fiche faite 1966

13981
10. 8. 2bis p. 1231

11

Zaragoza

(Joseph de)

Zaragoza

(Joseph de)

GEOMETRIA

MAGNA

IN MINIMIS,

IN TRES PARTES DIVISA.

PARS I.

DE MINIMIS IN COMMVNI.

PARS II.

DE MINIMIS IN PLANO.

PARS III.

DE MINIMIS IN SOLIDO.

AVTHORE

R. A. P.

IOSEPHO ZARAGOZÁ

VALENTINO, SOCIETATIS IESV.

Prima Editio.

GEOMETRIAE MAGNAE IN MINIMIS

PARS PRIMA.

PROBLEMA CATHOLICVM RESOLVIT.

CATHOLICO, ET MAXIMO

CAROLO II.

HISPANIARVM REGI SACRATVM.

AVTHORE
R. A. P. IOSEPHO ZARAGOZA VALENTINO, SOCIETATIS IESV,
In Suprema Hispaniarum Inquisitione propositionum Fidei Censori, olim Theologiæ Scholasticæ in Collegijs Balearico, Barcinonensi, & Valentino; nunc in Matritensi Academia Imperialis Collegij Matheseos Professore Regio.

Prima Editio.

TOLETI. Apud Franciscum Calvo, Typogr. Reg.
Anno Domini 1674.

Superiorum permissu.

a 2 CA-

CATHOLICO REGI
MAXIMO
CAROLO SECVNDO,
HISPANIARVM, AC INDIARVM
MONARCHAE POTENTISSIMO.

GEometriam, stylo, & obiecto Minimam, vt Magna fiat, pedibus V. Maiestatis subijcio, quos si vel semel liceat attingere, cò magnitudinis euecta erit, vt maiorem, nec assequi, nec sperare valeat, cùm in tãta Maiestate præter ætatem, nihil minimum, nihil esse possit non magnum. Meum non fuit opus hoc Regio nomini consecrare, cum tot nominibus ipsum Regi Catholico appareat deuinctum. Hispanus Author, & in Academia Regia Professor lucubrationes suas regijs & iussu, & sumptibus excussas, imò & tanti patrocinij spe conceptas, licet ingratitudinis reus audire vellet, sub alienis auspicijs euulgare non posset. Accedit hisce Geometriæ magnitudo, quæ terminorum impatiens tantæ Maiestatis vmbram, scilicet immensam exposcit analo-

gia

gia mirabili. Magna illa in Minimis, hæc ve-
rò in minima ætate Maxima. Hispanum Im-
perium vastissima sua mole in totum orbem
diffusum, Regio spiritu viuit: Heu quãtus hic
erit, qui tanto corpori animando sufficiat!
Martis alumni bellicum ardorem supra Mar-
tialem spiritum vaticinantur, Musarum Cul-
tores præsidem Apollinem experiuntur, & Io-
uem alterum regno datum augurantur quot-
quot regias actiones animi candore conspi-
cuas supra canitiem vident. Gemmant tenel-
læ arbores, vt in flores vernent, & autumnent
in fructus; sed primo vere M. V. gemmas in
flores, hos in fructus convertit prudentiæ ca-
lore decoctos, spem scilicet præuertente gau-
dio, floridum ver grauido Autumno. Restitu-
ta nobis aurea sæcula credimus; cùm in vnũ
collectos auguramur Ferdinandos, Carolos,
Philippos: illos regimine, ac virtute bellica;
hos verò specie, prudentia, pietate, & magni-
tudine, quorum singulæ dotes ita in V. Ma-
iestate singulares sese omnes ostendunt, vt
quæuis ingenita credi, & in tanto Rege prin-
cipem sibi locum velit, quem dum singulæ
ambiunt, iam illum suo quæque iure sibi ve-
dicant, & arrogant singulæ. Vix hæc Regia
Maiestas duodennis sceptro manum extendit,

&

& ostendit negotiorum expeditioni faciem, cuius rerum facies mutata est, ac nouo splendore induta auguratur Hispania pristinum splendorem, quem à saeculo habuit instaurandum. Regius enim candor, indoles aurea, militum amor, & ardor in militarem gloriã propensus, cautus sine astu animus, secretorum auarus, tenax propositi, in munera profusus, & reliquae animi dotes verè Regiae spem non solùm faciunt V. M. magnum futurum, sed verè Maximum esse praedicant, ac Heroes inter enumerãdum: cum puerum per prudentiam, vel prudentiam per puerum regnare summo Imperij bono, & gaudio videamus. Hoc ipsũ testatur coelum ipsum, si nobis stellarum caracteres interpretari liceat. Fortunatus Iuppiter fortunam hanc non volubilem, sed regno stabilem pollicetur. Esto, sileant tamen fortunata sydera, Empyreum miraculo conceptionis sat loquitur. Eo enim Patre genitus est M. V. fracto scilicet viribus, aetate, ac valetudine ingrauescentibus, vt nemo prudens in dubium verterit, quin donũ hoc totum coeleste à Superis concessum fuerit Catholico Regno. Timendum igitur nobis nõ est, neque sperandum hostibus, superum hoc munus ante diem euolaturum: vnum his timẽdum, qui

ar-

armata manu tanti Regis fatum præstolantur, ne serò pœniteant, ut citò exarmentur. Heu quantum sibi comparant hostē, qui inermem actu aggrediuntur! Moueant igitur arma, insultent ei licet, Hispaniæ fortè causam agunt, dum illius perniciem moliuntur. Quiescentē Leonem exagitant, qui Hispanum Achillem è sinu Matris ad martialem arenā prouocant in suam ruinam. Quantum subitis in casibus est ingenium, tantum oppressa mansuetudo induit animū ad vindictam. Temporis, aut corporis quantitate metiri spiritum, error est, & quidem grauis. Magnus spiritus tenello corpusculo in ætate minima præpeditur, nec ideò magnus non est, immò illum excitabit, vt pro hoc maximum emulatio. Hanc non vanam coniecturam, sed vaticinium credo experientia comprobandum. Huic vastissimo Imperio magnam spem facit M. V. amplificandæ gloriæ a Maioribus acceptæ, ac hæreditario iure possessæ, maiora tamen præstiturum spero, cū Aurora ascendens in perfectum diem profecerit. Proficiat vtinam, & ibi culminans sistat cursum, & lumen sæculo integro, immò & æternum perennet.

