, vt est recta ξθ ad rectam ↓ξ.

COROLLARIVM V.

Quoniam ex eadem octaua constat methodus diuidendi in data ratione quodcunque segmentum semidiceratoidis seu complementi; constat quoque modus diuidendi in data ratione quodcunque frustum coni inter plana basi parallela contentum. Atque hæc omnia corollaria habent suo modo locum in tribus sequentibus propositionibus prout ibi indicabimus.

SCHOLIVM.

Archimedes initio libri de conoidibus & sphæroidibus sectionem conicam vult circumduci circa diametrum, vt describantur conoidea & sphæroidea de quibus acturus est in eo libro. Non dixit autem (vt reor) *circa axem*, quia ita definitionē restringeret, cùm ea quæ demonstrat eo loci habeant vim etiam si circumducatur circa diametrum quæ non sit axis, dummodo ita circumducatur, vt omnes ordinatim applicatæ ad diametrum ita moueantur vt maneant semper parallelæ vni certę rectæ immotæ; vnde fit vt diameter eiusmodi sectionis in circumductu aliam & aliam inclinationem habeat ad ordinatim applicatam eandem, quando ipsa diameter non est axis sectionis.

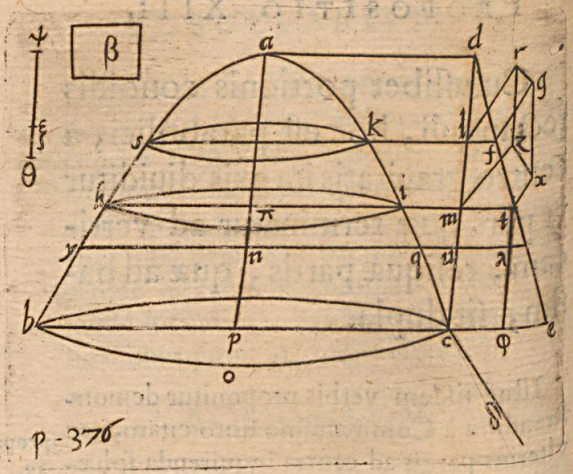
PROPOSITIO XIII.

Cuiuslibet portionis conoidis rectanguli, hoc est parabolici, à centro grauitatis ita axis diuiditur vt pars quæ terminatur ad verticem, reliquæ partis, quæ ad basim, sit dupla.

Istud iisdem verbis proponitur demonstrandum à Commandino libro citato, nec vlteriùs pergit ad centra inquirenda sphæroideωn & conoideωn hyperbolicorum, siue vt loquitur Archimedes amblygoniorum. prop. 29.

Sit segmentum parabolæ b a c cuius basis b c, diameter a p bifariam ipsam secans, circa quam manentem circumuoluti intelligatur segmentum b a c & ita describi paraboli cum conoides a b c o, cuius basis sit circulus b o c. Diuidatur axis a p ita in n vt portio a n sit dupla portionis n p. Dico punctum n esse centrum grauitatis solidi b a c o. de conoid & sphæroid. initio.

Per a ducatur in parabolæ plano b a c recta a d parallela rectæ b c, & completo parallelogrammo a p c d, per d ducatur vtcunque recta d e occurens rectæ



bc in e. Quotcunque plana baſi boc parallela ſk, hi ſecent conoidem baco, eorumque ſectiones ſint figuræ ſk, hi quæ circulares erunt ex Archimede, centrum habentes in axe ap; eiuſmodi autem plana ſecent triangulum dce juxta rectas lf, mt; atque in eodem plano ſκ ſuper recta lf intelligatur conſtructum rectangulum lfgr æquale ſpatio circuli ſk, & ſuper recta mt rectangulum mtxz æquale circulo hi. Quoniam circuli ſκ, hi habent ſe vt quadrata rectarum ſk, hi, ipſa autem quadrata rectarum ſk, hi habent ſe, vt oſten-

12. de conoid. & ſphæroi.

dimus, sicut rectæ l f, m t; ex demonstratis in precedenti apertum est rectas t x, f g esse æquales, & planum r g x z esse parallelum plano d c a, figuramque contentam plano baseos b o c producto per rectam c e, planis item d l r, d f g, & r g x esse prisma, quod æquale sit conoidi b a c o; habeatque centrum grauitatis in eodem plano basi parallelo; centrum autem prismatis cuius latus ex oppositis parallelum est triangulum d c e habere centrum grauitatis in plano basi parallelo transeunte per centrum grauitatis trianguli d c e. 2. huius in corr.

Quoniam igitur recta d u siue a n est ex constructione dupla rectæ u c siue n p, & per u ducta est recta n u λ parallela basi c e trianguli d c e, erit ex demonstratis ab Archimede centrum grauitatis trianguli d c e in recta u λ, ergo centrum grauitatis prismatis dicti erit in plano basi parallelo per rectam n u λ ducto; ergo ex demonstratis centrum grauitatis conoidis b a c o erit in plano parallelo basi per rectam y n q ducto; sed est etiam in axe a p vt Commandinus demonstrat libro citato, ergo centrum eiusmodi est in puncto n quod solum commune est plano per y n parallelo, & axi a p: ergo, &c. quod erat demonstrandum. 6. quad. parab. 11. huius. propos. 15.

COROLLARIVM I.

Quòd ſi in conoidis fruſto contento inter quæuis plana h i, b c parallela baſi inuemendum ſit centrum grauitatis. Ipſius trapezij u c c x inter eadem plana interceptí centrum grauitatis inueniatur per vltimam libri primi æquiponderantium; per illud ducatur recta rectæ c e parallela; centrum grauitatis erit in communi ſectione eiuſmodi rectæ, & axis n p; demonſtratio enim eſt eadem. Fruſti autem iſtius centrum grauitatis longè expeditiùs deſignatur quàm ex methodo Commandini in propoſitione quæ citati jam libri vltima eſt; neque enim, vti diximus, progreditur ad centrum grauitatis inueniendum in ſphæræ, vel ſphæroideon, vel conoideon hyperbolicorũ portionibus. In quo etiam hæſiſſe Antiquiores omnes argumento eſt quòd Archimedes in libris de ijs quæ vehuntur ſuper aqua formam ſcaphæ parabolicæ vniformiter grauis determinet, quæ cùm in vndis certo quodam ſitu inclinata fuerit, non tamen eò vſque vt labro excipiat aquas, conſiſtat ſuis ponderibus librata, ad quam determinationem neceſſaria eſt cognitio centri grauitatis; de ſcapha autem quæ formam habeat aut ellipticam, aut hyperbolicam nihil ſimile examinat quia nimirum notum ipſi non erat cen-

trum grauitatis in eiusmodi solidis. Quoniam autem in scapha quæ figuram portionis sphæræ habeat, euenire non posse eiusmodi inclinationem ostendi potest sine cognitione centri grauitatis; id quoque demonstrat propositione vltima primi libri.

COROLLARIVM II.

Eadem prorsus est vis præsentis demonstrationis, cuiuscunque figuræ sit basis b o c dummodo quæ fiunt à plano basi parallelo sectiones cum solida figura sint ipsi basi similes, & se habeant vt quadrata rectarum b c, h i, f k &c. interceptarum parabola b a c, & parallelarum basi b c segmenti parabolę b a c. Eiusmodi solidum appelletur *paraboliroides*.

COROLLARIVM III.

Hinc patet quoniam si prisma, cuius basis d c e, plano m z x t basi b o c parallelo secetur vtcunque, portiones eius se habent vt portiones basium, portionesque ipsæ sunt æquales portionibus conoidis parabolici diuisi ab eodem plano m z x t; ipsas conoidis parabolici portiones esse inter se vt portiones d m t, c m t e trianguli d c e; vnde si vt d m ad m c rectam, ita fiat m c ad tertiam c f: Clauius 7. duodec. Euc. Schol. 1.

vt recta d m ad compoſitam ex recta c ♪ & ex dupla rectæ d m, ita erit pars conoidis inter parallelas a d, h i iacens ad reliquam. In plano enim trianguli d c e ſi compleatur parallelogrammum m t c φ, triangula d m t, t φ e erunt ſimilia, ideoque vt quadratum d m ad quadratum t φ ſeu m c, hoc eſt vt recta d m ad c ♪ rectam, ita erit triangulum d m t ad triangulum t φ e: ſed ita etiam eſt triangulum idem d m t ad triangulum cuius baſis ſit c ♪, & altitudo eadem; ergo triangulum, cuius baſis c ♪ & altitudo eadem quæ trianguli d m t ex t ad baſim d m demiſſa, eſt æquale triangulo t φ e. Rurſus quoniam parallelogrammum m t φ c eſt æquale ttiangulo cuius baſis ſit dupla rectæ m c, & altitudo eadem cum perpendiculari ex t in baſim d m demiſſa; ergo triangulum ſub compoſita ex dupla rectæ m c & ex c ♪ habens altitudinem prædictam eſt æquale trapezio m t e c: ergo cùm triangulum trapezio prædicto æquale, habeat eandem altitudinem quam triangulum d m t, erit ad triangulum d m t vt baſis ſcilicet compoſita ex dupla rectæ m c, & ex recta c ♪, ad baſim d m.

COROLLARIVM IV.

Ex dictis conficitur partem conoidis quæ eſt ad verticem a eſſe ad totum conoi-

des b a c o, vt quadratum rectæ a ϖ seu d m ad quadratum rectæ a p seu d c; est enim sicut triangulum d m t ad triangulum d c e; ipsa autem triangula sunt inter se vt quadrata rectarum d m, d c. Atque istud est quod Archimedes demonstrat propositione 26. libri de Conoidibus & Sphęroidibus.

COROLLARIVM V.

Aperta etiam ex demonstratis est methodus diuidendi datum conoides parabolicum in data quacunque ratione; nota enim est methodus triangulum d c e iuxta quamcunque datam rationem diuidendi per parallelam basi c e. Sit proportio data rectæ ϕ ξ ad ξ θ, oporteatque ita diuidere triangulum d c e vt portio adjacens angulo d sit ad reliquam sicut recta ξ θ ad ϕ ξ. Vt composita ϕ θ ad ξ θ rectam, ita fiat spatium trianguli d c e ad spatium β. Dato rectilineo d c e, simile d m t similiterque positum describatur quod sit æquale spatio β. Istud est quod Commandinus propositione decima sub finem commentariorum in librum Archimedis citatum demonstrat ex principijs ab eodem Archimede ibidem traditis. 25. sexti Euc.

COROLLARIVM VI.

Denique quæcunque possunt perfici circa diuisionem trianguli d c e per parallelam basi c e vnam vel plures, vel circa diuisionem trapezij cuiuscunque m t e c, applicari possunt ad diuisionem parabolici, aut parabolicoidis b a c o, quæ res est amplissima, & notatu, nisi fallor, digna.

SCHOLIVM.

Occasione centri grauitatis solidorum, scaphæ in corollario primo commemoratæ, & eorum quæ vehuntur in aquis breuiter dicam quàm iucunda & vtilis sit eiusmodi cognitio, quámque apta ad difficilia multa explananda. In ijs libris Archimedes tradit principia ex quibus demonstratur admirabilis ille modus librandi bis eandem rem in aqua & extra illam, & ex discrimine ponderum inuestigandi cum stupore eorum qui ista ignorant, quantum argenti admixtum sit in corona quæ tota aurea fraudulenter venditatur; quod olim præstitit ipse Archimedes, & quod hodie præstatur à quibusdam vt explorent in numis qui cuduntur quantum alieni metalli commixtum lateat. Ex eodem librandi modo inuestigatur quanta sint quæuis corpora quacunque prædita figura vt in pro-

legomenis retulimus ex Iordano. Ex ijsdem principijs Archimedes soluit quæstionem illam physicam nec inutilem nauium constructioni, cur portio sphæræ ex materia vniformiter densa, si secundum faciem planam imponatur vndis ita vt conuexa ipsius sint superiora & extent, consistat quidem; at si tantillum moueatur, non redeat ad situm priorem, sed alium quo conuexa deorsum tendunt, suo sibi motu comparet; & si ab eo iam parto deturbetur vi aliqua, ad eundem semper reuertatur.

Occurrit animo & quidē lubenti alcyonum nidi figura à tot scriptoribus celebrata, eam Plutarchus ait esse σχημάτων πολλῶν μόνον ἀπερίτρεπτον ὑπὸ ἀβάπτιστον, *solam ex omnibus quæ nec mergi nec inuerti queat*, quod non mergatur id habet à capacitate & symmetria cùm onere auium quibus prebere debet domicilium, ad id autem ex Archimede in dicto opere necesse est vt tota moles aquę cuius locum occupaturus est nidus etiam cùm maximè oneratus fuerit, sit grauior ipso nido ita onusto; ad quod non parum conducunt duo quorum vnum est ipsa materia ex qua nidus conficitur, est enim vt testatur Aristoteles spongiosa, ita tamen vt foramina non sint ampla, sed crebro tùm foramine tùm solido constet; alterum vt ostium qua ingressura est mater occlusum sit ne superfusa casu aliquo vnda nidus impleatur, & ita expulso aëre ipse

Arist. l. 9. hist. anim. c. 14. Plinius l. 10. c. 32. Plutar. de solertia animalium & de amore prolis. Ælianus de animal. l. 9. c. 17.

cum eo quod continet fiat grauior quàm aqua cuius locum implet, ac proinde mergatur. Iſtud autem oſtium ita ſe habet eò quod vt Albertus apud Geſnerum ait ſit compactum ex materia per aquam intumeſcente inſtar ſpongiæ, & tumore ſuo claudente viam, quam tamen roſtro longo & tenui mater ingreſſura diducit, ipſam etiam aquam ſi opus fuerit exugendo. Vnde rectè dicitur à Plutarcho σόμα τυφλὸν καὶ κρύπτιον, *cæcum & occultum.*

Geſn. tom. de auibus pag. 87

Quia verò ſi nidus, quamuis non mergeretur, in omnem partem conuerſus quieſceret, id magno pullorum incommodo fieret, prouidenda fuit ea nidi figura quæ vnum ſemper ſitum natiui ponderis libratione retineret nec in hanc aut illam partem incumbere ſine vllo diſcrimine apta eſſet; Illa porro non eſt ſphærica, quam non reluctantem in omnem partem inuertas; neque Ariſtoteles ſphæricam eſſe dixit vt eum dixiſſe vult Iulius Scaliger, & Plinius videtur interpretari; quamuis enim nidum pilæ marinæ (globus eſt è ſordibus marinarum ſpumarum vt aliqui volunt craſſeſcentibus, alcyonium aliter, vel ſpuma arida maris, vel haloſachna appellatus) ſimilem dixerit, apertum eſt ſimilitudinem illam eſſe in materiâ, quæ tanta eſt vt aliqui teſte Plinio alcyonium ex nidis alcyonum confici velint, vel alij apud Geſnerum nidos ex ipſo. Ipſis quod dixi

dixi verbis Aristotelicis planum fit, postquam enim nidum sphęræ illi marinæ similem esse docuit, subdit *figuram verò eius esse instar earum quibus collum longius est cucurbitarum*, ἡ νεοττία παρόμοια ταῖς σφαίραις ταῖς θαλαττίαις ἐστὶ, καὶ ταῖς καλαμέναις ἀλοσάχναις... τὸ δὲ σχῆμα παραπλήσιον ταῖς σικύαις ταῖς ἐχέσαις τὸν τραχήλους μάκρους. Vt rectè eum assimilarit Albertus apud Gesnerum *figuræ pineali, aut ventosæ quæ habet collum longum.* Pro eodem iste Autor habet *figuram pinealem*, & *ventosam cucurbitam quæ collum longum habet*; figura enim pineæ nucis est conoides, at σικύας κωνοειδεῖς dari, earumque mentionem fieri apud Hippocratem testatur Galenus in lexico vocum illius. Ficus fructus formam habet etiam conoidem, vnde fortasse σικύα per metathesin literarum ι & υ, quam agnoscit Eustathius in librum δ. Iliadis, & in librum ρ. Odyss. vbi addit istam permutationem elementorum ideo esse factam ἵνα μὴ καὶ τῷ σικύῳ σύκυ ἐμφαίνεσθαί τι, *ne quid ficûs in cucumere appareret*; certè si nihil in σικύῳ, in cucurbitis tamen nonnullis σικύαις appellatis σύκυ σχῆμα ἐμφαίνεσθαι negari nequit. Hinc inferre licet ἁλιευτικὸν κόρσον cui Plutarchus nidi istius formam confert, esse rete illud quod ex filo, vel iunco contextum admiculo circellorum subinde insertorum nucem pineam propè refert. Cæterum inter figuras quibus prædita esse possunt ea quæ super aquas vehuntur an

pag. 332 vers. 21. pag. 634 vers. 24

vlla sit quæ magis reluctetur se inclinanti, sicut nullam esse affirmat Plutarchus, quę stio est quæ suo loco reseruari debet. Prætermittere tamen non debeo huius nidi, quem à se sapius visum testatur idemmet scriptor, tam admirabile artificium, tamque aptam ad semper extandum aquis conformationem mihi prorsus persuadere quod grauissimi ex Antiquioribus scripsêre, in eo, non vt Gesnerus & Aldrouandus suspicantur priùs ad saxum aliquod proxime aquas agglutinato, sed fluctuante pullos excludi & educari. Hæc autem omnia eò dixi vt constet centri grauitatis scientiam adhuc fore expetendam quamuis non inseruiret tetragonismis; sed & quantos vsus præstet Architectis & statuarijs abunde constat ex Villalpandi apparatu.

Aldrou. tom. 3. de auib. p g 195

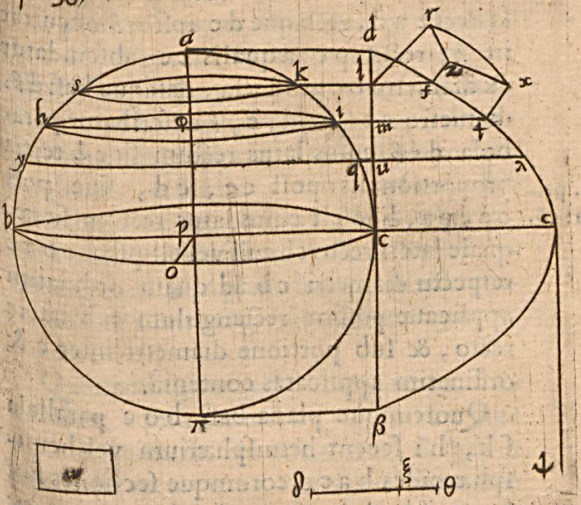
pag. 319 & sequentibus.

Propositio XIV.

Hemisphærij & hemisphæroidis centrum grauitatis ita axem diuidit vt pars quæ terminatur ad verticem sit ad reliquam vt quinarius ad ternarium.

Sit circulus, vel ellipsis b a c cuius centrum c, diameter a p π, ei coniugata b p c; circa a p π manentē circūvolvi intelligatur

p 387



circulus vel ellipsis b a c, & ita describi vel sphæra, vel figura sphæroides b a c o diuisa bifariam circulo b o c, cuius diameter est b p c. Diuidatur a p ita in n vt portio a n sit ad n p sicut quinarius ad ternarium; hoc est tota a p diuidatur in octo, quarum quinque contineat recta a n, & tres residuas recta n p. Dico punctum n esse centrum grauitatis hemisphærij vel hemisphæroidis b a c o.

Per a ducatur in semicirculi vel semiellipsis plano recta a d parallela rectæ b c, quæ sectionem conicam b a c tanget in a. Completo parallelogrammo a p c d, completoque circulo vel ellipsi b a c π, per π

32. primi Cō.

terminum diametri a π ducatur π β parallela rectæ a d, rectáque d c ipſi π β occurrat in β; rectæ p c æqualis c e abſcindatur ex diametro b c productâ, datáque baſi d β, diametro c e per d, e, β deſcribatur parabola d e β cuius latus rectum ſit e ↓ tertia proportionalis poſt c e, c d, ſiue poſt c p, p a, hoc eſt cuius latus rectum ſit æquale lateri recto circuli vel ellipſeos a b π c reſpectu diametri c b ad quam ordinatim applicatæ poſſint rectangulum ſub latere recto, & ſub portione diametri inter c & ordinatim applicatas contentâ.

52. primi cō.

Quotcunque plana baſi b o c parallela ſ k, h i ſecent hemiſphærium vel hemiſphæroides b a c o, eorumque ſectiones ſint figuræ ſ k, h i, quæ circulares erunt ex Archimede, centrum habentes in axe a p; eiuſmodi autem plana ſecent parabolam d c e juxta rectas l f, m t; atque in eodem plano ſ k ſuper recta l f intelligatur conſtructum rectangulum l f g r æquale ſpatio circuli ſ k, & ſuper recta m t rectangulum m t x z æquale circulo h i. Quoniam circuli ſ k, h i habent ſe vt quadrata rectarum ſ k, h i, ipſa autem quadrata rectarum ſ k, h i habent ſe, vt oſtendimus, ſicut rectæ l f, m t; ex demonſtratis in duodecima huius apertum eſt rectas t x, f g eſſe æquales, & planum r g x z eſſe parallelum plano d c e, figuramque contentam plano baſeos b o c producto per

11. de conoid. & ſphæroid.

3. tertij huius in corollario 2.

rectam c e, planis item d l r, & r g x z, & superficie quam recta per parabolam d f e mota parallelos rectæ f g describit, esse prismatoides, quod æquale sit hemisphærio vel hemisphæroidi b a c o, habeatque centrum grauitatis in eodem plano basi parallelo; centrum autem prismatoidis cuius latus ex oppositis parallelis est parabolæ semisegmentum d c e, habere centrum grauitatis in plano basi parallelo transeunte per centrum grauitatis semisegmenti d c e.

Quoniam igitur recta d u siue a n habet se ex constructione ad rectam u c siue n p vt quinarius ad ternarium, & per u ducta est recta n u λ parallela diametro c e parabolæ d e β, erit ex demonstratis à nobis centrum grauitatis semisegmenti d e c in recta u λ, ergo centrum grauitatis prismatoidis dicti erit in plano basi parallelo per rectam n u λ ducto; ergo per vndecimam huius centrum grauitatis hemisphærij vel hemisphæroidis b a c o erit in plano parallelo basi per rectam y n q ducto; sed est etiam in a x e a p vt Commandinus demonstrat libro de centro grauitatis solidorum; ergo centrum eiusmodi est in puncto n, quod solum commune est plano per y n parallelo, & axi a p. Hemisphærij ergo, &c. quod erat demonstrandum.

1. huius in coroll. 4.

propos. 15.

COROLLARIVM I.

Quod ſi recta b c non tranſiret per centrum, eadem eſſet demonſtratio, niſi quod punctum u non ſecaret rectam d c in dictâ proportione, ſed in alia quæ determinanda foret juxta propoſitionis primæ præſcriptum. Quæ de fruſtis dicta ſunt in corollario duarum priorum hîc poſſunt applicari pauculis & perfacilibus mutatis.

COROLLARIVM II.

Ex corollario ſeptimo primæ huius, & ex præſenti propoſitione manifeſtum eſt ſi ſemidiameter p a bifariam ſecetur in n, & ita diuidatur a n in φ, vt a φ ad φ n ſit vt tredecim ad ſeptem, punctum φ eſſe centrum grauitatis portionis ſphæræ y a q.

COROLLARIVM III.

Demonſtratio præſentis propoſitionis eodem penitus pacto procedit ſi baſis b o c ſit cuiuſcunque alterius figuræ, dummodo quæ fiunt à planis baſi parallelis ſectiones cum ſolida figura ſint ipſi baſi ſimiles, & ſe habeant vt quadrata rectarum b c, h i, ſ k, &c. interceptarum ſemicirculo b a c, & parallelarum diametro b c, eiuſmodi ſolidum appelletur *homœoſphæricum*.

COROLLARIVM IV.

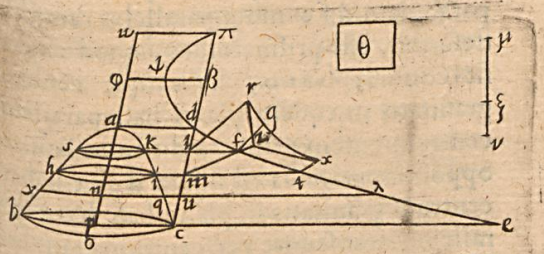
Hinc etiam apertum est methodum diuidendi sphęram vel sphęroides, vel homœosphęricum pendere à methodo diuidendi segmenti parabolæ d e β secundum datam rationem, quod ita perficitur. Sit proportio data rectæ ♂ξ ad ξθ, vt composita θ♂ ad ξθ, ita fiat spatium parabolæ d e β notum (vt non semel diximus) ad spatium ω. Dato spatio ω inueniatur ducta recta m t ad diametrum c e parallela portio d m t quæ sit æqualis prędicto spatio ω; qua autem id ratione præstetur demonstratum est propositione sexta.

PROPOSITIO XV.

Conoidis hyperbolici habentis axem æqualem diametro transuersæ hyperbolæ ex cuius circumductu generatur, centrum grauitatis ita diuidit axem vt pars quæ terminatur ad verticem se habeat ad aliam sicut septenarius ad ternarium.

Sit hyperbola b a c cuius centrum φ, & per centrum ducta sit φ a, cui φ ω æqualis abscissa sit; erit ergo ω a diameter transuersa inter sectiones oppositas iacens. Rectæ ω a abscissa sit a p æqualis, & per p ordinatim applicata ad ipsam diametrum a p sit recta p c occurrens vtrinque sectioni in punctis b, c. Segmentum parabolæ b a c intelligatur circa rectam a p manentem volvi, & ita describere hyperbolicum conoides b a c o, cuius basis circulus b o c à recta b p descriptus; axis a p. Diuidatur recta a p in decem partes æquales quarum septem sint in recta a n, tres in rectâ n p, vt sicut septenarius ad ternarium ita sit recta a n ad n p. Dico punctum n esse centrum grauitatis conoidis b a c o.

Per a ducatur in hyperbolæ plano b a c recta a d parallela rectæ b c, quæ tanget
32. primi conic. in a, & completo parallelogrammo ω π c p, ductâque per φ recta φ β ipsi a d parallelâ, ducta intelligatur quęcunque parabola
51. primi cō. π ↓ d e cuius basis data sit d π, vertex sit punctum ↓ in recta β φ vtcunque sumptum, & ↓ β diameter, latus autem rectum sit recta quæ vnà cum ↓ β comprehendat rectangulum æquale rectæ π β seu β d; con-
26. primi cō. ueniat autem cùm rectâ b c æquidistante diametro ↓ β, in puncto e; conuenient enim vt ex conicis elementis constat. Quotcunque plana basi b o c parallela f k,



hi secent conoidem baco, eorumque sectiones sint figuræ sk, hi, quæ circuli erunt ex Archimede, centrum habentes in axe ap; eiusmodi verò plana secent figuram dce contentam rectis dc, ce & curua de, juxta rectas lf, mt. Rursus in eodem plano sk super recta lf intelligatur constructum rectangulum lfgr æquale spatio circuli sk; & super rectâ mt rectãgulũ mtxz æquale circulo hi. quoniã circuli sk, hi habẽt se vt quadrata rectarũ sk, hi ipsa autẽ quadrata rectarũ sk, hi habent se, vt ostendimus, sicut rectæ lf, mt; ex demonstratis in duodecima huius apertum est rectas tx, fg esse æquales, & planum rgxz esse parallelum plano dce,

12. de conoi. & sphæroid.

3. tertij huius in corollario 2.

figuramque contentam plano baseos b o c producto per rectam c e, planis item d l r, r g x z & superficie quam recta per parabolam d f e mota parallelos rectæ f g describit, esse prismatoides, quod æquale sit conoidi b a c o, habeatque centrum grauitatis in eodem plano basi parallelo; centrum autem prismatoidis cuius latus ex oppositis parallelis est figura d c e t habere centrum grauitatis in plano basi b o c parallelo, transeunte per centrum grauitatis figuræ d c e t planæ.

Quoniam igitur recta d u siue a n habet se ex constructione ad rectam u c siue n p vt septenarius ad ternarium, & per u ducta est recta n u λ parallela diametro ↓ β parabolæ π ↓ β, erit ex demonstratis à nobis, centrum grauitatis figuræ d c e t, in recta u λ; ergo centrum grauitatis prismatoidis dicti erit in plano basi parallelo per rectam n u λ ducto; ergo per vndecimam huius centrum grauitatis conoidis b a c o erit in plano parallelo basi per rectam y n q ducto; sed est etiam in axe a p ex Commandino; ergo centrum eiusmodi est in puncto n, quod solum commune est plano per y n parallelo, & axi a p. Conoidis ergo hyperbolici, &c. quod erat ostendendum.

2. huius in corollario 2.

15. libri de centro sol.

COROLLARIVM I.

Quòd si recta a p aliam quamuis proportionem haberet ad a ω diametrum, eadem esset demonstratio nisi quod u non secaret rectam d c in dicta proportione, sed in alia quæ determinari deberet juxta propositionis tertiæ præscriptum. Quæ de frustis dicta sunt in corollariis trium præcedentium possunt hîc accommodari nullo negotio.

COROLLARIVM II.

Demonstratio eadem erit si basis b o c quamcunque aliam figuram obtineat, dummodo quæ fiunt à planis basi eidem parallelis sectiones cum eiusmodi figura solida sint ipsi basi similes, & se habeant vt quadrata rectarum b c, h i, f k, &c. interceptarum hyperbola b a c, & parallelarum basi b c segmenti hyperbolæ b a c, eiusmodi solidum appelletur *hyperbolicoides*.

COROLLARIVM III.

Hinc apertum est methodum diuidendi conoides hyperbolicum vel hyperbolicoides, nondum ab vllo mihi cognito traditam, pendere à methodo diuidendæ figuræ

d c e secundum rationem datam, quod ita perficitur. Sit proportio data rectæ $\mu\xi$ ad rectam $\xi\nu$. Vt composita $\mu\nu$ ad $\xi\nu$, ita fiat spatium figuræ d c e notum ad spatium θ. Dato spatio θ inueniatur ducta recta m t ad diametrum a e parallela, portio d m t quæ sit prædicto spatio θ æqualis; qua autem id ratione præstetur demonstratum est in septima huius.

SCHOLIVM.

In quinque corporibus cylindro, portione sphæræ vel sphęroidis, conoide parabolico, conoide hyperbolico, & cono ordinem quantum ad collocationem centri grauitatis spectat, mirum animaduertas velim, Lector. Cylindrus centrum grauitatis habet in medio axe vt demonstrat Commmandinus. Conus illi oppositus & maximè omnium acutus habet centrum grauitatis in puncto diuidente axem ita vt portio ad verticem sit tripla alterius. Conoides parabolicum quod medio est loco obtusior cono, acutior cylindro, habet in puncto ita diuidente axem vt portio ad verticem alterius sit dupla. Portio sphærici vel sphæroidis, acutior cylindro, obtusior conoide parabolico habet centrum in puncto ita diuidente axem (prout ex primâ huius apertum est) vt proportio partis vertici adiacentis ad aliam sit maior pro-

portione æqualitatis, quæ est in partibus axis cylindri, & sit minor proportione dupla quæ est inter partes axis conoidis parabolici. Conoides denique hyperbolicum obtusius cono, & acutius conoide parabolico ita habet centrum collocatum vt portio verticis ad portionem reliquam habeat proportionem maiorem quidem dupla, quæ conoidis parabolici est propria, minorem verò tripla, (vt ex corollario primo propositionis tertiæ planum fit) quæ est propria coni. Hinc vlteriùs apparet proportionem hyperbolici conoidis esse maiorem proportione parabolici; proportionem verò partis sphæræ vel sphæroidis esse minorem, atque ita illam recedere à parabolica per excessum siue ὑπερβολὴν, istam per defectum siue ἔλλειψιν; vt hinc quoque nominum *ellipseos* & *hyperboles* causa sumi possit. Non minorem admirationem habet quod ex ista centrorum designatione demonstrari nullo negotio potest, ipsorum corporum, quam inter se habent, proportio, sicuti tradita fuit methodus ea diuidendi secundum datam proportionem. Hæc verò duo sunt propter quæ Archimedes libros de sphęra & cylindro, de conoidibus & sphęroidibus conscripsit, & quorum inuentionem tanti fecit, vt ex illis se posteritati æstimandum optarit dum in suo tumulo cylindrum, qui sphæram complecteretur, poni voluit, & inscribi

proportionem eorum prout à ſe inuenta fuerat. Eiuſmodi ſepulchrum cùm multis poſt annis ſeptum vndique & veſtitum vepribus & dumetis ignoraretur, à ſe indagatum indicio columellæ non multùm è dumis extantis, in qua inerat ſphæræ figura & cylindri, gloriatur alicubi Cicero.

Tuſc. quæſt. l. 5.

Modus inueniendi proportionem quæ eſt inter partes prædictorum ſolidorum in mentem nobis reuocat problema quoddam ſympoſiacum quod à Sapientibus viris poponi non ſemel audiuimus. *Cur poſita forma ſcyphorum qui ad menſam in vſu nunc ſunt, temperantiæ & valetudinis leges præſcribant vt primùm infundatur in craterem vinum, tùm ſuperfuſâ aquâ miſceatur.* Huius cauſam Phyſicus aſſignabit, quòd cùm aqua grauior, vinumque leuius ſit, faciliùs mutuo incurſu permiſcentur, dum illud ſuaptè natura locum ſuperiorem petit; inferiorem iſta; magis ergo diluitur hoc pacto & attemperatur vinum, magiſque proinde iuuat & ſtomacum, & hominem. Mathematicus aliam longè maioris momenti dabit huius rationem. Cùm ſcyphi maximam partem nunc ſint in modum coni, aut pyramidis, aut hemiſpherij, aut parabolici, aut hyperbolici in fundo acutiores, latioreſque in ſupremo labro, multò minus capaces ſunt in inferiore quàm in ſuperiore ſui parte, illáque inæqualitas tanta eſt vt non pueros ſolum, ſed

etiam adultos & cordatos viros fallat. Si exempli causa ad dimidiam scyphi altitudinem vinum fundi iubeas, paria fermè facere vinum & aquam existimas, nec tibi persuades quàm modica tuæ potionis pars sit vinum te arbitro mixtum. Diuisa capacitate scyphi in octoginta portiones inuicem æquales, si scyphus conum, aut pyramidem referat, ex hactenus tradita doctrinâ constat decem tantùm ex illis contineri dimidio altitudinis inferiore; si hyperbolicum conoidem imitetur de quo agit propositio præsens sexdecim dumtaxat; si parabolicum, viginti & non amplius; si hemisphærium aut hemisphæroidem, omnino quinque & viginti. Ex quo conficitur in primo calicum genere misceri octauam solummodo partem vini; in secundo quintam; in tertio, quartam; in postremo decimam sextam supra quadrantem, siue quadrãtem totius, & ipsius insuper quadrãtis quadrãtẽ. Et vt omnia etiam non cogitantes nos trahunt ad temperatum potum. Primùm necessitas id genus scyphorũ excogitauit, ex forma enim habent vt dum exhauriuntur superior oræ pars non impingat in nasum aut frontem; deinde dignitas vini eiusque præcipua vtilitas obtinuit vt ipsum priùs in calicem de more fundatur; aqua postea castigandum: denique animi facultas quam *æstimatiuam* vocant, hac forma calicum delusa, merum

vltra veritatem auget, odiúmque dilutioris vini hoc iudicio cohibet. Quis autem non ſuſpiciat iſtam Matheſeos reconditæ & ſagacis partem quæ rationes iſtiuſmodi cræſeos, vtcunque tandem fiat, ad vnguem planè definit?

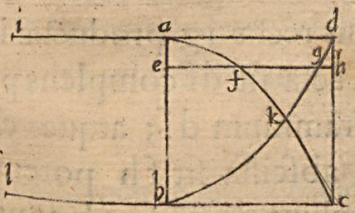
PROPOSITIO XVI.

Sit parallelogrammum quodcunque a b c d, ſintque tres rectæ a b, b c, a i proportionales quarum a i ſit ad a b perpendicularis. Dato latere a i deſcripta ſit parabola a κ, cuius vertex a, diameter a b, ordinatim applicatæ ſint parallelæ lateri a d, quoniam i a, b c, a b ſunt proportionales punctum c erit in parabola a k. Rurſus per b agatur b l parallela & æqualis rectæ b i, & dato vertice b, diametro b a, latere recto b l deſcribatur parabola b k, cuius ordinatim applicatæ ſint rectæ a d parallelæ;

52. primi Cō.

punctum

punctum d erit in parabolâ b k. Ostendendum est si in parallelogrammo a c ducatur rectâ e h ipsi a d parallela occurrens parabolis in f, g quadrata duarum rectarum e f, e g esse simul æqualia quadrato rectæ a d.



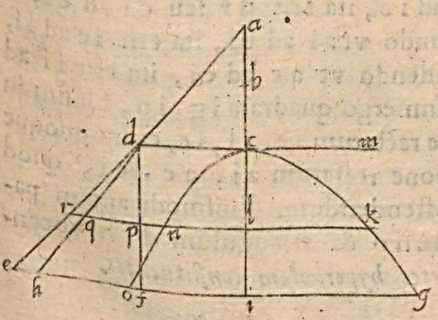
Quoniam enim quadratum e f est æquale rectangulo i a e; & quadratum e g est æquale rectangulo l b e, duo simul quadrata erunt æqualia duobus rectangulis i a e, l b e, sed duo simul i a e, l b e sunt æqualia rectangulo l b a, latera enim i a, l b sunt æqualia, & duæ b e, e a componunt totam b a; rectangulum autem l b a est æquale quadrato rectæ a d ordinatim applicatæ; ergo duo quadrata e f, e g æquant simul quadratum a d, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVII.

Sit hyperbola c k g cuius centrum b vertex c; diameter tranſuerſa a c, tangens c m, ordinatim applicata i g; ex productâ rectâ c m abſcindatur c d æqualis lateri recto, & iungatur recta a d occurrens rectæ i g productæ in e; per d acta ſit d f complens parallelogrammum d i; atque ex rectâ abſciſſa ſit f h potens rectangulum d f e, ſiue h congruat puncto e, ſiue non congruat, & iungatur recta d h. Dato vertice c diametro c i deſcribatur parabola c n o cuius latus rectum ſit æquale ipſi d c, ita vt d c, o i, ci ſint proportionales. Si per quodcunque punctum inter puncta c & i ſumptum in recta c l, ducatur recta k r occurrens lineis annotatis in k, l, n, p, q, r; dico

quadratum rectæ l n vnà cùm quadrato rectæ p g, esse æquale quadrato rectæ l κ; & vt quadratum rectæ i o ad quadratum rectæ f h, ita esse rectam a c ad rectam c i; vt autem quadratum rectæ i g ad quadratum rectæ i o, ita esse rectam a i ad a c rectam; & vt idem quadratum rectæ i o ad c i, ita esse rectam a i ad c i rectam.

Quoniam enim i g est ordinatim applicata ad hyperbolam quadratum i g erit



æquale rectangulo c i e; ſed rectangulum c i e æquale eſt duobus rectangulis c i f, d f e, quorum illud æquale eſt quadrato i o, iſtud quadrato f h, ergo quadratum g i eſt æquale quadratis i o, f h. Simili ratione oſtendetur quadratum l k cùm ſit æquale rectangulo c l r, ipſum autem c l r ſit æquale & rectangulo c l p quod eſt æquale quadrato l n, & ſimul rectangulo d p r quod eſt æquale quadrato p q (vt oſtendi facile poteſt ex demonſtratis à Clauio in ſcholio quartæ propoſitionis ſexti Euclidis) ergo quadratum l k eſt æquale duobus quadratis ſimul l n, p g.

1. ſexti Ec. 2. ſexti Euc. in coroll.

Rurſus quoniam quadratis i g, i o, f h, æqualia ſunt rectangula c i e, c i f, d f e, cùm eandem altitudinem c i habeant, erunt inter ſe vt baſes i e, i f, f e: quoniam verò triangula a i e, d f e ſunt ſimilia, vt a i ad i e, ita erit d f ſeu c i ad e f, & alternando vt a i ad c i, ita erit i e ad i f, & diuidendo vt a c ad c i, ita erit i f ad f e. Cùm ergo quadrata i g, i o, f h ſint in ratione rectarum i e, i f, f e, erunt quoque in ratione rectarum a i, a c, c i, quod erat oſtendendum. Eiuſmodi autem parabola c n o & triangulum d f h vocentur *partes hyperbolam conſtituentes.*

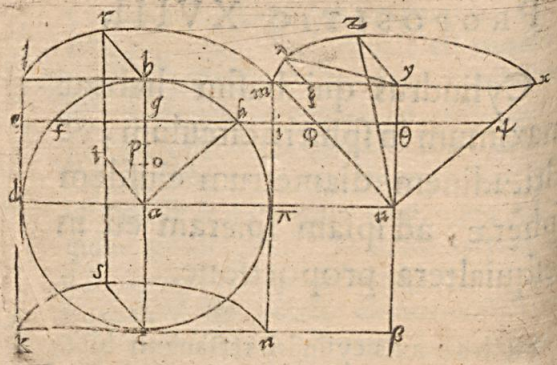
PROPOSITIO XVIII.

Cylindrus qui basim habeat maximum in sphærâ circulum, & altitudinem diametrum eiusdem sphęræ, ad ipsam spæram est in sesquialtera proportione.

Sit b a c axis cylindri rectanguli bifariam sectus in a; eundem cylindrum bifariam secet planum per axem, eiusque cum cylindro sectio communis sit quadratum l m n k; semicylindri insistentis quadrato l m n κ; bases sint semicirculi l r m, k s n; in quibus ex punctis b, c excitentur perpendiculares b r, t s ad diametros l b m, k c n; per rectas r b, s c intelligatur planum duci cuius sectio cum cylindro sit parallelogrammum r b c s. Rursus in parallelogrammo rectangulo r b c s per a acta sit a t lateri c s parallela, & circulus b d c in dato quadrato l k n m describatur; intelligaturque axe t a immoto reuolutione circuli b d c describi hemisphærium, quod erit semissis sphęræ intra cylindrum ita contentæ vt ipsius cylindri altitudo b c sit diameter sphæræ, basis autem sit circulus cuius diameter l m, quæ cùm sit æqualis rectæ b c, ipsa basis erit

2. sereni de sect. cylind.