Iosephus Zaragoza.

OPE-

OPERIS RATIO LECTORI.

GEometria nostro hoc sæculo summum incrementum accepit à clarissimis Geometris, quorum opera æternitati sacrata nostra commendatione non indigent. Alij enim Antiquorum inventa, quæ temporis iniuria perierant, orbi literario restituta dedère, alij Geometriam novis inventis amplificarunt, quos lubens hic committo, ne cui prælato alterius nomine iniuriā irrogare videar, cum inter subtilissima inventa, nec Apollo ipse huic præ alio facilè principem concedet locum: ingenuè tamen, ac religiosè profiteor, me omnes, qui aliqua saltèm noua propositione Geometriam auxerint, summa veneratione excipere, non semèl expertus quamplurima iucūdissima ex vno theoremate sæpiùs inferri.

Horum exempla ad noui aliquid audendum excitatus duobus abhinc annis Minimorum aggressus sum meditationem, qua fortè quarta propositio libri secundi, quem Apollonius de Locis planis, teste Pappo in præfatione libri septimi scripsit, non leuem incrementum accipiet: cum ea, quæ de punctis in plano, & figuris eiusdem speciei demonsmonstravit Apollonius, ad qualibet puncta in solido utcumque disposita, & ad omnes figuras, vel species dissimiles in hoc opere extensa, & promota sint, ac communi Geometria, methodo scilicet omnibus nuda Elementorum cognitione instructis intelligibili, perspicuè demonstrata.

Primus labor totus fuit in determinando puncto, ex quo minima summa figurarum similium, vel dissimilium erat colligenda specierplanæ, vel solidæ à punctis constitutæ nulla facta commemoratione. Hoc punctum determinatum centrum minimum appellare libuit, quia ex eo minima summa colligitur, & centrum etiam est sphæræ cuius superficiens locus sit in quo inflexæ rectæ, quarum species datam habeant rationem cuilibet spatio dato, conveniant.

Quo exantlato labore animum applicui ad considerandas proprietates ex centro minimo in determinatis planis ac solidis ortas. Geometria quidem Magna est, & ad summum fastigium ab antiquis, & recentioribus euecta; sed quia illius magnitudo in Minimis apparet etiam, ideò appellãdam censui Geometriam Magnam in Minimis.

Totum igitur opus in tres partes distribuo. Prima agit de Minimis, eorumque centro, & Problema resolvit, quod, cum vniuersale sit, & Cathotholico Regi sacratum, Catholicum dicitur. Secunda autem agit de Figuris planis, & plura de ordinatis non iniucunda concludit. Tertia vero Solida considerat, & ea perficit, quæ in nostro Euclide Novo-antiquo scienter ommissa sunt de solidis Regularibus. In fine cuiuslibet Partis problemata adducuntur seorsim, ne praxis speculationem confunderet.

Hæc totius operis [illegible]a, & distributio est quingentis propositionibus demonstrata: harum ordo à principio in finem cuiuslibet partis continuata serie procedit, ne citationum varietas Lectori noctem offunderet. Primum ergo volumen 100. Secundum 200. Tertium 200. etiam continet propositiones. Euclidis elementa, quæ passim intra parenthesim citata adducuntur, intelligenda sunt de nostro Euclide Novo-antiquo, fas enim esse duxi ad nostrum opus amandare Lectorem, cum potuerim aliorum exemplo communis Geometriæ citationem omittere.

Hæc sunt benigne Lector de quibus te monitũ volui, si paralogismum inveneris, illius demonstrationem expecto paratus, ubi primum monitus fuero palinodiam canere, ne errores pertinacia incrementum eccipiant. Si autem omnia ritè demonstrata sint, & opus Geometris non displicere videro ad alia me accingam, & propediem Sphæ-

ram, & Trigonometriam applicatam orbi litera-riosistam, quæ secuturæ Astronomiæ sternant viam, quibus accedet Trigonographia Datorum Euclidis non ignobile incrementum, nec manum è tabula amouebo, donec integrum Matheseos cursum Deo fauente perficiam. Vale.

FACVLTAS ORDINARII.

Imprimatur.

Lic. D. Ioannes de Zeballos Vic. Tol.

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS

Toletanæ Prouinciæ Societatis Iesu.

Imprimatur. *Didacus de Valdès.*

CITATIONVM EXPLICATIO.

Elementa Geometriæ citatur eadem prorsus ratione, ac in Euclide Novo-antiquo.

(3.*P*.) Tertium Proœmiale.

(4.*l*.2.) Quarta libri secundi.

(3.*p*.5.) Tertium probl. praxi. 5. Geom. Pract.

Propositiones huius citantur simplicitèr, vel addita M. 1. vel M. 2.

(60.*p*.) Sexagesima eiusdem Partis.

(30. M. 1.) Trigesima Partis. 1. Minimorum.

(12. M. 2.) Duodecima Partis 2. Minimorum.

NO

NOTARVM EXPLICATIO.

△. Triangulum quodlibet.
◺. Triangulum Rectangulum.
▭ vel ▯. Rectangulum quodlibet.
□. Quadratum.
▱. vel ◇. Rhombus.
⏢. vel ⏢. Trapezium.
⬠ Pentagonum quodlibet.
⬡. Hexagonum quodlibet.
+. Plus, vel summa.
—. Minus, vel differentia.
Centr.ff. Centrum figurarum.
Centr ff ff. Centrum figurarum similium.
Centr.ff.dd. Centrum figur. dissimilium.
æq. vel *æqu.* æquantur.

ERRO-

ERRORES IN LITERIS.