8. quarti Euc.



circulus æqualis circulo maximo ſphæræ, cuius hemiſphærium circulo b d c incumbit; alter autem ſemicylindrus & alterum hemiſphęrium intelligatur eſſe infra planum l κ n m. Dico cylindrum prædictum eſſe ſeſquialterum ſphæræ in ipſo contentæ; & ſextuplum coni cuius baſis ſit circulus l r m, altitudo b a ſemidiameter ſphæræ.

Ex recta l m productâ abſcindatur m x æqualis ipſi l m, bifariam in y diuiſa; & per y in plano l n acta ſit y u æquidiſtans rectæ m n, & rectæ d a ad normam ſecanti diametrum b c occurrens in u. In plano l b r per rectam m x producto ex centro y interuallo rectæ y z ipſi y m æqualis deſcribatur circulus m z x, iunctâque rectâ u z, iuncto u manente intelligatur circumuolutione rectæ y z per circulum

mzx describi conus, cuius basis erit circulus mzx, & axis yu, triangulum vero per axem muy. Intra rectas lm, du ducatur quæcunque c↓ ipsis parallela occurrens circulo bdc in f, h; quadrato ln in e, i; triangulo mux in φ↓; axibus ba, iu in g, θ; iungantur rectæ af, ah.

Quoniam rectæ mx est dupla rectæ uy, erunt my, yu, yx æquales, & quia parallela est φ↓ ad rectam mx, sicut uy est æqualis rectæ my, ita uθ erit æqualis rectæ φθ seu θ↓; est ergo recta φ↓ dupla rectæ θu seu ga ipsi θu æqualis.

Rursus quoniam circulus cuius diameter gi se habet ad circulum cuius diameter gh, vt quadratum gi ad quadratum gh; ergo diuidendo vt quadratum ag, hoc est excessus quo quadratum gi seu ah superat quadratum gh, ad ipsum quadratum gh, ita est excessus quo circulus cuius diameter gi, superat circulum ex diametro gh, ad ipsum circulum ex diametro gh: sed vt quadratum ag ad quadratum gh, ita est circulus ex ag diametro, ad circulum ex gh diametro; ergo vt circulus ex ag ad circulum ex gh, ita est excessus quo circulus ex gi superat circulum ex gh, ad ipsum circulum ex gh: ergo circulus ex ag æqualis est excessui quo circulus ex gi superat

2. duodec. Euc.

47. primi Euc.

circulum ex g h. Cum igitur circulus ex e i ſit quadruplus circuli ex g i (habent enim ſe vt quadrata rectarum i e, i g quæ ſunt in ratione quadrupla per corollarium vigeſimæ ſexti elementorum Euclidis) & circulus ex f n quadruplus circuli ex g h; & circulus ex φ ↓ ſit quadruplus circuli ex a g (eſt enim a g ipſi θ u & θ u ipſi φ ↓ æqualis) ob eandem cauſam; excelſus circuli cuius diameter i e ſupra circulum ex diametro f h erit æqualis circulo ex φ ↓ diametro. Si ergo per rectam e ↓ agatur planum parallelum baſibus l r m m z x, cùm ſectiones eiuſmodi plani cum cylindro, ſphæra, & cono ſint circuli quorum diametri e i, f h, φ ↓; ſectio eiuſmodi plani cum cylindro ſuperabit ſectionem eiuſdem cum ſphæra, eo exceſſu qui ſit æqualis ſectioni eiuſdem plani cùm cylindro.

9. quinti Euc.

4. primi ferenì Theodoſij ſphær.

4. primi Conic.

Quoniam ergo hemiſphærij, cuius axis b a, complementum ad cylindrum cuius idem axis b a, ita ſe habet ad conum, cuius axis u y, vt quocunque plano parallelo ad baſes l r m, m z x ſecentur, ſectiones eorum ſint inuicem æquales; complementum ad cylindrum erit æquale cono, & ambo habebunt centrum grauitatis in eodem plano baſibus parallelo, ac proinde & in eadem recta in plano l n ducta æquidiſtante rectæ l m, cum oſtenderimus centrum grauitatis cylindri & coni

11. huius.

esse in axe; complementi autem centrum grauitatis esse in axe sequitur ex eo quod hemisphærij centrum grauitatis esse in axe demonstrauerimus; nam ex duocecima primi æquiponderantium constat centrum residui esse in recta transeunte per centrum totius & vnius ex partibus.

Diuidatur recta b a in octo partes, quarum duæ sint in recta b g; tres in recta a o; & quatuor in recta a p; recta ergo g p continebit duas, & recta p o vnam. Per g ducatur recta g θ parallela rectæ l m, & occurrens axi y u in θ, erit y θ quarta pars rectæ y u, ergo θ est centrum grauitatis coni; ergo g est centrum grauitatis complementi ad cylindrum; sed o est centrum grauitatis hemisphærij ex demonstratis; p verò est centrum grauitatis totius cylindri; ergo vt recta g p ad p o rectam, ita est hemisphærium ad complementum hemisphærij ipsius ad cylindrum cuius axis a b. Cùm igitur recta g p sit dupla rectæ p o, erit hemisphærium duplum complementi siue coni cuius basis m z x. Cylindrus igitur cuius axis a b si diuidatur in tres partes, duas ex illis continebit hemisphærium, & tertiam complementum hemisphærij, siue conus cuius basis m z x, axis y u. Cylindrus igitur cuius axis a c si diuidatur in tres partes, duas ex illis continebit sphæra cuius diameter b c, & tertiam complementum sphęræ ad hęmis-

12. huius. 14. huius.

phærium; ergo cylindrus ſe habet ad ſphæram vt ternarius ad binarium, quod eſt cylindrum eſſe ſphæræ ſeſquialterum.

Poſſet etiam ſine grauitatis centris demonſtrari in hunc modum. Quoniam conus m u x & cylindrus cuius axis b a habent baſes l r m, m z x æquales, & altitudines b a, y u æquales, erit conus cylindri tertia pars; ergo cum complementum hemiſphærij cuius axis b a ſit oſtenſum æquale cono m u x, ipſum complementum erit tertia pars cylindri &c.

10. duo de. Euc.

COROLLARIVM. I.

Ex his apertum eſt hemiſphærium eſſe duplum coni habentis baſim circulum ſphæræ maximum, & altitudinem æqualem ſemidiametro.

COROLLARIVM II.

Ex his quoque demonſtrari poteſt cylindrum eſſe ſeſquialterum ſphæroidis in ipſo contenti, id eſt quod tangat baſes cylindri, & ſectio plani per centrum ducti parallelos baſibus, ſit circulus communis ſphæroidi & cylindro; demonſtratio enim eadem eſt ſi poſito arcu d b π ſemiellipſi, quadratum rectæ φ θ ſit æquale exceſſui quo quadratum g ı ſuperat quadratum g h. Hoc autem ita eſſe oſtenditur. Quoniam

in triangulo m y u lateri m y parallela est φθ, vt recta y u ad θ u, ita erit m y ad φθ: fiat y ξ æqualis rectæ φθ; & per ξ agatur ξλ parallela rectæ y z ordinatim applicatæ ad diametrum m x circuli m z x. Apertum est duo quadrata rectarum ξλ, ξ y esse simul æqualia quadrato semidiametri y λ, siue y m, siue g i; ac proinde cùm ξ y æqualis sit rectæ φθ; si ξλ probetur esse æqualis rectæ g h, quadratum rectæ φθ ostensum fuerit æquale excessui quo quadratum rectæ g i superat quadratum rectæ g h. Ostendo igitur quadratum rectæ ξλ esse æquale quadrato g h. Quoniam vt rectangulum b a c ad rectangulum b g c, ita est quadratum a π ad quadratum g h; & vt rectangulum m y x ad rectangulum m ξ x, ita est quadratum y z seu a π ad quadratum ξλ, cùm ratio rectanguli b a c ad b g c sit eadem quæ rectanguli m y z ad m ξ x; vt quadratum a π ad quadratum g h, ita erit quadratum y z siue a π ad quadratum ξλ: ergo quadratum ξλ est æquale quadrato g h; quod erat ostendendum. Rectangulum autem l a c ad l g c esse vt rectangulum m y x ad m ξ x probatur in hunc modum. Quoniam vt y u ad θ u, ita esse m y ad y ξ seu φθ ostendimus, ergo per conuersionem rationis vt y u ad y θ, ita erit m y ad m ξ, & inuertendo vt y θ ad y u, ita erit m ξ ad m y: sed vt y u

4. sextæ in corollar.

47. primi Euc.

21. primi Cõ.

ad $y\beta$, ita eſt my ad mx, ergo ex æquo vt $y\theta$ ad $y\beta$, ita $m\xi$ ad mx; & diuidendo vt $y\theta$ ad $\theta\beta$, ſiue vt bg ad gc, ita $m\xi$ ad ξx: ergo rectangulum bgc eſt ſimile rectangulo $m\xi x$; ergo rectangula ipſa ſe habent vt quadrata rectarum bg, $m\xi$. Rurſus quoniam ut bg ad bc, ita oſtenſum eſt eſſe $m\xi$ ad mx, & vt bg ad ba ſemiſſem, ita eſt mx ad my ſemiſſem, erit ex æquo vt bg ad ba, ita $m\xi$ ad my, & alternando vt bg ad $m\xi$, ita ba ad my: cùm igitur rectangula bac, $my\xi$ ſe habeant vt quadrata rectarum ba, my: & vt quadrata ba, my, ita ſint quadrata bg, $m\xi$; & vt quadrata bg, $m\xi$ ita ſint rectangula bgc, $m\xi x$; erit vt rectangulum bgc ad rectangulum $m\xi x$, ita rectangulum bac ad rectangulum myx, & alternando vt rectangulum bgc ad bac, ita $m\xi x$ ad myx quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM III.

Ex his apertum eſt ſemiconoides cuius axis ba eſſe duplum coni habentis baſim æqualem circulo cuius diameter $d\pi$, altitudo vero ſit æqualis ipſi ba. Atque hoc pacto demonſtrata manent quæ Archimedes oſtendit in libro primo de ſphæra & cylindro propoſitione trigeſima ſecunda &

libro de sphęroidibus & conoidibus propositione vigesima nona.

COROLLARIVM. IV.

Prętera ex corollario secundo propositionis decimæ quartæ huius apertum est, si solidum inclusum non sit sphęra sed homœosphæricum, sectioque facta à plano d a t non sit circulus, sed quæuis alia figura, cui æqualis & similiter posita sit basis b r m solidi continentis, quod *cylindroides* appelletur, eandem esse vim præsentis demonstrationis.

COROLLARIVM V.

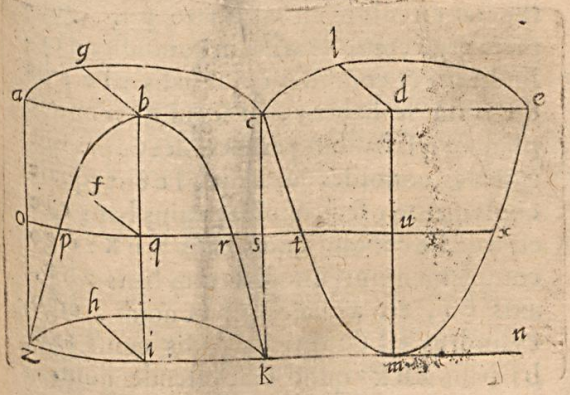
Denique ex præsentis demonstrationis progressu liquidò constat omnem conum vel homœoconum esse tertiam partem cylindri aut cylindracei, habentis cum illo eandem basim & altitudinem Ostendimus enim cylindrum vel cylindraceũ, cuius axis sit a b, si diuidatur in tres partes, duas ex illis contineri hemisphęrio vel homœosphęrio, & tertiam cono vel homœocono cuius basis m z x, axis y u.

PROPOSITIO XIX.

Cylindrus eſt duplus conoidis parabolici eandem cum ipſo baſim eundemque axem habentis.

Sit parabolæ ſegmentum z b κ, cuius tangens a c, baſis ipſi a c parallela ſit z k; cõpleto parallelogrãmo a c k z, cuius latera a z, c κ ſint diametro b i parallela ſuper recta z k ſtatuatur planum h i k erectum ad planum a k, & in eodem plano h i k, centro i, interuallo i z vel i k, deſcribatur circulus z h k, in cuius plano ex i excitetur i h perpendicularis ad diametrum z k. Manente b i intelligatur circumuolui parabolæ z b k ſegmentum, & deſcribi parabolicum conoides cuius baſis erit baſis z h k, axis b i ex definitione tradita ab Archimede initio libri de conoidibus & ſphęroidibus; intelligatur pariter circa eandem lineam b i manentem circumvolvi parallelogrammum a c k z; deſcribetur cylindrus cuius axis erit b i, baſes oppoſitæ z h k, a g c ex definitione cylindri à ſereno explicata; hunc cylindrus igitur a κ continebit conoides parabolicum z b κ. Dico cylindrum a k eſſe duplum conoidis z b k.

21. primi cõ.



Productis rectis a c, z k, abscindantur æquales c e, k n diametro a c, diuidanturque bifariam per rectam d m ipsi c k parallelam. Intelligatur contrariâ positione descripta parabola c m e, cuius basis c e, vertex m, diameter d m; erunt vt apertum est parabolæ z b k, c m e æquales, cùm ita aptari possint vt sibi congruant. Inter b & i sumatur quodcunque punctum q, & per illud ducatur recta o x parallela rectæ a c, occurrens in p, q, r, s, t, u, x lineis adnotatis; & per o x rectam ducatur planum o q f parallelum basibus. Quoniam excessus quo quadratum o s superat quadratum p r, est quadratum t x, ostendetur vt in præcedenti, circulum ex diametro t x esse æqua- 16. huius.

lem excessui quo circulus ex diametro o s superat circulum ex diametro p r. Quoniam ergo complementum conoidis ad cylindrum, & conoides cuius basis c l e axis d e, ita se habent, vt secta quocunque plano o q f. basibus parallelo, sectiones sint æquales, conoides cui⁹ basis c l e erit æquale cõplemento; sed conoides cuius basis c l e est æquale conoidi cuius basis z h k: ergo complementum conoidis cuius basis z h k, axis b i, est æquale ipsi conoidi, ergo cylindrus est duplus conoidis cuius axis b i basis z h k; quod erat ostendendum.

11. huius.

COROLLARIVM I.

Quoniam cylindrus a k est triplus coni cuius basis z h k, altitudo i b, habet se ad illum vt sex ad duo; & quoniam est duplus conoidis parabolici inclusi, habet se ad illud vt sex ad tria: ergo cùm vt tria ad sex, ita sit conoides parabolicum ad cylindrum; & vt sex ad duo ita sit cylindrus ad conum, erit ex æquo vt tria ad duo, ita conoides parabolicum ad conum; ergo conoides parabolicum est coni sesquialterum; hoc autem demonstrat Archimedes propositione vigesimâ tertiâ libri citati.

10. Euc. duod.

Licebit quoque ex huc vsque ostensis demonstrare parabolicum ad hemisphærium eadem basi & altitutine præditum esse vt tria ad quatuor. Parabolicum enim

præditum

ad cylindrum eadem basi & altitudine præditum est vt tria ad sex, sed cylindrus idem est ad hemisphæriũ vt sex ad quatuor; ergo vt tria ad quatuor; ita ex æquo est parabolicum ad hemisphærium eadem basi & altitudine constans.

COROLLARIVM II.

Ex Corollario propositionis decimæ tertiæ huius liquet eandem esse vim demonstrationis si solidum incluſum non sit conoides parabolicum, sed parabolicoides, basisque h k, non sit circulus sed quæuis alia figura cui æqualis & similiter posita sit basis a g c cylindroidis continentis figuram parabolicoidem.

COROLLARIVM III.

Hinc apertum est complementum z o a g b p ad semicylindrum a g b i h z esse æquale quartæ parti cylindri, vel semissi ipsius semicylindri: ostensum enim est totum complementum esse æquale semicylindro, ergo semissis erit æqualis quartę parti cylindri. Et similiter si b i h sit rectangulum, & non parabola, eiusmodi verò rectangulum ponatur esse sectio solidi, sectio ista erit ad parabolam vt tria ad duo, sicut ex primâ huius satis constat; ergo eiusmodi solidum erit ad parabolicum vt tria ad

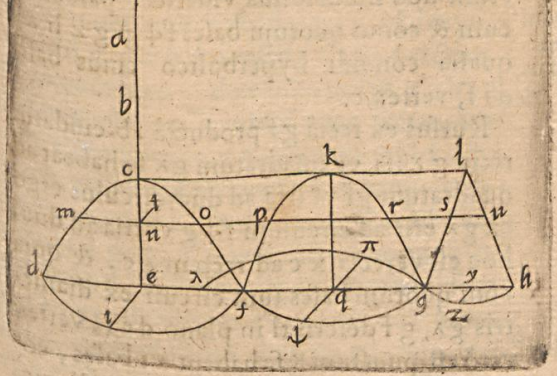
duo, sed parabolicum se habet ad cylindrũ vt duo ad quatuor; ergo ex æquo eiusmodi solidum, cuius sectio sit rectangulum b i h, est ad cylindrum, cuius axis b i, vt tria ad quatuor; ergo complementum eiusmodi solidi parabolicoidis est quarta pars ipsius cylindri, & semissis z o a g b p est quarta pars semicylindri cuius altitudo b i.

Propositio XX.

Sit hyperbolæ segmentum c d, cuius basis d f recta ordinatim ad diametrũ c e applicata, ac proinde parallela tangenti c k; eius centrum sit b; c b, b a, a x sint æquales. Intelligatur manente c e, circumuolui hyperbola d c f, & describi conoides hyperbolicum iuxta definitionem traditam ab Archimede initio libri de conoidibus & sphęroidibus, cuius basis sit circulus d i f; intelligatur præterea describi conus cuius basis sit idem circulus d i f, idemque qui

conoidis vertex c. Ostendēdū est vt recta x e est ad rectam a e, ita esse conoides descriptum ad conum inclusum.

Istud demonstrat Archimedes propositione vigesima septimâ libri citati; nos in hunc modum ostendimus. Ex rectâ d f productâ abscindantur f g, g h quarum illa æquet basim parabolæ, ista dupla sit basis trianguli, quas *partes hyperbolæ* appellauimus in decimâ septimâ huius; parabola verò ipsa sit f κ g cuius diameter k q, vertex *k*; triangulum autem sit l g h. In plano basis d i f per rectam d h ducto, ex centro



q per f & g, deſcribatur circulus f↓g; & ex centro y per g & h circulus g z h. Manente diametro κ q intelligatur circumagi parabola f k g & deſcribi conoides parabolicum cuius baſis f↓g, vertex k, axis k q. Similiter intelligatur deſcribi conus cuius vertex l baſis g z h. Præterea ſumpto quocumque puncto n inter c & e, atque per illud ductâ rectâ m u æquidiſtãte rectæ d h, intelligantur ſecari tria ſolida per planum m n t æquidiſtans plano baſium d i f, f↓g, g z h. Quoniam duo quadrata rectarum p r, ſ u ſunt ex demonſtratis æqualia ſimul quadrato rectæ m o; duo etiam circuli ex diametris p r, ſ u erunt æquales ſimul circulo ex diametro m o (id enim perinde oſtendetur ac in decimâ quintâ huius) cùm igitur circuli ex diametris m o, p r, ſ u ſint ſectiones plano m n t & ſolidis communes, erunt duo ſimul ſolida videlicet parabolicum & conus quorum baſes f↓g, g z h æqualia conoidi hyperbolico cuius baſis d i f, vertex c.

17. huius.

12. de conid. & ſphæroid.

4 primi Conic.

23. huius. 17. huius.

Rurſus ex rectâ g f productâ abſcindatur recta g λ ita vt quadratum g λ ſe habeat ad quadratum g f vt tria ad duo; circulus ergo ex g λ erit ad circulum f↓g vt tria ad duo, hoc eſt vt recta x c ad rectam a c, & quia coni quorum baſes ſunt circuli ex diametris g λ, g f deſcripti in plano d e i, vertex verò eſt punctum κ ſe habent vt baſes, conus cuius baſis eſt circulus λ π g ex diame-

11. duo dec. Euc.

tro λg erit ad conum cuius basis f↓g vt tria ad duo, siue in proportione sesquialtera; sed in eadem proportione est conoides parabolicum cuius basis f↓g, axis kq, ad conum cuius basis f↓g, vertex κ ex corollario primo præcedentis, ergo conoides parabolicum est æquale cono cuius basis est circulus λπg. Cùm ergo coni quorum bases λπg, gzh habeant eundem verticem k, erunt inter se vt bases. Quoniã ergo vt basis λπg ad basim f↓g, ita ostensum est esse rectam xc ad rectam ac, & vt basis f↓g ad basim gzh, ita est recta ac ad ce rectam; ergo ex æquo vt basis λπg ad basim gzh, ita recta xc ad rectam ce: & componendo vt duæ simul bases λπg, gzh ad basim gzh, ita recta xe ad ce. Rursus vt basis f↓g ad gzh, ita recta ca, ad ce; ergo cõponendo vt duæ simul f↓g, gzh bases, ad basim gzh, ita ae recta ad ce; & inuertendo vt basis gzh ad duas simul f↓g, gzh, ita recta ce ad ae rectam. Quoniam ergo vt duæ simul λπg, gzh ad basim gzh ita esse ostendimus rectam xe ad ce, & vt basis gzh ad duas simul f↓g, gzh, ita est ce recta ad ae rectam; ergo ex æquo vt duæ simul λπg, gzh ad duas simul f↓g, gzh, ita est recta xe ad ae: sed basis dif est æqualis duabus simul f↓g, gzh, vt ostendimus; ergo vt duæ simul λπg, gzh ad basim dif ita est recta xe ad ae. Quoniam ergo vt bases prædictæ ita

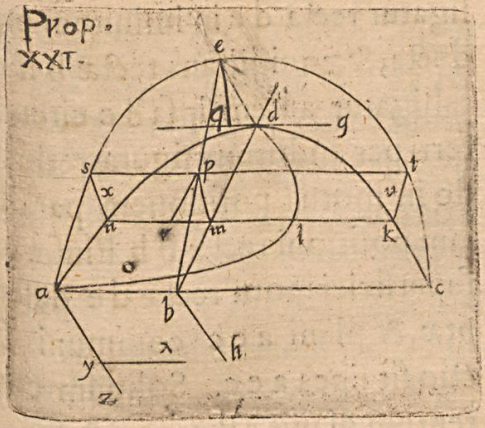
17. huius.

11 duodec. huc.

& coni prædicti illis insistentes, erit vt recta x e ad a e rectam, ita duo simul coni insistentes basibus λπg, gzh, ad conum insistentem basi d i f: sed duo simul coni insistentes basibus λπg, gzh sunt simul æquales hyperbolico conoidi cuius basis sit d i f, & vertex c, centrúmque b (nam conus, cuius basis λπg, est æqualis parabolico conoidi cuius basis fxg, vt ostendimus, cùm ergo ostensum sit parabolicum conoides vnà cum cono cuius basis est gzh esse æquale hyperbolico conoidi dicto cuius basis est d i f; duo simul coni quorum bases λπg, gzh erunt æquales dicto hyperbolico) ergo vt recta x e ad a e rectam, ita est dictum hyperbolicum conoides ad conum habentem eandem basim d i f communem cum ipso, eundemque verticem c; quod erat probandum.

COROLLARIVM.

Ex corollario secundo decimæ quintæ huius constat eandem esse vim modo allatæ demonstrationis, si solidum cuius basis d i f, & vertex c non sit hyperbolicum conoides, sed hyperbolicoides, basisque d i f non sit circulus, sed quęuis alia figura, quæ etiam sit basis homoeoconici habentis verticem c.



PROPOSITIO XXI.

Plana a d c, a e c secent se secundum lineam a c; in quorum vno a d c sit quæuis figura a d c, cuius vnum latus sit recta a c; eam verò figuram contineant totam rectæ a c, d g inuicem æquidistantes. Per lineam a b actum sit planum a b h rectum ad planũ a d c, & per b quodcunque punctum lineæ a c in eodem plano a b h acta sit linea b h incidens vtcunque in

rectam a c; per d verò acta intelligatur recta d e in infinitum producta, & æquidiſtans rectæ b h, intelligatur autem ipſa d e circumferri per ambitum figuræ retinendo in motu poſitionem parallelam poſitioni rectæ b h. Eiuſmodi ſuperficiei motu rectæ d e deſcriptæ, & plani a e c communis ſectio ſit linea a e c. Solidum contentum planis a d c, a e c & ſuperficie motu rectæ d e deſcriptâ appello *cuneatum*; portionem ſuperficiei latione rectæ d e deſcriptæ appello baſim cuneati ſolidi; figuras a d c, a e c voco eius lateraí rectam a c eius aciem. Ducto verò per rectam d e & per b quodlibet punctum rectæ a c plano e d b ſecante latera cuneati ſecundum rectas e b, d b; triangulum e d b appelletur triangulum notum cuius baſis e d; & in plano e d g ex e de-

missa sit in rectam d g perpẽdicularis e q, quam voco altitudinem *notam*. Parallelas tangenti d g, vel aciei a c nomino ordinatim applicatas. Rursus intelligatur descripta quadratrix d l o a ita vt ductâ quacunque n k ordinatim applicatâ secante in m latus b d trianguli noti & quadratricem in l, sicut b d latus noti triãguli ad b m, ita sit ordinatim applicata n k, ad l k. Quadratarium spatium appelletur illud quod intercipitur quadratrice d l o, rectâ a c & ambitu d k c figuræ a d c. *his ita positis sequitur theorema, quod demonstrandum suscipimus.*

Solidum cuneatum est æquale parallelepipedo cuius basis ęqualis spatio quadratario, & altitudo sit æqualis altitudini notæ.

Per m in triangulo b e d agatur m p parallela basi e d; erit ergo vt b d ad b m, ita e d ad m p; sed vt b d ad b m, ita ex gene- 4. sexti in coroll.

ratione quadratricis est n k ad k l; ergo vt e d ad m p, ita est n k ad l k, ergo rectangulũ sub extremis e d, l k est æquale rectangulo sub mediis m p, n k. Rursus quoniam duæ rectæ n m, m p tangunt se in m, & sunt parallelæ duabus, a b, b h, tangẽtibus se in b, erunt plana n m p, a b h parallela. Planũ n m p faciat in plano a e c sectionem s t quæ erit recta linea, & si per n & k agantur rectę n x, k u parallelæ ad rectam m p seu d e, erunt rectæ n x, k u in basi cuneatę figuræ, vt ex generatione ipsius basis apertum est; ergo erunt sectiones ipsius plani n m p & basis solidi cuneati: ergo rectæ n x, k u concurrent cum rectâ s t in punctis s, t. Rursus quoniam plana a b h, n m p parallela secantur plano a e c faciente sectiones s t, a c, erunt rectæ s t, a c parallelæ: similiter quoniam plana eadem a b h, n m p secantur plano a d c faciente sectiones n k, a c, erunt rectæ n k, a c parallelæ; ergo cùm rectæ s t, n x sint parallelæ eidem a c, erunt inter se parallelæ: figura ergo n k t s est parallelogramma, cùm eius opposita latera sint parallela ut ostensum est.

15. vndec. Euc. 3. Eiusdem. 16. vndec. Euc. 9. eiusdem.

Rursus in parallelogrammo n k t s ex puncto p demittatur in rectam m n perpendicularis p r: quoniam anguli p m r, e d q sunt æquales, item anguli e q d, p r m erit triangulum d e q simile triãgulo m p r: ergo vt d e ad e q, ita m p ad p r. Quoniam ergo rectangulum sub l k basi & altitudine e d se habet ad rectangulum sub eadem ba-

ſi l κ, & altitudine e q, vt recta e d ad e q; & vt recta e d ad e q, hoc eſt vt recta m p ad p r, ita eſt rectangulum ſub baſi n k & altitudine m p ad rectangulum ſub eadem baſi n k & altitudine p r: vt rectangulum ſub l k, e d ad rectangulum ſub l k, e q, ita erit rectangulum ſub n k, m p, ad rectangulum ſub n k, p r: ergo alternando vt rectangulum ſub l k, e d ad rectangulum ſub n κ, m p, cui eſt æquale ex demonſtratis, ita erit rectangulum ſub l k, e q ad rectangulum ſub n k, p r: ergo rectangulo ſub l k, e q æquale eſt rectangulum ſub n κ, p r.

Ex a ad planum a d c excitetur perpendicularis a z, & in ſitu perpendiculari ſemper permanens intelligatur moueri per ambitũ ſpatij quadratarij, ſcilicet per lineas a l d c a donec ad idem punctũ a reuoluatur. Rectæ e q abſcindatur ex a z recta a y æqualis, & per y agatur planum parallelũ plano a d c, ſectio iſtius plani cum ſuperficie illâ cylindraceâ modo deſcriptâ erit parallela & ſimilis ſimiliterque poſita figuræ quadratarię a l d c; id enim eodem pacto oſtenditur quo in cylindro ſectiones plani paralleli baſi oſtenduntur ſimiles ipſi baſi. *Seren. de ſect. cyl. propoſ. 5.*

Quoniam ergo iſtud ſolidum cylindraceum, & cunearum ita ſe habent vt quocunque plano n m p ſecentur ſectiones eorum ſint æquales (ſectio enim cylindracei eſt æqualis rectangulo ſub a y vel e q & ſub l k contento; ſectio autem cuneati eſt

parallelogrammum ſ n k t, quod eſſe æquale rectangulo ſub a y vel e q & ſub l k contento oſtendimus) erunt ipſa ſolida æqualia per vndecimam huius; ſed per eandem cylindraceum cuius altitudo a y, & baſis a l d c eſt æquale parallelepipedo cuius altitudo eadem a y, baſis autem ſit quadratum æquale baſi a l d c: ergo ſolidum cuneatum eſt æquale parallelepipedo cuius baſis ſit æqualis quadratario ſpatio, & altitudo ſit æqualis altitudini notæ; quod erat demonſtrandum.

11. huius.

COROLLARIVM I.

Quòd ſi planum a b h non ſit rectum ad planum a d c, pauculis mutatis oſtendi poterit ſolidum cuneatum eſſe æquale parallelepipedo cuius baſis æqualis ſit ſpatio quadratario, & altitudo, ſit æqualis altitudini ex puncto e ad planum a d c demiſſæ, quæ *nota* perinde dicatur.

COROLLARIVM II.

Si brachium quadratarij ſpatij non ponatur æquale rectæ b d, ſed cuiuis b m ex ipsâ productâ abſciſſæ, ſiue ipſa b m ſit maior, ſiue minor, tunc altitudo nota erit aut m p recta intercepta inter rectas b e, b d productas, & æquidiſtans rectæ e d, aut perpendicularis ex puncto p in rectam b d

demissa; demonstrationis enim vis est eadem prorsus inisto casu vt patebit rem perspicienti.

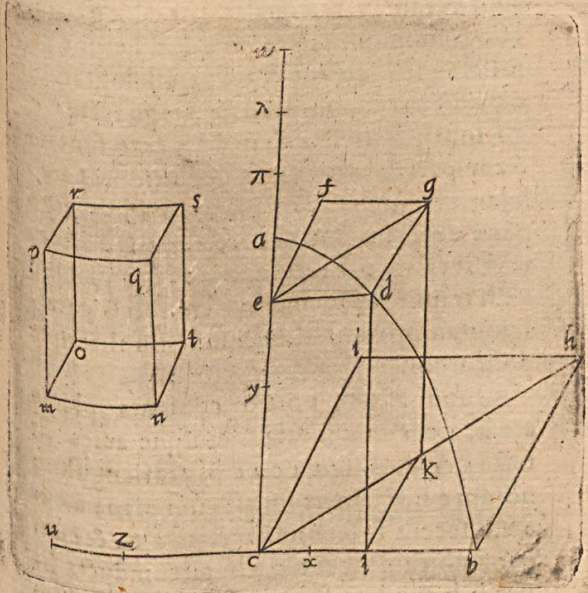
COROLLARIVM III.

Si datum sit parallelepipedum æquale cuneo proposito, & ex trianguli noti latere auferatur recta b m quæ sit ad altitudinem datam parallelepipedi vt est datum latus b d ad datam perpendicularem quæ ex e in lineam b d cadit, apertum quoque est quadratarium spatium respondens brachio æquanti rectam b m esse æquale basi parallelepipedi dati.

PROPOSITIO XXII.

Super quacunque rectâ c b constructâ qualibet planâ figura c a d b, intelligatur planum c b h erectum ad planum c a b, illudque secans secundum rectam c b; in eo verò concipiatur quoduis parallelogrammum c b h i, cuius vnum latus sit recta c b, & ita super qua-

cunque aliâ e d ipsi c b æquidistante, constructum intelligatur parallelogrammum e d g f simile, similiter positum, & parallelum patallelogrammo c b h i. Intelligatur denique solidum super basi c a d b cuius omnes sectiones cum plano sectioni c b h i æquidistanti sint similes parallelogrammo c b h i, similiterque illi positæ. Ostendendum est iunctâ c h rectâ, planum a c h transire per diametros eiusmodi parallelogrammorum, & diuidere solidum in duas portiones, æquales quarum vna est cuneata habens latus figuram c a d b, & triangulum notum c h b.



Per d agatur d l parallela rectæ e c; & per rectas g d, d l agatur planum cuius cum triangulo c h b communis sectio sit recta l κ. Quoniam in plana parallela e d g, c b h incidit planum g d l, sectiones d g, l κ erũt parallelæ. Rursus quoniam rectæ e d, d g tãgentes se in d sunt parallelæ rectis c l, l k tãgentibus se in l, anguli e d g, c l k erunt æquales. Cùm ergo triangula e d g, c l k habeant angulos ad e, d, c, l æquales, erũt similia, atque vt e d ad d g, ita c l ad l k; cùm ergo d e, c l sint æquales, erunt d g, l κ æquales; quoniam ergo rectæ d g, l k

16. vndec. Euc.

10. vndec. Euc.

ſunt parallelæ & æquales, erit d l k g parallelogrammum, lateraque g k, d l erunt parallela; ſed latera e c, d l parallelogrammi e c l d ſunt etiam parallela, ergo rectę e c, g k ſunt parallelæ eidem d l; ergo ſunt inter ſe parallelæ; ergo ex definitione parallelarum ſunt in eodem plano; planum ergo per c e rectam, & per rectam c k ductum tranſit etiam per rectam e g: ergo planum a c h tranſit per diametros eiuſmodi patallelogrammorum ſimilium ſimiliterque poſitorum.

33. primi Euc. 9. vndec. Euc.

Quod autem portio contenta planis a c h, a c b ſit cuneata, eiuſque acies ſit recta a c, latus figura c a d b, & triangulum notum c h b; apertum eſt cùm plana a c b a c h ſecent ſe ſecundū rectam a c, & cùm per ambitum figuræ c a b circumducta linea b h eundem ſemper ſitum parallelum retinens, deſcripſiſſe ponatur ſuperficiem, quam ſecat planum a c h, ergo figura contenta figurâ a c b, plano a c h, & ſuperficie prædictâ eſt cuneata quam deſcripſimus in præcedenti propoſitione, eiuſque acies eſt recta a c, latus figura c a b, & triangulum *notum* c b h.

Denique alteram portionem eiuſmodi ſolidi eſſe æqualem portioni cuneatæ ita oſtenditur. Quoniam duæ iſtæ portiones ita ſecantur per plana, quæ ſint parallela plano c b h, vt ipſæ ſectiones ſint æquales (ſunt enim ſingulæ dimidium parallelogrammi

34. primi Euc.

grammñ bifariam diuisi à diametro per quã planum a c b incedit) ergo ipsæ portiones sunt æquales ; quod erat demonstrandum. 11. huius.

PROPOSITIO XXIII.

Iisdem manentibus sint c b , b h æquales, sit item a c recta, & perpendicularis ad planum c b h, qua manente circumuoluatur figura a c b donec redeat eò vnde incipit moueri ; descriptum erit solidum cuius basis circulus ex semidiametro c b ; recta a c vocetur axis eiusmodi solidi quod perisphericum dicatur. Ponatur recta c b esse maxima parallelarum in figurâ a c b ductarum & esse libra sustinens figuram c b a. Sit quadratum m n t o æquale octuplo spatii quod libra ex c suspẽsâ brachio c u ipsi c b æquali, pendens ex u æquiponderat figuræ c b a vt iacet manenti; & ipsum m n t o sit

basis parallelepipedi cuius altitudo sit æqualis ipsi c b. Ostendendum est vt quadratum rectæ u b ad quadratum m n t o ita esse cylindrum contentum intra cubum cuius latus sit quadratum ex rectâ u b genitum ad duplum peripherici descripti; vel ita esse dimidium cylindri eiusmodi ad descriptum periphericum.

Quoniam ex centro c manente, linea c b circũuoluta ponitur in plano ad quod recta a c est perpẽdicularis, illud autem est planũ c b h i, descriptus circulus transibit per b & i, & similiter descriptus circulus à lineâ e d puncto e manente transibit per d & f, eademque est ratio de quacunque aliâ parallelâ rectæ c b, describente circulum ex centro posito in axe a c; quoniam verò angulus i c b est rectus, arcus i b, d f & alij omnes concluſi planis a c b, a c i erunt quadrantes circuli. Præterea quoniam quadrantes eiusmodi continentur intra quadrata c h, e g, & quadrata c h, e g, sunt quarta pars quadratorum continentium circulos quorum semidiametri sunt c b, e d: si intelligatur solidum cuius sectiones sint eiusmodi quadrata, solidum istud à quo pe-

riphericum continebitur, erit ad solidum periphericum contentum, vt quadratum ad circulum ex diametro quæ sit lateri quadrati æqualis: eiusmodi autem solidũ continens constabit octo solidis quorum singula erunt æqualia cuneatæ figuræ cuius acies a c, triangulum notum c h b, latus a d b c. Nam ex præcedenti solidum, cuius basis sit quadratum c b h i, æquale est duobus solidis quorum vnumquodque æquale est cuneatæ figuræ prædictæ: ergo solidũ cuius basis sit quadratum diuisum in quatuor quadrantes quorum vnus sit quadratũ c b h i, æquale erit octo eiusmodi cuneatis figuris. 17. huius.

Quoniam ergo parallelepipedi m s basis m o t n est ex constructione æqualis octuplo quadratarij spatij cuneatæ figuræ prædictæ, & altitudo est æqualis ipsi c b, erit prædictum parallelepipedum æquale octo cuneatis figuris eiusmodi ex demonstratis; ergo erit æquale solido continenti periphericum.

Rursus quoniam cubus ex rectâ u b genitus est ad cylindrum ipso cubo contentũ, vt quadratum ad circulum inscriptum, & ita etiam est solidum continens ad contentum periphericum; cùm continens sit æquale parallelepipedo m s; vt cubus ex recta u b ad cylindrum contentum, ita erit solidum a h ad periphericum; & alternando vt cubus ex rectâ u b ad solidum a h,

ita erit cylindrus cubo contentus ad peri-
phericum cuius baſis ſit circulus æqualis
21. huius. baſi cylindri.

Quoniam ergo parallelepipedum m ſ habet altitudinem æqualem rectæ c b, parallelepipedum ipſius duplum retentâ eadem baſi m o t n, habebit altitudinem æqualem rectæ u b; ergo habebit altitudinem parem altitudini cubi ex rectâ u b; ergo cùm duplum parallelepipedi m ſ & cubus ex rectâ u b habeant æquales altitudines,
37. vndec. Euc. erunt in ratione baſium, videlicet quadratorum ex rectis u b, m n: ergo cylindrus cubo genito ex recta u b contentus eſt ad duplum peripherici cuius axis a c, baſis verò circulus ex ſemidiametro c b, vt eſt quadratum ex u b ad quadratum m n; ſiue in duplicatâ vel (vt alij loquuntur eodem ſenſu) in duplâ ratione rectarum u b, m n, quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Quamuis c b quæ ponitur eſſe parallelarum maxima non terminaret figuram, ſed eſſet intra ipſam, eadem eſſet vis demonſtrationis, dummodo quadratum m n t o ponatur octuplum eius ſpatij quod libra u b ſuſpensâ ex c & ſuſtinente totam figuram quam ſecare ponitur, æquiponderat toti figuræ, & non tantum vni eius parti.

COROLLARIVM I.

Eadem esset demonstratio si periphericum descriptum esset circa axem a c, quamuis c b recta non esset perpendicularis ad axem a c, dummodo recta c b & omnes ei parallelæ intra figuram c a d b ductæ ita intelligantur moueri dum periphericum describitur, vt in motu vni eidem rectæ immotæ maneant parallelæ, iuxta dicta in Scholio propositionis libri huius duodecimæ.

COROLLARIVM II.

Præsens theorema planam viam facit ad plurima problemata abstrusa pariter & vtilia. Cernere istud licet si linea a d b fit sectio conica, & a c diamerer; si semi vel triangulum per a c axem coni sit figura a d b c. Primò quidem demonstratur proportio continentis cylindri ad contentum conicum, parabolicum, hyperbolicum & sphæricum. Quoniam enim si figura a c b d sit semi-triangulum per axem coni, librâ u b ex c suspensâ spatium quod ex u pendens æquiponderat triangulo a c d b vt iacet manenti est tertia pars trianguli a c b, octuplum illius æquiponderantis, erit octo tertiæ partes trianguli a c b; vt ergo octo trientes trianguli a c b ad quadratum rectæ

6. quadrat. parab.

c b, ita eſt duplum coni ad cubum ex rectâ u b; quod omnino conforme eſt demonſtratis ab Euclide. Nam ſi a c b ſit triangulũ rectangulum cuius duo latera a c, c b continentia angulum rectum ſint æqualia; æquiponderans erit vna ſexta pars quadrati quod poteſt c b, cum ſit vna tertia trianguli a c b quod eſt dimidium eiuſmodi quadrati; octuplum æquiponderantis continebit octo ſextas quadrati c b, hoc eſt quatuor tertias: ſed quadratum u b, cùm ſit quadruplum quadrati c b, continet duodecim tertias ipſius quadrati c b; ergo duplum iſtius coni ſe habet ad cylindrum cubo ex u b contentum, id eſt cuius baſis ſit ex diametro u b, & altitudo ſit ipſi u b æqualis, vt quatuor tertiæ quadrati c b, ad duodecim tertias eiuſdem quadrati, hoc eſt vt quatuor ad duodecim; vel vt vnum ad tria; ergo iſte conus eſt ad cylindrum, cuius baſis ſit circuſus ex diametro u b, altitudo a c ipſius u b ſemiſſis, vt vnum ad tria, quod conſonat Euclideæ demonſtrationi. Quamuis triangulum a c b non haberet latera circa angulum rectum æqualia oſtenderetur tamen par cõſonantia cum Euclideâ demonſtratione; ſed longum magis id foret quàm neceſſarium.