Pag.	Lin.	Error.	Corrige.	Pag.	Lin.	Error.	Corrige.
18.	15.	ABC.	AFG.	103.	15.	omibus.	omnibus.
18.	19.	BN.	LN.	105.	2.	FGH.	GH.
21.		ABC.	ABD.	108.	15.	QR.	QS.
23.	9.	BC.	EC.	111.	26.	puncta.	adpuncta.
27.	7.	GA.	GH.	119.	22.	TT.	FF.
	9.	trandum.	tratum.	123.	12.	SX.	SZ.
32.	18.	(4.p.)	(4.P.)	128.	5.	*vb.*	*vn.*
40.	16.	PQR.	PQS.		6.	*an.*	*ad.*
48.		(33.p.)	(34.p.)	132.	12.	Fig.23.	Fig.36.
54.	6.	(18.p.)	(38.p.)		24.	*uz.*	*u.*
80.	24.	C.D.E.	C.D.	134.	14.	Fig.24.	dele.
88.	20.	inter se.	inter.	135.	11.	*æst.*	*st.*
94.	20.	BH.	GH.	137.	14.	26.&27.	28.&29.
	26.	LM.	L.	138.	19.	Fig.24.	Fig.36.
97.	25.	XZ.	XY.		24.	Fig.25.	Fig.37.
101.	10.	cum.	cumque.	140.	24.	GHN.	PQ.

ERRO-

ERRORES IN CARACTERIBUS.

Pag.	Lin.	Error.	Corrige.
8		⬠ABP+⬠.	2⬠ABP+2⬠.
34.	11.	−⬠EFH.	+⬠EFH.
117.		+4□SQ.	+□SQ.
132.	18.	⬡.	⬡T.
140.	22.	□Z.	□Y.
142.	22.	+⬡GM.	+⬡FM.
159.	18.	+△MP.	−△MP.

GEO-

GEOMETRIA MAGNA IN MINIMIS.

PARS PRIMA.

PROBLEMA CATHOLICUM RESOLVITUR:

CATHOLICO, ET MAXIMO CAROLO II. HISPANIARUM REGI SACRATUM.

******

***

*

CAPVT I.

DE FIGVRIS MINIMIS.

NIhil est in quantitate minimũ, si vnum tollatur punctum indiuibisibile, quod dubium est an in magnitudine reperiatur. Reliqua omnia siue spatia, siue corpora sint, Minima dicuntur non absolute, sed respectiue: nempè quorum summa ex certo puncto, vel supra datam rectam, omnium possibilium, quæ iisdem similia efformari possunt, minima est.

Compendij, & claritatis gratia characteribus vtimur ad declarandas figuras iisdem similes, quæ sæpius nominandæ occurrunt. △ Triangulum quodcumque significat: ◺ Triangulum rectangulum. □ Quadratum. ▭ Rectangulum. ▱ Rhombum ⏢ Trapezium ⬠ Pentagonũ. ⬡ Hexagonum. Hæc + significat Plus, *vel summam. Hæc —* Minus, *vt △ B + □ C. hoc est Triangulum B plus Quadratum C. vel summa Trianguli B & Quadrati C. Similiter ▭ D — ⬠ E. Rectangulum D, minus Pentagonum E: vel differentia Rectanguli D. & Pentagoni E.*

PRO-

PROPOSITIO I.

SI recta sit inæqualiter diuisa, figuræ similes ex tota recta, & differentia partium duplæ sunt earum, quæ ex partibus inæqualibus fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt recta A D. inæqualiter diuisa in B. & sumatur B E. ipsi B D. æqualis, eritque A E. differentia partium. Dico quaslibet figuras similes supra totam A D. & partium differentiam A E. duplas esse similium supra inæquales partes A B. B D.

DEMONSTRATIO.

QVadrata totius A D. & differentiæ A E. dupla sunt. Quadratorum ex partibus inæqualibus A B. B D. (2. l. 2.) sed omnes figuræ similes sunt in eadem ratione quadratorum; nempe in duplicata ratione laterum homologorum (4. l. 6.) Ergo omnes figuræ similes supra totam A D. & differentiam A E. duplæ sunt similium supra inæquales partes A B. B D. (1. l. 5.) Hoc est ⬠ A D + ⬠ A E. æquatur 2 ⬠ A B + 2 ⬠ B D. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio est 10. *lib. 2. Elem.* ad omnes figuras similes extensa.

PROPOSITIO II.

SI recta sit æqualiter, & inæqualiter diuisa, figuræ similes ex partibus inæqualibus duplæ sunt earum quæ ex dimidia recta, & ex intersegmento fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt recta CF. diuisa æqualiter in G. & inæqualiter in H. Dico quaslibet figuras similes supra inæquales partes CH HF esse duplas earum quæ ex dimidia recta CG. & ex intersegmento HG. similes fiunt.

DEMONSTRATIO.

QVadrata ex partibus inæqualibus CH. HF. sunt duplicia quadratorum ex dimidia CG. & intersegmento HG. (3.l.2.) Sed omnes figuræ similes sunt in ratione quadratorum; nempè in duplicata ratione laterum homologorum (4.l.6.) Ergo omnes figuræ similes supra CH. HF. sunt duplæ earum, quæ ex CG. HG. fieri possunt (1.l.5.) scilicet □ CH. + □ HF. æquantur 2 □ CG. + 2 □ HG. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio est 9. *lib.* 2. *Elem.* ad omnes figuras similes extensa.

PROPOSITIO III.

IN quolibet rectilineo si duo similia inscribantur communi angulo, & æquali excessu.

1. *Maius superat medium gnomone minori, & duplici figura simili ex laterum differentia.*

2. *Maius superat Minus dupliti gnomone minori, & duplici figura simili ex differentia.*

3. *Maior gnomon minorem superat, & complementa maiora etiam minora iisdem 2 figuris.*

4. *Complementa maioris superant gnomonem minorem una simili figura ex differentia.*

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN rectilineo ⌂ ADG inscripta sunt similia ⌂ ABO. & ⌂ AEQ æquali basium excessu EB, BD. Dico 1. ⌂ ADG. superare ⌂ ABO. toto gnomone minori EPQI. + 2 ⌂ PYF. Dico 2. ⌂ ADG. superare ⌂ AEQ in 2 EPQI. + 2 ⌂ PYF. Dico 3 Gnomonem BFOH. superare EPQI. in 2 ⌂ PYF. & similiter complementa DP + PGI. superare BL + LOK. in 2 ⌂ PYF. Dico 4. complementa DP + BGI. superare EPQI. toto ⌂. PYF.