12. duo dec. Euc.

Rurſus figura a c b d ſit quadrans circuli. Quoniam illi vt iacet manenti æquiponderat vna tertia quadrati ex c b geniti; octuplum æquipenderantis erunt octo

trientes eiusdem quadrati c b; sed quadratum ex u b continet duodecim trientes eiusdem quadrati; ergo cylindrus cubo ex u b coutentus se habet ad duplum sphærici cuius basis sit circulus maximus ex diametro u b genitus, vt octo trientes ad duodecim trientes, siue vt octo ad duodecim, aut vt duo ad tria. Ergo eum cylindrus cuius eadem basis ex diametro u b genita, & altitudo a c vel c b semissis altitudinis cylindri cubo inclusi, sit semissis cylindri cubo inclusi; vt est cylindrus cubo inclusus ad duplum sphærici, ita erit semissis eiusdem cylindri; hoc est cylindrus cuius altitudo c a, ad sphæricum cuius semidiameter c a: ergo eiusmodi cylindrus cuius altitudo c a est ad sphæricum eadem basi & altitudine præditum vt tria ad duo; quod ad amussim congruit ijs quæ demonstrauit Archimedes, sicuti diximus in hoc libro. 19 tertii huius. 18. huius.

Præterea figura a c b d sit portio parabolæ cuius axis a c, æqualis ipsi ordinatim ad ipsam applicatæ c b, vertex a. Quoniam illius centrum grauitatis est in parallelâ per x ducta (si nimirum vt octo ad tria, ita fiat c b recta ad c x) & quoniam a c b parabolæ portio est duæ tertiæ rectanguli a c b; vt octo ad tria, ita erit portio a c b, hoc est duo trientes siue octo duodecimæ rectanguli a c b, quod est quadratum in præsenti hypothesi, ad spatium ex u æquiponderans ipsi portioni libra u b ex c suspenas, hoc est 1. huius in corollario quarto.

ad tres duodecimas siue ad quadrantem quadrati eiusdem c b. Octuplum ergo eiusmodi æquiponderantis constat octo quadrantibus quadrati c b, siue duobus quadratis c b; sed quadratum ex u b constat quatuor quadratis ex c b, ergo vt duo quadrata c b, ad quatuor eiusmodi quadrata, ita est duplum parabolici ad cylindrum contentum cubo genito ex u b: sed cylindrus habens basim eandem cum contento, & altitudinem a c est semissis (vt modo ostendimus) cylindri contenti cubo; ergo cylindrus cuius basis sit circulus ex u b genitus, altitudo c a, est ad parabolicum eadem altitudine & basi præditum vt quatuor ad duo; hoc est in ratione duplâ quod aptissimè quadrat ad demonstrata in hoc libro, & aliàs ab Archimede.

13. huius.

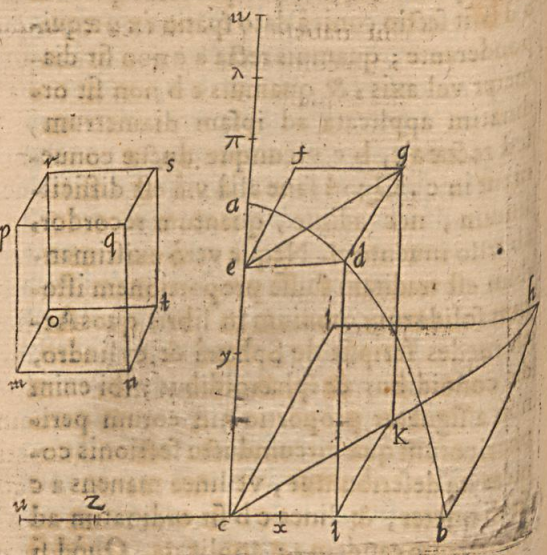
Eadem concordia posset ostendi si figurâ a c d b poneretur esse hyperbola cuius diameter a c, ordinatim ad ipsam applicata c b, vertex a; si nimirum ex methodo prioris libri inueniretur spatium rectilineum, quod libra u b ex c suspensâ æquiponderet hyperbolæ a c d b vt iacet manenti; sed istud fusiùs persequi non est operæ pretium.

17. tertii huius.

COROLLARIVM III.

Prætermittere tamen nolim ex isto Theoremate posse determinari proportio-

nem, quam habent peripherica quorum a d b sit sectio conicâ dato spatio ex u æquiponderante; quamuis recta a c non sit diameter vel axis, & quamuis c b non sit ordinatim applicata ad ipsam diametrum; sed rectæ a c, b c vtcunque ductæ conueniant in c. Quod sane aliâ viâ est difficillimum, nec adhuc, quantum recordor, ab vllo inuentum. Neque verò existimandum est traditam fuisse proportionem istorum solidorum omnium in libris quos Archimedes scripsit de Sphærâ & cylindro, de conoidibus & sphæroidibus; ibi enim non assignatur proportio nisi eorum peripherico rum quæ circumductu sectionis conicæ ita describuntur, vt linea manens a c sit diameter, & linea c b sit ordinatim ad diametrum eandem a c applicata. Quòd si a c non sit diameter (& quidem transuersa in hyperbola) vel si sit diameter, c b tamen non sit ordinatim ad ipsam applicata (prout contingit in casibus innumeris) Archimedei isti libri non tradunt eiusmodi proportionem, quæ longè remotissima est à principijs & inuentis ipsius. Ex quibus liquidò constat quantæ vilitatis sit libra commodè tractata, quantumque iuuet inuenisse spatia æquiponderantia istis sectionibus conicis, cùm solida eiusmodi plurima occurrant vel in vasis, vel in concamerationibus, alijsque partibus vel ornamentis ædificiorum.



Atque vt hactenus demonstratis vtamur tantùm, cùm ostenderimus spatium quod si diameter transuersa hyperbolę ponatur esse libra suspensa ex centro æquiponderat portioni datæ sectionis istiusmodi; inde determinare licebit proportionem cylindri, cum solido peripherico cuius recta manens, dum motu hyperbolæ describitur, sit diameter recta, siue directa transuersæ coniugata; linea autem describens circulum sit ordinatim applicata ad eiusmodi diametrum, vel quæuis alia non ordinatim applicata ad ipsam. Eiusmodi porro solidum habet figuram salini vulga-

ris xyſtroidem, ideſt eius caua foris ſpectant, conuexa internè vergunt: vnde non malè vocetur hyperbolicum xyſtroides. Si igitur (vt iſtud in exemplo determinem) π ſit centrum hyperbolæ c a b, ſintque απ, πλ, λω æquales; ipſi autem αλ ſit æqualis recta a c, cylindrus cuius baſis ſit circulus ex ſemidiametro πc deſcriptus, & altitudo eadem quæ perpendicularis ex b in a c rectam demiſſa, inuenietur ad parabolicum xyſtroides motu hyperbolæ a d b præſcriptâ iam ratione deſcriptum, eſſe vt viginti ſeptem ad nouemdecim; ego certè rem ita concluſi epilogiſmo bis aut ter repetito, quamuis non diffiteor potuiſſe me in tam lubrica computandi via incautum nec aduertentem labi.

Præterea quoniam ibidem oſtendimus ſpatium æquiponderans figuræ a c b d quando a c eſt diameter circuli vel ellipſeos, quamuis recta c b non ſit ordinatim applicata ad diametrum a c, determinari etiam poterit proportio eiuſmodi ſolidorum periphericorum, deſcriptorum linea a c manente, & recta c b deſcribente circulum.

Denique quoniam ſi a d b ſit parabola quomodocumque ſe habeant rectæ a c, c b, ſiue punctum c ſit ad caua lineæ a d b ſiue ad conuexa, inuenitur ex quadratura paraboles Archimedea rectilineum quod ex u pendens ipſi figuræ a d b c vt iacet ma-

nenti æquiponderat, aſſignari poterit proportio innumerorum eiuſmodi periphericorum ex parabolæ circumuolutione natorum, ad quam ſi clauſo iſto tramite tentes ire, mirum eſt ſi aliud inueneris, præter dumeta & ſentes denſiſſimas quæ te cæco inextricabilique errore impediant.

Lubet exempli cauſa determinare proportionem peripherici quod alterum parabolicum rectè appelles. Recta ac immota manens in diſcriptione iſtius parabolici ſit ordinatim applicata ad diametrum b c ipſi a c æqualem parabolæ a d b, cuius vertex ſit b. Vt quinque ad duo ita fiat recta b c ad c x; in recta per x ducta parallelcos rectæ c a erit centrum grauitatis figuræ planæ c a d b. Quoniam libra u b ex c ſuſpenſa & ſuſtinente figuram c a b, ſpatium quod ex u pendens æquiponderat ipſi figuræ vt iacet manenti, ſe habet ad ſpatium figuræ vt recta c x ad c u, hoc eſt vt duo ad quinque; plana verò figura a c b d eſt duæ tertiæ rectanguli a c b (vt antea diximus, & conſtat ex primæ huius libri corollario quarto) & vt qninque ad duo ita ſunt duo trientes ſiue decem decimæ quintæ ad quatuor decimas; æquiponderans ergo erit quatuor decimæ quintæ; & octuplum illius triginta duæ decimæ quintæ quadrati c b ſeu rectanguli a c b: ſed quadratum ex u b, cùm ſit quadruplum quadrati c b continet ſexaginta decimas quintas eiuſdem quadrati

8. ſecũdi æquip.

6. quadrat. patab.

c b: ergo vt triginta duæ decimæ quintæ quadrati b c ad sexaginta decimas quintas eiusdem quadrati, ita est duplum parabolici alterius ad cylindrum contentum cubo: ergo cum cylindri eiusmodi semissis sit cylindrus cuius basis est circulus ex diametro u b & altitudo a c seu c b; erit parabolicum alterum habens eandem basim & altitudinem ad cylindrum ipsum vt sexdecim ad triginta. Quoniam verò vt ostendimus, in corollario præcedenti parabolicum vulgare, quod conoides rectangulum nominat Archimedes, eadem basi eademque altitudine præditum se habet ad eundem cylindrum vt vnum ad duo; hoc est vt quindecim ad triginta; erit vt quindecim ad triginta; ita parabolicum vulgare ad cylindrum, & vt triginta ad sexdecim ita cylindrus ad parabolicum alterum; ergo ex æquo vt quindecim ad sexdecim, ita parabolicum primum siue vulgare ad parabolicum alterum, quorum singula constant eadem basi eademque altitudine. Quod fortasse mirum videbitur alicui, eandem nimirum figuram planam circumuolui aliquando posse circa diuersas rectas quibus terminatur, ita vt modo maius modo minus spatium figura circumuolutione eiusmodi descripta complectatur.

Quòd si (vt hoc etiam quod propè excidebat non taceam) figura a c d esset tota rectilinea, spatium æquiponderans facilè

obtinebitur, quia quadratrix vel tota erit parabolica, ſi nimirum in ambitu a d b nullum ſit latus rectæ c b parallelum vt ex præcedenti libro conſtat: tota autem quadratrix erit recta ſi c a b ſit figura parallelogramma, & congruet ipſi diametro: erit denique mixta ex parabolicâ & rectâ, prout ambitus a d b fuerit mixtus ex parallelis & ex non parallelis rectæ c a.

COROLLARIVM IV.

Viciſſim ſpatium æquiponderans figuræ c a b librâ u b ſuſpensâ ex c, & ſuſtinente ipſam figuram c a b vt iacet, obtinebitur dato parallelepipedo quod æquale ſit ſolido continenti periphericum cuius axis a c deſcriptum circumuolutione notâ figuræ planæ c a d b. Sit enim baſis parallelepipedi dati ea quæ fit ex quadraro ex z b, & altitudo eius ſit recta c y. Vt c b altitudo quadrati c b h i (quæ eadem eſt cum altitudine parallelepipedi m s cuius baſis m t quæritur) ad altirudinem c y, ita fiat quadratum ex z b latere baſis, ad quadratum m t baſim parallelepipedi quæſiti. Dico quadrati m t octauam partem eſſe ſpatium quadratarium quod figuræ c a b ex u pendens librâ ex c ſuſpenſa æquiponderat. Quoniam enim parallelepipeda quorum baſes ſunt quadrata ex z b & ex m n, & altitudines ſunt c y, m p ſeu c b talia ſunt vt eorum baſes & altitudines reciproce-

tur, ipsa erunt æqualia: quoniam ergo parallelepipedum m s est æquale solido continenti periphericum prædictum, & eius altitudo m p est æqualis lateri quadrati c b h i, octaua pars parallelepipedi m s erit æqualis cuneatę figuræ cuius acies c a, latus c a b, triangulum notum c h b. Ergo per vigesimam primam huius octaua pars quadrati m t est spatium quod ex u pendens libra u b suspensa ex c æquiponderat figuræ c a b vt iacet manenti.

Istud corollarium mirabiles habet vsus. Si enim figura plana c a b sit triangulum, quadratarium spatium continebitur parabolâ, ac proinde hinc quadratur parabola. Sit enim linea a b recta: quadratrix ergo lineaerit parabola, & quoniam u c, c b sunt æquales, recta a b tanget parabolam quadratricem transeuntem per c & b. Quoniam ergo pyramis cuius basis sit quadratum ex u b est tertia pars parallelepipedi cuius eadem basis & altitudo, si c y ponatur tertia pars rectæ c a, parallelepipedum cuius basis sit ex latere u b, altitudo sit c y erit æquale pyramidi dictæ; ergo vt c b recta ad c y, ita est quadratum ex u b ad quadratum ex m n: ergo sicut c b recta est tripla rectæ c y (ponimus enim rectas c b, c a esse æquales) ita quadratum ex u b est triplum quadrati ex m n: ergo octaua pars quadrati ex m n, quæ est æqualis quadratario spatio, est vna vigesima quarta pars

12. tertij huius.

quadrati ex u b; & vna ſexta pars quadrati ex c b, quod eſt quarta pars quadrati ex u b: ſed vna ſexta pars quadrati ex c b, eſt vna tertia pars trianguli a c b quod eſt media pars quadrati ex c b; ergo quadratarium ſpatium quod ex u pendens librâ ex c ſuſpensâ æquiponderat triangulo a c b vt iacet manenti eſt tertia ipſius trianguli pars; quod in libello de quadraturâ parabolę demonſtrandum ſuſcepit Archimedes.

Si autem c a b ſit quadrans circuli cuius centrum c, oſtendetur quadratarium ſpatiũ quadrantis iſtiuſmodi pendens ex u libra ex c ſuſpensâ eſſe æquale vni trienti quadrati ex c b. Sit enim c y ad c a vel c b vt duo ad tria; parallelepipedum ergo cuius baſis ſit quadratum ex u b altitudo c y, erit æquale ſolido cõtinenti peripheriçum ex circumuolutione quadrantis a e b deſcriptum, vt conſtat ex corollario quarto decimę octauæ huius libri; Ergo vt c b recta ad c y, ita eſt quadratum ex u b ad quadratum ex m n; ergo ſicut c b eſt ad c y vt tria ad duo, ita quadratum ex u b eſt ad quadratum ex m n vt tria ad duo: ergo octaua pars quadrati ex m n, quæ eſt æqualis quadratario ſpatio, eſt vna duodecima quadrati ex u b, & vna tertia pars quadrati ex c b, quod eſt quarta quadrati ex u b. Hoc ad vnguem quadrat iis quę demonſtrauimus in tertio libro.

Si autem c a b ſit parabola cuius diame-

ter

ter a c, ordinatim applicata c b, eadem occurret quadratarij ſpatij conuenientia cum eo quod ex decimaoctaua tertij libri inuentum fuerit: quadratarium autem iſtud ſpatium inuenietur vi præſentis methodi ſi adhibeatur corollarium vigeſimæ huius. Exemplo vno iſtud declaremus. Sit vt in tertio corollario poſuimus π centrum hyperbolæ, ſintque a π, π λ, λ ω æquales; ipſi autem a λ ſit æqualis recta a c. Erit ergo recta ω c ad rectam c λ vt quinque ad quatuor; ac proinde ex memorato corollario ſolidum quo continetur peripherici iſtud, erit ad pyramidem eadem baſi & altitudine præditam vt quinque ad quatuor; ſed pyramis iſta eſt ad parallelepipedum eiuſdem baſis & altitudinis vt quatuor ad duodecim; ergo ex æquo vt quinque ad duodecim, ita ſolidum continens, ad parallelepipedum eandem baſim, eandemque altitudinem obtinens. Sit c b ad c a perpendicularis, & ipſi a c æqualis (id enim fieri poteſt ſi recta per l & b ducta figuram determinet) Si ergo recta c b ſeu c a altitudo ſe habeat ad c y altitudinem vt duodecim ad quinque, parallelepipedum ſub altitudine c y & ſub baſi ex u b erit æquale ſolido continenti peripherium; ergo vt c b recta ad c y, ita eſt quadratum ex u b ad quadratum ex m n; hoc eſt vt duodecim ad quinque; ergo octaua pars quadrati ex m n quæ eſt æqualis qua-

20 huius in coroll.

21. Primi Conic.

dratario ſpatio, eſt quinque vigeſimæ quartæ quadrati ex c b: vt facile intelligunt arithmetices periti. Nam c b quadratum eſt quadrans quadrati u b, ac proinde eius nonageſimas ſextas complectitur quatuor ſupra viginti; quadratum verò m t continet quadraginta, & quadratarium quinque; ergo cuiuſmodi quadratum c b complectitur vicenas quaternas, eiuſmodi quinas continet quadratarium. In poſterum ſemiſegmentum iſtud hyperbolæ appellabo *notum*. Simili methodo inuenietur ex xyſtroidis conſideratione quadratarium eſſe æquale duobus trientibus quadrati λ a libra ſuſpenſa ex centro π, directáque diametro verſa in perpendiculum, & brachio ipſam diametrum λ a æquante; ſi autem brachium ponatur ſemidiametro a π æquale, duplicandum erit eiuſmodi quadratarium ex octaua ſecundi libri; & iſtud iterum duplicandum vt habeatur æquiponderans ſiue quadratarium totius ſegmenti ex duplici ſemiſegmento conflati.

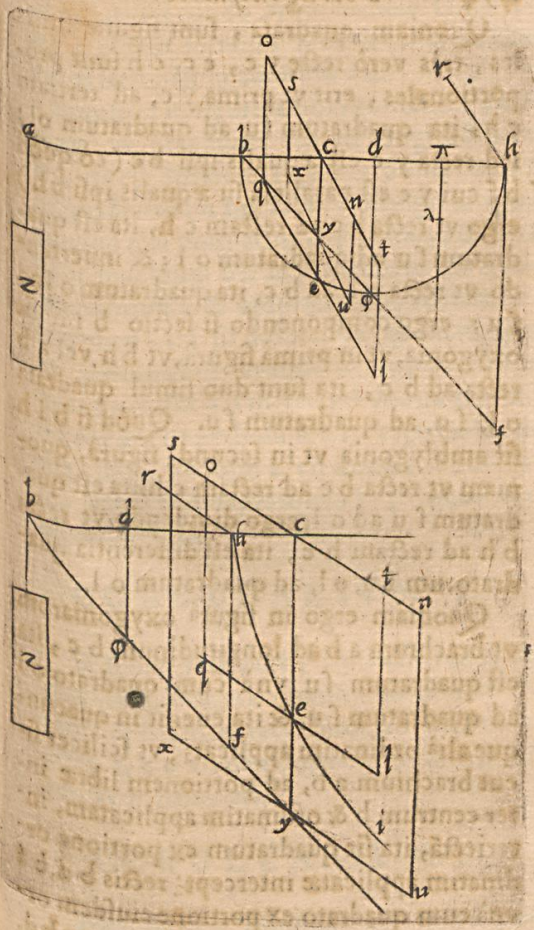
PROPOSITIO XXIV.

Sit Sectio centrica h e, cuius centrum d; diameter b h terminata punctis b & h; linea b f figuram determinet, ſitque angulus

h b f semirectus; recta verò f h tangat sectionem in h; illi ergo æquidistantes erunt ordinatim ad diametrum b h applicatæ. Ducatur vtcunque ordinatim applicata c e, quæ determinanti b f occurrat in y; & ductis per rectas b h, f h planis rectis ad planum h e i secantibus se secundum rectam h r perpendicularem ad planum h e, super rectâ c e intelligatur in plano e c o parallelo ad planum f h r, constructum quadratum o l ita vt latus o n bifariam secetur in puncto c, & latus q l in puncto e. Similiter super rectâ c y intelligatur in eodem plano e c o constructum quadratum s u, ita vt latera s n, x u bifariam secentur in punctis c, y. Denique intelligatur quadratum o l esse communis sectio solidi cuiusdam & plani, e c s; quadratum verò s u esse sectio alterius cu-

32. Primi Conic.

iuſdam ſolidi & eiuſdem plani e c s. Oſtendendũ eſt ſi b e h ſit oxygonia ſectio, vt in primo ſchemate in quo rectæ h b, b a ſunt æquales, & eiuſmodi ſolida ſuſtententur vt iacent à librâ a c, cuius centrum ſit b, & ex a pendeat ſolidum z æquiponderans ambobus ſimul ſolidis; ſolidũ z eſſe æquale ſolido, cuius ſectio eſt quadratum ſu. Item ſi h e i ſit hyperbola, ſiue vt loquitur Archimedes amblygonia ſectio, & eiuſmodi ſolidorum differentia ſuſtineatur vt iacet à librâ a c, cuius centrum ſit h, ſolidum z pendens ex b & æquiponderans prædictæ differentiæ vt iacet manenti eſſe æquale ſolido cuius ſectio eſt quadratum o l.


o
s
r
a
b
c
d
π
h
x
q
n
λ
y
t
e
u
φ
z
l
f
s
o
r
b
d
c
t
n
φ
z
q
e
x
f
l
i
y
u

Quoniam quadrata, ſunt figuræ ſimiles, tres verò rectę y c, e c, c h ſunt proportionales, erit vt prima y c, ad tertiam c h, ita quadratum ſu ad quadratum o l: ſed recta y c eſt æqualis ipſi b c (eò quòd b f cui y c eſt parallela ſit æqualis ipſi b h) ergo vt recta b c ad rectam c h, ita eſt quadratum ſu ad quadratum o l; & inuertendo vt recta c h ad b c, ita quadratum o l ad ſu: ergo componendo ſi ſectio b i h ſit oxygonia, vt in primâ figurâ, vt b h vel a b recta ad b c, ita ſunt duo ſimul quadrata o l, ſu, ad quadratum ſu. Quòd ſi b i h ſit amblygonia vt in ſecundâ figurâ, quoniam vt recta b c ad rectam c h, ita eſt quadratum ſu ad o l; ergo diuidendo vt recta b h ad rectam h c, ita eſt differentia quadratorum ſu, o l, ad quadratum o l.

21 primi conic.
20 ſexti in coroll.
4. ſexti in co. roll.

Quoniam ergo in figurâ oxygoniarum vt brachium a b ad longitudinum b c, ita eſt quadratum ſu vnà cum quadrato o l ad quadratum ſu, & ita euenit in quacunque aliâ ordinatim applicatâ, vt ſcilicet ſicut brachium a b, ad portionem libræ inter centrum b & ordinatim applicatam, interiectâ, ita ſit quadratum ex portione ordinatim applicatæ interceptâ rectis b d, b f vnà cum quadrato ex portione eiuſdem ordinatim applicatæ interceptâ diametro b d, & oxygonia h e b, ad quadratum ex portione interceptâ rectis b d, b f; ergo ex propoſitione ſeptimâ ſecundi libri adiuncto

corollario secundo propositionis sextæ libri eiusdem solidum z est æquale solido cuius sectio est quadratum s u.

Similiter in figurâ amblygoniarum quoniam vt brachium b h ad longitudinem h c, ita est differentia quadratorum s u, o l ad quadratum o l, & idem contingit in quacunque aliâ ordinatim applicatâ, vt scilicet sicut brachium b h ad portionem libræ inter centrum h & ordinatim applicatam interpositæ, ita sit differentia quadratorum ex portionibus ordinatim applicatarum quas diameter b d intercipit vnà cum rectâ b f, & cum hyperbolâ h e i; ergo ex septimâ citatâ, solidum z est æquale solido cuius sectio est quadratum o l, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Si super rectis c e, c y construerentur quæuis aliæ figuræ dummodo similes forent, & similiter secarentur ab iisdem rectis e e, c y vis demonstrationis eadem foret, vt apertum est.

COROLLARIVM II.

Manifestum quoque est præsentem propositionem potuisse, si opus fuisset, extendi ad ipsam parabolam. Si enim in figurâ primâ ponas rectam a b esse æqualem

lateri recto parabolæ cuius vertex b, diameter b c, ordinatim ad ipſam applicata c e; tres rectæ a b, c e, c y ſiue c b erunt proportionales, ergo ſi ſuper c e, c y conſtruantur figuræ ſimiles, vt recta a b prima, ad b c tertiam, ita erit figura ſuper c e conſtructa ad figuram ſuper c y conſtructam, vt ex dictis planum eſt.

COROLLARIVM III.

Hinc etiam patet mira conſonantia principij quo noſtrum iſtud theorema nititur, cum hactenus demonſtratis. Quoniam enim in primâ figurâ centrum grauitatis ſolidi, cuius ſectio eſt quadratum o l (poſſet etiam poni circulus, vel ſemicirculus o l) iacet in plano per d acto, & recto ad planum h b f; eò quod ſolidum cuius b e h eſt ſectio ſit quadrans ſphæræ ſi l o ſit quadrans circuli, vel quadrans homœoſphærici ſi l o ſit quadratum; & quoniam ſolidum cuius baſis eſt quadratũ, vel quadrans circuli ſu, eſt quadrans coni, vel homœoconici; ſi b h diuidatur in π ita vt portio b π ſit tripla portionis π h, in plano per ordinatim applicatam π λ recto ad planum h b f, erit centrum grauitatis eiuſmodi ſolidi, vt in duodecimâ huius demonſtrauimus, & ante nos demonſtrarat aliâ viâ Commandinus. Quoniam ergo ſolidum z ex a pendens æquiponderat duobus ſoli-

dis vt iacent manentibus, ipsum solidum z diuidi poterit in duas portiones quarum vna æquiponderabit solido cuius sectio b e h, altera solido cuius sectio est triangulum b f h: ergo cum spatium quod ex a pendens æquiponderat solido cuius sectio b e h se habeat ad ipsum vt recta b d ad b a, hoc est vt vnum ad duo, est enim b a æqualis ipsi b h ac proinde dupla semidiametri b c, erit illa portio semissis solidi cuius sectio b e h. Alia verò portio quæ æquiponderat solido cuius sectio b f h, erit ad ipsum solidum vt b π ad b a, hoc est vt tria ad quatuor. Rursus quoniam conus cuius basis est circulus ex diametro f h, vel quadrans coni cuius basis est circulus ex semidiametro h f productus, ad conum vel quadrantem coni cuius basim metitur eodem modo recta d φ per d parallela rectæ h f, habet rationem compositam ex lateribus & basibus: cùm basis quam metitur h f, sit quadrupla baseos cuius dimetiens est d φ, & cùm altitudo b h sit dupla altitudinis b d, tres isti numeri octonarius, binarius & vnitas repræsentabunt eiusmodi rationes, nam ratio octonarii ad binarium est quadrupla, ratio autem binarij ad vnitatē est dupla: ergo cōnicum solidum cuius basim metitur h f positâ altitudine b h, est octuplum solidi conici cuius basim metitur d φ positâ altitudine d b. Rursus quoniam recta d φ est æqualis rectæ b c, conus

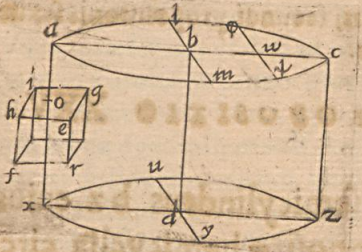
quem metitur recta d φ habens altitudinem b c, eſt ad ſphæricum eadem baſi eademque altitudine præditum, vt duo ad quatuor vt diximus in corollario primo propoſitionis decimæ octauæ huius libri, quod aliunde certum eſt ex demonſtratis ab Archimede; cùm ergo ſolidum conicum cuius ſectio eſt b h f ſit octuplum, vt oſtenſum eſt, coni, quem modo oſtẽdimus eſſe ſemiſſem ſphærici cuius baſis habeat dimetientem d φ, eiuſmodi ſolidum erit quadruplum ſphærici prædicti. Cùm ergo portio æquiponderans ſphærico cuius ſectio b e h ſit æquale, vt oſtenſum eſt, ſphærico cuius baſis habeat dimetientem rectam d φ (eſt enim ſemiſſis totius) & cùm altera portio habeat ſe ad ſolidum cuius ſectio b f h vt tria ad quatuor, ſicut oſtendimus, illa portio continebit tres quadrantes ſolidi cuius ſectio b f h; ſed prior portio continet vnum quadrantem eiuſmodi ſolidi, vt modo oſtendimus, ergo totum z, hoc eſt ambæ ſimul portiones continent quatuor quadrantes ſolidi cuius ſectio b f h; ergo ſpatium z quod æquiponderat duobus ſimul ſphærico & conico ſolidis vt iacent manentibus, eſt æquale ſolido conico; atqui hoc ipſum demonſtratio præſens euicit; ergo eſt omnimoda conuenientia præſentis theorematis cum principiis aliunde certiſſimis. Porro iſtud adnotare libuit, vt ſit demonſtrationis loco, quam fortaſſe aliquis non ita verſatus in

32. primi de Cyl. & ſphæ.

corollariis eliciendis exigat ad fidem citati corollarij secundi propositionis sextæ libri secundi.

Propositio XXV.

Sit semicylindrus b z, cuius bases oppositæ hemicyclia circulorum a l c m, x u z y sint horizonti æquidistantia; axis ad bases perpendicularis b d; planum per axẽ faciat in basibus sectiones a c, x z; ex a pẽdeat spatium semicylindro l m c z y u vt iacet manenti æquiponderãs, librâ ex b suspensâ. Ostendendũ est spatium ita pendẽs esse æquale parallelepipedo cuius basis sit quadratum æquale duabus tertijs quadrati quod potest recta b c, altitudo verò sit b d eadem quæ cylindri.



Sit i g e h quadratum horizonti parallelum æquale beſſi quadrati quod poteſt a b, & de puncto a pendeat ex o centro grauitatis ſuſtentatum; ſuper baſi i g e h conſtructum ſit parallelepipedum rectangulum g f, cuius altitudo ſit eadem quæ b d, totumque vt iacet ſuſtineatur ex puncto o ſuſpenſum, manebit enim vt iacet cum perpendiculum per o tranſeat per centrum grauitatis parallelepipedi vt demonſtrat Commandinus in libro de centro grauitatis ſolidorum. Quoniam ergo quadratum i e vt iacet manens æquiponderat ſemiculo l c m vt iacet manenti, & vt quadratum i e ad ſemicirculum l c m, ita eſt parallelepipedum g f ad ſemicylindrum b z; ſi ponatur ω centrum grauitatis ſemicirculi l c m, vt a b recta ad b ω ita erit ſemicir-

prop. 8.

11. huius.

culus l c m, ad quadratum g h sibi æquiponderans; sed vt semicirculus ad quadratum, ita est semicylindrus ad parallelepipedum; ergo semicylindrus & parallelepipedum sibi æquiponderāt retinentia situm quem habent, quod erat ostendendum. 6. Aut 7. primi æquip.

COROLLARIVM I.

Si quadratum h i g e sit æquale spatio quod æquiponderat circuli segmento cuilibet φ c ⊥, cuius subtensa φ ⊥ æquidistet diametro l m; demonstratio, vt apertum est, erit eadem: eiusmodi autem æquiponderans habebitur ex tertij libri decimâ septimâ; vel certè facilius ex tradendis de libra planâ. Imo quāuis sectio φ c ⊥ foret portio hyperbolæ, cuius diameter a c, centrum b, dummodo ex b fieret suspensio, robur demonstrationis vigeret idem prorsus, vt manifestum est.

COROLLARIVM II.

Quamuis cylindri axis non esset perpendicularis ad basim, modo tamen ipse axis fiat perpendiculum libræ, eadem est demonstratio nisi quod tunc basis non est parallela horizonti, sed planum illud per b ductum, ad quod axis est perpendicularis, & ex quo debet intelligi pendere semicylindrus: altitudo autem non est d b, sed

perpendicularis ex d in planum l c m demiſſa.

COROLLARIVM. III.

Quoniam in decimâ nonâ tertij libri oſtendimus quadratum h g, quod ſemidiametro b c diuisâ in ω bifariam, & per ω ductâ φ ↓ æquidiſtante ipſi l m æquiponderat ſegmento φ c ↓, eſſe æquale rectangulo ſub φ ω & ſub ω c contento, parallelepipedum g f æquiponderans portioni cylindri inſiſtentis arcui φ c ↓ habebit baſim æqualem rectangulo memorato, & altitudinem eandem cum cylindro.

COROLLARIVM. IV.

Quoniam in huius vigeſimâ tertiâ oſtendimus æquiponderans toti ſegmento hyperbolæ noto librâ, quæ ſit axis portio, ex centro ſuſpenſa, brachio ipſum axem æquante, eſſe æquale quatuor trientibus quadrati cuius latus ſit idem ipſe axis; æquiponderans cylindraceo cuius baſis ſit idem ſegmentum notum erit æquale parallelepipedo habenti eandem cum cylindraceo altitudinem, baſim autem æqualem quatuor [trientibus quadrati quod poteſt axis. Atque iſta duo pro exemplis ſufficiant.

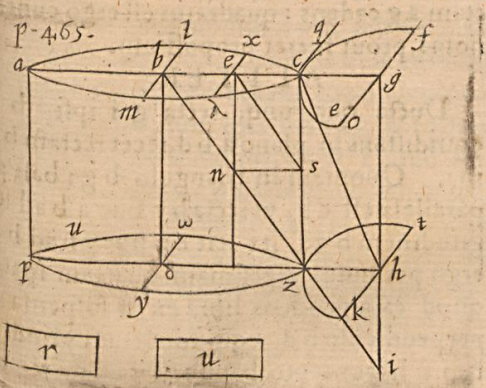
Propositio XXVI.

Sit planum l c m in quo ex centro b, diametro a c, descripta sit ellipsis a l c m, & hyperbola f c e, quarum diameter secunda sit l m. In plano a b d ad planum a l c recto ducta sit ex centro b quæuis linea a b d ipsam a c secans; ipsi verò recta quædam parallela incedendo per limbum figurarũ l c m, f c e descripserit superficiem cylindraceam, quam planum transuersum z b l secet; rectæ autem b z planorum a b d, z b l communi sectioni occurrat in z recta c z communis plani a b d & cylindraceæ superficiei; eidemque rectæ b z productæ g i æquidistans rectæ c z occurrat in i. Per z & i intelligatur ductum z u y planum faciens cum cylindraceis superfi-

ciebus ſectiones u z y, z t h parallelas baſibus l c m, f c e. Elliptici cylindracei b z, cuius baſes ſunt ſemiellipſes ω z y, l c m, portio intercepta planis l c m, l b z vocetur *cuneus notus*; planum d b l, & quodcunque ei æquidiſtans appelletur *parallelum conditum*; linea c z ſi perpendicularis ſit ad rectam a c, vel recta ex puncto z ad ipſam a c perpendicularis nominetur altitudo cunei noti tam elliptici, quàm hyperbolici.

His ita conſtitutis propoſitum ſit quadrare cunei noti tam elliptici quàm hyperbolici partem interceptam quibuſcunque duobus planis conditis parallelis.

Data



Data sit portio iam dicti cunei intercepta quibuscunque duobus planis parallelis condictis z c q, i g f, oporteatque illam quadrare. Figuræ f c e planæ interceptæ planis z c q, i g f, ex decimâ septimâ tertij libri, inueniatur æquiponderãs rectilineum r, posito perpendiculo b d quod per libræ centrum transeat; brachium autem libræ æquet b a. Dico parallelepipedum cuius basis sit r, altitudo æquet perpendicularem ex puncto z in plano a g i existente demissam ad rectam a g, esse æquale prædictæ cunei noti portioni. Nam in vigesimæ primæ huius libri corollario secũdo ostendimus solidum cuneatum esse æquale parallelepipedo cuius basis sit æqualis spatio quadratario, quod hîc est r; & altitudo sit æqualis altitudini notę, quæ in præsenti descriptione est perpendicularis ex i in re-

ctam a g cadens : quadratus est ergo cuneus notus, prout fuerat propositum.

ALITER.

Ducta quæcunq; recta g i ipsi b d æquidistans in plano a b d, secet rectam b z in i. Quoniam in triangulo b g i basi g i parallela est c z, vt recta b c siue a b ad longitudinem b g, ita erit c z siue g h ad h i; ergo per huius vigesimam quartam spatiũ quod ex a pendens libra ex b suspensa & perpendiculo b d, æquiponderat cylindraceo c h contento basibus f c e, t z x, est æquale figuræ c z g contentæ figura f c e, planis i g f, i b l: sed cylindraceo c h spatium quod ex a pendens libra ex b suspensa inuentum est in præcedenti propositione; ergo si ex præcedenti propositione inueniatur spatium r quod ex a pendens, libra ex centro b suspensa, & perpendiculo b d æquiponderet cylindraceo c h, spatium r erit æquale cuneo noto quadrando.

COROLLARIVM

Quoniam ex præcedenti æquiponderans ex a semicylindraceo b z est parallelepipedum cuius basis æquet duos trientes quadrati b c, altitudo sit eadem quæ cylindri; cuneus notus b c z erit eidem parallelepipedo æqualis. Item quoniam ex corollario tertio si recta x λ bifariam secet semidiametrum b c, æquiponderans cylindraceo e z est æquale parallelepipedo cuius basis sit

æqualis rectangulo sub x e & sub e c comprehenso, altitudo sit eadem quæ cylindri; cuneus e n z c erit eidem parallelepipedo æqualis. Demum quoniam ex corollario quarto æquiponderans ex a cylindraceo c h cuius basis f c o sit segmentum hyperbolæ notum, est parallelepipedum habens eandem cum cylindraceo altitudinem, basim autem æqualem octo trientibus quadrati quod potest axis (ostendimus enim brachio æquante axem totum a c , basim esse æqualem quatuor trientibus ; ergo si brachium sit a b dimidium axis , basis erit dupla prioris ex octaua secundi libri) cuneus c z i g erit eidem parallelepipedo æqualis.

SCHOLIVM.

Non est dubium quin quadratio cylindri aut cylindracei aperte exhibeat Tetragonismum ipsius baseos quæ est ellipsis (hac voce circulum comprehendi à nobis diximus initio operis huius) vel hyperbola , aut earum portiones conditis planis interceptæ. Cylindrus enim aut cylindraceæ portio habet basim æqualem basi quadratæ parallelepipedi habentis altitudinem eandem cum cylindro, & æqualis ipsi cylindro aut cylindraceæ portioni , vt satis constat ex vndecimâ huius , aliaque viâ ostendi posset, nisi citra vllam animi dubietatem res esset posita. Certum est etiam ex demonstratis in libro isto

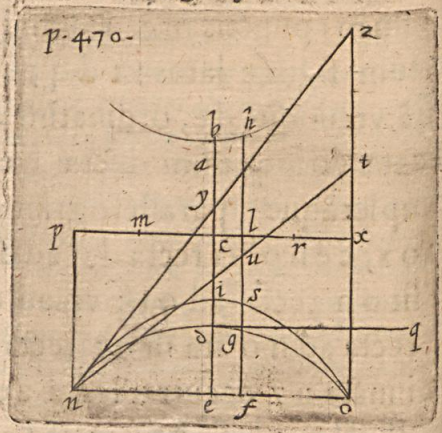
à nobis, vel ab Archimede in ſuis de ſphæra & cylindro déque Conoidibus & ſphæroidibus, ex quadratione cylindri apertè reſultare quadrationem coni, ſphæræ, conoideon, & ſphæroideon. Quapropter non exiſtimandum eſt nos propoſiti noſtri immemores aliò diuertiſſe dum ad iſta ſolida gradum præſenti libro fecimus; neque verò exiguum profeciſſe nos putamus, dum ad cunei noti præſentem quadraturam Deo dante peruenimus; hoc enim eſt veluti dimidium facti iam habere. Cùm enim inuenerimus parallelepipedum æquale cuneo c z i g, habemus ſpatium æquale cylindraceo c h, & inſuper portioni z h i quæ iunctâ c h eſt ad ipſius cylindracei portionem h g c per planum h c q abſciſſæ, vt recta h i ad h g, vel vt recta c g ad c b. Similiter cùm habeamus portionem e n z quadratam, nota eſt (ductâ per n recta n s ipſi b c æquidiſtante) cylindri portio e s inſiſtens baſi x c λ, terminata plano baſi per n s parallelo; & inſuper ſpatium n s z quod ductâ e s eſt ad portionem e c s, vt eſt recta z s ad ſt, vel c e ad e b; hanc enim eſſe eorum proportionem apertum eſt ex ſextâ primi libri ſi ad ſolida traducatur.

Propositio XXVII.

Sint ſectiones oppoſitæ b, d quarum tranſuerſa diameter b d punctis b & d terminata; ſecunda

autem m r punctis m & r definita; rectum figuræ latus sit d q; abscisis à vtcunque d e, ordinatim applicatæ vtrinque sint ductæ n e o, completáque parallelogramma c e o x, c e n p. Vt recta d q ad d b, ita sit o n recta ad o t: vt autem e c recta ad n o ita sit o t recta ad o z iuncta n z occurrat rectæ a e in y, diuisáque bifariam rectâ i e in i, per puncta n, i, o descripta sit parabola n i o iuxta præscriptum vltimæ primi, cuius diameter sit i e.

Ostendendum est quæcunque f l æquidistans transuersæ diametro b d ducatur occurrens rectæ m r diametro in l, parabolæ in f, hyperbolæ d n in g inter puncta n & o; tres rectas c e, l g, f l esse proportionales.