DEMONSTRATIO.

1. CVm recta AD. sit inæqualiter diuisa in B. & AE. sit differentia, erunt ⌂ ADG + ⌂ AEQ. ex tota, & differẽtia, æqualia 2 ⌂ ABO +

2 PYF. hoc est 2 □ AB + 2 □ BD (1. p.) Ergo si vtrinque auferatur commune □ AEQ. erit □ ADG. æquale □ ABO + gnomoni EPQI. + 2 □ PYF. Ergo □ ADG. superat medium □ ABO. toto gnomone minori EPQI. + 2 □ PYF. ex laterum differentia PY. vel BD. quæ æquales sunt (7. l. 1.) Quod erat primum, &c.

2. Quia □ ADG. superat □ ABO in EPQI. + 2 □ PYF. sed □. ABO. superat □ AEQ. in EPQI. Ergo □ ABG. superat □ AEQ. duobus gnomonibus EPQI. + 2 □ PYF, &c.

3. Quia □ ADG. superat □ ABO. toto gnomone BFOH etiam gnomone EPQI + 2 □ PYF. ex *num.* 1. erit gnomon BFOH. æquale EPQI. + 2 □ PYF. Ergo etiam si ab vtroque gnomone EPQI & BFO. auferantur æqualia □ LP. & □ PF. remanebunt complementa DP + PGI. æqualia complementis BL + LOK. + 2 □ PYF. &c.

4. Ergo si tantum ex maiori gnomone BFOH. auferatur □ PYF. complementa DP + PGI. æqualia erunt gnomoni EPQI. + □ PYF. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Dato quodlibet rectilineo si alia duo similia circa diagonium inscribantur, & aliud fiat ex inscriptorum basium differentia: datum, & factum duplicia sunt inscriptorum.

2 *Si datum, & factum duplicia sunt inscriptorum, factum erit ex basium differentia.*

EXPOSITIO. Fig. 2.

SI datum rectilineum ⬠ ADF. & circa diagonium AF. inscripta similia, nempè ⬠ ABP. & ⬠ PYF. cum ex inscriptione omnia latera sint parallela (4. l. 6.) erunt PY, BD. æquales rectæ (7. l. 1.) si ergo sumatur BE. æqualis ipsi BD. vel PY. erit AE. differentia basium AB. & BD. vel PY. & in *casu* 1. cadet E. intra AB. & in *casu* 2. cadet extra: si ergo fiat supra AE. ⬠ AEL. Dico ⬠ ADF + ⬠ AEL. æqualia esse 2 ⬠ ABP. + 2 ⬠ PYF.

DEMONSTRATIO.

IN *casu* 1. cum BD. BE sint æquales est AD. inæqualiter diuisa in B. & AE. est differentia partiũ AB. BD. Ergo ⬠ ADF. + ⬠ AEL. æquãtur 2 ⬠ ABP + 2 ⬠ BD. vel PYF. (1. p.)

In *casu* 2. cum BD. BE. sint æquales est recta ED. æqualiter diuisa in B & inæqualiter diuisa in A. Ergo ⬠. ADF. + ⬠ AEL. partium inæquaæqualium æquantur 2. ⬠ BD. vel PYF + 2 ⬠ ABP. nempè ex dimidia, & intersegmento (2. p.) Quod erat, &c.

Conuersa patet. Sit ⬠ ADF + ⬠ Zz. æquale ⬠ ABP. + ⬠ PYF. Dico Zz. esse differētiam inter AB. & PY. vel BD. Sit enim differentia AE. Ergo ⬠ ADF. + ⬠ AE. æquantur ⬠ ABP + ⬠ PYF. vt demonstratum est: sed etiam ex hypothesi ⬠ ADF + ⬠ Zz. æquātur inscriptis ⬠ ABP. + ⬠ PYF. Ergo ⬠ Zz. æquatur ⬠ AE. Ergo cū figuræ sint æquales, & similes congruent (1. p.) & basis Zz. erit æqualis AE. scilicet differentiæ basium AB. PY. Quod erat demonstrandū.

PROPOSITIO V.

Iisdem positis; rectilineum quod ex basium differentia fit cum complementis eorum, quæ circa diagonium sunt, æquantur eis quæ circa diagonium sunt constituta: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 1.

In *casu* 1. & 2. sunt ⬠ ABP. & ⬠ PYF. circa diagonium AF. & ⬠ AEL. sit ex differentia basiū AB. & BD. vel PY. Dico ⬠ AEL. cum complementis DP. PH. æquari ⬠ ABP. + ⬠ PYF. circa diagonium.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ⬠ ADF + AEL. æquantur 2. ⬠ ABP. +

P.+2 ⬠PYF. (4.p.) sed ⬠ADF. componitur ex ⬠ABP+⬠PYF+DP+PH. Ergo ⬠ABP. +⬠PYF+DP+PH+⬠AEL. æquantur 2 ⬠ ABP+2 ⬠PYF. (3.p.) Ergo si ex vtraque parte semel auferantur ⬠ABP+⬠PYF. remanebunt ⬠AEL+complem. DP. PH. æqualia ⬠ABP+⬠PYF. Quod erat demonstrandum.

E conuerso si ⬠Z+DP+PH. æqualia sint ⬠ABP+⬠PYF. erit Z. differentia inter AB. PY. Quod demonstrabitur vt in præcedenti.

PROPOSITIO VI.

SI recta sit in quaslibet duas figuras diuisa habentes æqualia complementa cum æquali basium excessu: & in ea licet continuata sumatur quodlibet aliud punctum: figuræ datis similes, quæ ex assumpto ad terminos rectæ collocantur superant datas totidem similibus ex intersegmento: &ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 2.

SIt recta AC. diuisa in B & supra AB ⬠ABO. & supra BC □BCZ. sumātur prætere a æquales excessus BE. BD. & circunscribatur simile ⬠ADG & simile □CEX. Si complementa DP+PGI. æqualia sint complementis ER+RX. erunt ⬠ABO. & □BCR figuræ æqualium cōplementorum cum æquali basium excessu. In-

Insuper in recta AC. licèt continuata sumatur quodlibet punctum E. quod in *casu* 1. est intra terminos AC. & in *casu* 2. extra. Tandem supra AE. fiat ⬠ AEQ & supra CE ▭ CEM. Dico ⬠ AEQ + ▭ CEM. superare figuras æqualium complementorum, nempè ⬠ ABO + ▭ BCZ. duabus figuris similibus ex intersegmento EB. nempe vno ⬠ EB + ▭ EB & èconttra.

DEMONSTRATIO.

SV matur BD. æqualis BE. & circunscribatur ⬠ ADG. eritque ⬠ AEQ. cum complementis DP + PGI. æquale ⬠ ABO + ⬠ PYF. circa diagonium (5. p.) sed complementa DP + PGI. sunt æqualia complementis ER + RX. ex hypothesi: Ergo ⬠ AEQ. + ER + RX. æqualia sunt ⬠ ABO + ⬠ PYF. Ergo si vtrique parti æquali addãtur communia, nempe ▭ CBZ + ▭ NRM. erunt ex vna parte ⬠ AEQ + ER + RX + ▭ CBZ + ▭ NRM. æqualia ipsis ⬠ ABO + ⬠ PYF + ▭ CBZ + ▭ NRM. sed ▭ CEM. componitur ex ▭ CBZ + ▭ NRM + ER + RX. Ergo ⬠ AEQ + ▭ CEM. æquantur ⬠ ABO + ⬠ PYF + ▭ CBZ + ▭ NRM. Ergo ⬠ AEQ + ▭ CEM. superãt ⬠ ABO + ▭ CBZ. toto ⬠ PYF + ▭ NRM. sed ⬠ PYF. est supra basim PY. æqualem BD. (7. l. 1.) vel EB. ex cõstructione: tum ▭ NRM. est supra basim NR. æqualem etiam EB. Ergo

⬠ A

⬠AEQ+▭CEM. superant ⬠ABO+▭CBZ. duabus figuris similibus ex intersegmento EB, nempe ⬠EB+▭EB. Quod erat demonstrandum.

E conuerso. Si AEQ. CEM. superant ABO. CBR. duabus similibus ex EB. nempe ⬠EB+▭EB. dico ⬠ABO & ▭CBR. habere æqualia complementa. Sumatur enim BD. æqualis EB. & circunscribatur ⬠ADG. Ex hypothesi ⬠AEQ+▭CEX. æquantur ⬠ABO+CBZ+⬠EB+▭EB. sed ▭CEX. æquatur ▭CBZ+RM. vel ▭EB+ER+RX. ex quibus componitur: ergo ⬠AEQ+▭CBZ+▭EB+ER+RX. æquantur ⬠ABO+▭CBZ+▭EB+⬠EB. Ergo ablatis vtrinque communibus ▭CBZ+▭EB. remanent ⬠AEQ+ER+RX. æqualia ⬠ABO+⬠EB. vel ⬠LP. sed ⬠ABO. componitur ex ⬠AEQ+⬠LP+BL+LOK Ergo ⬠AEQ+ER+RX. æquantur ⬠AEQ+BL+LOK+2⬠LP. Ergo ablato communi ⬠AEQ. remanent complementa ER+RX. æqualia ipsis BL+LOK+2⬠LP: sed etiam complementa DP+PGI. æquantur BL+LOK+2LP (3.p) Ergo complementa ER+RX. æquantur complementis DP+PGI. Ergo ⬠ABO. & ▭CBZ. habent æqualia complementa. Quod erat, &c.

PROPOSITIO VII.

SI ex eodem rectæ puncto vtrinque sint constitutæ figuræ, vt summa summæ æqualia habeat complementa: similes figuræ ex quolibet alio rectæ puncto superabunt datas totidem figuris similibus ex intersegmento: & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SIt recta GC. & in ea punctum B. & ad vnam partem supra BA. BG sint constitutæ figuræ, & aliæ supra BK. BC. ita vt summa complemẽtorum figurarum BA. BG æqualis sit summæ complementorum figurarum BK. BC. & assumatur in recta quodlibet aliud punctum E Dico figuras datis similes supra EA EG EK. EC superare datas supra BA. BG. BK. BC. totidem figuris ijsdem similibus ex intersegmẽto BE.

Claritatis gratia diuidantur figuræ, & sint supra BA. semi circulus: supra BG. triangulum æquilaterum: supra BK semi ellipsis: & supra BC. triãgulum rectangulum. Et similiter supra EA. EG. EK EC. prout in figura apparet.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △L. cum complemento F. æquatur △H+△I. circa diagonium (5. p.) & T+R. æquatur S+Z (5. p.) sed complementa

F+

F+R. æqualia sunt N+Q. ex hypothesi: Ergo △L+T+N+Q. æquantur △H+I+S+Z: Ergo si vtrique parti addantur communia M+Y+P+V. erunt etiam L+T+N+Q+M+Y+P+V. æqualia ipsis H+I+S+Z+M+Y+P+V. sed M+Y+N. componunt X. & P+Q+V. componũt O. Ergo L+T+X+O. æquantur H+I+S+Z+M+Y+P+V. Ergo L+T+X+O. superant H. M. S. P. in quatuor figuris I. Y. Z. V. sed L. T. X. O. sunt figuræ datis similes ex EC. EK. EA. EG. & figuræ H. M. S. P. sunt ex BC. BA. BK. BG. & figuræ I. Y. Z. V. sunt omnes ex intersegmento BD. vel BE. Ergo figuræ ex puncto assumpto E. superant datas ex B totidem figuris similibus ex intersegmento EB. Quod erat demonstrandum.

Eadem est demonstratio licet plures sint in vna parte, quàm in alia.