Ductâ n t, quoniam vt c e ad n o, ita eſt o t ad o z, ductâque n z deſcripta eſt parabola n i o, methodo iam præſcriptâ, erit per duodecimam tertij, (quæcunque f l æquidiſtans rectæ l n ducatur, occurrens rectæ n t in u, parabolæ in ſ, baſi n o in f) vt recta c e ad o f, ita u f ad ſ f: rectangulum ergo ſub extremis c e, ſ f erit æquale rectangulo ſub medijs o f, u f.

16. ſexti Euc.

Rurſus quoniam trianguli n o t latera o t æquidiſtant f u, vt n o, ot ſiue vt d q, d b ita erunt n f, f u; ergo poſitâ eadem baſi f o rectangulum o f n erit ad rectãgulum o f u, vt recta n f ad f u. hoc eſt vt recta d q ad d b: ſed rectangulo o f u oſtenſum eſt æquale rectangulum ſub c e, ſ f: ergo vt recta d q ad d b, ita eſt rectangulum o f n ad rectangulum ſub c e, ſ f rectis: ſed ite-

rum vt recta d q ad d b ita est rectangulum h f g ad o f n per vigesimam secundam tertij conicorum; ergo rectangulo h f g æquale est rectangulum sub c e, f f rectis comprehensum. 9. quinti Euc.

Rursus quoniam h l, g l ordinatim ad diametrum m r ex eodem puncto l applicatæ sunt æquales, vt ex earum definitione apertum est, rectæ h g bifariam in l sectæ adiectæ erit linea g f: ergo rectangulum h f g vnà cum quadrato l g æquat quadratum l f: ergo cùm rectangulo h f g æquale sit rectangulum sub c e vel l f & sub f f; rectangulum sub l f & sub f f vnà cum quadrato rectæ g l erit æquale quadrato rectæ f l: sed duo rectangula l f f, f l f simul sunt æqualia eidem quadrato f l: ergo duo simul rectangula l f f, f l f æquant duo spatia videlicet rectangulum l f f & quadratũ l g: ergo ablato eodem l f f, residua sunt æqualia quadratum scilicet l g & rectangulũ f l f: ergo tres rectæ f l (hoc est c e) l g, l f sunt proportionales, prout erat ostendendum. 6 secũdi Euc. 1. secũdi Euc.

SCHOLIVM.

Solidum illud quod manente diametro directà m l hyperbolæ d g o ita describitur circũductu ipsius hyperbolæ, vt in eo motu recta g l & aliæ omnes ad m r ordinatim applicatæ maneant in eodem plano, prout in scholio duo-

decimæ præscripsimus, non tractauimus hactenus præsenti in libro, quamuis methodi consequutio exigeret vt sicut in ellipsi, duplex solidum genitum ex duplici motu ellipseos circa immotam duplicem diametrum, minorem, nempe, & maiorem, consideratur; ita in hyperbolâ duplex quoque solidum generatum ex duplici motu hyperbolæ ipsius circa duplicem immotam diametrum, transuersam & directam, contemplaremur, atque in isto etiam centrum grauitatis, & diuisionem iuxta datam rationem occursu plani basi paralleli demonstraremus. Verùm cùm ista penderent à præsenti theoremate quod à nobis inuentum non est nisi postquam iamdiu cursus erat præsens liber quartus, necessariò ad calcem ipsius adiiciendum fuit, ne imperfecta maneret tam mirabilis, tamque facilis, cùm semel excogitata fuerit, doctrina soluendi difficillima pariter & iucundissima problemata. Perficiuntur autem hæc problemata illâ eadem viâ, qua processimus in propositione decimâ tertiâ & sequentibus; inuenitur quippe prismatoides solidum cuius basis sit portio figuræ c i x o s intercepta parallelis ad diametrum i c rectis, ita se habens ad solidum istud genitum ex quiete directæ diametri quod xystroides appellaui in corollario tertio propositionis vigesimæ tertiæ, vt vtriusque centrum grauitatis sit in vno eodémque plano, cuius sectio sit rectæ c e parallela; & qua ratione diuiditur vnum, alterum quoque eadem diuidi necesse sit, vt satis intelligit quisquis librum istum paulò diligentiùs legerit.

Cæterũ quod in Scholio laudatæ duodecimæ definientes istiusmodi peripherica solida scripsimus, id quidem etiam nunc probamus veluti doctrinæ nostræ methodo inprimis accommodatum; quod autem adeo vniuerse prolatam definitionem congruere ijs omnibus quæ Archimedes de Conoidibus & Sphæroidibus demonstrauit, dubitando diximus, id nunc re maturius deliberatâ indictum volumus.

Calculi ratiocinijs (si ego supputando non erro) inuenies ex methodo non semel traditâ centrum grauitatis xystroidis hyperbolici descripti motu semisegmenti hyperbolæ noti de quo in citato & subsequenti corollario egimus, ita diuidere axem vt pars centro hyperbolæ adiacens sit ad aliam ut viginti & vnum ad septemdecim.

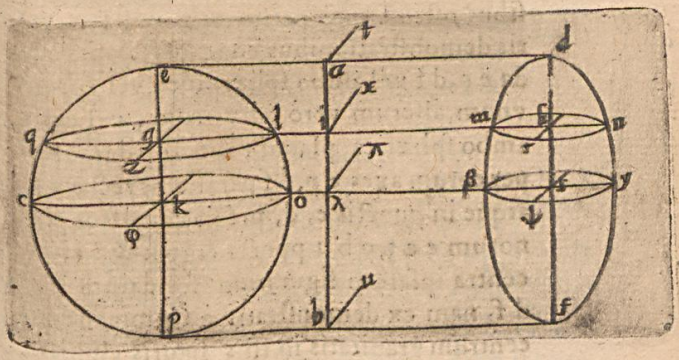
Propositio XXVIII.

Intelligatur in plano p d horizonti parallelo, quod libræ vices gerat, linea a b immota, ex qua ipsum planum ita suspendatur, vt circa illam aptum sit in hanc vel illam partem eleuari aut deprimi trutinæ instar, prout pondera vtrinque imposita grauiora vel le-

uiora fuerint. Eiuſmodi autem planum ita aptatum appelletur *libra plana*, & linea a b linea ſuſpenſionis, vel axis libræ planæ: communem autem libram qua hactenus vſi ſumus voco diſtinctionis causâ, *libram grammicam*.

Libræ planæ p d impoſita ſint vtrinque ſolida e p, d f habentia centrum grauitatis in ipſa librâ planâ & ita ſeſe reſpicientia vt intra plana e a t, p b u parallela contineantur proximè, & ſi planum q i x ipſis parallelum vtcunque interponatur ſecans ſolida e p, d f ſecundum ſectiones q z l, m r n, & libram planam ſecundum lineam q n, axemque a b in puncto i, ipſæ ſectiones ſeu figuræ q z l, m r n ſibi æquiponderent vt iacent permanentes librâ grammicâ q n ſuſtinente illas, & ſuſpensâ ex puncto i. Peto ipſa ſolida e p, d f vt

iacent permanentia sibi æquiponderare in librâ planâ p d; ac proinde si designatis eorum grauitatis centris k, f iungatur recta k f secans axem in λ & per puncta k f sola cõnectantur cum librâ grammicâ k f ex λ suspensâ, ipsa etiam respectu huius libræ sibi ęquiponderare inuicem; Idem verò in planis figuris cum proportione intelligi volo.



Hæc est altera propositio quam cum præsẽtis libri vndecimæ parte primâ dari mihi postulo; dari inquã neq; enim ingenuũ vllũ scriptorem

decet nedum Mathematicum ὡς τύραννον ἐπιτάττειν, ἀξιοῦντα πιστεύεσθαι χωρὶς ἀποδείξεως. quod in Theſſalo, νομοθετοῦντι μᾶλλον ἢ ἀποδεικνύντι reprehendit Galenus. Illam tamen probabilem efficere mihi videor, ex eo quòd ſi continuum componeretur ex indiuiſibilibus res eſſet aperta; aliunde verò in plurimis caſibus id ita eſſe legitimis demonſtrationibus euincatur poſitâ continui diuiſibilitate in infinitum, quod argumento eſt eiuſmodi diuiſibilitatem eſſe per accidens in præſenti negotio, præſertim cùm in nullo caſu quem ſciam, falſum eſſe id quod petimus oſtendi poſsit; imò datâ illius veritate omnia mirè conſonent, vt ex ſequentibus liquidum fiet.

lib. 1. meth. med. part. 4. edit. Baſil. 1538. pag. 39.

Reliquum igitur eſt vt in nonnullis caſibus oſtendamus petitionem noſtram veris demonſtrationibus congruere. Sint ſolida e p, d f vel ambo ſphæroidea, vel eorum vnum, alterum verò ſphæricum, vel certè ambo ſphærica; planum autem p d tranſeat per eorum axes e p, d f parallelos rectæ a b, atque in punctis e, d, p, f ſit contactus planorum e a t, p b u; puncta ergo k & ſ erunt centra ipſarum figurarum ſolidarum e p, d f, nam ex demonſtratis à Commandino centrum grauitatis in iſtis figuris eſt idem cum centro figurarum; axes ergo e p, d f bifariam ſecantur in k & ſ: ergo rectæ k p, ſ f ſunt æquales; ergo cùm k p, ſ f ſint parallelæ & æquales, erunt k ſ, p f, e d parallelæ & æquales. Rurſus vt recta λ ſ ad me-

16. de centro ſolid.

33. primi Euc.

diã inter ipſam λ ſ & k λ ita recta ſit κ o ad ſ β, ſiue ſ y (figuræ enim planæ e c p o, d β f y ſunt ellipſes aut circuli, quorũ centra k, ſ, ex Archimede vel ex Sphæricis Theodoſij) & quoniam rectæ e d, p f tangunt ipſas in e, d, p, f & k o β ſ ſunt tangentibus in vertice parallelæ, erunt ipſæ diametri c k o, β ſ y ipſis axibus coniugatæ. 12. de conoid. & ſphæroid. 32. primi Cõ.

Rurſus quoniam ſphæroidea e p, d f ſecantur plano k λ π ad axem erecto, hoc eſt parallelo planis e a t, p b u, ſectiones c o φ, β y ψ erunt circuli (eademque de causâ ſectiones q z l, m r n ſunt quoque circuli) ergo circuli c o φ, β y ψ habent inter ſe duplicatam rationem diametrorum c o, β y ſeu ſemidiametrorum κ o, β ſ, ſed recta λ ſ ad rectam λ k habet ex conſtructione duplicatam rationem rectarum c o, β y: ergo vt recta λ ſ ad k λ, ita eſt circulus c o φ ad circulum β y ψ. 11. de conoid. & ſphæroid. 2. duodec. & 20 ſexti Euc.

Rurſus quoniam ex Archimede dimidium ſphæræ vel ſphæroidis c e o, β d y eſt duplum coni cuius baſis ſit circulus c o φ & β y ψ, & altitudo e k & d ſ; duo ſolida e p, d f erunt inter ſe vt coni prædicti; ſed coni prædicti habentes æquales altitudines e k, d ſ ſunt inter ſe in ratione baſium; ergo ſolida e p, d f ſunt inter ſe vt baſes c o φ, β y ψ: ſed baſes iſtæ ſunt inter ſe, vt oſtenſum fuit, ſicut rectæ λ ſ, λ κ: ergo ſolidum e p eſt ad ſolidum d f, vt recta λ ſ ad rectam l k: ergo librâ grammicâ k ſ ſuſpensâ ex λ 29. de conoid. & ſphæroid. 32. de ſphær. & cyl. 14. duo dec. Eucl.

6. aut 7. primi æquip. & sustinente grauia e p, d ſ alligata ex centris κ, ſ committetur æquilibrium; ipsa autem grauia e p, d ſ non mutabunt situm quem priùs habebant.

Ostendendum iam est quocunque plano interiecto parallelo; inter plana e a t, p b u ista solida secentur, sectiones eorum cum planis, sibi inuicem æquiponderare modo prædicto. Et quidem circulum c o φ æquiponderare circulo β y ↓, sequitur ex dictis, ostensum enim est circulum c o φ ad circulum β y ↓ esse vt rectam λ ſ ad λ κ, ergo cùm puncta ſ & k sint cētra grauitatis ipsorum circulorum, ipsi circuli æquiponderabunt sibi vt iacent manentes positâ libra grammicâ k ſ suspensâ ex λ, & sustinente circulos per sola centra k & ſ sibi cohærentes.

4. de centro solidorum citato.

6. quadrat. parab.

Ostendamus idipsum quocunque alio plano q i x non per centra, k, ſ ducto. Quoniam vt ostendimus sectiones q z l, m r n sunt circuli, ipsi circuli erunt inter se vt quadrata rectarum g l, h n. Præterea quoniã ordinatim applicatæ ad diametrum e p sunt rectæ l g, o k, vt rectangulum p g e ad rectangulum p k e, ita ex Apollonio erit quadratum g l ad k o quadratum, hoc est circulus q z l ad circulum c o φ: atque eadem de causâ vt rectangulum f h d siue p g e ad rectangulum f ſ d siue p k e, ita erit quadratum rectæ h n ad quadratum rectæ ſ y; ergo vt circulus q z l ad circulũ

21. prim. con.

c o φ, ita est circulus m r n ad circulum β γ ↓, ergo alternãdo circulus q z l ad circulum m r n est vt circulus c o φ ad circulum c γ ↓: sed circulus c o φ est ad c γ ↓ vt recta s λ seu h i ad rectam λ κ seu i g: ergo vt recta h i ad rectam i g, ita vicissim est circulus q z l ad circulum m r n; ergo positâ librâ grammicâ g h sustinente circulos cohærentes in g, h, & suspensâ ex i, omnia manebunt vt iacent; quod erat probandũ.

COROLLARIVM.

Si solida e p, d f ambo ponerentur cylindri, aut coni, aut prismata, aut pyramides, aut conoidea eiusdem generis, non multùm diuersâ methodo posset formari casus in quo istud ipsum demonstraretur, prout statim clarè iudicabit, qui vim eorum quæ in casu proximo scripsimus, perceperit.

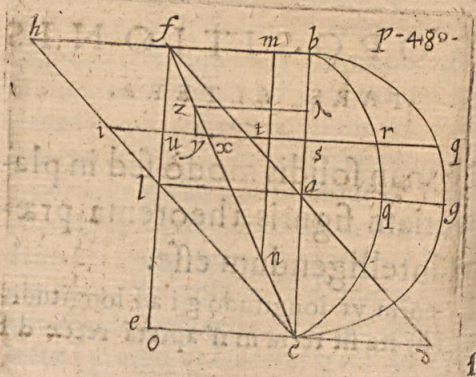
PROPOSITIONIS
PARS ALTERA.

Non in solidis modò sed in planis etiam figuris theorema præsens intelligendum esse.

Si enim vt longitudo g i ad longitudinem i h, ita sit recta m n aptata rectæ d f

(hoc eſt bifariam ſecta occurſu lineæ d f, ac proinde habens centrum grauitatis in linea d f) ad rectam q l aptatam lineæ e p, & ita eueniat in alijs omnibus parallelis; figura plana e c p o æquiponderabit figuræ planæ d c f y, poſito axe a b.

Huius verò mirabilis conſonantia cum demonſtratis in tertio libro innumeris oſtendi poteſt exemplis, ſed vnum hîc aut alterum pono. Sit ſemicirculus m g c cuius diameter b c, quam ad normam ſecet g a; tangentes in b & c ſint c e, b f, ſitque b f æqualis ſemidiametro a g, & c e ſemidiametro b a; factis c e, c d æqualibus, iungantur rectæ c f, f d, f e, compleaturque parallelogrammum f o c b. Diuiſa a g bifariam in p, per b, p, c intelligatur deſcribi ſemiellipſis b p c, cuius diameter b c, & ſemiaxis a p; ergo quæuis parallela rectæ a g ſemicirculo contenta ſecabitur bifariam occur-



ſu

su semiellipsis b p c, vt ponit Archimedes in quintâ de conoidibus & sphæroidibus, ibidemque demonstrat Commandinus ex vigesimâ primâ primi conicorum; semicirculus ergo b g c erit aptatus ellipsi b p c: aptari enim figuram planam lineæ definio, lineas eius omnes vni cuidam rectæ parallelas bifariam secari occursu eiusmodi lineæ. Erit triangulum f e d aptatum lineæ f c, cùm omnes parallelæ basi e d trianguli f e d occursu rectæ f c secentur sicuti basis ipsa e d, quæ bifariam in c secta ponitur; ac proinde & omnes basi e d parallelæ rectæ erunt ipsi f c aptatæ. 4. sexti Euc.

Quoniam ergo ductâ quacunque f q æquidistante axi a g̃, & occurrente lineis iam descriptis in r, s, t, x, u, rectæ f q, t u sunt aptatæ lineis b p c, f c; & ut x f semissis rectæ c f (sicuti enim f b est semissis rectæ b c, ita est x f semissis rectæ f c) ad f r semissem rectæ f q, ita est ipsa f q ad t u ipsi b f æqualem (veluti enim e d æquat rectam b c, ita t u æquat rectam b f) recta v t sicut iacet manens, æquiponderabit rectæ q f vt iacet manenti, librâ grammicâ u q suspensâ ex f (oportet autem mente ponere in omnibus libris demonstrationibus ipsam librã prorsus carere grauitate) ergo per præsentem totum triangulum f d o vt iacet manens æquiponderabit toti semicirculo b c g vt iacet manenti posito axe b c. Porrò vt recta c f ad f q rectam, ita esse f q ad t u, vel

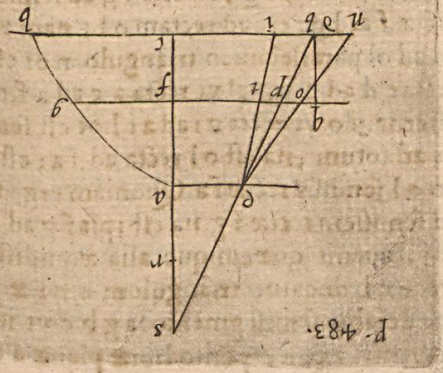
b f ipſi æqualem prout modo ſumebamus, apertum eſt ex decimâ tertiâ ſexti Euclidis: vel ſi b c g foret ſegmentum ellipſeos ex vigeſimâ primâ primi conicorum, ex qua etiam idipſum oſtenderur ſi b c ponatur eſſe diameter hyperbolę, & puncta c, b termini eius.

Quoniam ergo triangulum f d o æquiponderat ſemicirculo b g c poſito libræ planę axe b c, & (diuisâ rectâ f c ita in n vt n c ſit triens totius f c) punctum n eſt centrũ grauitatis trianguli f d o, totum triangulũ ex n pendens æquiponderabit ſemicirculo b g c. Per n agatur n m æquidiſtans axi b c; ergo cùm in triangulo f b c baſi b c parallela ſit n m, ſicut f n ad n c, ita erit f m ad m b: ergo m b eſt triens totius f b. Cùm ergo triangulum f d o contineat duo parallelogramma b a g, in noſtro autem caſu parallelogrammum b a g ſit quadratum quod poteſt ſemidiameter b a, æquiponderans ſemicirculo vt iacet manenti pendens ex parallela m n, erit æquale duobus quadratis rectæ b a: ergo ſi ſuſpenſio ex parallelâ m n transferatur in parallelam f o, ſicut eſt b f recta ad m b, hoc eſt vt ternarius ad vnitatem, ita erit æquiponderans ex m n ad æquiponderans ex f o; ergo æquiponderans ex f o continet trientem duorum quadratorum ex b a latere deſcriptorum, ſiue duos trientes quadrati quod poteſt b a; ergo ſi ex puncto l in quod f o & g a con-

6. quadrat. parab. 2. ſexti Euc.

ueniunt, per f o perpendiculum pendeant duo trientes quadrati b a, æquiponderabunt semicirculo b g c vt iacet manenti; sed si circa rectam a g immotam intelligatur circumuolui semicirculus b g c donec recta b c sit horizonti perpendicularis, centrum grauitatis semicirculi, quod est in rectâ a g, manet immotum: ergo positâ librâ grammicâ a g, suspensâ ex a, semicirculo vt modo constitutus est manenti æquiponderant ex l duo trientes quadrati b a; atqui hoc ipsum demonstratum fuit in decimâ octaua tertij libri; ergo præsens propositio quatenus de planis figuris intelligitur, ad amussim quadrat demonstratis in tertio libro; quibus similia quæ demonstrentur, præbent propositiones aliquot libri modo citati, sed præcipuè tertia, septima, & octaua.

Eandem concordiam ostendamus in hy-



perbolæ semi-segmento noto cuius æquiponderans inuestigauimus sub finem quarti corollarij in propositione vigesimâ tertiâ. Sit ergo a g b axis, ex quo abscisa sit a c ipsi a æqualis, sitque ordinatim applicata c b ipsi a c vel diametro f a æqualis; quod erit, si factis c b, c a æqualibus, recta f d per f & d transiens determinet figuram, rectangulum enim a c d erit æquale quadrato c b; sed rectangulum a c d est æquale quadrato a c; ergo rectæ f a, a c, c b sunt æquales. Posito igitur libræ planæ a c b axe a c, inueniendum sit æquiponderans aptatum rectæ d q per d ductæ parallelæ, ad axem a c. Fiant n d, d i inter se, & cum quadrante rectæ d c æquales, atque iungantur rectæ c n, e i. Quoniam ductâ quacunque o g ipsi d l æquidistante tres rectæ a f, f g, f p sunt proportionales, vt p f ad f g ita erit f g ad f a; ergo vt p f ad semissem rectæ f g, ita erit f g ad semissem rectæ f a, hoc est ad rectam o l: nam recta n i ad o l parallelam in triangulo n e i est vt recta e d ad e p, vel vt recta a c ad a f; ergo alternando vt recta n i ad a c hoc est semissis ad totum, ita est o l recta ad f a; est ergo o l semissis rectæ f a. Quoniam ergo vt p f ad semissem rectæ f g, ita est ipsa f g ad o l, & ita euenit quæcunque alia æquidistans rectæ c b ducatur; triangulum e n i æquiponderabit semisegmento a g b c vt iacet manenti, axe a c posito libræ planæ a c b.

11. primi comic.

Venio ad calculum. Diuidatur a c ita in f vt f c sit triens rectæ a c, & per f ducatur f p æquidistans rectæ c b; erit p centrum grauitatis trianguli n e i: & quia f a æqualis est rectæ a c, erit recta f c ad f f vt senarius ad quinarium; cúmque in triangulo f d c basi d c parallela sit p f, erit d c seu q f ad p f, vt senarius ad quinarium. Rursus triangulum n i e, cùm habeat basim n i semissem rectæ c a, & altitudinem a c, erit æquale quartæ parti quadrati a c, siue sex vigesimis quartis: quoniam ergo quarta pars quadrati a c pendens ex solo puncto P æquiponderat semisegmento a c b, libræ planæ a c b axe a c posito; si vt brachium f q ad brachium f p hoc est vt senarius ad quinarium, ita fiat æquiponderans ex p ad quartum spatium, istud continebit quinque vigesimas quartas quadrati a c; istud autem ex q pendens æquiponderat semisegmento a c b ex octauâ secundi; ergo præsenti methodo eædem quinque vigesimæ quartæ quadrati a c inueniunrur, quæ repertæ fuêre loco paulò superius citato.

6 quadrat. parab.

COROLLARIVM I.

Ex his patet libram planam conuerti in grammicam & vulgarem si ad axem b a figuræ casûs primi secundæ partis perpendicularis a g excitetur, & circa rectam a g

manentem & parallelam horizonti circũuolui intelligatur planum b g c, donec axis b c ſit perpendiculum : oſtenſum enim eſt in ſimili circumuolutione centrum ſemicirculi b h c manere immotum cum, ſit in rectâ a g : ſed etſi foret extra rectam a g, ſemper maneret in eadem diſtantriâ à rectâ b c ; ergo cùm n à quo æquiponderans ex oppoſito pendet in ſitu priori, retineatandem parallelarum b c, m n diſtantiam à perpendiculo ipſo b c, libræ longitudines in poſteriori ſitu erunt viciſſim vt grauia illis ſuſtentata ; ergo grauia ſibi inuicem æquiponderant.

COROLLARIVM II.

Sicuti in librâ grammicâ ſuſpenſio ex vno puncto in aliud transfertur certâ lege quam præſcribunt ſecundi libri propoſitiones decima & ſequentes duæ ; ita in librâ planâ eædem leges vigent dum ex vno axe in alium axem fit translatio, quoties inter axes duos parallelarum, linearum quæ vicem grammicę libræ gerunt, portiones interceptæ, ſunt brachia earundem grammicarum librarum. Ex quo fit illos axes eſſe inuicem parallelos quoties brachia grammicarum librarum ſunt inuicem æqualia ; non eſſe autem parallelos quoties brachia nou ſunt æqualia ; ſed conuenire cum primario axe in illo ipſo puncto

in quo linea quæ brachia librarum grammicarum terminat. In propoſito igitur ſchemate primi casûs ſecundæ partis axes aſſumpti concurrent in punctum c, & ſi ex productâ b f abſcindatur f h ipſi b f æqualis iungaturque h c; & ex axe b c ſuſpenſio transferatur in axem c f; in rectam verò c h transferatur triangulum f d o per parallelas baſi d o, & illi aptetur; ſemicirculus quoque b g c ſimiliter transferatur & aptetur eidem rectæ h c; triangulum & ſemicirculus ita aptata rectæ c h, librâ planâ ſuſpensâ ex axe f c, æquiponderabunt ſemicirculo b g c vt iacet manenti. Si enim q u producatur occurratque rectæ c g in i, erunt x i, x f æquales ſicuti f h, f b ponuntur æquales; quoniam ergo librâ grammicâ x r ſuſpensâ ex ſ, ſuſtinentéque ex r graue ſ r q, & ex x graue u x t, ſi ſuſpenſio ex ſ mutetur in x, retineaturque brachiũ x i æquale brachio x ſ, duo ſimul grauia u x t, ſ r q e x i pendentia, ſiue habentia centrum grauitatis in puncto i æquiponderabunt graui ſ r q vt iacet manenti, ex decimâ libri ſecundi: ergo cùm dictum æquilibrium contingat in ſingulis parallelis, figuræ duæ prædicto modo aptatæ ad lineã h c, poſito axe f c, æquiponderabunt per præſentem ſemicirculo b g c vt iacet manenti.

COROLLARIVM. III.

Eiuſmodi porro figuras traditâ methodo lineæ rectæ aptatas habere centrum grauitatis in illa ipsâ lineâ cui aptantur, aſſumimus ex vndecimæ huius parte ſecundâ, nec contradicet vllus qui meditatus fuerit quo pacto Archimedes demonſtret in libro æquiponderantium centrum trianguli eſſe in rectâ quæ bifariam ſecat baſim, omneſque ipſi parallelas; quod & in parallelogrammo demonſtrat; noſque in ſectionum conicarum ſegmentis oſtendimus in decimâ tertiâ ſecundi, centrum nimirum grauitatis eſſe in diametro quæ bifariam ſecat omnes parallelas baſi,

COROLLARIVM. IV.

Si in primâ figurâ ſecundæ partis b a diuiſa ſit bifariam in ſ; portioni b ſ q iiſdem poſitis æquiponderabit triangulum f u x t vt iacet manens, & ſi recta f x ita diuidatur in z vt x z ſit triens ipſius f x, & per z ducantur z y, z λ æquidiſtantes rectis b a, a g; cùm z ſit cẽtrum grauitatis trianguli f u t, ſpatium aptatum rectæ z y & æquiponderans figuræ b q ſ, axe b c, erit æquale triangulo f u t, quod eſt decima ſexta pars trianguli f o d, cùm baſis eius u t ſit quadrans baſis o d, ſicuti latus f u eſt quadrans late-

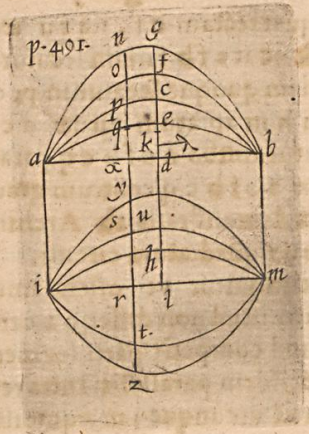
ris f o: ergo cùm triangula sint similia f u t, f o d habebunt duplicatam rationem laterum, qualem habent vnitas & sexdecim, respectu laterum existentium in ratione vnius ad quatuor. Cum ergo triangulum f d o æquet duo quadrata rectæ b a; triangulum f u t æquabit vnam octauam quadrati f a. Rursus quoniam triangula c b f, z λ z sunt similia, sicut c f ad c z ita erit f b ad z λ: sed c f ad c z est vt duodecim ad decem, vel vt sex ad quinque: ergo recta f u ad rectam f y est vt sex ad quinque: quoniam ergo vt brachium u f vel f b ad brachium y f vel λ z, ita est æquiponderans aptatum rectæ z y ad aptatum rectæ f u: cùm aptatum rectæ z y sit octaua siue sex quadragesimæ octauæ quadrati b a; aptatum rectæ f u, erit quinque quadragesimæ octauæ quadrati b a.

COROLLARIVM V.

Eadem figurâ secundæ partis retentâ apertum est ea quæ hactenus proposuimus de tota ellipsi b q c, perinde esse vera in singulis eius partibus conclusis intra quascunque ordinatim ad diametrum a c applicatas si conferantur cum portione trianguli f d o intra easdem ordinatim applicatas contentâ.

PROPOSITIO XXIX.

Sit parabolæ ſegmentum a c b, cuius baſis a b, diameter c d; ſit aliud quoduis ſegmentum parabolæ i h m cuius baſis i m terminetur occurſu duarum a i, b m diametro c d æquidiſtãtium, eiuſque diameter l h ſit portio rectæ c d. Sit præterea alia parabola a g b cuius baſis ſit a b, diameter d e g ipſius d e dupla: ſegmentum verò i h m intelligatur aptatum curuæ a c b, ſecũdum poſitionem lineæ a i. His poſitis pro poſitũ ſit inuenire centrum grauitatis in ſegmenti ita aptati portione quauis interceptâ duabus ipſi a i parallelis. Oſtendi præterea debet portionẽ eiuſmodi habere idem centrum grauitatis cum parte ſegmenti a g b contentâ iiſdem parallelis.



Abscindantur ex g d rectæ c f, c e inuicem æquales, & singulæ dimidio rectæ h l, vt tota f e sit toti h l æqualis; atque per e & f intelligantur ex primi vltima descriptæ parabolæ a e b, a f b, quarum diametri sint d e, d f. Inueniatur ex doctrinâ quadraturæ parabolæ centrum grauitatis portionis intra easdem parallelas & curuas a f b, a e b interceptæ. Dico eiusmodi centrum esse illud quod quærendum proponitur; & non differre à cētro grauitatis segmenti a g b d intra easdem parallelas clausi. 35. primi conic.

Quoniam enim à tangentibus in i & a similiter secātur segmēta i h m, a e b, a c b, a f b, a g b; si secentur quacunque n r æquidistante ipsi g l, eius portiones illis interceptæ r u, x q, x p, x o, x n sunt in ratione diametrorum l h, d e, d c, d f, d g; ergo sicut 22. primi huius.

l h ęquat rectam e f, ita r u æquat rectam q o, & sicut e f bifariam secatur in c, ita q o bifariam quoque secatur in p, ergo segmẽtum i h m aptatum curuæ a c b circumscribitur limbo a o f b e q parabolico: ergo figuræ a o f b e q centrum grauitatis notũ fiet ex demonstratis ab Archimede in libello de quadratura circuli.

Relinquitur vt ostendamus centrum grauitis istud non differre à centro grauitatis quod competit parti segmenti a g b cõtentæ iisdem parallelis. Intra rectas a i, b m ducta sit vtcunque i m æquidistans ipsi a b, & intelligatur descripta figura i s m t ita vt quæcunque s t ipsi i a æquidistans ducatur secãs rectã i m in r, portiones s r, r t sint æquales; & vt x p recta ad s r, ita reciprocè sit s r ad x q, ac proinde ita etiam sit s t dupla rectæ s r ad compositam ex x q, n o duplam rectæ x q. Quoniam librâ grammicâ r p suspensa ex puncto x, & sustinens ex vnâ parte graue t u aptatum puncto r, & graue x q n o aptatum puncto p per lineã x n grauitate carentem cui adhærêre ipsa grauia intelliguntur, æquiponderabunt sibi mutuò ergo cùm idipsum pariter eueniat in alijs æquidistantibus tota figura i s m t manens vt iacet, posito a b axe librę planę, æquipõderabit toti compositæ ex a q e b d & ex a n g b f o; & pars parti prout sibi intra easdem parallelas iam memoratas respondent, vt constat ex prioris proposi-

6. aut 7 primi æquip.

tionis parte altera.

Similiter intelligatur figura i y m z ita descripta vt iisdem positis æquiponderet toti a g b d, & qualibet æquidistante n z ductâ vt r x ad x p ita sit x n ad y z. Quoniã vt r x ad x p ita est x n ad y z, & ita etiam est composita x q o n ad s t; vt x n ad y z, ita erit composita x q o n ad s t: ergo alternando vt x n ad compositam x q o n, ita y z ad s t; sed vt recta x q o n ad x n, ita est composita ex portionibus cuiuscunque alterius æquidistantis interceptis inter easdem lineas quibus x q o n clauditur, ad interceptam inter easdem quibus x n continetur, vt ostensum fuit; ergo ex sextâ primi libri, vt composita x q o n ad rectam x n ita est compositum spatium ex a q e b d x, a n g b f o ad spatium a n g b d; eademque est ratio de eorum partibus intra easdem parallelas ad diametrum g d interceptis: ergo vt compositum spatium ex a q e b d x, a n g b f o ad spatium a n g b d ita spatium vnius æquidonderans i u h m t, ad alterius æquiponderans i y m z; & alternando vt compositum spatium ex a q e b d x, a n g b f o ad æquiponderans suum i u h m t, ita spatium a n g b d ad suum item æquiponderans i y m z.

Portio segmenti a g b d intra parallelas memoratas concluſa habeat centrum grauitatis in rectâ k λ conueniente in *k* cum rectâ d g; ergo vt brachium l d ad longitu-

dinem d k, ita per ſextam aut ſeptimam primi æquiponderantium eſt ſpatium a g b d totum vel pars dicto modo ſumpta pendens ex k l, ad æquiponderans i y m z vel ad partem: ſed vt ſpatium a g b d ad i y m z vel pars ad partem, ita oſtendimus eſſe compoſitum ex a q e b d x, a n g b f o vel eius partem ad ſpatium 1 u m t vel ad partem pariter ſumptam: ergo vt brachiũ l d ad longitudinem d k ita eſt ſpatium compoſitum vel eius pars pendens, ad æquiponderans ipſi: ergo centrum grauitatis compoſiti ſpatij eſt in rectâ κ λ.

Idem verò centrum granitatis eſſe in eodem puncto lineæ k λ conſtat ex decimâ quinta ſecundi libri; ex illa enim oſtenditur vtriuſque ſuſpenſi centrum eſſe in vnâ eademque parallelâ ad diametrum d g, erit ergo in communi ſectione iſtius parallelæ & rectæ k λ prout oſtendendum fuit.

COROLLARIVM I.

Hinc patet ſi lineæ a b, i m non ſint baſes parabolarum a c b, i h m, ſed ſint quæcunq; aliæ rectæ ad ipſarum parabolarum caua vel conuexa poſitæ, idem prorſus conſici dummodo portiones p x, u r cuiuſcunque æquidiſtantis diametro ſint in ratione rectarum d c, x o.

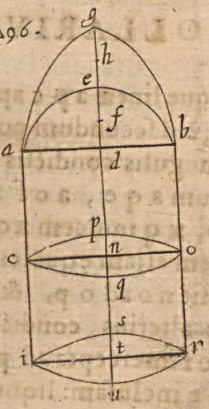
COROLLARIVM II.

Si cuicunque lineæ a p c aptata sit figura quæuis a g b d secundum positionem rectæ a i, & ex singulis condictis n x, g d occursu linearum a q e, a o f abscindantur vtrinque n o, x q inuicem æquales; item g f, e d inuicem etiam æquales; sicut autem g f, ad f c, ita sit n o ad o p, & ita etiam sit cuiuscunque alterius condictæ portio lineis a n g, a o f intercepta ad portionem lineis a o f, a p e inclusam: liquet ex demonstratione qua pars altera præsentis propositionis demonstratur centrum grauitatis totius a g b x esse idem cum centro grauitatis partis a f b e.

PROPOSITIO XXX.

Si duæ figuræ planæ super eadem basi sint constitutæ ita vt omnes rectæ æquidistantes certæ cuidam designatę secundum eandem rationem secentur, centra grauitatis earum erunt in eadem parallelâ, & eorum à basi distantiæ erunt in eadem ratione.

p 496.



Sint figuræ a e b, a g b super basi a b constitutæ ita vt singulæ ad rectam a i parallelæ ocourrentes figuris secentur in ratione rectarum g d, d e. Sit f centrum grauitatis figuræ a e b in rectâ d e æquidistante rectæ a i, & h centrum grauitatis figuræ a g b Dico vt g d recta ad g e, ita esse distantiam puncti h à basi, ad distantiam puncti f ab eadem basi a b.

Quoniam enim vt g d ad d e, ita sunt singulæ aliæ æquidistantes rectæ g d, inclusæ figura a g b ad portionem sui inclusam figurâ a e b, erit centrum grauitatis vtriusque figuræ in eadem rectâ æquidistante rectæ a i; ex decimâ quintâ secundi, vt in præcedenti diximus; ergo cum f centrum grauitatis figuræ a e b ponatur in rectâ

ctâ d e, in eadem quoque rectâ d e productâ erit h centrum grauitatis figuræ a g b.

Vt d g recta ad d e, ita sit a i cuiuscunque longitudinis ad a c, completisque parallelogrammis a i r b, a c o b, intelligantur figuræ c p o q, i s r u ita aptatæ rectis c o, i r, vt quacunque q u æquidistante rectæ a i secentur in p, n, q, s, t, u, & figuræ a f b, a g b in d, e, g vt n d recta ad dimidium rectæ d e, ita sit tota d e ad totam p q bifariam in n sectam: & vt p t recta ad dimidium rectæ d g, ita sit tota d g ad s u bifariam in t sectam. Posito ergo a b axe libræ planæ b a i tota figura c p o q vt iacet manens æquiponderabit ex vigesimâ octauâ toti a e b, & pars parti, prout inter easdem ad a i rectam æquidistantes continebuntur; similiter tota figura i s r u vt iacet manens æquiponderabit toti a g b & pars parti, prout dicto iam modo sibi respondebunt.

Quoniam ergo vt d n, d u, ita d e, d g, erunt alternando vt d n, d e, ita d u, d g: sed vt d e ad sui dimidium ita d g ad sui dimidium: ergo ex æquo vt d n, ad dimidium rectæ d e, ita d u ad dimidium rectæ d g. Rursus quoniam vt d n ad dimidium rectæ d e, ita est tota d e ad p q; & vt d u ad dimidium rectæ d g, ita est tota d g ad s u; erunt d n, dimidium rectæ d e, ipsa d e, & p q proportionales rectis d u, dimidio rectæ d g, ipsi d g & s u: ergo ex æquo

vt d n recta ad p q, ita d u recta ad ſ u; & alternando vt d n ad d u, vel vt d e ad d g, ita p q ad ſ u: ergo cum idipſum euenìat in ſingulis æquidiſtantibus rectæ ai, erit ex ſextâ ſecundi figura a p o q ad figuram i ſ r u, & pars ad partem dicto iam modo ſumptas, vt eſt recta d e ad e g; ipsáque figura a e b propter eandem cauſam erit ad figuram a g b vt recta d e ad d g: ergo vt figura a e b d ad figuram a g b d, ita c p o q figura ad i ſ r u figuram; & alternando vt figura a e b d ad ſibi æquiponderantem c p o q, ita figura a g b d ad ſibi æquiponderantem i ſ r u.

Cùm igitur n d brachium ad longitudinem d f ſit vt a e b d ad æquiponderans c p o q ex ſextâ quadraturæ paraboles; & eadem de causâ t d brachium ad d h, ſit vt figura a g b d ad æquiponderans i ſ r u; erit n d brachium ad longitudinem d f, vt t d brachium ad longitudinem d h: ergo alternando vt n d ad t d, vel vt d e ad d g, ita d f ad d h, quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Propoſitionem vigeſimam octauam cum ſequentibus duabus nonnullum eius vſum oſtendentibus adiunximus huic libro quarto, non quod neceſſaria noſtro ſit tetragoniſmo; ſed quod apprimè ei vtilis cum ſit, & aliunde mirabiles ad alia plurima aperiat vias, noluimus

nostram istam inuentionem in tenebris diutius latêre. Cæterùm postulatum illud propositionis Vndecimæ, istudque Vigesimæ octauæ adeo certa existimamus, vt in humanis scientijs (seponimus hac voce diuinitus inspiratas) nihil esse certius putemus.

ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM

LIBER V.

Absolutam circuli, hyperbolæ & reliquorum inde pendentium quadraturã assequens.

PRÆFATIO.

QVÆ in antecedentibus quatuor Libris à nobis inuenta sunt, ea dum de editione istâ ageretur, sola & per se sufficere putarunt docti simul & amici viri, ad hoc vt nonnullo operæ nostræ

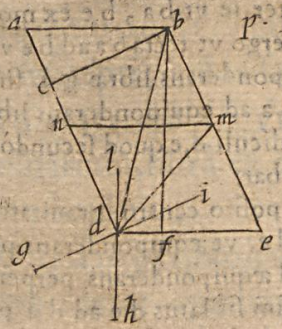
pretio & Matheſeos incremento, etiam ſeorſum vulgarentur, quidquid alijs inuentis noſtris, quorum causâ ſemper meruebamus, eueniret. Hac publicæ vtilitatis perſuaſione adducti Typographo lucubrationes iſtas tradidimus; ſed dum diagrámmata cupro inciduntur, prælo cuduntur, cæteráque abſoluuntur, biennium eſt, tam ſegnes operarum moras nobis nequicquam culpantibus. Interea verò cùm edenda diligentiùs recognoſceremus, eorum ordinem & diſpoſitionem in quibuſdam immutanda cenſuimus, vt iam auctior, ſi non rerum, certè librorum numerus prodeat, quã in prolegomenis deſtinaueramus. Atque vt ſilentio iſtud non diſſimulemus, nihil ferme abfuit quin librum præſentem tanquam ab ortiuum perpetuæ obliuionis

tumulo conderemus, nisi cum emortuum efferremus, nouus ei vitæ halitus subitò inditus apparuisset: quò fit vt tantò carior nobis sit, quantò castæ matri suauior accidit restaurata exanimati summisque propterea doloribus parti fœtûs vita. Hîc quoque, Lector, numeros adhibitos inuenies, planéque agnosces sine illis nihil in præsenti negotio nisi vago quodam & ingrato demonstrandi genere posse definiri.

Propositio I.

Si ex cuiusuis parallelogrammi a b e d angulo quolibet b in latera opposita a d, d e demittantur perpendiculares b c, b f; dico vt b c recta ad b f, ita esse b a rectâ ad b e. Et si in diemetro b d etiâ productâ ponatur centrum gra-

uitatis alicuius magnitudinis, suspendaturque per duas suspensiones quarum perpendicula per centrum librę incedentia sint d a, d e. Dico vt est a b recta ad b e, ita esse posita, æqualitate brachij, æquiponderans perpendiculi d a ad aliud æquiponderans. Et si posito centro grauitatis intra angulum a d e, vt æquiponderans perpendiculi d a ad æquiponderans alterius, ita vicissim fiat d e quælibet eius portio ad rectam d a completoque parallelogrãmo a d e b iũgatur diameter d b; dico in ipsâ d b esse centrũ grauitatis.



p. 503.

Quoniam anguli oppositi ad a & e sunt
34 primi Euc. æquales, & anguli b c a, b f e sunt æquales vt pote recti, erunt triangula b c a, b f e similia; ergo vt a b, b c, ita b e, b f; & alternando vt a b, b e, ita b c, b f, quod erat primo ostendendum.

Rursus excitentur ex puncto d rectæ d g, d h, æquales inuicem, perpendiculares ad rectas d a, d e. Quoniam b c, g i sunt parallelæ, alterni anguli c b d, b d i erunt æquales; ergo posito sinu toto d b, recta c b erit sinus anguli c b d; atqui angulus c d b est in triangulo rectangulo b c d complementum anguli c b d, qui est æqualis ipsi b d i; ergo posito sinu toto d b, sinus complementi anguli b d i est recta b c. Similiter ostenderetur posito sinu toto d b, sinum complementi anguli b d I esse rectam b f. Quoniam ergo æquiponderantia duarum suspensionum per libras g d, d h factarum sunt vt complementi sinus b c, b f ex vndecimâ secundi libri; b c autem & b f sunt inter se vt b a, b e ex modo demonstratis; ergo vt recta b a ad b e vel a d, ita est æquiponderans libræ g d siue perpendiculi d a ad æquiponderans libræ d h siue perpendiculi d, e quod secundò ostendere oportebat.

Demum posito centro grauitatis intra angulum a d e, vt æquiponderans perpendiculi d a ad æquiponderans perpendiculi d e, ita vicissim sit latus d e ad d a parallelogrammi a d c b, centrum verò grauitatis

non sit (si fieri potest) in rectâ d m; ergo completo parallelogrammo d e m n, vt æquiponderans perpendiculi d a ad perpendiculi d e, ita viciſſim ex iam demonſtratis erit latus d e ad d n; ſed ita etiam ponitur eſſe latus d e ad d a; ergo rectæ d a, d n pars & totum ſunt æquales; non igitur centrum grauitatis eſt extra diametrum d b, quod tertiò fuit oſtendendum.

COROLLARIVM.

Si commune vtrique perpendiculo brachium fiat ad aliud, quod inſeruiat perpēdiculo d e, vt ipſum latus a d ad latus d e; manifeſtum eſt ex octauâ ſecundi æquiponderans perpendiculi d e eſſe æquale æquiponderanti perpendiculi d a, poſitâ iſtâ brachiorum inæqualitate.

PROPOSITIO II.

Segmento e d f circuli ex centro c deſcripti, cuius ſubtenſa e f ſit ad diametrum a b vt ternarius ad quinarium, librâ ex e ſuſpensâ, perpendiculo c b, ex m termino diametri d m perpēdicularis ad e f æquiponderat ſpatium æquale

rectangulo cuius baſis ſit e f, altitudo verò æquet ſemidiametri d c tres vigeſimas quintas.



Super a b conſtructum ſit quadratum a u x b; erit punctum m in rectâ u x; ex d m productâ abſciſſa ſit m y ipſi c d æqualis, & intelligatur per u, y, x deſcriptũ u y x ſegmentum parabolæ, cuius baſis u x, diameter m y, vertex y. Intelligatur præterea linea u l x n ita ſe habens ad parabolam u y x, vt quâcunque q z æquidiſtante diametro m y ſecentur in q, o, z & linea u x in p, ſit q o dimidium rectæ p z, & bifariam ſecetur in p.

Quoniam d c, m y ſunt æquales; quæcunque f z æquidiſtans rectæ d c ducatur occurrens baſi in p, parabolæ in z, circulo in

f, diametro a b in i, curuæ u l x n in q & o, erunt tres rectæ d c, f i, q z proportionales, ex demonstratis in tertio libro; ergo vt p i ipsi d c æqualis ad i f, ita i f ad q z: ergo vt i p ad i π semissem rectæ i f, ita tota i f ad q o dimidium rectæ q z aptatum rectæ u x secundum positionem rectæ a u: ergo si π p ponatur libra grammica ex i suspensa, grauia f i, q o vt iacent manentia sibi inuicem quiponderabunt; ergo cùm idipsum eueniat in alijs omnibus æquidistantibus rectæ d c, tota figura v l x n toti a d b c, & pars parti, si sumantur prout intra easdem ordinatim ad diametrum a b applicatas sibi respondent, æquiponderabit. 3. tertij huius in coroll. 3. 6. aut 7 pri. æquip. 28. quarti huius.

Venio iam ad calculũ casûs propositi. Quoniam iunctæ c f quadratum æquat quadrata duarum g f, g c, & g f potest nouem cuiusmodi c f viginti quinque, poterit g c reliquas sexdecim partes quadrati c f; ergo tres rectæ c f, c g, g f sunt longitudine vt quinarius, quaternarius, & ternarius. Per e & ƒ ducantur ordinatæ e k, f z, occurrentes in h, r, s, t, k, i, q, p, o, z, lineis a b, v l, v n, u y; iunctâ k z occurrat rectæ l y in λ. Quoniam latus rectum parabolæ u y z æquale est diametro m y (sunt enim y m, m u æquales) erunt y λ, k λ, y m proportionales: ergo vt y m ad λ k vel m s, hoc est vt quinarius ad ternarium, vel viginti quinque ad quindecim, ita k λ ad λ y: est ergo λ y nouem, cuiusmodi k λ quindecim, 11. primi Conic.

& y m vigintiquinque.

17. quadrat. parab.

Rurſus quoniam ſegmentum k l z y æquale eſt quatuor trientibus rectanguli z λ y, quod triangulo k z y æquale eſt; ſi k λ diuidatur in quindecim partes, rectæ λ z quatuor trientes erunt viginti; ſi ergo λ y nouem partium ducatur in viginti, conficientur centum octoginta: ergo duo trientes rectanguli z λ y ſunt centum octoginta quadrata decimæ quintæ partis rectę λ z; rectangulum autem ſ p z k, cuius latera ſ p triginta, & p z vel m λ ſexdecim, eſt quadringenta octoginta eiuſmodi quadrata, ergo tota figura ſ K y z p æquat eiuſmodi quadrata ſexcenta ſexaginta; ergo cùm ex ſextâ primi figura r t n o q l ſit dimidium figuræ ſ k y z p, figura r t n o q l conſtabit eiuſmodi quadratis trecentis triginta: ergo totidem quadrata librâ ex c ſuſpensâ, perpendiculo c b, pendentia ex m æquiponderant figurę h e d f i c: ſed parallelogrammo e h i f, cuius latus e h eſt viginti, cuiuſmodi h i triginta, & ideo continenti quadrata eiuſdem modi ſexcenta, æquiponderant, (ijſdem poſitis) quadrata ducenta quadraginta (nam vt m c vel d c ad c ę dimidium rectę c g, hoc eſt vt quinque ad duo, ita e h i f ad ſuum æquiponderans) ergo ſegmento e d f g æquiponderant quadrata nonaginta: ſed rectangulum ſub e f triginta, & ſub tribus complectitur nonaginta quadrata: ergo æquiponderans ſeg-

mento e d f est ijsdem positis, rectangulum sub e f & sub partibus tribus cuiusmodi e f complectitur triginta, & c d viginti quinque, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Si segmentum e d f iam computatum ponatur basis portionis cylindri iuxta præscriptum vigesimæ quintæ prioris libri, & rectangulum isti basi æquiponderans fiat basis parallelepipedi eadem cum portione cylindri altitudine prædicti; istud erit, ex ibidem demonstratis, æquale spatio æquiponderantis portioni cylindri iuxta cautiones ibidem adhibitas.

SCHOLIVM.

Expedita magis visa nobis fuit hæc computandi via, desumpta ex demonstratis per libram planam, ideóque eâ hîc vsi sumus; ne verò dubium vllum de libræ istius cum grammicâ consonantia residuum fiat, placet calculum inire æquiponderantis segmento e d f, posito arcu e d f triente circuli, prout eum posuimus in decimanonâ tertij libri aliam epilogismi methodum sectantes.

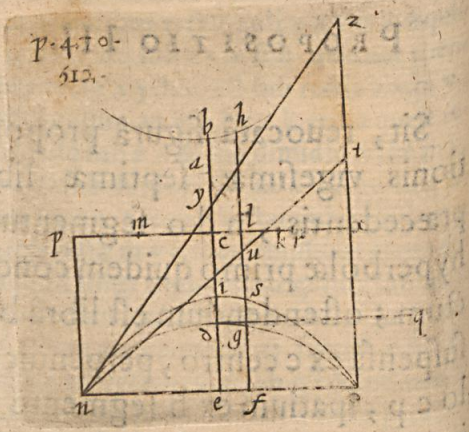
Quoniam c d vel m y est ad h c vel k y potestate vt quatuor ad tria, tres autem rectæ m y, κ λ, λ y sunt proportionales, vt quatuor ad tria, ita erit m y ad λ y. Cùm 20. sexti Euc. in coroll.

igitur ſegmentum k y z λ ſit æquale quatuor trientibus rectanguli z λ y; erit æquale rectangulo ſub z λ & ſub quatuor trientibus rectæ λ y, hoc eſt ſub rectis z λ, m y; rectangulum autem ſ p z k erit æquale rectangulo ſub z λ & ſub dimidio rectæ m y, hoc eſt ſub duplâ rectæ m λ : ergo tota figura ſ p z y κ æquat rectangulum ſub m p & ſub rectæ m y tribus ſemiſſibus : ergo dimidium illius æquat rectangulum ſub m p & ſub tribus quadrantibus rectæ m y vel c d : ergo æquiponderans figuræ e h d f i æquale eſt rectangulo ſub g f & ſub tribus quadrantibus ſemidiametri c d: ſed parallelogrammo e h i f æquiponderat quadrans ipſius e h i f, hoc eſt rectangulum ſub g f & ſub g φ quadrante rectæ c d; ergo ſegmento e d f g æquiponderat rectangulum ſub e g & ſub rectæ c d duobus quadrantibus, hoc eſt rectangulum e g d, quod prorſus conuenit cum epilogiſmo propoſitionis decimænonę tertij libri.

Quod in decimâ octauâ eiuſdem libri tertij oſtenditur, ſtatim ex hoc diagrammate apparet; nam ſegmentum u y x eſt quatuor trientes rectanguli u m y, quod eſt quadratum, cùm latera u m, m y ſint æqualia : ergo duo trientes quadrati u m vel a c æquiponderant ex m ſemicirculo a d b, librâ ex c ſuſpensâ, perpendiculo c b.

PROPOSITIO III.

Sit, reuocatâ figurâ propoſitionis vigeſimæ ſeptimæ libri præcedentis, n d o ſegmentum hyperbolæ primò quidem conditum; oſtendendum eſt librâ b d ſuſpenſâ ex c centro, perpendiculo c p, ſpatium ex b ſegmento vt iacet manenti æquiponderās eſſe æquale trientibus octo quadrati b i. Et ſi ijſdem manentibus recta d e æqualis ſit diametri d b ſeptimæ parti; oſtendendum eſt ſecundò, ſpatium ex b ſegmento n d o æquiponderans (quod alterum ſegmentum hyperbolæ notum vocetur) eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub baſi n o & ſub diametri ſexdecim centeſimis quadrageſimis ſeptimis. Recta verò e o erit dupla rectæ d e.



Sit igitur primò n d o ſegmentum hyperbolæ condictum, & intelligatur c e diuiſa in nouem partes; erit ergo n o duodecim earundem partium; latus autem b d tranſuerſum, erit ad d q directum vt binarius ad vnitatem, vt oſtendimus in priore libro. Quoniam ergo vt b d recta ad d q, id eſt vt binarius ad vnitatem, ita ponitur ex vigeſimâ ſeptimâ citatâ o t recta ad n o, erit o t viginti quatuor, cuiuſmodi n o duodecim; & quoniam vt c e ad n o hoc eſt nouem ad duodecim, ita ponitur o t ad o z, erit o z triginta duarum partium cuiuſmodi c e nouem; ergo e y eſt ſexdecim; ergo ei eſt octo partium: ac proinde c e, c d, c i ſunt in ratione numerorum 9. 3. 1.

pag. 484.

2. ſexti Euc.

Rurſus

Rursus quoniam segmentum parabolæ n i o æquale est quatuor trientibus rectanguli n e i, vel trianguli n i ó; ergo diceratoides figura contenta arcu n i o, rectis n p, o x, & rectâ per i æquidistante basi n o; æqualis est duobus trientibus rectanguli n e i (nam parallelogrammum dictis lineis comprehensum duplum est parallelogrammi n e i) ergo cum e i contineat viginti quatuor partes cuiusmodi e c viginti septem; rectangulum sub n e & sub sexdecim partibus eiusmodi æquabit duos trientes figuræ diceratoidis; & addito duplo rectæ c i, rectangulum sub n e & sub viginti duabus partibus eiusdem modi æquabit totam figuram extrà cauam p c x o i n: rectangulum autem sub n e & sub vndecim eiusmodi æquabit dimidium totius p c x o i n, quod est c i s o x. 17. quadrat. parab.

Rursus quoniam si ponatur axis p x, brachiumque æquet rectam c e, vt c e recta ad dimidium rectæ c d, ita est tota c d ad dimidium rectæ c i, idemque euenit in quacumque aliâ æquidistante rectæ c i, dimidium figuræ extrà cauæ parabolicę aptatum brachio eiusmodi æquiponderabit figuræ exhtrà etiam cauæ hyberbolicæ p x o d n vt iacet manenti ex secundâ parte vigesimæ octauæ prioris libri; ergo rectangulum sub n e & sub vndecim vigesimis septimis rectæ c e æquiponderat figuræ hyperbolicæ p x o d n: sed ijsdem po-

latus toti rectangulo p x o n æquiponderat dimidium ipsius, hoc est rectangulum sub n e & sub e c totâ; ergo rectangulum sub e n & sub sexdecim vigesimis septimis rectæ e c æquiponderat segmento parabolico n d o e. Ergo si brachium longitudinis e c vel viginti septem partium mutetur in brachium longitudinis c d nouem partium, cùm vt nouem ad viginti septem, ita sint sexdecim ad quadraginta octo, æquiponderans segmento hyperbolico n d o, libra ex c suspensa, brachio æquante semidiametrum c d, erit æquale rectangulo sub n e & sub quadraginta octo vigesimis septimis rectæ c e: vel sub n e & sub quadraginta octo decimis octauis axis b d; cùm ergo tres rectæ n e, e d, b d sint æquales inuicem; rectangulum sub n e & sub quadraginta octo decimis octauis ipsius n e, erit æquale octo trientibus quadrati n e, quod erat demonstrandum primo loco.

Secundò recta d e sit æqualis septimæ parti rectæ d b; erit ergo octaua pars totius b e; & quia latus directum d q est hîc dimidium transuersi d b, rectangulum b e d erit duplum quadrati e o; ergo rectangulum sub d e & sub semisse rectæ e b, hoc est sub quadruplâ rectæ d e, æquale est quadrato rectæ e o; ergo tres rectæ e d, e o & quadrupla rectæ e d sunt proportionales; ergo e o recta est dupla rectæ d e.

21. primi Conic.

Rursus sicuti in præcedenti casu ostendimus tres rectas c e, c d, c i esse in ratione numerorum 9. 3. 1. ita in isto ostendemus esse in ratione numerorum 81. 63. 49. Quoniam ergo si c e ponatur octoginta & vnius partium, c i est quadraginta nouem, erit i e triginta duarum: & si c e ponatur mille septingentarum & vnius erit c i mille viginti nouem, & c d mille trecentarum viginti trium, & i e sexcentarum septuaginta duarum: duo ergo trientes rectæ e i erunt quadringentæ quadraginta octo, quæ si addantur ad duplam rectæ c i, hoc est ad bis mille quinquaginta & octo, summa ex vtroque numero conflata erit bis mille quingentæ sex; cuius dimidium est mille ducentæ quinquaginta tres; ergo rectangulum sub n e rectâ & sub mille ducentis quinquaginta tribus, cuiusmodi c d continet mille trecentas viginti tres, est æquale spatio quod librâ ex c suspensâ, perpendiculo c x, brachio æquante rectam c e, æquiponderat figuræ n p x o d; sed toti p n o x æquiponderat rectangulum p n e c: ergo differentia eorum videlicet rectangulum sub n e & sub quadringentis quadraginta octo, cuiusmodi c d continet mille trecentas viginti tres, æquiponderat segmento n d c ijsdem positis. Si ergo brachium æquans rectam c e mutetur in aliud æquans rectam c d, hoc est si vt septem ad nouem ita fiant partes quadringentæ qua-

draginta & octo ad quingentas ſeptuaginta ſex; rectangulum ſub n e & ſub quingentis ſeptuaginta ſex partibus, cuiuſmodi in c d ſunt mille trecentę viginti tres, vel ſub n o & ſub ducentis octoginta octo, quales in ſemidiametro c d ſunt mille trecentæ viginti tres, vel in diametro bis mille ſexcentæ quadraginta ſex, vel ſub ſexdecim cuiuſmodi in diametro centum quadraginta ſeptem, æquiponderat ſegmento n d o, librâ ex c ſuſpensâ, perpendiculo c x, & brachio æquante ſemidiametrum c b.

COROLLARIVM.

Si ſegmenta, quorum æquiponderantia computauimus, vel eorum differentia ponantur baſes cylindraceorum iuxta præſcriptum vigeſimæ quintæ prioris libri; & rectangula computatis æquiponderantibus ęqualia fiant baſes parallelepipedorũ eadem cum cylindraceis altitudiue prædictorum; iſthæc parallelepipeda erunt, vt ex ibidem demonſtratis patet, æqualia ſpatio æquiponderantium cylindraceis iuxta cautiones ibidem adhibitas.

SCHOLIVM PRIMVM.

Occasione tot epilogismorum hic Lectorem monêre insisto, lapsum in ijs pertractandis esse perfacilem, & vehementer timendum calculatori etiam exercitatissimo. Hoc verò diligenter attendi velim, si quis fortasse error in nostris numeris (quamuis contrarium sperem euentum) detegeretur, vtrum vitium in eorum tractatione sistat, an etiam ad ipsam grammicam demonstrationem pertingat; si enim ista rectè procedat, stat veritas quadraturæ, & inde emendari poterunt numeri, quorum vitium tantum excusationis habere censuerunt legum conditores, vt nunquam in rem iudicatam transire voluerint, si quid perperam computatum probari possit.

SCHOLIVM ALTERVM.

Ad inueniendum spatium segmenti hyperbolæ propositis æquipõderãs vsi sumꝰ libra planâ, non quidẽ necessitatis, sed facilitatis maioris causâ; poteramus enim, si placuisset, calculũ perficere ex solis tertij libri principijs in decimâ septimâ eiusdem libri collectis. Porro *ex hoc schemate calculum eorum quæ de hyperbolico xystroide innuimus in præcedenti libro, explorabimus in hunc modum. Quoniam in primo casu ostendimus figuram c i s o x esse vndecim vigesimas septimas rectanguli c o x; semisegmentum e i s o f erit sexdecim reliquæ vigesimæ septimæ; ergo figura c i s o x est ad figuram e i s o f vt vndecim ad sexdecim. Ponatur c x ita secta in l vt c l sit si-*

Prop. 23. Coroll. 3. & prop. 27. in Schol.

l x ſicut ternarius ad quinarium: ergo ex primâ quarti ſi per l agatur l ſ æquidiſtans rectæ i e, erit in rectâ l s centrum grauitatis ſemiſegmenti e i s o. Recta tranſiens per centrũ grauitatis figuræ c x o ſi ſecet rectam e x in r: & rectæ c x biſectio (ita vocare cum Commandino auſus ſum quam Mathematici Græci dicunt διχοτομίαν) ſit k. Erit ergo c l octauæ pars ſiue vndecim octogeſimæ octauæ totius c x; & c l ad l k erit vt portio c x o s i ad portionem e o s i, hoc eſt vt vndecim ad ſexdecim: ergo k r eſt ſexdecim octogeſimæ octauæ totius c x; ergo addito ſemiſſe c k, erit c r ſexaginta octogeſimæ octauæ rectæ c x: ergo vt 88. ad 60. vel vt viginti duo ad quindecim, ita eſt recta c x ad c r: ergo hyperbolicum alterum conoides, de quo egimus in vigeſimâ ſeptimâ citatâ, habet centrum grauitatis in axis c x punctor, ita diuidente ipſum c x, vt c r ad r x ſit ſicut quindecim ad ſeptem.

6. primi æquip.

Præterea quoniam figura c i s o x æquat rectangulum ſub e o & ſub vndecim vigeſimis ſeptimis rectæ c e, hoc eſt, æquat parallelogrammi rectanguli c e o x vndecim vigeſimas ſeptimas; parallelogrammum autem c e o x eſt ad quadratum o x, vt recta c x ad o x ſiue vt binarius ad ternarium; vndecim vigeſimæ ſeptimæ rectanguli c e o x erunt viginti duæ ſeptuageſimæ primæ quadrati x o.

19. decim. Eue. Lem. 3.

Rurſus quoniam vt recta c x ad x o, ſiue vt binarius ad ternarium, ita ſunt viginti duæ ſeptuageſimæ primæ ad vndecim vigeſimas ſep-

timas, parallelepipedum cuius altitudo sit c x & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o, erit æquale parallelepipedo cuius altitudo sit x o, basis vigesimæ duæ septuagesimæ primæ quadrati x o. 24. vndec. Euc.

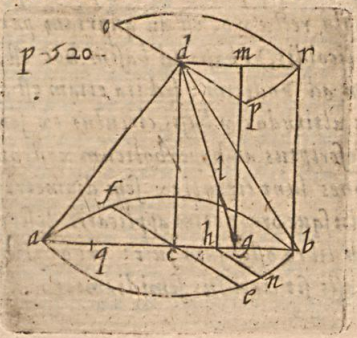
Quoniam ergo prismatoides cuius basis sit c i s o x & altitudo x o æquale est, vt iam ostendimus, parallelepipedo cuius altitudo sit c x, & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o; ipsum autem prismatoides est æquale quartæ parti hyperbolicoidis cuius sectiones sint quadrata rectarum b i, h s aliarumque ordinatim applicatarum ad directam diametrum c x, vt de simili casu ostendimus in quarto libro; erit quarta pars eiusmodi hyperbolicoidis æqualis parallelepipedo cuius altitudo sit c x, basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati o x. propos. 12. & sequet.

Rursus quoniam parallelepipedum cuius altitudo sit recta c x, basis quadratum ex duplâ rectæ x o, habet eandem altitudinem cum parallelepipedo cuius altitudo est c x, & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o; ergo quarta pars parallelepipedi cuius basis est quadratum ex duplâ rectæ x o, est ad quartam partem hyperbolicoidis, vt basis ad basim, hoc est, viginti-septem ad vndecim; sed ita etiam est cylindrus cuius altitudo c x, basis circulus ex semidiametro descriptus, ad hyperbolicum xyſtroides cuius sectiones sunt circuli ex semidiametris x o, l g, e d aliisque ordinatim applicatis descripti, sicut eodem libro ostensum fuit: ergo cylindrus cuius basis sit circulus semidiametro x o descri-

ptus, altitudo c x, eſt ad xyſtroides hyperbolicum ϒ, ϒiginti ſeptem ad ϒndecim.

PROPOSITIO IV.

Si conus plano per axem ſecetur in duos ſemiconos, atque per grauitatis centrum vnius ex ſemiconis ducatur planum parallelum plano per axem; ſemidiameter, quæ in baſi erit perpendicularis ad ſectionem plani per axem, ita ſecabitur ab eiuſmodi plano parallelo, vt portio iacens inter centrum baſis & centrum grauitatis ſemibaſis ſit quadrupla portionis interceptæ inter idem ſemi-baſis centrum & inter parallelum planum iam memoratum.



Sit conus d a b cuius basis sit circulus a f b e; axis d c; planum per axem d c f faciat in circulo sectionem f c e, ad quam ex c excitata sit in plano semicirculi e b f perpendicularis c b; ipsius autem semicirculi centrum grauitatis sit g in semidiametro c b existens ex decimâ tertiâ secundi libri; semiconi autem d f e b centrum grauitatis sit l, atque per l actum sit planũ l h u plano d c f parallelum, secans rectam c b in h. Dico h ita cadere inter c & g, vt recta c g sit rectæ h g quadrupla; siue c h tripla rectæ h g.

Per g & d agatur recta d g. Quoniam figura solida d f e b describitur motu rectæ d f ex puncto d manente, per ambitum semicirculi f b e, erit homœoconica; ac proinde si plano secetur parallelo basi f b e sectio erit similis ipsi f b e (id enim eodem pacto ostendetur, quo ab Appollonio idipsum ostenditur de toto cono) similiterque posita; cumque similes, similiterque sint positæ, recta d g transibit per centrum grauitatis ipsius ex quinto postulato primi libri Archimedei de Æquiponderantibus; ergo per vndecimam libri præcedentis centrum grauitatis figuræ homœoconicæ d f e b erit in rectâ d g; est ergo punctum l in rectâ d g; ergo per corollarium secundum duodecimæ libri eiusdem punctum l ita diuidit rectam d g, vt ipsius g l recta l d sit tripla.

5. primi Conic.

Rurſus quoniam planum trianguli d c g ſecant duo plana inuicem æquidiſtantia per c & l ducta, eorum ſectiones d c, h l in plano d c g factæ, erunt parallelæ; ergo cùm in triangulo d c g lateri d c parallela ſit l h; vt d l ad l g, hoc eſt vt tria ad vnum, ita erit c h ad h g: eſt ergo c h tripla rectæ h g, quod erat oſtendendum.

16. vndec. Euc.

2. ſexti Euc.

COROLLARIVM I.

Præſens demonſtratio perinde locum ſuum obtinet, quamuis triangulum d f e per verticem d actum non eſſet per axem d c, ſed f e eſſet quęuis ordinatim applicata ad diametrum a b: perinde, inquam verum eſt ſi per l agatur l h parallela perpendiculo d c per d verticem coni & per c centrum ellipſeos ducto, rectam c h eſſe triplam rectæ h g. Hactenus etiam demonſtrata pariter vera ſunt: licet d a b foret homœoconicum habens pro baſi ſectionem conicam.

COROLLARIVM. II.

Hinc apertum eſt ſi recta c d manens ſemper parallela rectæ h l circumferatur per ambitum figuræ e c f n b centrum grauitatis portionis cylindrii concluſi ſuperficie ita deſcriptâ eſſe in rectâ g m per g ductâ & æquidiſtante rectæ c d; id

enim eodem planè modo demonstratur, quo ostensum fuit portionis coni centrum grauitatis esse in rectâ g d, vt patebit penitus inspicienti.

COROLLARIVM. III.

Hinc quoque apertum est quadrantem spatii quod portioni cylindri aut cylindracei iam descripti, cuius basis o p r opposita basi f e b transeat per d verticem, æquiponderat librâ ex c suspensâ, esse æquale spatio quod æquiponderat coni, vel homœoconici portioni habēti verticem d, & eandem basim cum portione cylindri, vel cylindracei.

Semidiameter a c ita diuidatur in q, vt a c ad c q sit vt quaternarius ad ternarium. Quoniam conicum vel homœoconicum cuius centrum grauitatis est l, est tertia pars cylindri vel cylindracei eadem basi f c e & eadem altitudine præditi; si intelligantur tria eiusmodi conica vel homœoconica habere idem centrum l, æquiponderans tribus ex q erit ad ipsa tria vt recta c h ad c q, siue vt recta c g ad c a; (nam vt c g, c h ita ponuntur c a, c q; ergo alternando vt c g, c a, ita c h, c q) sed sicut c g recta ad c a, ita est cylindri vel cylindracei pars memorata ad æquiponderās ex a; ergo vt æquiponderans ex q ad magnitudinem compositam ex tribus, ita æ-

5. quarti huius coroll. 5

quiponderans ex a ad cylindri vel cylindracei partem iam dictam ; & alternando æquiponderans ex q eſt ad æquiponderans ex a vt ipſæ ſuſpenſæ magnitudines ; quæ cùm ſint æquales , ipſa æquiponderantia erunt etiam æqualia.

Rurſus quoniam æquiponderans ex q compoſitæ magnitudini æquat æquiponderans ex a cylindri vel cylindracei parti memoratæ, triens iſtius æquiponderantis ex a æquale erit ſpatio quod ex q æquiponderat conico vel homœoconico cuius centrum l : ergo ſi brachium c q mutetur in brachium c a , æquiponderans ex a conico vel homœoconico erit ad æquiponderãs ex q eidem conico vel homœoconico vt eſt q c ad a c , hoc eſt ternarius ad quaternarium : ergo cùm æquiponderans ex q conico vel homœoconico ſit triens vel quatuor vnciæ æquiponderantis ex a cylindri vel cylindracei memoratæ parti, æquiponderãs ex a conico vel homœoconico erit tres vnciæ vel quadrans ſpatij quod ex a æquiponderat cylindri vel cylindracei memoratæ parti.

8. ſec. huius.

PROPOSITIO V.

Sit a c bifariam in b ſecta diameter cuiuſuis ellipſeos vel hy-

perbolæ l c m: recta a k tangat in a ellipsim, illique proinde æquidistans sit l b m. Plano l c m insistat ad rectos angulos planum d b c secans ipsum planum l c m secundum diametrum a c; in eo inuentum sit punctum d vertex coni cuius cum plano l c m sectio communis sit ellipsis vel hyperbola l c m; id enim inueniri potest ex conicis, cùm latus figuræ rectũ quod ibi inter data ponitur habeatur, si vt a c diameter prima ad secundam quam inter data ponimus, ita fiat ipsa secunda ad tertiam quandam quæ ipsum latus rectum æquat, vt ex definitione secundæ diametri constat. Solidum istâ superficie conicâ inclusum & plano per verticem d acto secante planum l c m secundum ordinatim applicatam diametro a c, voco *conflictum ho-*

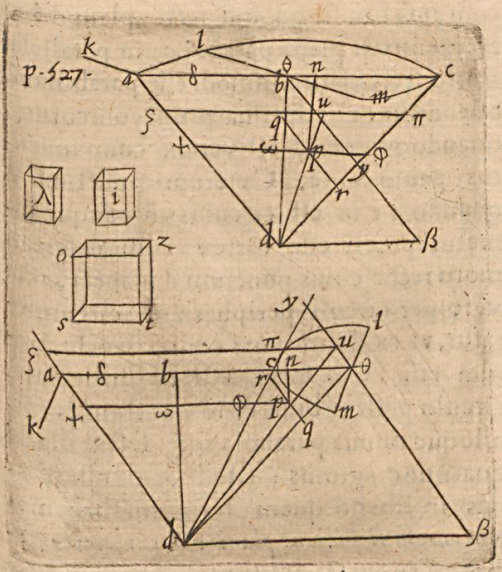
54. & 55. primi conic. 4 definit. secund. prim conic.

mœoconicum: hyperbolicum quidem ſi baſis eius ſit hyperbolæ ſegmentum; ellipticum, ſi ellipſeos; parabolicum ſi fuerit plani plano d a k paralleli ſectio cum ſuperficie homœoconicâ. His ita definitis, propoſitum ſit.

Inuenire parallelepipedum æquale condicto homœoconico parabolico & eius grauitatis centrum; ac proinde ſpatium quod ex centro b æquiponderat ipſi, poſito libræ perpendiculo quod tranſeat per verticem homœoconici & per cētrum ellipſi hyperbolæque commune.

Sit planum l θ y parallelum plano d a k ſecans diametrum a c in quocunque puncto θ citra vel vltra c diametri ipſius terminum poſito, propoſitum verò ſit inuenire parallelepipedum æquale ſolido homœoconico comprehenſo planis d θ l, y θ l & ſuperficie homœoconicâ.

Quoniam recta θ y eſt parallela lateri



d a triãguli d a c per axem, ſectio homœoconici elliptici y θ l m erit parabola cuius diameter θ y; ordinatim applicata l θ m; omniaque plana plano y θ l parallela facient ſectiones parabolicas quarum diameter erit ſectio in triangulo d a c parallela rectæ θ y, & in parte quidem y θ c conſtitutarum baſes erunt ordinatim vtrinque applicatę ad θ c partem diametri ſectionis l c m, eruntque parallelæ ad l m rectam; in parte verò y θ d conſtitutarum baſes erunt ordinatim applicatæ ad rectam θ d, quæ trianguli d l m baſim l m bifariam ſecat in θ, eruntque parallelæ ad ipſam baſim l m

cùm ipsa l m sit quoque sectio plani d θ m incidentis in plana parabolarum parallela. Porro sectionem eiusmodi esse parabolam, ostenditur in vndecimâ primi conicorum, quandoquidem d est vertex coni inuentus paulò antè. Cæterùm punctum d quando l c m est circulus vbicunque sumatur potest esse vertex coni descripti motu rectæ cuius punctum d maneat, ipsa verò per circuli peripheriam circumferatur, vt ex definitione coni palàm fit. Verùm etsi l c m foret ellipsis distincta à circulo posset vbiuis sumi punctum d, nihiloque minùs parabola foret sectio illa de qua nunc agimus; istud demonstramus nos in libello quem scriptum habemus *De communi sectione plani & turbinatæ superficiei ex puncto quiescente à lineâ rectâ per ellipsim, parabolam, & sectiones oppositas circumductâ descriptæ*; eum tamen quamuis paratum nec instituto nostro inutilem in lucem modo non damus, quod theoremate ita extenso carère possit præsens tractatus.

1. definit. lib. prim conic.

Recta θ y ita secetur in u vt sicut ternarius ad binarium ita sit portio y u ad u b; ad hoc ex secundi æquiponderantium propositione 8. vt punctũ u sit centrum parabolæ cuius diameter b y, & basis l m. Iuncta recta d u ita secetur in p, vt d p sit tripla rectæ p u, atque per p agatur p n æquidistans rectæ d b, & occurrens diame-

Constructio problematis.

tro

tro a c in n. Fiat parallelepipedum s z cuius basis s x sit æqualis segmento parabolæ cuius basis l m, diameter θ y, altitudo autem x z æquans trientem altitudinis homœoconici parabolici: atque vt semidiameter a b ad b n, ita fiat s z parallelepipedum, ad λ parallelepipedum. Dico punctum p esse centrum grauitatis homœoconici parabolici; ipsum esse æquale parallelepipedo s z; & solido λ æquale esse graue quod ex a pendens, librâ ex b suspensa, posito perpendiculo b d, æquiponderat homœoconico parabolico vt iacet manenti.

Per p agatur q r parallela rectæ b y occurrens lateribus trianguli θ d y in q & r; sicut ergo θ y recta & diameter segmenti diuisa est in u, ita q r diameter similis segmenti diuisa erit in p; cùm ergo parallelæ ad θ y rectam intra triangulum θ y d sint (vt ostensum est) diametri segmentorum parabolæ similium, ex sectione homœoconici generatorum, & similiter secentur, recta d u transibit per centra grauitatis omnium sectionum; ergo centrum grauitatis homœoconici est in rectâ d u per vndecimam libri antecedentis; & per corollarium secundum duodecimæ erit p centrum grauitatis homœoconici prædicti; quod erat vnum ex propositis. 4. sexti Euc. in Schol.

Rursus quoniam parallelepipedum s z habet basim s z æqualem basi homœoco-

nici, & trientem altitudinis illius; eiuſmodi parallelepipedum erit triens cylindracei præditi eadem altitudine & eadem baſi, vt ex vndecimâ citati libri apertum eſt; ſed vt conſtat ex corollario quinto decimæ octauæ libri eiuſdem, homœoconicum eſt etiam triens eiuſdem cylindracei; ergo homœoconicum & parallelepipedum s z ſunt æqualia, quod erat alterum ex propoſitis.

Denique quoniam perpendiculo b d parallela eſt recta p n, tranſiens per p centrum grauitatis, ipſum homœoconicum eiuſmodi rectâ p n ſuſtentatum manebit vt iacet; ergo vt brachium a b ad longitudinem b n, ita erit homœoconicum pendens ex n ad graue ex a æquiponderans, ſed ita eſt s z ipſi homœocomico æquale ad λ; ergo parallelepipedum λ æquale eſt ſolido, quod ex a pendens æquiponderat hœmœoconico, poſito libræ perpendiculo b d; quod erat tertium ex propoſitis.

6. quadrat. parab.

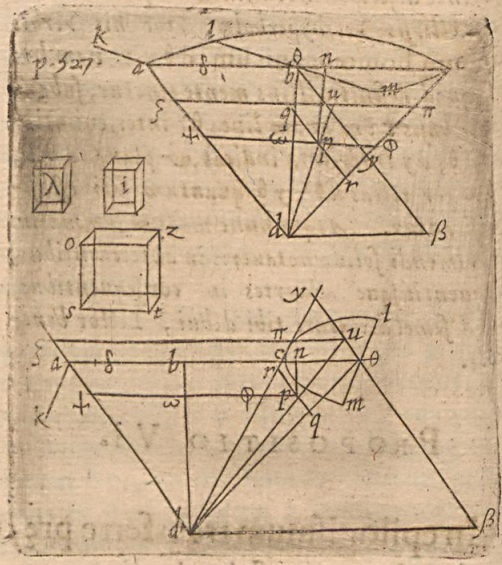
SCHOLIVM.

In deſignandis ſolidis ſemel definitis ſuperfluum & obſcurius exiſtimaui omnes recenſere literas quibus illa conſignantur; ſatis enim putaui eſſe eas adſcribere quæ in plano d a c occurrunt. Exemplo rem declaro. Vt ſolidum homœoconicum denotem comprehenſum planis d θ l, l θ y & ſuperficie conicâ ex vertice

manente descriptâ motu lineæ d a per ambitum l c m ellipsis vel hyperbolæ, vtor his verbis solidum homœoconicum d θ y; vam hoc ipso quod definitio illius mente tenetur, subauditur basis l c m quam linea θ c inter enuntiatas d θ, d y intercepta indicat, & plana d θ l, y θ λ per rectas d θ, y θ quantum satis est significantur. Atque hunc modum summatim exprimendi solida notaueris in antecedentibus, frequentiúsque aduertes in consequentibus, quod semel declarare tibi dibui, Lector beneuole.

Propositio VI.

In epilogismum transferre præcedentis propositionis diagramma, positâ l θ m primùm diametro circuli deinde tribus eius quintis.



Sit igitur primò l c m semicirculus, ordinatimque applicata l m subtendens arcum l c m secet diametrum a c in θ puncto congruente in hoc casu cum centro b: propositum verò sit ratiocinio inuenire parabolicum b d y homœoconicum, & illi æquiponderans librâ ex b centro circuli suspensâ. Per u agatur u π occurrens lateri d c in π, & lateri a d in ξ: per p agatur similiter p ω æquidistans basi a c, & occurrēs lateribus d a, d c in ϕ, & φ, perpēdiculo autē d b in ω. Quoniā c d recta est ad c y vt denarius ad quinarium, hoc est sicuti a c ad θ c, (est enim θ y lateri d a paral-

lela in triãgulo a d c) & quoniã in triãgulo θ y c basi θ c parallella est u π, sicut θ y ad u y, ita erit θ c ad u π; ergo cùm θ y sit ad u y vt quinque ad tria, θ c erit ad u π vt quinque ad tria; eandem ob causam c y erit ad y π vt quinque ad tria; erit ergo ex æquo vt denarius ad ternarium ita d c ad y π; & ita etiam erit a c ad u π; ergo tota d π ad d c est vt denarius ad octonarium, siue vt quinarius ad quaternarium.

Quoniam verò recta d u ita secta est in p vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium; cùm ergo tota a c sit ad u π sicut denarius ad ternarium, siue sicut quadraginta ad duodecim; u π autem ad p φ sit sicut duodecim ad nouem; ex æquo tota a c ad p φ erit sicut quadraginta ad nouem.

Præterea quoniam vt recta d c ad π d, ita est a c basis trianguli a d c, ad parallelam ξ π, cùm recta d c ad d π sit vt quinque ad quatuor, erit a c ad ξ π vt quinque ad quatuor: ergo cũ vt octo ad decẽ ita sit ξ π ad a c, & vt decem ad tria ita sit a c ad u π, erit ex æquo ξ π ad u π, vt octonarius ad ternarium, & semissis rectæ ξ π ad u π erit vt ad ternarium, quaternarius. Quoniam ergo vt ξ π ad u π ita est ↓φ ad φ π ex scholio quartæ sexti Euc. apud Clauũ; erit ↓φ semissis rectæ ↓φ ad φ p sicut est

quaternarius ad ternarium, & per conuerſionem rationis ſicut quaternarius ad vnitatem, ità erit ω φ ad ω p; ergo ω p eſt quadrans rectæ ω φ; ergo φ p eſt ad p ω vt tria ad vnum; ſiue vt nouem ad tria: ſed p φ continet, vt oſtenſum eſt, nouem partes cuiuſmodi a c continet quadraginta, & ſemidiameter uiginti; ergo cuiuſmodi ſemidiameter continet viginti partes, eiuſmodi tres continet recta ω p vel b n. Quoniam verò vt ſemidiameter a b ad b n ita eſt ſolidum cuius centrum grauitatis eſt p, ad æquiponderans ipſi ex a ſuſpenſum; ipſum homœoconicum parabolicum cuius centrum grauitatis eſt p, erit ad æquiponderans ex a, vt viginti ad tria.