Conuersa etiam ordine retrogrado demonstratur sicut in præcedenti, & ne actum agere videar demonstrationem ommitto.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Figuræ quæ cum æquali basium excessu habent æqualia complementa, minimæ sunt ex similibus, quæ ad basium terminos constitui possunt: idemque est de summa ad summam, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 2.

Sint ⌂ABO & ▭CBZ æqualium complemẽtorum: & bases in directum positæ habeant commune punctum B. Dico illas esse omniũ minimas, quæ ad terminos A. C. ipsis similiũ constitui possunt.

DEMONSTRATIO.

Sumatur in AC. quodlibet punctum E. & ⌂AEQ + ▭CEX. superabunt ⌂ABO + ▭CBZ vno ⌂EB + ▭EB (6. p.) Ergo ⌂ABO + ▭CBZ. sunt omnium minima. Idem demonstrabitur de summa ad summam, & de vna figura ad aliarum summam ex 7. p. Quod erat, &c.

E conuerso si ⌂ABO. & ▭CBZ. sunt omniũ minimæ, dico habere æqualia complementa: aliter habeant ⌂AEQ. & ▭CEX. æqualia cõplementa: Ergo ⌂ABO + ▭CBZ. superarent ⌂AEQ + ▭CEX. duabus similibus figuris ex intersegmento EB. (6. p.) Ergo ⌂ABO. & ▭CBZ. non essent minimæ cõtra Hypothesim.

Ea-

Eadem est demonstratio de summa ad summam, &c.

PROPOSITIO IX.

Figuræ, vel summæ quæ cum eadem tertia figura, vel summa sunt minimæ, etiam inter se minimæ sunt.

2. *Si duæ figuræ, vel summæ duabus alijs inter se minimis, seorsum minimæ sint, etiam inter se minimæ erunt omnes.*

EXPOSITIO.

Sint figuræ A. B. C. D. &c. si A. & B. sint ipsi C. minimæ dico esse inter se minimas. Tum si A. sit minima C. & B. sit minima D. & C. D. minimæ fuerint dico A. B. C. D. omnes esse inter se minimas.

DEMONSTRATIO.

Cum A. & B. sint minimæ C. habent cum illa æqualia complementa (8. p.) Ergo & inter se habent æqualia complementa (3. p.) Ergo sunt minimæ inter se (8. p.)

2. Cum C D supponantur minimæ, & A. sit minima C. erit etiam minima ipsi D. similiter B. & C. Ergo etiam A. & B. &c. Eadem est demonstratio de summa ad summam, vel de vna figura ad aliarum summam.

PRO-

PROPOSITIO X.

Triangula, vel parallelogramma æquè alta, habent æqualia complementa, & sunt minima, & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 4.

Triangula ABC. BDE. habent æqualem altitudinem, nempè sunt vel possunt esse inter easdem parallelas (8. l. 1.) dico illa esse inter se minima: & si sunt inter se minima, dico habere æqualem altitudinem. Idemque est de parallelo gammis.

DEMONSTRATIO.

Sumantur AI. DF. æquales excessus basium: & sint IK. FH. lateribus AC. DE. parallelæ: complemēta, vel parallelo gramma AL. DG. inter parallelas, & supra æquales bases AI. DF. sunt æqualia (8. l. 1.) Ergo triangula ABC. BDE. cùm habeant æqualia complementa sunt minima (8. p.) Idem est de parallelogrammis cum sint triangulorum dupla (8. l. 1.)

Cōuersa patet: quia si sunt minima habent æqualia complemēta (8. p.) quæ sunt parallelogramma cum æquali basi, vel excessu: Ergo habent æqualem altitudinem (8. l. 1.) &c.

PROPOSITIO XI.

SI Triangulum habeat duplam parallelogrammi altitudinem, sunt inter se figuræ minimæ, & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 5.

TRiangulum ABC, habeat duplam altitudinem parallelogrammi DF. dico esse figuras minimas: & si ABC minimum sit ▭ DF. dico triangulum ABC, habere duplam altitudinem parallelogrammi DF.

DEMONSTRATIO.

Sumantur DG. AM, æquales basium excessus: & sit BEI. diameter, & GI. IL. parallelæ ipsis DEK. FEH, & MP. parallela AC. Complementa GE. EL æquantur (4.1.6.) Sed ▭ AO est duplum GE cùm habeat duplam altitudinẽ supra basim AM, æqualem DG (18.l.1.) Ergo complementum AO. æquatur complementis GE. EL. Ergo cum ABC & DF. habeant æqualia complementa, erunt figuræ minimæ (8 p.) Quod, &c.

Econuerso. Si ABC minimũ sit DF. est AO. æquale LE + EG (8.p.) hoc est 2 EG. Ergo cùm bases sint æquales MA. DG. erit altitudo OA. dupla GE. (8.l.1.)

PROPOSITIO XII.

SI in quolibet Polygono diagonium cum basi, & latere faciat triangulare segmentum, cuius altitudo sit ad cuiusvis trianguli altitudinẽ, vt segmentum triangulare ad totum Pylogonum; hoc, & triangulum erunt inter se minima, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt ⬠ ABCDE. & diagonium ACN. faciens segmentum triangulare ABC. cuius altitudo sit TI. & sit quodlibet △ AFG. cuius altitudo IH. Si altitudo IT. triangularis segmenti ABC. sit ad altitudinem IH. Trianguli AFG. vt segmentum ABC. ad ⬠ ABCDE. Dico △ ABC. & ⬠ ABCDE. esse figuras minimas supra basium summam FB.

DEMONSTRATIO.

SVmantur BL. & FK. æquales, & ductis parallelis BN. NQ. QR. erit circunscriptum ⬠ ALNQR. & similiter inscribatur ⬠ CMNOP. & ducatur KHS. parallela FG.

Complementum LC. ad summam complementorum LC+CQE. est vt segmentum ABC. ad Polygonum BCDE (4. l. 6.) vel ex constructione vt IT. ad IH. sed parallelogrammum FZ. ad FH. est vt altitudo IT. ad IH. (1. l. 6.)

6.) Ergo vt LC. ad LC+CQE ita FZ. ad FH. (1.l.5.) & alternando: vt LC. ad FZ. ita LC+CQE ad FH (4.l 5.) sed parallelogramma LC. FZ. supra æquales bases FK. BL. & inter parallelas IL. TM. æquantur (8.l. 1.) Ergo etiam cõplementa LC+CQE. æquantur complemento FH (2.l. 5.) Ergo △FAG. & ⌂ABCD. cum habeant æqualia complementa, sunt inter se figuræ minimæ (8. p.) Quod, &c.

Econuerso. Si △FAG & ⌂ABCD. sint minima, erit complementum FH. æquale complementis LC+CQE (8. p.) & FZ. æquale LC. vt FH. æquale LC+CQE. sed vt IT. ad IH. ita FZ. ad FH (1. l. 6.) Ergo vt IT. ad IH. ita LC. ad LC+CQE (2. l. 5.) hoc est ita segmentum ABC. ad Polygonum ABCDE (4. l. 6.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

QVadrilaterum habens duo latera parallela est ad triangulare segmentum, vt summa eorundem laterum ad latus quod est in triangulo: & segmenta sunt vt latera parallela: & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN ⌂ ABCD. si AD. BC. sint latera parallela, & diagonium BD. vel AC. faciant triangularia ſegmenta. Dico totum ▭ ABCD. ad △ ABD. eſſe vt AD+BC. ad AD. latus △ ABD. vel ▭ ABCD. eſſe ad △ ABC. vt AD+BC. ad BC. latus △ ABC. Item ADB. ad BDC. eſſe vt AD. ad BC.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △ ABD. & △ BCD. ſunt inter parallelas AD. BC. ſe habent vt baſes AD. BC. (1. l. 6.) Ergo etiam componendo ſumma △ BCD + △ BAD. erit ad △ DAB. vt ſumma laterum BC + DA. ad DA (4. l. 5.) & △ ADC + △ ABC. ad △ ABC. vt AD + BC. ad BC. Quod erat demonſtrandum.

E conuerſo Si ſegmentum ADB. ad BCD. ſe habet vt AD. ad BC. dico AD. & BC. eſſe latera parallela. Fiat enim BE. æqualis AD. & ducatur DE. BED. ad BCD. eſt vt BE. ad BC (1. l. 6.) hoc eſt vt AD. ad BC. ſed etiam ex hypotheſi triangulum ADB. ad BCD. eſt vt AD. ad BC. Ergo △ ADB. æquale eſt △ BDE (2. l. 5.) Ergo cum habeant æquales baſes AD. BE. erunt inter parallelas (8. l. 1.) Ergo AD. BE. ſunt parallelæ. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

IN quolibet Trapezio recta per angulum diagonio parallela secat latus continuatum in ratione Trapezij ad triangulare segmentum, & in ratione segmentorum inter se.

EXPOSITIO. Fig. 8.

SIt ▭ ABCD. & diagonium BD. & ex angulo C ducatur CE. ipsi BD parallela, quæ occurrat lateri AD. continuato in E. Dico segmentum △ABC. ad △BDC. esse vt AD. ad DE. & etiam △ABC. ad ▭ ABCD. esse vt AD. ad AE.

DEMONSTRATIO.

SIt recta AGH. perpendicularis vtrique parallelæ BD. CE. & erit GH. altitudo trianguli BDC. & GA. altitudo trianguli BDA. Ergo cum basis BD. sit communis △BDA. & △BDC. erit △BDA. ad △BDC. vt altitudo AG. ad altitudinem GH (1. l. 6.) sed AG. ad GH. est vt AD. ad DE (2. l. 6.) Ergo △BDA. ad △BDC. est vt AD. ad DE (1. l. 5.) Ergo componendo △BDA. ad △BDA + △BDC. hoc est ad ▭ ABCD. erit vt AD. ad AD + DE (4. l. 5. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XV.

PEntagonum regulare est ad triangulare segmentum, vt summa laterum huius ad latus ipsius pentagoni.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SIt ⬠ABCDE. & diagonium CE. Dico ⬠AB CDE. ad segmentum △CDE. esse vt summā laterum △CDE. ad latus ⬠ABC. hoc est vt C D. + DE + EC. ad CD.

DEMONSTRATIO.

DVcatur diagonium CA. & descripto arcu DF. iungatur EF. cum arcus DE. EA. sint æquales ex æqualibus chordis (2. l. 3.) etiam anguli DCE. ECA. sunt æquales (3. l. 3.) latera vel radij CD. CF. etiam æquantur; & CE. latus commune est △DCE. & △ECF. Ergo sunt triangula omninò æqualia (4. l. 1.) sed △AEC. ad △DCE. vel ad △FEC. est vt AC. ad FC (1. l. 6.) hoc est vt EC. ad DC. & △ABC. ad △DCE. est vt CB. ad DC. vel ED. ad DC. & etiam △D CE. ad △DCE. est vt DC. ad DC. Ergo componēdo △ABC + △ACE + △EDC. ad △EDC. est vt DE + EC + CD. ad DC (4 l. 5.) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Hexagonum regulare ad triangulare segmentum est in ratione sextupla.

DEMONSTRATIO. Fig. 10.

Sit ⬡ ABE. & diagonium CE. Dico totum ⬡ ABE. ad △EDC. esse vt 6. ad 1.

Ductis enim AE, AC, tum ex centro GA. GE GC. & fient 6. triangula, quæ supra æquales bases AE. BC. CA. habent reliqua latera æqualia, ex ipsa Hexagoni constructione: Ergo omnia 6. triangula erunt æqualia (4. l. 1.) Ergo totum Hexagonum ABCDEF. ad △EDC. erit vt 6. ad 1. vel sextuplum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Licet ratio Pentagoni, vel Hexagoni ad suũ triangulare segmentum, vniuersaliter determinetur etiam pro omnibus Polygonis irregularibus in sequenti propositione: Determinationes istæ speciales omittendæ non fuere, quia in Minimorum praxi earum vsus, facilior, & expeditior est.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

IN quolibet Polygono si ex angulis continuentur diagonijs parallelæ in continuata latera, determinant segmentorum rationes; & rationem Polygoni ad triangulare segmentum.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SIt Polygonum Heptagonum ABEG. & diagonia BD. BE. BF. BG. Ducatur CH. parallela BD. & HI. ipsi BE. & IK. ipsi BF. & KL. ipsi BG. Iterùm DR. parallela BE, &c. prout in figura apparet. Dico △BCD. ad △BDE. esse vt LM. ad MN. & △BDE. ad △BEF. esse vt MN. ad NO. &c. & Heptagonum ABEG. ad segmētum △ABG. esse vt tota AL. ad latus AG.