Rurſus completo parallelogrãmo a d b θ, perpendiculares ex d in latera a θ, θ β demiſſæ erunt in ratione laterum d a, a θ ex primâ huius. Præterea quoniam ſolidum cuius cẽtrum grauitatis eſt p, eſt homœoconicum, & baſim habet parabolam θ y l m quæ continet duas tertias rectanguli ſub θ y & l m rectis contenti, vt conſtat ex primâ libri antecedentis; altitudo verò eſt perpendicularis ex d in rectam θ y (erit enim hoc ipſo & perpendicularis in planũ parabolæ, cùm planum y θ l ſit rectum ad planum a d c, vt pote incedens per rectam l θ perpendicularem ad planum a d c) ſolidum, cuius centrum p, erit tertia pars parallelepipedi cuius altitudo ſit perpendi-

cularis ex d in rectam θ y demissa, basis quadratum æquale duabus tertiis rectanguli contenti sub rectis y θ, l m.

Vt diameter a c ad θ c portionem sui interceptam ordinatim applicata l m, & puncto c, ita fiat reliqua a θ portio diametri ad θ ♪. Dico parallelepipedum cuius basis sit æqualis duabus nouenis rectanguli contenti sub rectâ θ ♪ & sub l m, altitudo verò sit æqualis perpendiculari ex d in planum circuli demissæ, esse æquale homœoconico parabolico cuius grauitatis centrum est p. Quoniam enim vt a c ad θ c, ita est a d ad θ y, eo quod in triangulo a c d basi a d parallela sit θ y; & vt a c ad θ c, ita ex constructione est a θ ad θ ♪; ergo vt a d ad θ y, ita erit a θ ad θ ♪, & alternando vt a d ad a θ; ita θ y ad θ ♪. ergo vt a d ad a θ, ita erit, posità eadem altitudine l m, rectangulum sub θ y, l m contentum, ad rectangulum sub θ ♪, l m comprehensum. 1. sexti Euc.

Rursus quoniam vt a d recta ad a θ ita est altitudo ex d in basim l c m ad altitudinem ex d in basim y θ l, vti priùs ostendimus; ergo vt altitudo parallelepipedi iam dicti cuius basis est duo trientes rectanguli contenti sub rectis y θ, l m; ad altitudinem ex d in planum l c m, quæ competat alteri parallelepipedo habenti basim duorum trientum rectanguli sub θ ♪, l m contenti; ita reciprocè erit huius basis ad basim illius; ergo sunt æqualia inuicem; ergo triens istius est æqualis 32. vndec. Euc.

homœoconico iam memorato; atqui trienti iſtius æquale eſt parallelepipedum cuius eadem ſit altitudo, baſis autem triens ſit baſeos conſtantis duobus trientibus rectanguli contenti ſub θ ♌, l m: ergo cùm triens duorum trientum ſint duæ nouenæ, parallelepipedum cuius baſis æquet duas nouenas rectanguli ſub θ ♌, l m comprehenſi, & altitudo ſit perpendicularis ex d in planũ l c m, eſt æquale homœoconico iam memorato, ſicut probandum ſuſceperamus; quæ demonſtratio habet locum in vtroque caſu, & in quouis alio perſimili etiam cum l m foret in hyperbolâ.

In primo igitur caſu, quem nunc tractamus, quoniam punctum θ congruit centro b, erit l m diameter, ipſi a c æqualis, ac proinde ſicut θ c eſt ſemiſſis rectæ a c, ita θ ♌ erit ſemiſſis rectæ a θ; eſt ergo θ ♌ quadrans diametri; ergo rectangulum ſub θ ♌ & ſub l m eſt quadrans quadrati quod poteſt diametrum a c; ergo ex corollario vigeſimæ ſexti Euclidis, eſt æquale quadrato ſemidiametri b c; ergo parallelepipedum cuius baſis ſint duæ nouenæ quadrati b c, & altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demiſſam, æquale eſt homœoconico parabolico cuius cẽtrũ p.

Prærerea quòniam vt ſemidiameter a b ad longitudinem b n, hoc eſt vt viginti ad tria, ita libra a n ſuſpẽſa ex b, eſt homœoconicum parabolicum cuius centrum grauitatis p, ad æquiponderans ex a, poſito

perpendiculo b d; vt autem viginti ad tria siue centum octoginta ad viginti septem, ita sunt duæ nouenæ, siue quadraginta centesimæ octogesimæ ad sex centesimas octogesimas, hoc est ad vnam trigesimam: ergo solidũ λ quod homœoconico dicto æquiponderat ex a, æquat parallelepipedũ cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planũ l c m demissa, basis verò sit vna trigesima quadrati quod potest semidiameter b c; quod primò faciendum erat.

Secundo arcus l c m subtendatur rectâ l m quæ sit tres quintæ diametri a c, prout positum fuit in secundæ huius epilogismo; propositum verò sit numeris definire parabolicum θ d y homœocouicum, & illi æquiponderans ex a, librâ de b centro circuli suspensâ.

Eadem constructio quæ in priori casu cum proportione adhibeatur, eademque calculi methodus, iuxta quam π y continebit tres partes, cuiusmodi quinque, & cuiusmodi d c quæ decupla est rectæ y c, complectitur quinquaginta: ergo sicut quinquaginta ad tria, ita est d c ad π y, & ita etiam est a c ad π u: ergo d c ad d π est vt quinquaginta ad quadraginta octo, vel vt viginti quinque ad viginti quatuor. Quoniam ergo recta d u ita secta est in p, vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium. Cùm ergo tota a c sit ad u π sicut quinquaginta ad tria, vel ducenta ad

duodecim; u π autem ſit ad p φ ſicut quatuor ad tria, vel duodecim ad nouem; erit ex æquo vt ducenta ad nouem, ita a c recta ad p φ.

Præterea quoniam vt d c ad π d, ita eſt a c baſis trianguli a d c ad parallelam ξ π, cùm recta d c ad π d ſit vt viginti quinque ad viginti quatuor, erit a c ad ξ π vt viginti quinque ad vigintiquatuor, vel vt quinquaginta ad quadraginta octo: ergo cùm vt quadraginta octo ad quinquaginta, ita ſit ξ π ad a c, & vt quinquaginta ad tria ita ſit a c ad u π, erit ex æquo vt quadraginta octo ad tria, ita recta ξ π ad u π. Rurſus quoniam vt ξ π ad u π, ita eſt ↓ φ ad p φ ex ſcholio Clauij, erit (occurſu rectarum d b, ↓ φ poſito in ω) ω φ ſemiſſis rectæ ↓ φ ad p φ vt viginti quatuor ad tria, vel vt octo ad vnum: ergo diuidendo vt ſeptem ad vnum, vel ſexaginta tria ad nouem, ita ω p ad p φ; ſed p φ continet, vt oſtenſum eſt, nouem partes circuli a c ducentas, & ſemidiameter centenas; ergo ex æquo cuiuſmodi ſemidiameter centenas continet, eiuſmodi ω p vel b n complectitur ſexaginta tres.

4. ſexti Euc.

Rurſus quoniam recta θ c eſt decima pars rectæ a c, & vt a c ad θ c ita eſt a θ ad θ ♪, erit θ ♪ nouem centenæ partes diametri a c; ergo parallelepipedum cuius baſis ſint duæ nouenæ rectanguli contenti ſub l m

tribus quintis diametri a c, & sub nouem centesimis diametri eiusdem, altitudo verò æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam æquale est in secundo casu homœoconico cuius centrum p. Cùm ergo duæ nouenæ centesimarum nouem sint vna quinquagesima; basis eiusmodi parallelepipedi erit rectangulum sub l m & sub vnâ quinquagesimâ diametri, vel vnâ vigesimâ quintâ semidiametri.

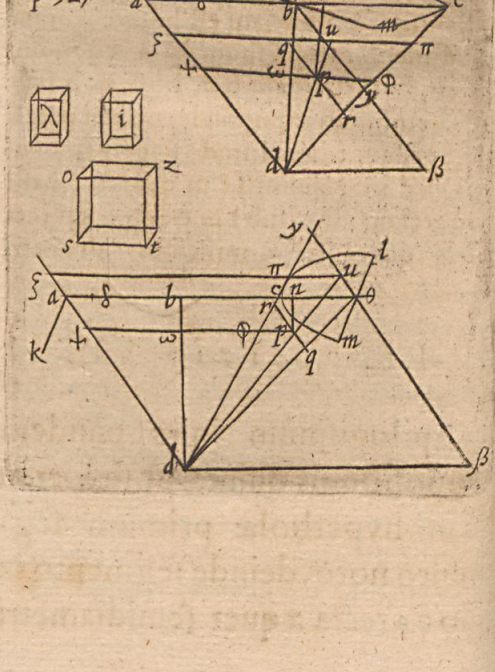
Rursus quoniam vt a b ad b n, hoc est vt centum ad sexaginta tria, ità est vna quinquagesima ad sexaginta tres quinquiesmillesimas, & ita etiam est homœoconicũ iam dimensum ad λ suum ex a æquiponderans, perpendiculo b d, librâ ex b suspensâ; eiusmodi æquiponderans erit parallelepipedum cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, basis verò rectangulum sub l m & sub sexaginta tribus quinquies - millesimis diametri a c.

PROPOSITIO VII.

Epilogismum inire eiusdem propositionis quintæ posito arcu l c m hyperbolæ primùm segmento noto, deinde segmento in quo c θ recta æquet semidiametri

b c duas ſeptimas partes prout poſuimus in tertiâ.

Sit igitur l c m ſegmentum hyperbolæ notum, id eſt c θ, θ l, a c ſint inuicem æquales, ſitque condicta l θ perpendicularis ad c θ; propoſitum verò ſit computare parabolicum θ d y homœoconicum, & illi ex a æquiponderans librâ ex b centro hyperbolę ſuſpensâ, perpendiculo b d.



Eadem constructio, quæ in proximè superioris propositionis duplici casu, cum proportione ponatur. Quoniam c d recta est ad c y, vt a c recta ad θ c, erunt c d, c y æquales, cũ a c, θ c ponantur etiã æquales in isto casu. Præterea sicut in prioris propositionis duplici casu ostensum est, y π continebit tres partes, cuiusmodi y c quinque complectitur; ergo cùm y c, d c sint æquales, sicut quinque ad tria ita est d c ad π y, & ita etiã est a c ad π u: ergo d c ad d π est vt quinque ad septem: quoniam verò recta d u ita secta est in p vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium, vel duodecim ad nouem. Cùm ergo tota a c sit ad u π sicut quinarius ad ternarium, hoc est sicut viginti ad duodecim; u π autem sit ad π φ sicut quaternarius ad ternarium, hoc est sicut duodecim ad nouem; ex æquo tota a c ad p φ erit sicut viginti ad nouem; vel quadraginta ad octodecim.

Rursus quoniam vt d c ad π d, ita est a c basis trianguli a d c ad parallelam ξ π; cũ recta d c ad π d sit vt quinque ad septem, erit a c ad π ξ vt quinque ad septem: ergo cùm vt septem ad quinque ita sit π ξ ad a c, & vt quinque ad tria ita sit a c ad u π, erit ex æquo π ξ ad u π, vt septem ad tria. Quoniam ergo vt ξ π ad u π, ita est ↓ φ ad p φ ex Scholio Clauij; erit (occursu rectarum d b, ↓ φ posito in ω) ω φ semissis rectæ 4. sexti Euc.

♄♀ ad ♀ p ſicut eſt ſeptenarius ad ſenarium: & cõponendo vt tredecim ad ſex, vel vt triginta nouẽ ad octodecim ita ☉p ad ♀p: ſed ♀p continet, vt oſtenſum eſt, octodecim cuiuſmodi a c complectitur quadraginta, & ſemidiameter a b viginti: ergo ex æquo vt triginta nouem ad viginti, ita eſt ☉p vel b n ad a b ſemidiametrũ. Quoniam verò librâ ex b ſuſpensâ perpendiculo b d, vt ſemidiameter a b ad b n, ita eſt ſolidum cuius centrum grauitatis eſt p, ad æquiponderans ipſi ex a ſuſpenſum; ipſum homœoconicum parabolicum cuius grauitatis centrum eſt p, erit ad æquiponderans ex a vt viginti ad triginta nouem.

Rurſus quoniam rectæ θc, a c ſunt æquales, & vt a c ad θc, ita eſt aθ ad θ♌, erit θ ♌ ipſi θa æqualis: ergo parallelepipedũ cuius baſis ſint duæ nouenæ rectanguli contenti ſub l m duplâ diametri a c, & ſub a θ duplâ quoque eiuſdem diametri a c, hoc eſt, ſint duæ nouenę quadrati quod poteſt dupla rectæ a c, altitudo verò æquet perpendicularem ex d in planum l c m demiſſam, æquale eſt homœoconico parabolico cuius centrum p: ergo cùm quadratum aθ ſit quadruplum quadrati a c, parallelepipedum cuius baſis ſint octo nouenæ quadrati a c, altitudo verò ſit perpendicularis ex d in planũ l c m demiſſa æquale eſt homœo-

conico parabolico cuius centrum p : ergo cum quadratum a θ sit quadruplum quadrati a c, parallelepipedum cuius basis sint octo nouenæ quadrati a c, altitudo verò sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, æquale est homœoconico parabolico cuius centrum p. 20. sexti Euc. in coroll.

Præterea quoniam vt semidiameter a b ad longitudinem b n, hoc est vt viginti ad triginta nouem, ita librâ suspensâ ex b, perpendiculo b d, est homœoconicum parabolicum centro p affectum, ad æquiponderans ex a: vt autem viginti ad triginta nouem ita sunt octo nouenæ ad viginti sex decimas quintas : ergo homœoconicó iam dicto solidum λ æquiponderans ex a æquat parallelepipedum cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, basis verò sit viginti sex decimæ quintę quadrati a c.

Secundò recta c θ sit semidiametri b c duæ septimæ. Cùm iste casus non differat à priore nisi ὑλικῶς & vt vulgò dicitur *materialiter*, satis esse duxi summam epilogismi referre. Inuenietur ergo recta d c ad π y, item a c ad π u esse vt triginta quinque ad tria, & d c ad d π vt triginta quinque ad triginta septem: sed vt d c ad d π, ita a c ad π ξ : ergo π ξ ad a c est vt triginta septem ad triginta quinque : sed vt triginta quinque ad tria, ita est a c ad π u: ergo ex æquo vt triginta septē ad tria, ita est ξ π ad π u, &

ψφ ad φp: ergo vt triginta septem ad sex, ita ωφ ad φp, & componendo vt quadragintatria ad sex, ita ωp, ad φp.

Rursus quoniam a c ad π u est vt triginta quinque ad tria, vel centum quadraginta ad duodecim: π u autem ad φp est vt duodecim ad nouem, erit ex æquo a c ad pφ vt centum quadraginta ad nouem, & a b ad pφ vt septuaginta ad nouem. Præterea quoniam a b ad pφ est vt septuaginta ad nouē vel vt quadringēta viginti ad quinquaginta quatuor: pφ autem ad ωp est vt sex ad quadraginta tria, vel vt quinquaginta quatuor ad trecenta octoginta septem, ergo ex ęquo a b ad ωp vel b n erit vt quadringenta viginti ad trecenta octoginta septem.

Rursus quoniam a c ad cθ est vt septem ad vnum, & vt a c ad cθ, ita est θa ad θδ, erit θδ octo, cuiusmodi a c quadraginta nouem: & duę nouenę rectę θδ erunt sexdecim, cuiusmodi a c quadringenta quadraginta & vnum: ergo parallelepipedum cuius basis sit rectangulum sub l m & sub sexdecim quadringentesimis quadragesimis vnis diametri a c, altitudo verò perpendicularis ex d in planum l c m est æquale homœoconico parabolico cuius centrum p. Quoniam ergo vt a b brachiū ad longitudinem b n, ita est homœoconicum cuius centrum p ad suum ex a æquipouderans, librâ ex b suspensâ, posito perpen-

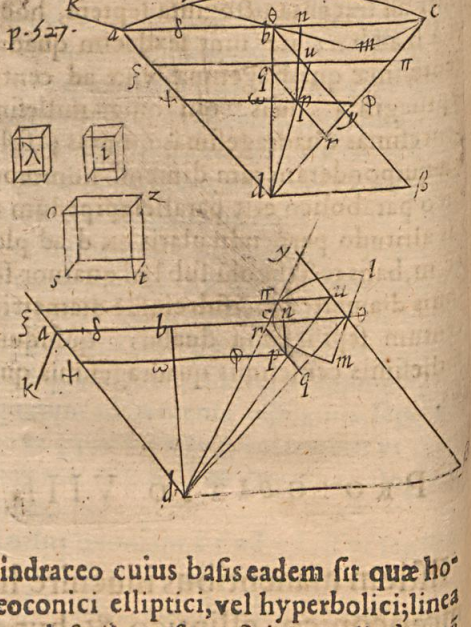
pendiculo d b; vt autem quadringenta viginti ad trecenta octoginta septem, hoc est vt a b ad b n, ita sunt sexdecim quadringentesimæ quadragesimæ vnæ ad centum septuaginta duas quinquies-millesimas centesimas quadragesimas quintas; solidū λ æquiponderans iam dimenso homœoconico parabolico erit parallelepipedum cuius altitudo perpendicularis ex d ad planū l c m, basis rectangulū sub l m quatuor septimis diametri a c, & sub eiusdē diametri a c centum septuaginta duabus quinquies-millesimis centesimis quadragesimis quintis.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem manentibus inuenire homœoconico elliptico & hyperbolico æquiponderans, posito libræ perpendiculo quod transeat per verticem homœoconici & per centrum ellipsi hyperbolæque commune.

Inueniatur ex præscripto vigesimæ quintæ libri quarti parallelepipedum s z æquale solido quod ex a pendens æquiponderat

p. 527.



cylindraceo cuius baſis eadem ſit quæ homœoconici elliptici, vel hyperbolici; linea autem deſcribens ſuperficiem cylindraceã ſit parallela libræ perpendiculo d b. Dico quadrãtem eiuſcemodi parallelepipedi eſſe æquale ſolido quod homœoconico elliptico, vel hyperbolico æquiponderat ex a pendens iiſdem poſitis. *Iſtud apertum eſt ex corollario tertio quartæ propoſitionis.*

COROLLARIVM I.

Quoniam per quintam inuentum eſt ſolidum ∧ quod iiſdem poſitis æquiponderat

homœoconico parabolico ; & ex præsenti inuenta est quarta pars solidi s z, quæ æquiponderat homœoconico elliptico aut hyperbolico; si sumatur æquiponderantium differentia i, apertum est spatium i æquiponderare differentiæ qua homœoconicum parabolicum d l m θ y contentum planis d θ m, y θ m & superficie homœoconicâ superatur ab elliptico d θ l c m contento superficie homœoconicâ, & planis d θ l, l c m : vel qua hyperbolicum superatur à parabolico. Tradita igitur est methodus inueniendi, posito eodem perpendiculo, spatium i quod ex a pendens æquiponderet differentiæ modo memoratæ, quam *conditam* voco, & quæ continetur superficie homœoconicâ & planis y θ l, l c m.

COROLLARIVM. II.

Cùm ex vigesimâ quintâ prioris libri, in primo casu propositionis sextæ æquiponderans semicylindro sit parallelepipedum cuius altitudo est perpendicularis ex vertice d in planum l c m demissa, & basis duo trientes quadrati quod potest semidiameter; æquiponderans semicono cuius vertex d, erit parallelepipedum eadem altitudine constructum, cuius basis sit quadrans duorum trientum, id est sit sextans quadra-

ti ex ſemidiametro. Quoniam ergo ſextam æquat quinque trigeſimas, planè conſtat deductâ vnâ trigeſimâ quæ ex huius ſextâ æquiponderat homœoconico parabolico, relinqui quatuor trigeſimas vel duas decimas quintas eiuſdem quadrati pro baſi parallelepipedi eadem altitudine conſtructi & æquiponderantis differentiæ conditæ in primo caſu allegato, quãdo nimirum l c m eſt ſemicirculus.

At in ſecnndo quando ordinatim applicata l m eſt tres quintę diametri a c, cùm æquiponderans portioni cylindri eadem baſi præditæ ſit ex corollario ſecundæ parallelepipedum cuius altitudo eſt perpendicularis ex d in planum l c m, baſis verò rectangulum comprehenſum ſub l m & ſub tribus vigeſimis quintis ſemidiametri, aut ſub tribus quinquageſimis diametri; quadrans trium quinquagenarum erit tres ducenteſimę. Quoniam ergo tres ducenteſimæ æquant ſeptuaginta quinque quinquies-milleſimas, liquet deductis ſexagintą tribus eiuſdem modi ſub quibus & ſub eadem l m baſis parallelepipedi λ altitudine iam memoratâ præditi, comprehenditur ex huius ſextâ, relinqui duodecim quinquies-milleſimas, hoc eſt tres milleſimas ducenteſimas quinquageſimas diametri a c, ſub quibus & ſub eadem l m comprehendatur baſis parallelepipedi eadem altitudine prædiți, & æquiponderantis differentiæ condi-

ctæ in secundo casu sextæ propositionis iam laudatæ.

Similiter cùm in primo casu septimæ æquiponderans portioni cylindracei eadem basi præditæ sit ex corollario tertiæ huius libri, vel ex corollario quarto vigesimæ quintæ antecedentis libri, parallelepipedũ cuius altitudo est perpendicularis ex d in planum l c m, basis verò octo trientes quadrati quod potest diameter a c; quadrans octo trientum erũt duo trientes. Quoniam ergo duo trientes æquant decem decimas quintas, manifestum est si eæ deducantur de parallelepipedo λ, hoc est ex septimâ iam laudatâ de viginti sex decimis quintis eiusdem quadrati a c, relinqui sexdecim decimas quintas eiusdem quadrati a c, quæ æquiponderent differentiæ conditæ.

Demum cùm in secundo casu eiusdem septimæ æquiponderans portioni cylindracei eadem basi l c m, qua homœoconicum hyperbolicum d c l m præditæ, sit ex corollario tertiæ parallelepipedum cuius altitudo est perpendicularis ex d in planum l c m demissa; basis verò rectangulum comprehẽsum sub m l & sub diametri a c sexdecim centesimis quadragesimis septimis; quadrans erit quatuor eiusmodi partes, ac proinde parallelepipedum dictâ iam altitudine constructum, & habens basim æqualem tectãgulo sub m l & sub quatuor centesimis quadragesimis septimis diametri a c contento. Quoniam ergo quatuor cen-

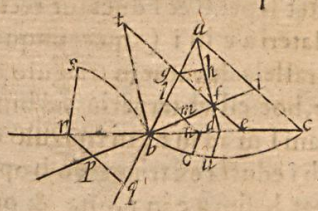
teſimæ quadrageſimæ ſeptimæ æquant centum quadraginta quinquies-milleſimas centeſimas quadrageſimas quintas, apertũ eſt ſi eæ deducãtur de parallelepipedi λ baſi, hoc eſt, ex ſeptimâ iam laudatâ, de centum ſcptuaginta duabus eiuſdem menſuræ partibus, relinqui triginta duas quinquies milleſimas centeſimas quadrageſimas quintas diametri a c, ſub quibus & ſub m l comprehenſum rectangulum ſit baſis parallelepipedi dictâ altitudine erecti, & quod differentiæ condictæ æquiponderet.

SCHOLIVM.

In corollario primo iuſsimus ſumi differentiam ſolidi λ & quartæ partis s z vt haberetur æquiponderans differentiæ condictæ; iſtud verò intelligi debet quando brachium libræ ſuſtinentis homœoconicum parabolicum eſt ad eaſdem partes obuerſum ad quas brachium libræ ſuſtinentis homœoconicum ellipticum aut hyperbolicum: ſi enim ad oppoſitas partes brachia forent conuerſa, ſumma ex quartâ parte ſolidi s z & ex ſolido λ exhiberet æquiponderans quæſitum. Prætermiſimus tamen iſtum caſum, quia nobis neceſſarius non eſt ad præſentem tetragoniſmum, vt ex demonſtrandis patebit, aliunde verò tot caſuum multitudine legentis attentio & animi vigor opprimi ſolet.

Propositio IX.

Sit triangulum quodcunque b a c cuius basim b c bifariam secet a d ex angulo a opposito educta; sit item vt octonarius ad quinarium ita b c ad b e, perque e acta sit e g æquidistans lateri e c, occurrens rectæ a d in f, & lateri b a in g. Ostendendum est vt se habet quaternarius ad vnitatem, ita esse rectam a d ad d f, & vt se habet ternarius ad binarium ita esse g f ad f e.



Quoniam in triangulo a d c lateri a c parallela est f e, ergo vt c d ad d e, id est vt quaternarius ad vnitatem, ita est a d, ad d f. Per g agatur g h parallela rectæ b c occurrens in h rectę a d. Quoniam in triangulo a b c lateri a c parallela est g e, vt b c ad e c, ideſt vt quinarius ad ternariũ, ita b g, ad g a: similiter quia in triangulo a b d lateri b d parallela est g h, vt b g, ad g a, ideſt vt quinarius ad ternarium, ita d h ad h a: ergo cùm diuisâ d a in octo partes, recta d f contineat duas, recta h a tres, reſidua h f continebit etiam tres; ergo vt ternarius ad binarium, ita h f ad f d: ſed vt h f ad f d, ita g f ad f e (eò quòd triangula g f h, e f d sint similia) ergo vt ternarius ad binarium, ita g f ad f e: ergo d f est quadrans rectæ a d, & g f ad f e est vt ternarius ad binarium, quod erat oſtendendum.

2. ſexti Euc.

COROLLARIVM. I.

Hinc patet ſi per b & f ducatur recta b f occurrens lateri a c in i (quæcunque l n rectæ g l parallela ducatur in triãgulo a b c) vt g f ad f e, hoc est vt ternarius ad binariũ, ita esse rectam l m ad m n; in triãgulo enim a b c, recta b i educta ex triangulo b oppoſito ſicut ſecat baſim a c in i, ita & omnes ipſi baſi parallelas, quarum vna est g e; ſed g f ad f e est vt ternarius ad binarium: ergo &c.

COROLLARIVM. II.

Si a b c sit triangulum per axem homœoconicæ figuræ, cuius basis sit ellipsis b o c, vel hyperbola b s circa diametrum b c descripta, cuius coniugata sit d u: & si eiusmodi solidum homœoconicum secetur plano quocunque l n o, vel q r s cuius cum triangulo a b c vel r b q sectio sit recta l n vel q r æquidistans lateri a c, & cum basi sit recta n o vel r s æquidistans rectæ d u; manifestum est sectionem plani l n o vel q r s cum homœoconico elliptico vel hyperbolico habere centrum grauitatis in rectâ i b productâ. Ostensum est enim in quintâ sectiones istas esse parabolas, quarũ diametri sint l n, q r: ergo cum l n, q r ita sectæ sint in m, p vt portiones l m, q p sint ad portiones m n, p r sicuti ternarius ad binarium, segmenta eiusmodi parabolarum habebunt centrum grauitatis in punctis m & p, ex octauâ secundi Æquiponderantium Archimedis.

COROLLARIVM III.

Inde vltèriùs efficitur centrum grauitatis differentiæ conditæ de qua agit corollarium primum præcedentis esse in rectâ i b p; cum enim omnes eius sectiones cum plano parallelo ipsi l n o habeant centrum

grauitatis in rectâ i b p, tota differentia habebit centrum grauitatis in eâdem i b p ex vndecimâ libri quarti.

COROLLARIVM. IV.

Si per b ducatur recta b t æquidiſtans rectæ d a, & occurrens rectæ e f in t, oſtendi ex dictis poteſt rectam f t eſſe lateri a c æqualem, rectam verò b t eſſe ad d a, vt eſt quinarius ad quaternarium. quoniam enim in triangulo t b e baſi t b parallela eſt d f; ſicut b d eſt quintupla rectæ d e, ita b t erit quintupla rectæ d f; ſed d f eſt quadrans rectæ d a; ergo recta b t eſt ad rectam d a vt quinarius ad quaternarium. Rurſus quoniã in triangulo a d c lateri a c parallela eſt f e; ſicut a d ad f d, ita erit a c ad f e; ſed a d ad f d eſt vt quaternarius ad vnitatem; ergo a c ad f e eſt vt quaternarius ad vnitatem, ſiue vt recta b d ad d e: ſed vt recta b d ad d e, ita eſt t f ad f e (eò quòd in triangulo t b e lateri t b parallela ſit f d) ergo recta t f æqualis eſt lateri a c; ac proinde recta t f ad t b eſt vt recta a c ad quinque quadrantes rectæ a d.

4. ſexti Euc. in coroll.

2. ſexti Euc.

9. quinti Euc.

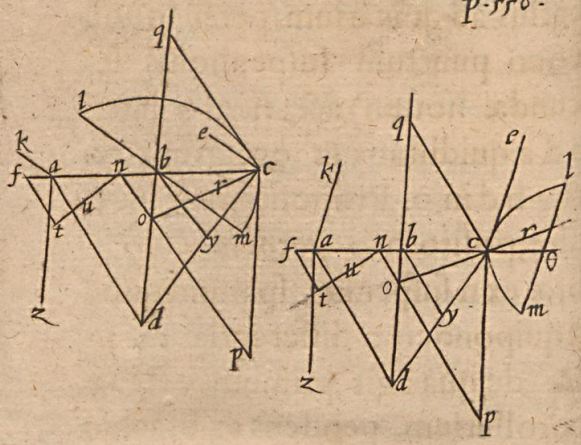
PROPOSITIO X.

Reuocatâ figurâ propoſitionis quintæ, ita ſecta ſit c a diameter in

n, vt ipsa c a sit ad c n sicuti octonarius ad quinarium; per n (quod voco punctum suspensionis secundæ notum) acta sit n o lateri a d æquidistans & occurrens rectæ b d in o. Proposítum sit inuenire, posito n o perpendiculo libræ ex n suspensæ, spatium quod æquiponderet differentiæ *conditæ* de qua agit primum octauæ corollarium, pendens ex brachio ęquante perpendicularem cadentem ex a in rectam b y & ex centro b eductam parallelôs lateri a d.

Vt quatuor ad quinque ita fiat solidum i inuentum in primo iam allegato corollario octauæ propositionis ad solidum s: ad n o ex n excitetur perpendicularis n t æqualis perpendiculari cadenti ex a in rectâ y b. Dico spatium quod, librâ t n suspensâ ex n, pendens ext æquiponderat differentiæ conditæ vt iacet manenti & sustentatæ à librâ t n esse æquale solido s.

p. 556.



i. x. s.
λ. g.

Perpendiculari ex a in rectam d b demiſſæ abſcindatur ex rectâ n t æqualis n u: item vt latus a d ad quinque quadrantes rectæ b d ita fiat ſolidum i ad ſolidum x: præterea per c agatur c p æquidiſtans rectæ b d, cui n o producta occurrat in p, & compleatur p o q c parallelogrammum, iungaturque eius diameter o c. Quoniam ex nonæ corollario tertio differentia condicta habet centrum grauitatis in recta o c r, quæ eſt diameter parallelogrammi p o q c producta; & quoniam poſito perpendiculo o d, brachio libræ æquante rectam n u, æquiponderans differentiæ condictæ eſt ſo-

lidum i: vt latus c q vel o p ad latus c p, ita erit ex primâ huius æquiponderans i respondens perpendiculo o d, ad æquiponderans ex u, quod perpendiculo n o respondet: sed o p latus ad c p est vt latus a d ad qninque quadrantes rectę b d ex quarto corollario præcedentis: ergo vt latus a d ad quinque quadrantes rectæ b d, ita est solidum i ad æquiponderans ex u: sed ita etiam est solidum i ad solidum x: ergo æquiponderans ex u æquale est solido x. 9. quinti Euc.

Rursus quoniam a d, b y sunt parallelæ, perpendicularis ex a in rectam b y cadens æqualis erit perpendiculari ex b in rectam a d cadenti: & quoniam perpendicularis ex b ad rectam a d demissa se habet ad perpendicularem quæ ex a ad rectam b d demissa fuerit, sicuti se habet d b recta ad rectam a d (sunt enim b d, a d sinus toti, & perpendiculares sinus recti eiusdem anguli a d b; ergo vt sinus toti sine radii, ita sinus ipsi recti) brachium libræ interceptum perpendiculis a d, b y ex recta a b portionem semidiametro a b æqualem auferentibus, se habebit ad aliud brachium interceptum perpendiculis b d, a z ex rectâ a b portionem semidiametro a b æqualem auferentibus, vt se habet recta b d ad a d: ergo vt recta b d ad d a, ita est brachium n t ad n u; ergo per octauam secundi libri vt recta b d ad d a ita est x spatium ex u pendens

æquiponderanſque differentiæ condictæ, ad ſpatium ex t pendens eidemque æquiponderans differentiæ; illud ſit λ.

Præterea quoniam vt ſolidum i ad ſolidũ x, ita ponitur recta a d ad quinque quadrantes rectæ d b; & vt ſolidum x ad ſolidum λ, ita oſtẽſum eſt eſſe rectam b d ad d a: eſt ergo perturbata ratio iſtarum magnitudinum, atque ſolidum i ad ſolidum λ erit vt recta d b ad quinque quadrantes ipſius d b; eſt ergo ſolidum λ æquale quinque quadrantibus ſolidi i; ſed ſolidum s ponitur etiam æquale quinque quadrantibus ſolidi i; ergo ſolida λ & s ſunt æqualia inuicem: ergo ſolidum s pendens ex t æquiponderat differentiæ condictę, poſito libręperpendiculo n o: ergo inuentum eſt ſolidum s prout iuſſum fuerat.

COROLLARIVM. I.

Si per t agatur t f recta ęquidiſtans lateri a d, occurrens diametro b a productæ in f, patet rectam n f eſſe æqualem rectæ a b: cùm enim ponamus rectam n t eſſe æqualem interuallo rectarum a d, b y; & cũm rectæ f t, n o ęquidiſtent eodem interuallo, ergo rectæ b a, n f erunt æquales; ac proinde ablatâ eadem a n, reſiduæ b n, a f erunt inuicem ęquales; erit etgo f a quadrans ſemidiametri a b.

10. ſexti Euc.

COROLLARIVM II.

Quoniam in corollario secundo octauæ statuimus quando basis l c m est semicirculus, solidum i esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem cadentem ex d in planum l c m, basis verò constet quatuor trigesimis quadrati b c; ex præsenti apertè sequitur librâ ex n suspensâ per n o perpendiculum, solidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ conductæ, esse æquale parallelepipedo eiusdem altitudinis, habenti basim conflatam ex quinque trigesimis quadrati b c; sed quinque trigesimæ æquant sextantem; ergo parallelepipedi æqualis solido s basis est sextans quadrati b c, & altitudo æquat perpendicularem quæ ex d in planum ellipseos vel hyperbolæ cadit.

Similiter quoniam in eodem corollario concluſimus quando l m est tres quintæ diametri a c in circulo ex centro b descripto, solidum i esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m, basis verò rectangulum sub l m & sub tribus millesimis ducentesimis quinquagesimis diametri a c: ex præsenti sequitur librâ ex n suspensâ, perpendiculo n o, solidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ conductæ, esse æquale parallelepipedo eiusdem altitudinis habenti

baſim rectangulum ſub rectâ l m & ſub tribus milleſimis diametri a c comprehenſum.

Item quia in eodem corollario ſtatuimus quando l c m eſt ſegmentum hyperbolæ notum iuxta primum ſeptimæ caſum, ſolidum i eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem cadentem ex d in planum l c m, baſis verò ſexdecim decimas quintas quadrati a c: ex præſenti colligitur librâ ex n ſuſpenſâ, perpendiculo n o, ſolidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ conditæ, eſſe æquale parallelepipedo eiuſdem altitudinis habenti baſim quatuor trientes quadrati a c.

Poſtremò quandoquidem in eodem corollario probauimus, quando l c m eſt alterum hyperbolæ ſegmentum notum iuxta ſecundum ſeptimæ caſum, ſolidum i eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demiſſam, baſis verò ſit rectangulum ſub l m & ſub triginta duabus quinquies milleſimis centeſimis quadrageſimis quintis diametri ac; ex præſenti ſequitur librâ ex n ſuſpenſâ, perpendiculo n o, ſolidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ conditæ, eſſe æquale parallelepipedo eiuſdem altitudinis habenti baſim rectangulum ſub rectâ l m & ſub octo milleſimis vigeſimis nonis diametri a c comprehenſum.

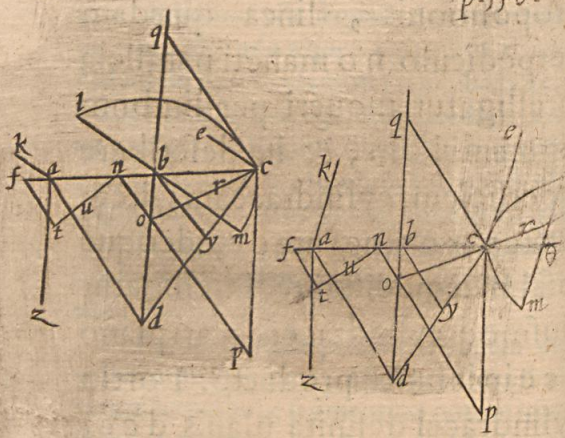
Propositio XI.

Resumptâ figurâ præcedentis propositionis, linea quædam perpẽdiculo n o manẽti parallela intelligatur moueri per limbnm segmenti l c m, & ita describere superficiem cylindraceam; item ductâ per c tangente c e, ideóque ipsi l m æquidistante, intelligatur eiusmodi cylindraceũ secari plano d c e in infinitũ producto. Portio cylindracei definita planis d c e, l c m & superficie cylindraceâ vocetur *alter cunei notus*, vt distinguitur à *primo cuneo noto* propositionis vigesimæ sextæ libri quarti.

His ita constitutis, propositum sit inuenire spatium quod ex puncto f pendens, librâ ex n suspensâ, perpendiculo n o, æquiponderet

cunei alterius noti portioni inter quæuis condicta plana parallela septæ.

p-556-



i-x-5-
λ-g-

Vt binarius ad ternarium ita fiat solidũ s inuentum in præcedenti ad solidum g. Dico spatium g esse illud quod quæritur. Qnoniam enim cuneus alter ad differentiam condictam ipso incluſam ita se habet, vt si quocunque ad planum k a d ęquidistante plauo secentur, sectio cunei sit, vt mox ostendetur, ad sectionem differentiæ condictę vt ternarius ad binarium, ipsum quoque cuneo ęquiponderans erit ad ęquiponderans condictę differentię vt terna-

rius ad binarium, prout ex vndecimâ anterioris libri constat: ergo spatium g æquiponderat cunei alterius noti designatæ portioni.

Sectionem autem eiusdem cunei esse ad sectionem differentiæ conditæ, vt est ternarius ad binarium ostenditur hoc pacto.

Primùm quidem cunei sectionem esse parallelogrammum cuius duo latera parallela sint perpendiculo n o, eadem plane ratione probatur, qua in prioris libri vigesimâ primâ in causâ non multùm discrepãte; sectionem differentiæ conditæ esse parabolam cuius diameter sit parallela lateri a d constat ex quintâ huius; ex primâ verò antecedentis libri modo citati clarum est parabolæ segmentum esse duos trientes parallelogrammi cuius latus vnum sit ipsa segmenti basis, aliud oppositum sit tangens parabolam; & duo alia sint diametro segmenti parabolici parallela; ergo cunei sectio est ad sectionem conditæ differentiæ vt ternarius ad binarium: ergo inuentum est spatium ex prescripto problematis.

COROLLARIVM I.

Ex præcedentis secundo corollario & ex istâ demonstratione consequens fit primò quando arcus l c m est semicirculus, solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in

planum l c m demiſſam, baſis verò quadrantem quadrati b c: nam vt binarius ad ternarium, ita eſt ſextans ſiue vnciæ binæ, ad quadrantem ſiue ad vncias ternas.

Secundò quando l m eſt tres quintæ diametri a c, ex eodem corollario ſecundo & ex præſenti ſequitur ſolidum g eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planũ l c m demiſſã, baſis verò rectãgulũ ſub l m & ſub nouẽ bis-milleſimis diametri a c cõprehenſum, quod eſt æquale viginti ſeptem decies milleſimis quadrati a c: nam vt binarius ad ternarium ita tres milleſimæ ad nouem bis-milleſimas; & vt quinarius ad ternarium, hoc eſt, diameter a c ad l m ita nouem bis-milleſimæ ad viginti ſeptem decies-milleſimas; ac proinde rectangnlum ſub mediis æquale eſt rectangulo ſub extremis.

Tertio quando l c m eſt primum ſegmentum hyperbolæ notum indidem conficitur ſolidum g eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m cadentem, baſis verò ſex trientes, hoc eſt duplum quadrati a c: nam vt binarius ad ternarium, ita quatuor trientes quadrati a c ad ſex eiuſdem trientes, hoc eſt ad duplum eiuſdem.

Quartò quando l c m eſt alterum hyperbolæ ſegmentum notum, ex iiſdem conſequitur ſolidum g eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem

ex d in planum l c m demissam, basis autem rectangulum sub l m & sub duodecim millesimis vigesimis nonis, hoc est sub quatuor trecentesimis quadragesimis tertijs diametri a c; illi autem rectangulo æquales sunt quadrati a c sexdecim bis-millesimæ quadringentesimæ primæ quadrati a c; nam vt septenarius ad quaternarium, hoc est vt a c diameter ad l m, ita quatuor trecentesimæ quadragesimæ tertiæ ad sexdecim bis-millesimas quadringentesimas primas, vt ex logisticâ constat; ergo est æqualitas intememorata rectangula, cùm eorum latera reciproca sint.

COROLLARIVM II.

Quoniam ex nonâ punctum o ita diuidit axem coni cuius ttiangulũ per ipsum axem est a d c, vt d o sit tripla rectæ o b ex duodecimâ quarti; & quia coni d a c cylindrique præscripto modo descripti sectiones effectæ occursu plani cuiuslibet condicti sunt ut binarius ad ternarium; in eodem condicto plano per n o perpendiculum ducto manebit centrum grauitatis cunei secundi noti a c d; ac proinde si libro ex a perpendiculo a d suspẽdatur, brachia æquante distantiam punctotum a, c, vt diameter a c ad a n, hoc est vt octonarius ad ternarium, ita erit cuneus secundus notus a c d ad æquiponderans suum: istud ergo

æquiponderans erit tres octauæ cunei. Quoniam verò iste cuneus est dimidium cylindri, cuius basis opposita basi l c m transeat per d (istud enim simili quadam ratione, qua apud Euclidem de solido parallelepipedo, ostenditur quando cunei basis est ellipsis integra, vel eius portio composita ex æqualibus & similibus ad opposita centri b partibus positis inter æquales ordinatim applicatas) æquiponderans ipsi cuneo erit æquale tribus decimis sextis eiusdem cylindri.

12, vndec. Euc.

SCHOLIVM.

Recta a d vi demonstratorum hactenus potest ad rectam a c esse vtcunque inclinata; nos tamen in sequentibus maioris lucis causâ ponemus esse perpendicularem, vt ipsa non discrepet à perpendiculari ex d in planum l c m demissâ; atque adeo linea rectæ n o vel a d parallela describens motu suo superficiem cylindraceam sit quoque ad planum l c m perpendicularis,

Cæterum quando l c m est triens circuli, solidum g præsenti methodo inuenimus esse parallelepipedum cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, basis verò rectangulum sub l m latere trianguli æquilateri inscripti, & sub tribus sexagesimis quartis semidiametri b c; vel sub semilatere dicto & sub tribus sexagesimis quartis diametri a c.

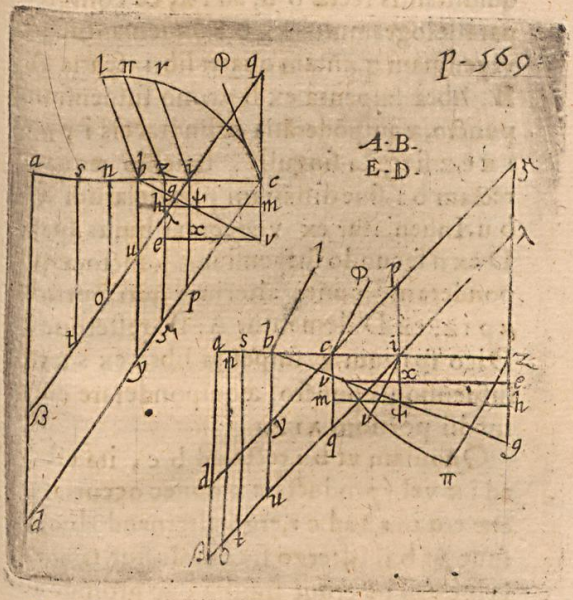
Propositio XII.

Sit ellipsis vel hyperbola c r ex centro b descripta, cuius diameter a c punctis a & c terminetur, eique coniugata sit b l: ad planum ellipseos vel hyperbolæ c r per a c insistat rectum planū a d c, & in eo sit n o recta perpendicularis ad a c diametrum, semidiametrumque a b ita in b secet vt n b sit quadrans ipsius a b: ellipsis vel hyperbola c r sit vt in præcedenti propositione basis cylindracei descripti motu lineæ æquidistantis rectæ n o: vltra centrum b ad partes c sumptum sit quoduis punctum i, & per illud ducta i t faciens cum a c angulum acutū a i t ad partes centri, qui vocetur *internus*, & angulum ad verticem i isti oppositum, qui vocetur *exter-*

nus: per i ducta ſit condicta r i, id eſt parallela ſemidiametro b l, & intelligatur planum t i r, eique parallelum d c, ſecare cylindraceam figuram; erit a c d cuneus alter notus, cuneus autem a i t vel ei ad verticem i oppoſitus vocetur medius: vt b i ad ſemidiametrum b c, ita fiat b n recta ad b s, & agantur per b & s rectæ b u, s t æquidiſtantes rectæ n o. Voco b pūctum primæ ſuſpenſionis; n, ſecundæ; s, tertiæ; & b u, n o, s t, perpendiculum primæ, ſecundæ, tertiæ ſuſpenſionis.

His ita conſtitutis propoſitum ſit inuenire ſpatium quod æquiponderat portioni cunei medij habētis ellipſim vel hyperbolam pro baſi, & plano y b l ad partes a finiti, interceptæ quibuſcunque planis condictis, brachio æquante diſtantiam perpendiculorum

b y, a d, & positâ libræ suspensione tertiâ ex s.



Condicta plana sumi possunt uel ad partes anguli interni vel ad partes externi, ex illis enim duobus casibus soluitur tertius, quando nimirum plana condicta sunt ad partes angulorum oppositorum.

Pro primo casu designata sint condicta plana λ z π, p i r in ellipsi quidem ad partes interni n i o, puncto i cadente inter b & c; in hyperbolâ verò ad partes externi λ i z puncto c cadente inter b & i, prout in altero appositorum schematum designatur. Primus casus.

Vt b i recta ad b c, ita fiat i ↓ quadrans rectæ i p inter rectas a c, c d clauſæ & æquidiſtantis rectæ b u, ad i x, & completo parallelogrammo i x e z inueniantur per vigeſimam quintam quarti libri ſpatia A, B, librâ ſuſpensâ ex b primo ſuſpenſionis puncto, æquipõderãtia cylindraceis i p μ λ, i x e z ſingula ſingulis, brachio æquante rectam b a, ſiue diſtãtiam parallelarum a d, b u. Inueniatur ex vndecimâ huius ſpatiũ D ex n ſecundo ſuſpenſionis puncto æquiponderans cunei alterius noti portioni μ p i z; ex D demantur A, B, reſtetque E. Dico ſpatium E ſuſpensâ librâ ex s tertio ſuſpenſionis puncto, æquiponderare cunei medii portioni λ i z.

Quoniam vt b i recta ad b c, ita eſt i ↓ ad i x vel (productâ e x donec occurrat rectæ c q in ν) ad c ν; ergo alternendo b c, c ν ſunt vt b i, i ↓: ergo ſi compleãtur triangula b c ν, b i ↓ erunt ſimilia, ac proinde angulus c b ν æqualis angulo i b ↓, rectæ ergo b ↓, b ν ſibi inuicem congruunt. Recta b ↓ producta occurrat rectæ z μ in g, & per ↓ agatur ↓ h æquidiſtans rectæ x e.

Rurſus quoniam in triangulo ν e g lateri ν e æquidiſtat ↓ h, & lateri g e æquidiſtat ↓ x. vt n x ad x e, ita erit ν ↓ ad ↓ g, & vt ν ↓ ad ↓ g ita erit e h ad h g; ergo vt ν x ad x e, ſiue vt c i ad i z, ita e h ad h g. Eadem de cauſâ cũm in triangulo c μ z recta i λ æquidiſtet lateri c μ, vt c i ad i z, ita

2. ſexti Euc.

erit λμ ad zλ ergo vt eh ad hg, ita λμ ad zλ. Cuneus ergo ↓hg est ad cuneum izλ vt recta hg ad zλ, vel vt recta he, hoc est x↓, ad λμ vel ad pi; & in eadem ratione est cylindraceum xeh↓ ad piλμ, vt ex vndecimâ prioris libri, vel ex sextâ primi solidis accommodatâ constat: quocunque enim plano condicto secentur, sectiones sunt vt recta hg ad zλ, quod facilè admittit, qui demonstrationis in vigesimâ primâ libri quarti adductæ meminit.

Rursus quoniam vt bi ad bc, ita ponimus esse bn ad bs, ergo diuidendo, vel per diuisionem rationis, vt bi recta ad ci, ita erit bn recta ad sn: sed vt bi recta ad ci, ita est i↓ recta ad x↓ (eo quod in triangulo bi↓ rectæ cv, v↓ æquidistent lateribus i↓, ic) ergo vt bn ad sn, ita est i↓ ad x↓. Cùm igitur vt ab ad bn sui quadrantem, ita sit ip ad ix, & vt bn ad sn, ita sit i↓ ad x↓, erit ex æquo vt ab ad sn, ita ip ad x↓: sed vt ip ad x↓, ita ostendimus esse iλz ad ↓hg; ergo vt ab ad sn, ita iλz ad ↓hg.

Quoniam ergo ex n secundo puncto suspensionis æquiponderans cylindracei portioni piλμ est per decimam secundi spatium primæ suspensionis A vnà cũ ipsius quadrante i↓hz: ergo conflatum ex A, B (est enim B æquale portioni i↓gz cunei primi noti bcv ex vigesimâ sextâ libri quarti) æquale est æquipõderanti ex s librâ suspẽsâ cylindraceo piλμ, & insuper por-

tioni ↓ h g in hyperbolæ ſchemate ; in ellipſis verò diagrãmate cõflatũ ex A B vnà cũ portione ↓ h g æquat dictum æquiponderans : ergo ſi de ſpatio D , quod indidem cuneo i p μ z æquiponderat , deducantur A B relinquetur ſpatium E quod in hyperbolâ auctũ ſpatio h ↓ g, vel eo minutum in ellipſi æquiponderabit cuneo i λ z: cùm igitur vt recta a b ad n s , ita ſit i λ z ad ↓ h g, ſi ſuſpenſio ex n ſecundo puncto , transferatur iu tertium s, æquiponderans cuneo medio i λ z erit E, per decimam ſecundi libri citatam , quod pro primo caſu debuimus demonſtrare.

Secundus caſus.

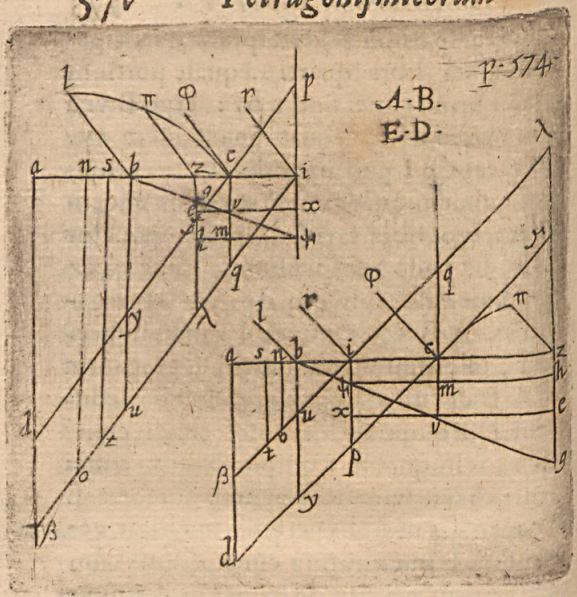
Secundò condicta plana cadant ad partes anguli interni c i q in hyperbolâ,& externi in ellipſi, puncto i manente vt in figuris primi caſus, quæ iſti etiam deſeruiunt: ea verò ſint p i r, q c φ. Rectæ p i ſit i ↓ quadrãs vt in priori caſu , productaque h ↓ occurrat rectæ c v in m. Inuenta ſint A & B librâ ſuſpensâ ex b primo ſuſpenſionis puncto æquiponderantia cylindraceis q c p i, c v x i ſingula ſingulis vt in præcedente caſu ; inuentum quoque ſit ſpatium D ex n ſecundo ſuſpenſionis puncto æquiponderans noto cuneo altero c p i, atque ex A B deductum D relinquat ſpatium E. Dico ipſum E librâ ſuſpensâ ex tertio n ſuſpenſionis puncto , æquiponderare cuneo medio c i q.

Quoniam cylindraceo c v x i ex b equi-

ponderat ſpatium B, erit ipſum B ex vigeſimâ ſextâ libri quarti æquale portioni c ν ↓ i primi cunei noti c b ν: ergo B vnà cum cuneo ν ↓ m æquat quadrantem cylindracei c q i p in hyperbolâ; in ellipſi verò eundem quadrantem excedit eodem ↓ ν m: ergo libra ſi ritè ſuſpendi ponatur ex n ſecundo ſuſpenſionis puncto, æquiponderans ipſi c q i p eſt aggregatum ex A B & ex cuneo ↓ ν m in hyperbolâ, in ellipſi verò eſt idem aggregatum ex A B deducto ↓ ν m: ergo ſi inde deducatur D æquipõderans noti ſecundi cunei c p i, relinquetur æquiponderans cunei medij c i q, videlicet aggregatum ex E & cuneo ↓ ν m in hyperbolâ, in ellipſi verò ipſum E imminutum cuneo ↓ ν m: cùm ergo cuneus c i q ſit ad cuneum ↓ ν m vt recta a b ad n s (iſtud enim eodem pacto oſtenditur quo in priore caſu oſtenſum eſt cuneum λ i z eſſe ad cuneum h ↓ g, vt eſt recta a b ad n s) æquiponderans librâ ſuſpensâ ex s cuneo medio c i q erit E, quod pro caſu ſecundo demonſtrandum erat.

Tertius caſus.

Tertio in hyperbolâ punctum i cadat inter b & c condictaque plana ſint ad partes anguli externi (nam ad interni partes non pertinet hyperbola c π) q c ϕ λ z π: in ellipſi vero punctum c iaccat inter i & b, condictáque plana ſint ad partes interni, cùm ad externi partes non pertingat ellipſis.



Sumatur recta i ↓ quarta pars rectæ i p vel q c, & inueniatur A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b ſuſpensâ; item B cylindraceo c ν e z ex eodem b; & D noto cuneo ſecundo μ c z ex ſecundo puncto n. Dico conflatum ex tribus A B D librâ ſuſpensâ de tertio ſuſpenſionis puncto s æquiponderare portioni λ q c z cunei medij q i c.

Quoniam vt a b, b n, ita i p, i ↓, & vt b n, s n, ita i ↓, ↓ x (vt enim b i, c i, ita b n, s n ex demonſtratis ſuperiùs; vt autem b i, c i vel x ν, ita i ↓, x ↓ eò quod triãgula b i ↓, ν x ↓ ſint ſimilia) ergo ex æquo vt a b, s n, ita, i p, x ↓, vel iſtis æquales q c, m ν. Rurſus quo-

niam triangula λ i z, h ↓ g habent latera b z, ↓ g similiter secta in c, ν, & per c, ν ductæ sunt c μ, ν e æquidistantes lateribus i λ, ↓ h; vt c i ad c z, ita erit μ λ ad z μ, & e h vel ↓ x ad g e: ergo alternando vt μ λ vel q c recta ad e h vel m ν, ita z u ad g e: ergo vt q c recta ad m ν, ita est cylindraceum q e λ μ ad μ ν h e, & cuneus c μ z ad cuneum ν e g: & composita ex antecedentibus magnitudo λ q c z ad compositam ex consequentibus m ν g h: sed vt q c recta ad m ν, ita modo ostendimus esse a b ad s n; ergo vt a b ad s n, ita λ q c z portio cylindracei ad m ν g h.

Cùm ergo sicut in priori casu diximus æquiponderans ex b cylindraceo c ν e z sit c ν g z, erit B ipsi c ν g z æquale: ergo conflatum ex A, B, D, continet æquiponderans partium q c λ μ, c z μ librâ ex n suspensâ, & insuper in hyperbolâ portionem m ν g h; in ellipsi verò conflatum idem ex A, B, D continet æquiponderans partium q c λ m, c z μ imminutũ eadẽ portione m ν g h: ergo cõflatũ ex tribus A, B, D æquat æquipõderans librâ appẽsâ ex s portioni λ q c z cunei medij, per decimã secundi libri, quod demonstrandum erat ad tertium casum.

COROLLARIVM.

Quoniam b n est quadrans semidiametri b c, rectangulum c b n erit æquale quartæ

parti quadrati b c, hoc eſt quadrato quod poteſt ſemiſſis rectæ b c, ſiue quadrans diametri a c; & quoniam rectangulo c b n æquale eſt rectangulum i b s (habent enim ex conſtructione latera proportionalia) erit ipſum i b s æquale quadrato quod poteſt quadrans diametri a c, hoc eſt, tres rectæ i b, quadrans diametri a c, & b s ſunt proportionales.

SCHOLIVM.

In iſtis omnibus caſibus quamuis vnum ex conditis planis aſſumptis non ſit p i r, ſemper tamen in rectâ i p ſumi debet i ↓ quarta ipſius pars, atque vt b i ad b c, ita fieri i ↓ ad i x, debentque iungi rectæ b ↓, b v: demonſtratio enim hoc poſito recurrit eadem.

Porrò æquiponderans cylindraceorum q c λ m, c v z eſſe idem cum æquiponderante cylindraceorum iiſdem conditis planis interceptorum, & habentium pro baſibus portiones ellipſis vel hyperbolæ iiſdem planis interceptas, eandemque altitudinem, apertum eſt ex vndecimâ prioris libri: Ita enim ſunt conſtituta vt quocunque condicto plano ſecentur, eorum ſectiones ſint inuicem æquales, quod ſatis eſt ad hoc, vt ex vndecimâ citatâ, vel ex ſextâ primi ſolidis accommodatâ eiuſmodi plana ſint æqualia, & habeant in eodem condicto plano centrum grauitatis.

Quòd ſi roges cur nullus caſus ponat plana con-

condicta vltra b ad partes a, responsio constabit ex sequentis corollario primo, inde enim patebit id non fuisse necessarium cùm ex iam demonstratis facilius pro illo casu obtineatur æquiponderans.

Calculum huius propositionis abundè sufficient tibi quæ isti proximam subsequuntur.

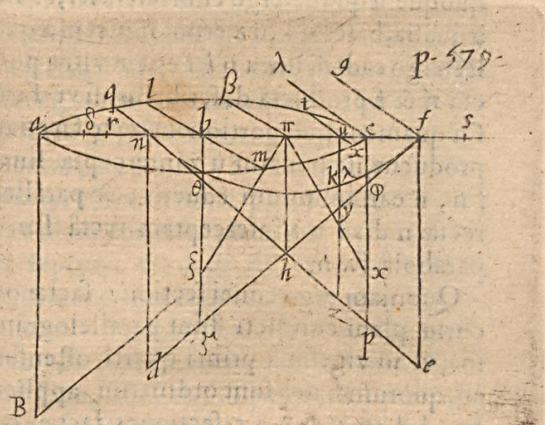
PROPOSITIO XIII.

Sit plana figura a l c m habens grauitatis centrum in rectâ a c, cuius occursu l m & omnes ipsi æquidistantes bipartitò secentur. Sit ad planum a c perpendicularis n d, & per ambitum figuræ a l c m linea parallela rectæ d n incedens describserit superficiem cylindraceam: per n & f quæcunque duo puncta rectæ a c etiam productę, ductæ sint n q, f g condictæ, ideſt æquidistantes ipsi l m, & ductis per eadem n & f, n d, f e perpendicularibus ad a c æqualibus, intelligatur cylindraceum

ſecari planis trāſuerſis e n q, d f g; & abſcindi cuneos n f d, f n c, qui vocentur *coniugati*, etiam cum perpendiculares n d, f e, fuerint inæquales. His ita poſitis.

Oſtendendum eſt ſi planum a l m intelligatur horizonti æquidiſtans, & recta a c libra ſuſtentãs cuneum n f d ponatur ſuſpendi ex n brachio quocunque n r; æquiponderans ex r cunei n f d portioni quibuſcunque duobus planis condictis, id eſt parallelis plano d q n, interceptæ eſſe æquale ſpatio quod librâ ſuſpenſa ex f, brachio f s æquante ipſum n r, æquiponderat ex s portioni cunei f n e inter eadem condicta plana poſitæ.

Intelligatur linea n k f ita deſcripta in plano d n f, vt quæcunque u z æquidiſtãs rectæ n d ducatur, occurrens diametro a c (ita enim vocetur) in u ſiue inter n & f, ſiue extra poſito; rectis d f, n e in y, z; & lineæ n K f in k; ſicut autem r n ad n u, ita



sit u y ad u *k*; linea n k f ex duodecimâ tertij erit parabola. Præterea quoniam triangula n u z, f u y sunt similia; vt n u ad u f, ita erit u z ad u y: ergo rectangulum sub extremis n u, u y est æquale rectangulo sub mediis u f, u z. Quoniam ergo vt r n ad n u, ita ponitur u y ad u *k*, rectangulum sub mediis n u, u y erit æquale rectangulo sub extremis n r, u *k*. Vt fs ad f u ita ponatur u z ad u λ; erit ergo rectangulum sub medijs f u, u z æquale rectangulo sub extremis f s, u λ: sed rectangula in vtroque casu sub mediis sunt inuicem, vt ostendimus, æqualia; ergo rectangula sub extremis sunt 16. sexti Euc.

quoque æqualia; ergo cùm latera n r, f s ſint æqualia, baſes u k, u λ erunt inuicem æquales; ergo eadem linea n k f etiam vltra puncta n & f producta deſcribetur, ſi vt f s ad f u quamcunque portionem rectę f n etiam productæ, ita ponatur u z intercepta lineis f n, n e in infinitum eductis, & parallelâ rectæ n d, ad u λ interceptam rectâ f n & parabolâ f λ n.

Quoniam ergo cunei ſectiones factæ occurſu plani condicti ſunt parallelogramma, vt in vigeſimâ primâ quarti oſtenſum eſt, quorum baſes ſunt ordinatim applicatæ ad diametrum a c; ſectiones factæ occurſu condicti z u t erunt parallelogramma; ſimiliterque ſi per parabolæ n k s perimetrum intelligatur moueri linea recta æquidiſtans cõdictæ l m, ſolidi comprehenſi baſi l c m, & cylindraceâ ſuperficie binâ motu æquidiſtantium rectis b o, l m deſcriptâ (eiuſmodi ſolidum vocetur *dicylindraceum*, & ſi l c m fuerit ellipſis vel hyperbola *dicylindraceum notum*) ſectio condicti plani cum dicylindraceo erit parallelogrammum, cuius baſis ſit eadem condicta, & altitudo ſit linea ſecundum quam condictum planum ſecat ſegmentum n κ f, parabolæ. Quoniam ergo iſtæ omnes ſectiones ſunt parallelogramma rectangula ſuper eadem baſi conſtructa, erunt inter ſe vt altitudines: quoniam verò vt brachiũ r n ad n u, ita eſt recta n y ad u k, & vt n y

2. ſexti Euc.

ad u k, ita est rectangulum sub u y, t x ad rectangulum sub u k, t x: ergo v t r n ad n u ita sectio cunei n f d ad sectionem dicylindracei; quod cùm in omnibus sectionibus occursu condictorum planorum genitis eueniat, totum dicylindraceum æquiponderabit cuneo n f d, & pars parti, prout intra eadem condicta plana sibi respondent, ex septimâ secundi ad solida translatâ, sicut in vigesimâ quartâ prioris libri exposuimus. Eodem planè modo ostendetur idem dicylindraceum æquiponderare cuneo f n e, librâ ex f suspensâ, aliisque iuxta propositionis præscriptum positis; ergo id demonstratum est, quod fuit propositum.

COROLLARIVM I.

Ex modò demonstratis liquidum fit quod in scholio præcedentis in hunc locũ distulimus; si enim l c m sit ellipsis vel hyperbola ex centro b descripta, & n b sit quadrans semidiametri, & c λ sit acies secundi cunei noti, quęratúrque ęquiponderans ex r, librâ ex n suspensâ, portioni cunei secundi noti concluſę condictis secantibus semidiametrum a b; punctum suspensionis debet (paritate brachij seruatâ) poni in c, & n q intelligi acies cunei c n p, & ita ex prędcedenti inuenietur portio dicylindracei æquiponderans portioni cunei c n p

condictis memoratis interceptæ : iſtud namque æquiponderans æquale eſt ex præſenti demonſtratione æquiponderanti quæſiro. Iſthæc methodus in aliis ſimilibus caſibus obſeruanda pariter erit.

COROLLARIVM. II.

Si vt c n ad c p, ita fiat c a ad a B rectam per a ductam parallelam rectæ n d, librâ ex c ſuſpensâ, brachio æquante ſemidiametrum, perpendiculo c p, æquiponderans cunei c n p portioni interceptæ planis cõdictis μ b l, p c λ, eſt æquale parallelepipedo cuius altitudo a B & baſis æquet quadrantem quadrati ex ſemidiametro b c geniti. Iſtud apertum eſt ex præſenti; ſi enim connectatur recta c B, & intelligatur plano condicto B c λ ſecari cylindri ſuperficies, abſcindetur cuneus ſecundus notus n c B, eruntque ex præſenti cunei n c B, c n p coniugati; ergo ſpatium quod æquiponderat cuneo n c B, librâ ex n ſuſpensâ, brachio æquante ſemidiametrum a b, æquiponderat quoque cuneo c n p librâ ex c ſuſpensâ, poſitâ paritate brachij, vt in præſenti demonſtratum eſt: atqui ex primo epilogiſmo corollarii propoſitionis vndecimæ ſpatium æquiponderans cuneo noto ſecundo eſt illud quod iam aſſignauimus cuneo c n p; ergo rectè fuit aſſignatum.

Quòd si, iisdem positis l c m sit segmentum hyperbolæ notum, ac proinde condicta l m sit vltra punctum c ad partes f; librâ ex c suspensâ, brachio æquante semidiametrum, perpendiculo c p æquiponderans cunei c n p portioni interceptæ planis condictis p c λ & μ ξ l m, ostendetur eodē omnino pacto esse æquale parallelepipedo cuius altitudo a B, basis sit dupla quadrati quod potest diameter a c: hoc enim ita computatum fuit in epilogismo tertio corollarij memorati.

COROLLARIVM III.

Ex iisdem occurrit *quadratura* dicylindraceotum notorum numero infinitorum; per præcedentem enim obtinetur æquiponderans innumeris cuneis quorum bases sint portiones ellipseos vel hyperbolæ; ex istâ autem constat eiuscemodi æquiponderans esse æquale dicylindraceo quod inter eadem condicta plana respondet portioni cunei libratæ. Cæterùm istorum dicylindraceorum tetragonismus est quasi aurora aduentantis quadraturæ circuli: nam cuneo secundo noto, cuius acies sit c λ & basis a c minteger semicirculus aut ellipsis, æquiponderāt librâ ex a suspensâ, brachio æquante diametrum a c, tres decimæ sextæ

cylindri eadem qua ipſe cuneus altitudine præditi: ergo dicylindraceum iſti cuneo ita reſpondens, eſt tres decimæ ſextæ cylindri: ergo quadratura iſtius dicylindracei docet quadraturam circuli: habet ergo dicylindraceorum quadratura cum tetragoniſmo circuli & etiam hyperbolæ connexionem tantam, vt quamuis hîc finem inueniendi faceremus, multùm tamen Deo deberemus, quòd ex tam denſis tenebris in admirabile iſtud lumen nos vocarit.

COROLLARIVM. IV.

Ex præſenti ſchemate colligitur etiam cuneos coniugatos e n f, d f n inter condicta plana ξ b l, d c λ incluſos ſi ex quocunque puncto n diametri a c ſeorſum (poſitâ brachij paritate) ſuſpendantur perpendiculo n d, differentiâ æquiponderantium coniugatis eſſe eandem cum differentiâ æquipõderantium portionibus p h φ, μ h θ, quas voco cuneos primos *laterales*, & ad eorum mutuum reſpectum ſignificandum, *primos collaterales*. Quoniam enim ſolidum b θ h φ c habent commune, differentia æquiponderantium ipſis non proueniet ex æquiponderante ſolidi b θ h φ c (eſt enim idem ex eodem, iiſdemque poſitis) ergo differentia, ſi quæ ſit, erit æquipõderantium reſiduis collateralibus p h φ, μ h θ.

Quòd si ex rectis b μ, c p abscindantur b ξ, c ↓ æquales rectis θ μ, φ p, & ducto per h condicto h π β secante diametrum a c in π, iungantur rectæ ξ π, ↓ π, & intelligantur plana transuersa ξ π β, ↓ p β auferentia cuneos ↓ b π, ↓ π β; cunei isti ablati ita se habebunt ad collaterales, singuli ad singulos, vel totos, vel secundum partes intra eadem condicta plana clausas sumptos, vt ipsis sint æquales, & habeant æqualia æquiponderantia iisdem positis. Istud etiam manifestum est ex præcedente: esse enim æquales eodem planè modò ostenditur, quo id demonstrauimus in primo casu, ex eo quòd condicta plana faciant in eis sectiones æquales: habere autem idem æquiponderans non aliter probatur, quam probatum fuit in scholio. Cuneos p h φ, μ h θ vocabo *laterales & collaterales secundos*, quorum hæc est insignis proprietas vt acie habeant in eadem condictâ π β, & vnus ↓ π c sit ad angulum externum, alter ξ π b sit ad internũ, positâ a c diametro ellipseos vel hyperbolæ sicut in præcedentis diagrammate; vnde vlterius ex iam citatâ propositione efficitur istud notandum, si vt b π ad quadrantem diametri a c, ita fiat ipse quadrans ad b ♌, librâ ex ♌ suspensâ tertio videlicet suspensionis puncto, inueniri spatium quod singulis collateralibus æquiponderat, istorúmque æquiponderantium differentiam esse æqualem differentiæ spatiorum quæ portionibus memoratis

coniugatorum cuneorum ſeorſum, æquiponderant, librâ ex ♪ ſuſpensâ, cæteriſque iiſdem ſumptis.

COROLLARIVM V.

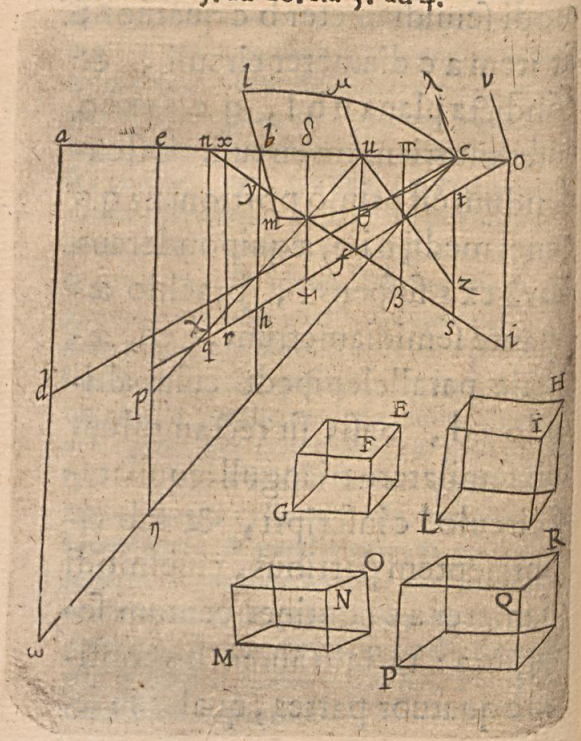
Hoc quoque adnotare intereſt ad ſequentia, ſi ſit quicunque cuneus f n e, & libra b c ſuſpendatur ex n in quo cunei acies q n ſecat diametrum, brachiumque libræ n ♪ quodcunque ponatur & æquet rectam n π, & per π agatur π h perpendiculo n d æquidiſtans, occurrens rectæ n e in h, atque per h intelligatur duci planum æquidiſtãs baſi q c m; cylindracei inter iſtas duas baſes contenti parti ſpatium ex ♪ æquiponderans eſſe æquale cunei f n e portioni iiſdem condictis planis cum cylindracei parte comprehenſę; idque apertum eſſe ex vigeſimâ ſextâ libri quarti. Inſuper cùm, iiſdem poſitis, ęquiponderans ex ♪ parti cylindracei ſit ex vigeſimâ quintâ prioris libri ęquale parallelepipedo cuius altitudo π h eadem quę cylindracei, & baſis ęquet ſpatium quod iiſdem poſitis ęquiponderat baſi partis cylindri; eſſe æqualitatem inter cunei, & parallelepipedi partes memoratas: ac proinde ſi cunei pars memorata conuertatur in parallelepipedum altitudinis π h, baſim eiuſmodi parallelepipedi eſſe æqualem ſpatio quod baſi æquiponderat dictâ iam ratione.

Propositio XIV.

Posito ante oculos diagrammate propositionis duodecimæ, quod inseruit tertio ellipseos casui; sit b i partium quinque cuiusmodi semidiameter b c quatuor; sit item a c diameter circuli, & condicta plana u b l, q c e ex eo auferant trientem circuli. Ostendendum est primò portioni z λ q c cunei medij n i o, æquiponderans librâ ex s suspensâ, brachio æquante semidiametrum, esse æquale parallelepipedo cuius altitudo a d, basis sit rectangulum sub semilatere trianguli æquilateri circulo l c inscripti, & sub viginti septem partibus, cuiusmodi diameter a c continet centum sexaginta: rectam autem b s continere quatuor partes, quales in se-

midiametro b c ſunt viginti; vel vnam quales in ſemidiametro quinque.

Quoniam enim vt b i ad b c, ita eſt b n ad b s; b i autem ponitur quinque cuiuſmodi b c quatuor; vel b i viginti quinque, quales b c viginti, & b n ipſius b c quadrans quinque; erit b s quatuor eiuſmodi: nam vt 25. ad 20. ita 5. ad 4.



Rursus quoniam punctum z in isto casu diuidit bifaram semidiametrum b c; spatiũ A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b suspensâ, brachio b a, erit parallelepipedum cuius altitudo c q, & basis rectangulum sub quartâ parte diametri a c & sub semilatere trianguli æquicruris inscripti circulo c r, ex corollario tertio vigesimæ quintæ libri quarti.

Rursus quoniam vt b i recta ad b c, ita est i ↓ quadrans rectæ c q ad i x; b i autem ad b c est vt quinarius ad quaternarium, erit i x quatuor, cuiusmodi i ↓ quinque, & cuiusmodi c q ipsius i ↓ quadrupla viginti; ergo reductione ad minimos numeros facta erit i x, vel c v ad c q vt unitas ad quinarium: ergo B spatium cylindraceo c v e z æquiponderãs librâ suspensâ ex b, brachio b a, est ex vigesimâ quintâ laudatâ parallelepipedum cuius basis eadem quæ parallelepipedi æquantis spatium A iam putati, & altitudo c v quinta pars ipsius c q: ergo parallelepipedum cuius basis sit iam memorata, altitudo sex quintæ partes altitudinis c q, æquale est duobus simul A & B. 35. septi Euc.

Præterea quoniam in triangulo a i ß lateri i ß æquidistat c d; vt a c ad c i, ita erit a d ad d ß siue ad c q: sed a c ad c i est vt octo ad vnum: ergo a d recta ad c q est vt octo ad vnum; vel vt quadraginta ad quinque, & ad conflatum ex c q, c v vt quadra-

ginta ad sex: ergo parallelepipedum cuius basis antè memorata, & altitudo sex quadragesimæ partes rectæ a d æquale est duobus simul spatiis A & B. Rursus quia vt 40. ad 6. ita est quadrans siue quadraginta centesimæ-sexagesimæ ad sex centesimas-sexagesimas: parallelepipedum, cuius altitudo sit recta d a, & basis diametri a c sex centesimæ-sexagesimæ, æquale est parallelepipedo cuius basis sit rectangulum sub quadrante diametri a c & semilatere trianguli æquilateri circulo c l inscripti altitudo verò sit sex quadragesimæ partes altitudinis a d; cùm bases & altitudines reciprocentur.

Quoniam igitur duo simul spatia A & B æquant parallelepipedum cuius altitudo sit d a, & basis rectangulum sub semilatere trianguli inscripti superius memorati & sub sex centesimis-sexagesimis diametri a c comprehensum; spatio autem D æquale est ex scholio vndecimæ parallelepipedum eiusdem altitudinis d a, & baseos æquantis rectangulum sub semilatere memorato & sub tribus sexagesimis quartis diametri a c; magnitudo ex tribus A, B, D conflata erit parallelepipedum altitudinis a d, & baseos æquantis rectangulum sub semilatere memorato & sub viginti septem partibus, cuiusmodi in diametro sunt centum sexaginta inuicem æquales. Cùm igitur ex citatâ duodecimâ in isto casu magnitudo ex tri-

bus A, B, D composita æquet spatiũ quod cunei medii n i o portioni z λ q c æquiponderat; istud esse demonstrauimus, quod propositum fuerat primo loco.

Secundò iisdem manentibus punctum z congruat centro b. Ostendendum est pottioni z λ q c (quæ in hoc casu eadem est quæ b u q c) cunei medij n i o æquiponderans librâ ex s suspensâ, brachio æquãte semidiametrum, perpendiculo s t, esse æquale parallelepipedo cuius altitudo d a & basis sit quadrati b c septem vigesimæ partes.

Spatium A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b suspensâ, brachio b a est ex vigesimâ quintâ libri quarti parallelepipedum altitudinis c q, & baseos æquantis duos trientes quadrati b c. Similirer B spatium cylindraceo c ν e z æquiponderans est parallelepidedum eiusdem baseos & altitudo c ν quinta pars ipsius c q: ergo parallelepipedum cuius basis sit iam memorati duo trientes, & altitudo sex quintę partes altitudinis c q æquale est duobus si-

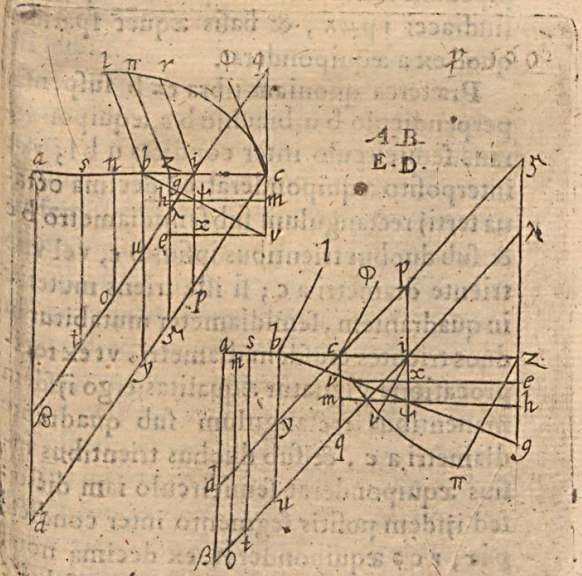
mul A & B: ergo vt in precedenti caſu parallelepipedum cuius baſis ſit duo iam dicti trientes & altitudo ſex quadrageſimę partes rectæ a d, æquale eſt duobus ſimul A & B. Præterea quia vt 40. ad 6. ita eſt bes ſiue 40. ſexageſimæ ad 6. ſexageſimas, parallelepipedum, cuius altitudo ſit d a, & baſis quadrati b c ſex ſexageſimæ ſiue vna decima, æquale eſt parallelepipedo cuius baſis ſit duo trientes quadrati bc, & altitudo ſex quadrageſimæ partes rectæ a d, cùm baſes & altitudines reciprocentur.

Quoniam igitur duo ſimul ſpatia A & B æquant parallelepipedum cuius altitudo a d, baſis ſex ſexageſimæ quadrati b c: ſpatium autem D ex calculo primo primi corollarii vndecimæ eſt quadrans quadrati b c, hoc eſt quindecim ſexageſimæ: ſpatiũ ex tribus A, B, D compoſitum erit illud quod quærimus, videlicet parallelepipedũ cuius altitudo a d, & baſis viginti & vna ſexageſimæ, ſiue ſeptem vigeſimæ quadrati b c; quod ſecundo erat oſtendendum.

PROPOSITIO XV.

Duodecimæ propoſitionis ſchema, quod inſeruit primo & ſecundo ellipſeos caſui, reuoce-

tur; in eóque b i, i c sint æquales; sit item a c diameter circuli. Propositum sit primò, quando punctum z primi casûs congruit puncto b, definire epilogismo lineam b s, & æquiponderans portioni b u i cunei medij n i o, librâ ex s suspensâ, brachio æquante semidiametrum.



Quoniam vt b i ad b c, ita est b n ad b s; cùm b i sit semissis rectæ b c, erit b n semissis rectæ b s : sed b n est quadrans semidiametri b c; ergo b s est duo quadrantes, vel dimidium rectæ b c: ergo b s, b i, i c sunt æquales.

Rursus quoniam punctum z in isto casu congruit centro b, & condictum $\chi z \psi$, condicto u b l, spatium A æquiponderans cylindraceo i p $\mu\lambda$, libra cx b suspensa, perpendiculo b u & brachio b a, erit ex vigesima quinta libri anterioris parallelepipedum cuius altitudo i p eadem quæ cylindracei i p $\mu\lambda$, & basis æquet spatium quod ex a æquiponderat.

Præterea quoniam libra ex b suspensa, perpendiculo b u, brachio b a, æquiponderans semicirculo inter condicta u b l, $\nu c \varphi$ interposito æquiponderat ex decima octaua tertij rectangulum sub semidiametro b c & sub duobus trientibus ipsius b c, vel vno triente diametri a c; si iste triens mutetur in quadrantem, semidiameter mutabitur in duos trientes eiusdem diametri, vt ex reciprocatione gignatur æqualitas; ergo ijsdem manentibus rectangulum sub quadrante diametri a c, & sub duobus trientibus ipsius æquiponderat semicirculo iam dicto: sed ijsdem positis segmento inter condicta p i r, $\nu c \varphi$ æquiponderat, ex decimâ nonâ eiusdem tertij libri, rectangulum sub i c quadrante diametri ac & sub i r semilatere trianguli æquicruris inscripti: ergo rectan-

gulum sub eodem quadrante, & sub excessu quo duo trientes diametri a c superant semissem dicti lateris æquiponderat portioni circuli interceptæ condictis u b l, p i r (eiusmodi excessus vocetur *apotome nota*: est enim apotome quam definit Euclides) ergo ex corollario tertiæ spatium A cylindraceo i p μ λ æquiponderans librâ ex b suspensâ, perpendiculo b u, brachióque ba, est parallelepipedum cuius altitudo p i vel c q, basis sit rectangulum contentum sub semisse dicti lateris & sub apotome notâ. 74 decimi Euc.

Rursus quoniam vt b i recta ad b c, ita est i ↓ quadrans rectæ c q ad i x: b i autem est semissis rectæ b c, erit i ↓ semissis rectæ i x; & i p quadrupla rectæ i ↓ erit dupla rectæ i x: est ergo B parallelepipedum cuius basis sit rectangulum sub semilatere dicto & sub notâ apotome contentum, altitudo sit semissis rectæ i p. Præterea quoniam in triangulo a c d lateri c d æquidistat i β; vt a c ad c i, ita erit a d ad d β siue ad i p: sed a c ad c i, est vt quaternarius ad vnitatem; ergo a d ad i p est vt quaternarius ad vnitatem; ergo a d ad i x dimidium rectæ i p est vt octonarius ad vnitatem: ergo recta a d est ad compositam ex i x, i p, vt octonarius ad ternarium; ergo duo spatia A & B cum habeant eandem basim, ideóque æquent parallelepipedum eiusdem baseos, & altitudinis compositæ ex altitunibus i p, i x, æqualia sunt parallelepipedo cuius

baſis ſit rectangulum ſub ſemilatere dicto & ſub notâ apotome comprehenſum, altitudo ſit tres octauæ partes rectæ a d; cui parallelepipedo propter baſium & laterum reciprocationem æquale eſt aliud cuius altitudo ſit a d, & baſis rectangulum ſub notâ apotome & ſub tribus decimis ſextis lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti; vel ſub ſemilatere eodem & ſub apotemes notæ tribus octauis.

Rurſus quoniam cunei noti ſecundi a c d portioni interceptę conditis q c φ, μ z π quod in iſto caſu congruit conditio u b l, æquiponderans librâ ex n ſuſpensâ, brachio æquante ſemidiametrum eſt ex vndecimæ corollarii primi epilogiſmo primo parallelepipedum cuius altitudo d a, baſis ſit quadrans quadrati b c, hoc eſt rectangulum ſub diametri a c, tribus ſexageſimis quartis & ſub quatuor trientibus eiuſdem diametri; iſta enim æqualitas ex laterum reciprocatione ſequitur: ex ſcholio verò eiuſdem æquiponderans portioni iacenti inter conditâ p i r, q c φ eſt æquale parallelepipedo cuius altitudo a d & baſis rectangulum ſub ſemilatere dicto & ſub tribus ſexageſimis quartis diametri a c comprehenſum; differentia iſtorum æquiponderantium eadem altitudine d a prædictorum, videlicet parallelepipedum altitudinis d a & baſeos æquantis rectangulum ſub diametri tribus ſexageſimis quartis & ſub

15. ſext. Euc.

excessu quo quatuor diametri a c trientes superant semilatus trianguli æquilateri inscripti erit spatium D æquiponderans portioni μ p i z cunei secundi a c d noti. Dictus porrò excessûs compositus est ex duobus trientibus diametri a c, & ex apotome notâ, vt apertum est.

Quoniam ergo ex præscripto duodecimæ pro primo casu vt habeatur æquiponderans cunei medii, de spatio D deduci debent duo simul A & B; cùm D sit vt ostendimus parallelepipedum cuius altitudo a d, & basis rectangulum sub tribus sexagesimis quartis diametri a c, subque compositâ ex duobus diametri trientibus & ex apotome notâ comprehensum: ergo excessus quo istud rectangulum superat rectangulum sub apotome notâ & sub tribus decimis sextis lateris trianguli memorati, est basis parallelepipedi eadem altitudine a d præditi, quod æquiponderet cuneo medio b i u, librâ ex s suspensâ, brachio æquante semidiametrum a b, & perpendiculo s t: ergo definiuimus id quod definiendum fuit primo loco.

Propositum secundò sit quando, vt in secundo casu laudatæ propositionis duodecimæ, suspenditur portio q i c cunei medij t i s intercepta condictis p i r,

q c φ determinare calculo æquiponderans dictæ portioni q i c, librâ ex s suspensâ, reliquísque manentibus, quæ in præcedenti casu posita sunt.

Spatium A æquiponderans cylindraceo q c p i, librâ ex b suspensæ, perpendiculo b u, brachio b a, est parallelepipedum cuius altitudo i p, basis sit rectangulum contentum sub semisse lateris trianguli æquilateri circulo c l inscripti, & sub diametri a c quadrante, ex vigesimâ æquint libri quarti corollario tertio.

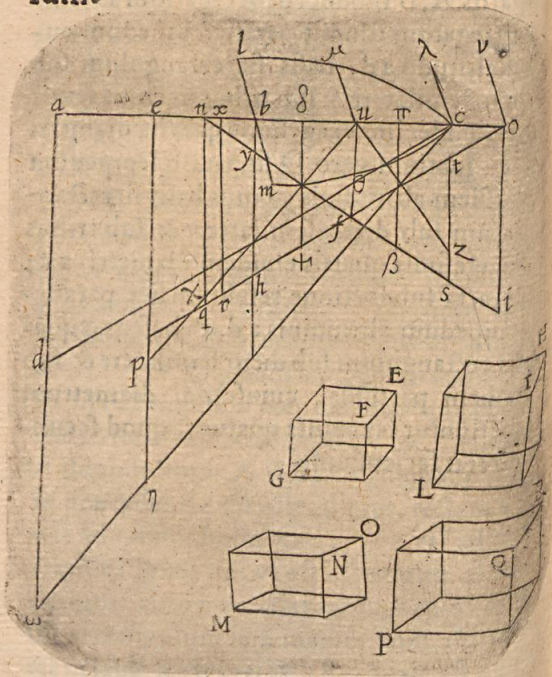
Rursus quoniam vt in superiore casu ostensum est i x est dimidium rectæ i p: ergo B spatium cylindraceo c v x i æquiponderans, librâ ex b suspensâ, brachio b a, est ex vigesimâ quintâ laudatæ, parallelepipedum cuius basis sit rectangnlum iam memoratum, & altitudo dimidium altitudinis i p: ergo parallelepipedum cuius basis sit rectangulum iam memoratum, & altitudo tres semisses altitudinis i p, æquale est duobus simul A & B. Quoniam verò in præcedenti casu ostendimus, rectam a d esse ad compositam ex i p, i x vel ad tres semisses ipsius i p, vt est octonarius ad ternarium: ergo parallelepipedum cuius basis tsit rectangulum iam memoratum, altitudo res octauæ partes rectæ a d, æquale est duo-

bus ſpatijs A, B: iſti verò parallelepipedo propter reciprocationem baſium & altitudinum æquale eſt aliud cuius altitudo a d, baſis ſit rectangulum ſub quadrante diametri & ſub tribus decimis ſextis lateris inſcripti iam ſæpe memorati: vel ſub tribus triceſimis ſecundis diametri a c & ſub ſemilatere dicto.

Quoniam igitur ex præſcripto duodecimæ pro ſecundo caſu, vt obtineatur æquiponderans cunei medij, de aggregato ex ſpatiis A, B ſubduci debet ſpatium D, cùm aggregatum illudſit parallelepipedum cuius altitudo a d, baſis ſit rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub tribus decimis ſextis vel duodecim ſexageſimis quartis diametri a c; ſpatium verò D ſit parallelepipedum eiuſdem altitudinis, cuius baſis ſit rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub tribus ſexageſimis quartis eiuſdem diametri a c; peractâ ſubductione reſiduum fiet parallelepipedum altitudinis a d, & baſeos æquãtis rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub nouem partibus, cuiuſmodi diametrum metiuntur ſexaginta quatuor; quod ſecundò erat faciendum.

PROPOSITIO XVI.

Inuenire & calculo colligere æqualitem inter duo quædam ſpatia ſolida multùm inſeruientem ad quadrandum circulum.



Sit vt in decimâ tertiâ semicirculus l c m basis cylindracei descripti motu parallelæ ad rectam n q: ipsa autem n q sit ad diametrum a c perpendicularis; sit item b centrũ circuli, & b u, b e sint singillatim dimidium semidiametri; b n verò & c o quadrans; x b autem quinta eiusdem semidiametri pars. Per a, e, x, b, u, c, o, ductæ sint ad n q parallelæ a d, e p, x r, b h, u f, c s, o i. In rectâ u f sumptum sit quoduis punctum f, & per illud ductæ ex punctis n & o rectę n f, o f occurrẽtes rectis b h, c s, oi, n q, a d in y, h, t, s, i, q, d. Rectis y h, t s abscissæ sint æquales b κ, c z, & iunctę sint u k, u z rectæ.

Erunt igitur ex definitionibus in decimâ tertiâ traditis cunei n o q, o n i, coniugati; collaterales primi erunt y f h, t f s: collaterales secũdi b u κ, c u z: solidi byfc pars byfu vocetur interior, & c u f t exterior, ipsũq; byftc dicatur fastigiatũ. Similiter cõiugatorũ cuneorũ interior dicatur oni, exterior n o q: & collaterialiũ interior y f h, exterior t f s. Apertũ est cunei cõiugati interni c n s portionem b y s c interceptam condictis h b l, s c λ esse æqualem fastigiati solidi portioni internæ b y f u, externę c t f u, & collateralium externo t f s: similiter cunei coniugati externi n o q portionẽ c t h b esse æqualem fastigiati solidi portioni internæ b y f u, externæ c t f u, & collateralium interno y f h.

Rursus quoniam vt b u ad b c, ita est b n ad b e: si libra intelligatur suspendi ex e

perpendiculo e p, brachio æquante ſemidiametrum, obtinebitur æquiponderans primis collateralibus y f h, t f s, vel ſecundis b u k, c u f ex corollario tertio decimæ tertiæ; calculus verò vtriuſque habetur in proximè antecedenti propoſitione; vocetur S. S.

Rurſus quoniam b x eſt quinta pars ſemidiametri b c, ſi libra ex x ſuſpendatur habebitur per duodecimam æquiponderans cunei medij x o r portioni b c t h (hoc eſt tribus b u f y, c u f t, y f h) & eius calculus eſt in decimæ quartæ parte alterâ; vocetur A. A. Præterea cùm b x ſit quatuor & b e decem, cuiuſmodi b c viginti, erit b c ad x e vt viginti ad ſex, vel decem ad tria: ergo ſi perpendiculum x r mutetur in e p, & libræ ſuſpenſio transferatur ex puncto x in e, reliquis nihil mutatis, æquiponderans portioni b c t h (hoc eſt tribus b u f y, c u f t, y f h) erit illud ipſum quod in primâ ſuſpenſione auctum tribus decimis partibus portionis b c t h, ex decimâ ſecundi libri.

Rurſus quoniam ſi per c intelligatur duci recta c ξ parallela rectæ o f, ideóque conſtituens angulum ξ c n æqualem angulo c n s, cunei c n s, n c ξ ſunt coniugati; ergo per decimam quartam quod æquiponderat cuneo b c ξ librâ ex n ſuſpensâ, æquiponderabit quoque cuneo b y f c librâ ex c ſuſpensâ: ergo cùm illud æquipon-

derans supputatum sit initio corollarii primi vndecimæ, constat quoque calculus istius vocetur B. Præterea cùm c e sit triginta cuiusmodi b c viginti, si perpendiculum c s mutetur in e p, & suspensio prima ex c in secundam ex e, brachiúmque ad partes a conuertatur, ex nonâ libri secundi apertum fit æquiponderans secundæ suspensionis esse tres semisses portionis b y f c (hoc est trium b u f y, c u f t, t f s) imminutas æquiponderante B iam computato pro primâ suspensione. B

Rursus quoniam librâ ex e suspensâ spatium æquiponderans duobus simul cuneis coniugatis b y f c, c t h b iam est computatum, videlicet A æquiponderans, cuius calculus est in decimæ quartæ propositionis parte alterâ, auctum quidem sex vigesimis portionis b c t h; siue trium b u f y, c u f t, y f h; & triginta vigesimis portionis b y f c, vel trium b u f y, c u f t, t f s; imminutum verò B æquiponderante, cuius calculus extat initio corollarii primi vndecimæ: si ex isto æquiponderante deducatur spatium S æquiponderans cuneis lateralibus y f h, t f s cuius epilogismus est in decimâ quintâ, relinquetur æquiponderans fastigiatæ figuræ b y f c bis sumptæ, illudq; erit parallelepipedum, A cuius calculus est in decimæ quartæ huius parte alterâ, auctum quidem sex vigesimis triũ b u f y, c u f t, y f h, & triginta vigesimis trium

b u f y, c u f t, t f s; imminutum verò parallelepipedo B, cuius calculꝰ extat initio corollarii primi vndecimæ, & parallelepipedis duobus S quorum calculus eſt in decimâ quintâ. Iſtud ęquiponderans ita collectum vocetur *primum faſtigiati æquiponderans.*

Ad ſpatium æquiponderans ſecundum inueſtigandum tranſeo. Quoniam b x eſt quinta pars ſemidiametri, ſi libra ſuſpendatur ex puncto x, perpendiculo x r, brachio æquante ſemidiametrum, cognitum erit ęquiponderans C (ita enim appelletur) portioni c t f u exteriori faſtigiati ſolidi b y f t c, cùm eius epilogiſmus extet in primâ parte decimæ quartæ propoſitionis: ergo, vt paulò ſuperiùs dictum fuit, ſi perpendiculum x r mutetur in e p, & libræ ſuſpenſio ex x transferatur in e, æquiponderans pro iſtâ ſecundâ ſuſpenſione erit illud ipſum quod in primâ, auctum tamen ſex vigeſimis portionis externæ c t f u.

Rurſus quoniam, ſicut antea oſtendimus, quod æquiponderat portioni u θ ξ b ſecundi b c ξ cunei noti librâ ex n ſuſpenſâ, æquipõderat quoq; librâ ex c ſuſpenſâ, cunei illi coniugati c n s portioni b y f u, quæ etiã eſt portio interna ſolidi faſtigiati b y f t c; cùm illud putatum ſit ſub finem primæ partis in propoſitione decimâ quintâ, notũ quoque & putatum erit æquiponderans portioni b y f u internæ faſtigiati b y f t c,

librâ ex c ſuſpensâ ; ergo ſi ſuſpenſio ex c transferatur in e, portioni internæ b y f u faſtigiati b y f t c æquiponderabunt triginta vigeſimæ, vel tres ſemiſſes portionis internę b y f u imminutæ parallelepipedo D, ita enim vocetur id cuius epilogiſmus extat ſub finem primæ partis demonſtratæ in decimâ quintâ.

Quoniam ergo faſtigiatum ſolidum b y f t c conſtat duabus b y f u, c t f u partibus ; æquiponderans toti faſtigiato bis vt iacet ſumpto æquiponderabit quoque portioni internæ y b u ſ bis vt iacet poſitæ, & portioni externæ c t f u bis item vt iacet ſumptæ : ſed iam putauimus æquiponderans vtrique portioni internæ & externæ : ergo librâ ex e ſuſpensâ; perpendiculo e p, brachio æquante ſemidiametrum, faſtigiato b y f t c bis ſumpto æquiponderat duplum parallelepipedi C putati in primâ parte decimæ quartæ, auctum duodecim vigeſimis portionis externæ c t f u, & ſexaginta vigeſimis portionis internæ b y f u, imminutum verò duplo parallelepipedi D, cuius epilogiſmus habetur ſub finem primæ partis demonſtratæ in propoſitione decimâ quintâ. *Iſtud voco ſecundum faſtigiati æquiponderans.*

Quoniam igitur ęqualia ſunt primum & ſecundum faſtigiati æquiponderans, ſi ad vtrumque addantur B, D, S, & ab vtroque ſubducantur internæ portionis b u f y tri-

ginta ſex vigeſimę, & externæ c u f t portionis duodecim vigeſimæ, conficietur vltima æqualitas quęſita inter duas magnitudines quarum

Prima componitur ex parallelepipedis A, S; ex duplo parallelepipedi D; ex ſex quintis (id eſt viginti quatuor vigeſimis) externæ c u f t, ex tribus ſemiſſibus (id eſt triginta vigeſimis) externi collateralis, t f s & ex ſex vigeſimis ſiue tribus decimis interni collateralis y f h.

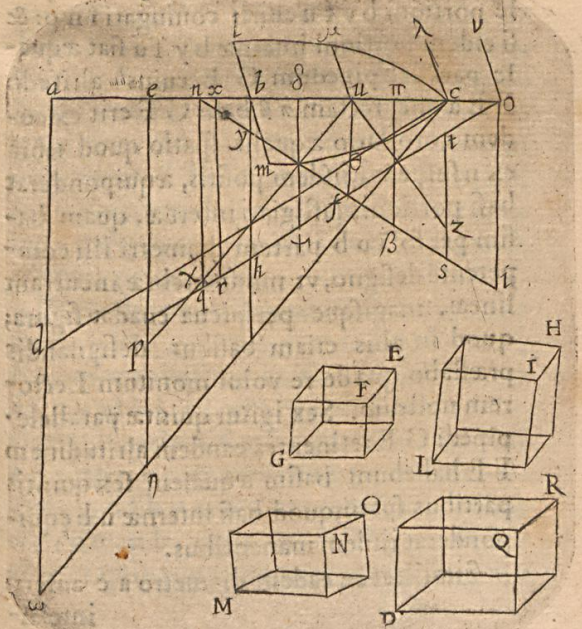
Secunda componitur ex duplo parallelepipedi C, ex parallelepipedo B, & ex ſex quintis internæ portionis b u f y: ergo inuenta eſt æqualitas propoſita.

Quæ quantum conducat ad tetragoniſmum circuli non multò poſt patebit. Quod verò dixi ex nonâ libri ſecundi apertum eſſe oſtendi poteſt in hunc modum, ne alienius erroris hæc latebra putetur. Si librâ ſuſpensâ ex c, perpendiculo c s, brachium ſemidiametro æquale mutetur in brachium æquale rectæ c e; æquiponderans iſti brachio reſpondens erit ad aliud æquiponderans vt eſt recta b c ad e c, hoc eſt vt ternarius ad binarium, ex octauâ ſecundi: ſi ergo brachio æquante rectam c e, ſuſpenſio ex c transferatur in e, & brachium obuertatur ad partes a, æquiponderans, ex nonâ ſecundi, erit ipſa portio c b y s imminuta æquiponderante quod brachium longius ſibi vindicauit librâ ex c ſuſpensâ: ergo ſi brachium mutetur in ſemidiametrum æquiponderans iſti brachio reſpondens

erit ex octauâ ſecundi ad alind, vt eſt c e ad b c vel vt ternarius ad binarium; ergo æquiponderans reſpondens ſuſpenſioni ex e, brachio æquante ſemidiametrum, eſt tres ſemiſſes ſuſpenſæ c b y s deducto æquiponderante quod libra ſuſpensâ ex c competit brachio æquanti ſemidiametrum.

PROPOSITIO XVI.

Inuenire & calculo colligere æqualitatem inter duo quædam ſpatia plana proximè conducentem ad circuli quadraturam.



Retento eodem diagrammate, ex diametro a c abſcindatur n π æqualis ſemidiametro b c, & per π agatur π β æquidiſtans rectæ n q, & occurrens rectæ n i in β. Intelligatur per β duci planum æquidiſtans plano l c m, cuius cum cylindraceâ ſuperficie communis ſectio ſit baſis cylindracei oppoſita baſi l c m. Si ergo libræ brachium ponatur æquale rectæ n π, & eius ſuſpenſio fiat ex n, perpendiculo n o, æquiponderans cylindraceo altttudinis π β & baſeos inter conducta h b l, f u μ interceptæ, hoc eſt baſeos quæ portioni internæ b u f y competit, erit per corollarium quintum decimæ tertiæ æquale portioni b y f u cunei coniugati i n o: & ſi eidem portioni internæ b y f u fiat æquale parallelrpipedum G E cuius altitudo F E æquet rectam π β, baſis G F erit ex eodem corollario æqualis ſpatio quod libra ex n ſuſpensâ, iiſdem poſitis, æquiponderat baſi portionis faſtigiati internæ, quam baſim per ſolã u b partem diametri illi competentẽ deſigno, vt minùs crebræ incurrant lineæ, magiſque perſpicua euadat figura; quod in aliis etiam baſibus deſignandis præſtabo, qua de re volui monitum Lectorem noſtrum. Sex igitur quintæ parallelepipedi G E retinentes eandem altitudinem F E habebunt baſim æqualem ſex quintis partibus ſpatii, quod baſi internæ u b æquiponderat iiſdem manentibus.

Similiter ex eadem diametro a c auferri intelli-

intellige o ♂ semidiametro æqualem, & per ♂ agi ♂ ♀ æquidistantem rectæ n q, & conuenientem cum recta o f in ♀. Quoniam trianguli n f o basis n o bifariam secatur à perpendiculari f u ex angulo f ad ipsam demissâ, erũt triãgula n u f, u o f æquilatera, & æquiangula; ergo anguli ad n & o sunt æquales; ergo rectæ π β, ♂ ♀ sunt æquales; ergo planum per β parallelum basi l c m transit per ♀. Sicut igitur in cuneo interno, ita in externo n o d ostenditur, librâ ex o suspensâ, perpendiculo o i, brachio æquantẽ semidiametrum, æquiponderans basi u c portionis fastigiati externę c t f u esse ęquale parallelepipedi L H basi L I: ipsum autẽ L H pono esse æquale portioni externæ c u f t, & eius altitudinem I H esse æqualem altitudini ♂ ♀ vel π β. Sex igitur quintæ parallelepipedi L H conseruantes eandem altitudinem I H habebunt basim æqualem sex quintis partibus spatij quod basi externæ u c æquiponderat librâ ex o suspensâ, & reliquis manentibus.

Præterea recta u κ producta ocurrat rectis n q, e p in χ, p; quoniam trianguli u n χ basi n χ æquidistat b k, sicut u n ad b u, ita est n χ ad b k: est ergo n χ ad b κ vt ternarius ad binarium. Rursus quoniam trianguli c n s lateri c s æquidistant b y, u f, tres rectæ c s, u f, b y erunt proportionales tribus n c, n u, n b; ergo tres rectæ c s, u f, b y sunt vt quinarius, ternarius vnitas: ergo b y

eſt quinta pars rectæ c s vel b h ; ergo cum bh ſiue c ş ſit ad u f vt decem ad ſex, y h ſiue b k erit ad u f vt octo ad ſex : quia verò b κ eſt ad n χ vt binarius ad ternarium, ſiue vt octo ad duodecim, erit n χ ad u f vt duodecim ad ſex ; eſt ergo n χ dupla rectæ u f: ergo cum triangula n u f, n π β ſint inuicem ſimilia ; ſintque item inuicem ſimilia u n χ , u e p, & latera u e, n π ſint æqualia, erit e p dupla rectæ π β: eadem verò de cauſâ ſi per c agatur c ω æquidiſtans rectæ u p , & occurrẽs rectæ a d in ω, cui in d occurrat c ξ; recta a ω erit dupla rectæ a d.

Quoniam ergo recta u n æquat ſemidiametrum, ſi per p ducatur planum baſi l c m parallelũ, cylindraceo cui⁹ baſis ſit b u altitudo p e, æquipõderat, librâ ſuſpensâ ex u, perpẽdiculo uf, brachio ęquãte ſemidiametrũ, ſpatiũ æquale parti buk cunei n u χ; & ſi illud ſpatium ſit parallelepipedum M O cuius altitudo N O æquet rectam p e, baſis G F, erit vt patet ex iam demonſtratis, ſpatium quod librâ ex c ſuſpensâ, reliquis iiſdem poſitis æquiponderat baſi b u, collateralis & interni cunei b u k: ſex igitur vigeſimæ cunei interni collateralis ſiue parallelepipedi M O retinentes eandem altitudinem N O habebunt baſim æqualem ſex vigeſimis partibus ſpatii, quod baſi u b interni collateralis æquiponderat iiſdem manentibus, librâ ſcilicet ſuſpẽsâ ex u, &c. Quòd ſi parallelepipedum cuius altitudo

NO vel p e, basis sit sex memoratæ vigesimæ mutetur in aliud æquale cuius altitudo sit π β quæ est, vt ostendimus, dimidium altitudinis p e; basis mutabitur reciproca tionis lege in duodecim vigesimas spatii quod basi u b, iisdem manentibus, æquiponderat. 34. vn. dec. Euc.

Eodem prorsus pacto ostendetur si collaterali externo secundo c u z fiat æquale parallelepipedum P R cuius altitudo Q R æquet altitudinem e p; basi u c externæ, libra ex u suspensa, positisque reliquis quæ proxime superiùs, æquiponderare spatium æquale basi P Q: & triginta vigesimas cunei externi collateralis siue parallelepipedi P R retinentes eandem altitudinem Q R habere basim æqualem triginta vigesimis partibus spatii quod basi u c externi collateralis æquiponderat: & denique si parallelepipedum cuius altitudo Q R vel p e, basis sit triginta vigesimæ memoratæ mutetur in aliud æquale cuius altitudo sit π β, basis mutabitur in sexaginta vigesimas spatii quod basi u c iisdem manentibus æquiponderat.

Rursus quoniam u p, producta occurrit rectæ c ω in n; cùm lateri c n trianguli e n c æquidistet u p, vt e u ad e c, ita erit e p ad e n, hoc est vt binarius ad ternarium: eademque de causa cùm in triangulo c a ω lateri a ω æquidistet e n, vt e c ad a c, hoc est, vt ternarius ad quaternarium ita erit e n ad a ω:

ergo ex æquo vt e u ad a c, hoc est vt vnitas ad binartum, ita e p ad a ω; sed ita etiam ostendimus esse rectam a d ad a ω. ergo rectæ a d, e p sunt æquales.

Præterea quoniam parallelepipeda A, B, C, D, altitudinem æqualem rectæ a d habent, ipsa verò a d, vt pote æqualis rectæ e p, est dupla altitudinis π β: si parallelepipeda A, B, C, D, mutentur in æquiualentia quorum altitudo sit π β, basis erit dupla baseos ipsorum A, B, C, D.

Item quoniam parallelepipeda S habent altitudinem æqualem rectæ a ω, ipsa verò a ω est quadrupla rectæ π β, si parallelepipeda S mutentur in æquiualentia, quorum altitudo sit π β, basis erit quadrupla baseos ipsorum S.

Quoniam igitur parallelepipeda quæ inter se sunt æqualia, si eadem altitudine sint prædita, habent bases inter se æquales, ex trigesimâ vndecimi libri Euclidis conuersâ apud Clauium; compositæ autem magnitudines solidæ, quas æquales esse ostendimus in præcedenti, redactæ sunt in propositione præsenti ad eandem altitudinem π β; ergo earum bases sunt inuicem æquales: ergo inuentæ sunt duæ planæ magnitudines inuicem æquales, quarum,

Prima componitur primò ex duplo basis parallelepipedi A; secundò ex quadruplo basis parallelepipedi D; tertiò ex sex quintis, vel viginti quatuor vigesimis spatii

quod externæ basi u c æquiponderat, librâ ex o suspensâ, perpendiculo o i, brachio æquante semidiametrum; quartò ex sex semissibus, vel sexaginta vigesimis spatii quod externæ eidem basi u c æquiponderat librâ suspensâ ex u, perpendiculo u f, brachióque eodem; quintò ex tribus quintis, vel duodecim vigesimis spatii quod internę basi b u æquiponderat librâ suspensâ ex u, reliquisque, vt iam diximus, positis. *Hæc magnitudo vocetur primus terminus æqualitatis notæ.*

Secunda componitur primò ex quadruplo basis parallelepipedi C; secundò ex duplo basis parallelepipedi B; tertiò ex quadruplo basium parallelepipedorum S; quartò ex sex quintis, vel viginti quatuor vigesimis, spatii quod internæ basi b u æquiponderat librâ suspensâ ex n, perpendiculo n q, brachióque semidiametrum æquante. *Hæc magnitudo appelletur secundus terminus æqualitatis notæ.*

SCHOLIVM.

Præsentem æquationem diu existimaui non solum veram esse (istud enim adhuc persuasum habeo) sed etiam reduci ad terminos duos quorum vnus foret spatium rectilineum notum, alter segmentum circuli datum; re tamen per numeros diligentiùs examenatâ comperi vtrumque terminum post sufficientem prosthæ-

phæreticam (vt solet in Algebrâ) castigationem reuocari ad purum spatium rectilineum ; ac proinde necdum ita inuentam esse à nobis quadraturam circuli, vt nihil amplius desideretur, & inquirendum restet. Nobis tam auio tamque molesto itinere fatigatis nunc satis esto nihil in fronte operis promitti, quod cumulatè adiuuante Deo non præstiterimus. Huius libri quinti initio speraui fore vt assequerer fugientem Tetragonismum ; si tamen eum comprehendere & retinere non valui adhuc, nihil dubito quin aliquamnec prorsus contemnendam ex eius apprehensâ veste laciniam in manibus meis remansisse iudicetur ab æquo & beneuolo Lectore.

APPENDIX
AD PROLEGOMENA.



IN *Epistola ad Regem Christianissimum vocem Gracâ vsurpaui notissimam Geometris in duorum siue planorum siue solidorum æqualitate demonstrandâ. Euclides libri sexti proposit.* 14. *&* 15. *Æqualium & æquiangulorum parallelogrammorum & triangulorum ait* reciprocari latera, ἀντιπεπόνθασι αἱ πλευραί: *libro* 11. *prop.* 34. Æqualium solidorum parallelepipedorum bases & altitunes reciprocantur, ἀντιπεπόνθασι αἱ βάσεις ταῖς ὑψεσι; *quæ eadem verba vsurpat lib.* 12. *prop.* 9. Æqualium pyramidum & triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines: *& prop.* 15. Æqualium conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines. *Archimedes libri primi Æquiponderantium prspos. 6. aliàs* 4. τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότων τῶν ἀυτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσι *quorum vetusto antiquior ita habet* magnitudines quæ fuerint in grauitate commensurabiles, æquè

ponderabunt, si in distantiis quæ secundum grauitatum proportionem fuerint constitutæ, permutatim suspendantur. *Ex quibus istud liquet duos terminos ἀνθυπάρχειν quantum ad aliqua nihil esse aliud quàm quanto primus secundum vincit in vno; tanto vinci in alio à secundo iuxta proportionem geometricam; ex illâ verò quasi anceps victoriâ demonstratur æqualitas pugnantium; istiusque pugnæ admirandus effectus in libræ suspensione manifestius quàm in alio vllo apparet ipsius etiam iudicio sensûs. Antiqui Philosophi qui nulli non Mathematici erant, cùm in Ethicis Iustitiæ naturam inuestigarent vocem istam ex Mathematicorum disciplinâ eò transtulerunt vt liquet ex Aristotele l. 5. moral. c. 5. vbi statuit etiam in commerciis & rerum permutationibus interuenire debere δίκαιον τὸ ἀνθυπεπονθὸς κατ' ἀναλογίαν: tunc enim solùm pactio cõmercantiũ est æqua, quando tantũ vn⁹ eorũ sibi acquirit, quantum iuxta analogiæ & proportionis geometricæ leges amittit commutando. Ex his verò planum fit cur nulla latinâ voce satis exprimi illius græcæ significatum dixerim:* talionem *aliqui vertunt, sed nimis angustâ notione; alii in scholâ significanter quidem sed minùs latinè* contrapassum; *vnde S. Thomas 2.2.q.61. a. 4. quæstionem instituit quàm & rectè suo more soluit,* vtrum iustum sit simpliciter idem quod contrapassum. *Porro quid sit libra à materie diuulsa, quam & Archimedeam appellaui quod ipse eam libris duo-*

bus seorsum tractarit, & ad quadrandam parabolam adhibuerit, explano in istis prolegomenis §. 7. pag. 60.

Pag. 4. ita restitue initium malè emendatum. ignoto quæritur, Aristoteles assignat εἰ ἔστι *an sit*, vt *an, inquit*, centaurus sit.

Hęc porro quæstio ita æuo illius controuersa extitit, vt in Categoriis assensum suspendat: postquam enim affirmauit sublato ἐπιστητῷ, hoc est (vt vulgò loquimur in Scholâ) *scibili*, simul tolli scientiam, quia nisi sit scibile non est scientia &c.

Pag. 15. initium pariter ita lege. qua posita id ostenditur peractum quod propositum fuerat, vnde sub finem problematum clausula solennis additur *quod faciendum erat* ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, vel ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν: sub finem verò theorematũ, *quod erat demonstrandum*, ὅπερ ἔδει δεῖξαι, vel δεδειχέναι ἄρα τὸ προτεθέν, aut simili aliâ verborum formâ.

Pag. 21. locum Eutocii in quo Isidorum magistrum suum Mechanicũ *appellat, reddidi* cognomento Mechanicum: *si quis* vocem *illam* cognomento *deletam* velit, vel *malit ita* vertere qui Mechanicam profitebatur, *per me licet.*

Pag. 47. ita lege. Iulius Pacius refert Brysonem ita quadrasse circulum, vt voluerit eum esse æqualem quadrato medio.

Pag. 78. Eclipseos solaris epilogismus qui hoc loco apponitur, ante annos ferme duodecim à me initus fuit; non puto quidem mendosum esse,

si quid tamen in eo peccatum fuerit, ignoscet quisquis nouerit quid sit numeros tractare. Per hypsoma voluisse Tertullianum significare meridianum cardinem interpretatus sum, quòd præsentis deliquii dimidium mora cadat in ipsũ meridiem, nec viderem quid aliud probabiliter dici posset venisse tunc in mentem istius Autoris eiusmodi vocem vsurpantis: nam significatio illam quam ὑψώματι Ptolomæus in Apotelesmatum libris assignat, nullatenus congruere soli istud deliquium patienti perspiciebam, aliud verò aliquot antè vel post annis nullũ se meo calculo offerebat. Neq; verò existimes minus falsũ esse, solẽ cùm in suo hypsomate fuerit, si istud nomen iuxta Ptolomæi & Astrologorũ Iudiciariorum notionem sumatur, deficere non posse: verissimum igitur semper erit quod hoc loco Scriptori isti opponimus ipsum hac in re peccasse nimiâ credulitate, eiusque peccati occasionem fuisse studii mathematici neglectum.

Hæc in prolegomena habui annotare; alia enim errata ipsis oculis non ineruditis facile emendantur, quæ quidem crebriora quàm in sequentibus libris irrepserunt, quòd inexercitatũ Emendatorem nacta fuerint.

AD PRIMVM LIBRVM.

Elemẽta inscripsi præsẽtes libros, quòd re verâ habeant naturam elementorum à nobis in prolegomenôn paginâ 28. traditam ex Proclo: tetragonismica verò, quòd ad quadraturam omnium figurarum rectilinearum, curuilinearum, planarum & solidarum præbeant aditum.

In tertia propositionis schemate bis per incuriã adscripta est litera y, sed hoc nullam generat confusionem vt tantillum attendenti patebit. Cæterùm in nonnullis huius operis diagrammatis duæ literæ vni & eidem puncto adiunctæ sunt, aliquando quidem vt inde intelligat Lector, posse illa puncta sibi non congruere, & esse à se inuicem dissita: aliquando verò quia cùm Typographus errasset in appellandis literis, existimauimus istam mendi castigationem minùs legenti fore molestam.

Tertia propositio non solùm vera est in sectionibus conicis, sed sine vllo erandi periculò potest sumi pro principio per se noto in quibuslibet aliis lineis. Certè nos in quarti libri vndecimã eandem propositionem ad solida traductam inter principia retulinus, nec puto illâ esse quicquam in vniuersâ Geometriâ certius; vtilitates verò & demonstradorum compendia ea habet, quæ vix credi possint. Eius ope nos paucis propositionibus in illo eodem libro quarto demonstrauimus proportiones, & sectiones sphæræ, sphæroideon, & conoideon; propter quæ duo Archimedes totos libros de Sphæra & cylindro, de conoidibus & sphæroidibus scripsit; neque tantùm illa duo paucioribus peragimus, sed iis etiã rerum nouarum incredibilem accessionem facimus; vt verè basis totius huius operis postulatũ eiusmodi dici debeat: facile autem, vti spero, illi acquiesces si quæ ad eius confirmationem adduco, vel si etiam ipsum per se solum accuratè peapenderis.

AD SECVNDVM LIBRVM.

In isto libro, qui quo breuior eò carior mihi est, libræ proprietates trado etiam eas quas nescio an vllus Anteriorum scriptis libris consignarit: ad huius verò tractatûs cumulum adiungi debet prima libri quinti propositio, & Scholiũ decimæ sextæ quinti: Item quæ de librâ planâ (ita enim illam antè incognitã appellauimus) exposuimus in tribus ultimis libri quarti, & in secundâ atque tertiâ quinti. Porro doctrina huius libelli non ad sola rectilinea, vel curuilinea ex sectionibus conicis genita pertinet, sed ad omnia tam rectilinea quàm curuilinea cuiuscumque rationis etiam solida, cùm non nitatur nisi sextâ primi, & vndecimâ quarti, quas vniuersim veras esse iam diximus.

In propositione tertiâ pag. 114. diuisionem rationis *appellaui quæ* conuersio rationis *dicenda fuit: quæ menda ne alibi occurrat timeo; sed hoc leuis momenti indicabit benignus Lector.*

AD TERTIVM LIBRVM.

Propositione decimâ septimâ pag. 292. *adiecta est litera* t *mendose in illis verbis*: quia per trigesimam secundam primi conicorum occurret t sectioni in alio puncto: *legi verò ita debet is locus* quia per 32. primi cõnicorum occurret sectioni in alio puncto.

Ex corollario quarto decimæ nonæ habes quadraturam homœosphærici cuius basis sit quadratum descriptum circa hemisphærii basim: cùm autem eiusmodi homœosphærici quadrans pla-

no per diametrum quadratorum de quibus agit Vigesima secunda ducto diuidatur in duos cuneos primos notos: manifestū est cuneū primū notum quem per libram quadramus in Vigesimâ quintâ, quadrari etiam absque illâ per sola huius libri principia: quod de parabolicoide quoque intelligi debet.

AD QVARTVM LIBRVM.

Duodecimæ propositionis Scholium intelligi debet iuxta restrictionem in Scholio Vigesimæ septimæ adhibitam pag. 473.

Quæ in corollario tertio propositionis Vigesimæ tertiæ & in Scholio iam citatæ Vigesimæ septimæ ad hyperbolici xystroidis (parabolicum pro hyperbolico pag. 443. *vitiosè legitur) calculum attinent, ea emendari debent iuxta demonstrationem & epilogismum Scholii secundi propositionis tertiæ libri quinti.*

AD QVINTVM LIBRVM.

In contextu propositionis decimæ quartæ pag. 587. *pro* ex eo auferant trientem circuli *lege* ex eo auferant trientem peripheriæ circuli,

Pag. 589. *sub medium restitue in hunc modum.* Rursus quia vt 40. ad 6. ita est quadrans siue quadraginta centesimæ sexagesimæ: ad sex centesimas sexagesimas, parallelepipedum cuius altitudo sit recta d a, & basis rectangulum cuius latera duo sint semilatus dicti inscripti, & diametri a c sex centesimæ sexagesimæ, æquale est, &c.

In decima quinta quæ tota deprauata est, hæc

emenda pag.594. ante §. præterea *ita lege*, & basis spatium quod ex a æquiponderat basi cylindracei.

Pag.595 proximè ante §. Rursus *lege*. rectangulum contentum sub semisse dictæ semidiametri & sub apotome notâ.

Paginam 596. & sequentem vsque ad alteram propositionis partem hoc pacto restitue basis sit rectangulum sub diametri quadrante, & sub notâ apotome comprehensum, altitudo sit tres octauæ partes rectæ a d, cui parallelepipedo propter basium & laterum reciprocationem æquale est aliud cuius altitudo sit a d, & basis rectangulum sub notâ apotome, & sub tribus trigesimis secundis diametri. Quoniam verò si ad apotomen notam adijciatur dictum semilatus conficiuntur duo trientes diametri: rectangulum sub notâ apotome & sub tribus trigesimis secundis diametri æquale est rectangulo sub tribus trigesimis secundis diametri & sub eiusdem duobus trientibus (hoc est quadranti quadrati quod potest semidiameter) deducto rectangulo sub tribus trigesimis secundis vel sex sexagesimis quartis diametri & sub dicto semilatere.

Rursus quoniam cunei noti secundi a c d portioni interceptæ conditis q c φ, μ z π, quod in isto casu congruit condicto u b l, æquiponderans librâ ex n suspensâ brachio æquante semidiametrum est ex vndecimæ

corollarij primi epilogismo primo parallelepipedū cui altitudo d a, basis sit quadrans quadrati b c; ex scholio verò eiusdem æquiponderans portioni iacenti inter conducta p i r, q c, est æquale parellelepipedo cuius altitudo a d & basis rectangulum sub semilatere dicto & sub tribus sexagesimis quartis semidiametri; spatium D erit differentia istorum æquiponderantium, videlicet quadrans quadrati b c imminutus rectangulo sub semilatere dicto & sub tribus sexagesimis quartis diametri.

Quoniam ergo ex præscripto duodecimæ pro primo casu, vt habeatur æquiponderans cunei medij, de spatio D deduci debent duo simul A & B, cùm D sit, vt ostendimus, parallelepipedum cuius altitudo a d, & basis quadrans quadrati b c imminutus rectangulo sub semilatere trianguli æquilateri inscripti & sub tribus sexagesimis quartis diametri: ergo excessus quo istud rectangulum superat duo simul A & B, parallelepipedum videlicet cuius altitudo a d, basis quadrans quadrati b c imminutus rectangulo sub semilatere dicto & sub sex sexagesimis quartis diametri, est rectangulum sub semilatere dicto, & sub tribus sexagesimis quartis semidiametri: ergo definiuimus id, quod fuit definiendum primo loco.

Pag. 599. *proximè ante* §. quoniā, *lege in hunc modum* lateris inscripti iam memorati:

vel sub tribus trigesimis secundis diametri a c, & sub semilatere dicto. *Paulò ante finem ita repone.* Basis sit rectangulum sub dicto semilatere, & sub tribus trigesimis secundis, vel sex sexagesimis quartis diametri a c: *& post sex lineas* baseos æquantis rectangulum sub dicto semilatere, & sub tribus partibus, cuiusmodi diametrum metiuntur sexaginta quatuor; quod erat faciendum.

Vnum aut alterum erratum in designandis literis inter recognoscendum Librum à me deprehensa annotaram in schedula, quæ mihi nunc eam inquirenti non occurrit; illa tamen, si bene memini, agnosci facile poterant & emendari. Ista & alia quæ ipse legendo non annotaui ignosces, Amice Lector, & si quid in toto hoc Opere non omnino improbandum iudicaueris, totum id in Deum omnis luminis fontem, Vt par est, refer.

FINIS.

1897, 490.