DEMONSTRATIO.

IN Trapezio BCDE. est △BCD. ad △BDE. vt DH. ad DE (14. p.) hoc est vt IR. ad RE. vel KQ ad QP. vel LM. ad MN. ex parallelismo (2. l. 6.)

Iterùm in trapezio BDEF. est △BDE. ad △BEF. vt RE. ad EF (14. p.) vel vt QP. ad PF. vel vt MN. ad NO (2. l. 6.)

Rursus in ▱ BEFG est △ BEF. ad △BFG. vt PF. ad FG (14. p.) vel vt NO. ad OG (2. l. 6.)

Tandem in Trapezio ABFG. est △ BFG. ad △ABG. vt OG. ad GA (14. p.)

Ergo

Ergo componendo ſumma triangulorum, nempè △BCD+△BDE+△BEF+△BFG+△ABG. ad triangulum ABG. erit vt ſumma rectarum, nempè vt LM+MN+NO+OG+GA. ad ipſam GA (4. l. 5.) ſed ſumma triã gulorum eſt totum Heptagonum, vel Polygonum ex ipſis compoſitum: & ſumma rectarũ eſt tota recta AL. ex ipſis compoſita: Ergo totum Polygonum Heptagonum ABCDEFG. ad triangulare ſegmentum ABG. eſt vt tota recta AL. ad latus AG (2. l. 5.) Quod erat, &c.

CONSECTARIA.

PArallelæ ex primo angulo C. nempe CH. HI. IK. KL. determinant Polygoni rationem ſecluſis alijs.

2. Cuiuſvis trianguli ad quodlibet aliud ratio determinatur interſegmentis correſpondentibus. Sic ratio △BDE ad △BFG. eſt vt MN. ad OG. &c.

PROPOSITIO XVIII.

SI Triangulum habeat æqualem altitudinem cum termino parallelæ determinantis rationem Polygoni ad triangulare segmentum, est Triangulum Polygono minimum.

2 Et si habeat æqualem basim erit Polygono æquale.

EXPOSITIO. Fig.12.

SIt ⬠ ABCDE.& CF.FG.determinent rationem ⬠ ABCDE ad △ ABE.vt AG.ad AE(17.p.) Ducta GI.basi AB.parallela. Dico quodlibet triangulum inter AB.GI.constitutum,vel habens altitudinem perpendiculi GH.esse minimum Polygono ⬠ ABCDE.

Et si triangulum ABG.habeat eandem basim AB.vel æqualem, & sit inter præfatas parallelas ABGI. dico Triangulum esse Polygono etiam æquale.

DEMONSTRATIO.

SIt EO parallela BH. eritque OH.altitudo △ ABE.sed GH ad HO.est vt GA.ad EA(2 l 6.) scilicèt vt ⬠ ABCDE.ad △ ABE (17 p.) Ergo cum GH.altitudo trianguli HAG.ad HO. altitudinem segmenti △ ABE.sit vt ⬠ ABCDE. ad △ ABE.erit △ HAG. minimum ipsi ⬠ ABC DE(12.p.) Quod eadem ratione concluditur

de

de quolibet alio triangulo inter parallelas GI. HB. vel æquæ alto: Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

2. Habeat Triangulum ABG. æqualem basim AB. vel eandē ipsius Polygoni: erit Triangulum ABG. ad Triangulare segmentum ABE. vt altitudo GA. ad altitudinem OH (1.l.6.) vel vt GA. ad EA. hoc est vt ⬠ ABCD. ad idem triangulum ABE. vt modo demonstrandum est: Ergo cum Triangulum ABG. eandem habeat rationem ad triangulum ABE. quam Polygonum ABCD. ad idem triangulum ABE. erit Triangulum ABG. æquale Polygono A B CDE (2.l.5.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

SI in eodem Polygono ex vtroque latere supra basim parallelæ determinent rationē Polygoni, secabunt latera opposita in eadem altitudine: vel quæ iungit determinationes est basi parallela.

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt ⬠ ABCDE. & ex A sint diagonia AD. AC. eisque parallelæ EQ. QS. tum ex B. sint diagonia BD. BE. ipsisque parallelæ CF. FG. Dico puncta G. S. esse æquè alta, & G S. parallelam esse basi AB.

DEMONSTRATIO.

COntinuata vtrinque basi AB. ducantur ex G. & S quælibet rectæ GH. SX. facientes triangula HAG. BXS. Ergo △HAG. cum habeat æqualem altitudinem cum pũcto G. est minimum ⬠ABCDE(18.p.) similiter △BSX. est minimum pentagono ABCDE. propter æqualem altitudinem cum puncto S. (18.p.) Ergo △HAG. & △BSX. sunt minima inter se (9.p.) Ergo sunt æque alta (10.p.) Ergo cum puncta G.S. habeant æqualem altitudinem supra HX. est GS. ipsi parallela. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XX.

SI termini parallelarum determinantium rationes Polygonorum, habeant æqualem altitudinem, erunt Polygona inter se minima, & èconuerso.

2 *Polygona minima sunt inter se vt bases.*

EXPOSITIO. Fig. 12.

SInt ⬠ABCDE. & ▱ KLMN. & CFG. determinat rationem ⬠ABCDE. ad △ABE. vt AG. ad AE (17.p.) & NI. determinat rationem ▱KLMN. ad △KLM (17.p.) Si puncta G. & I. sint æquè alta, hoc est perpendicula GH. IR. æqualia: Dico ⬠ABCDE. & ▱KLMN. esse inter se figuras minimas: & *èconuerso* si sint figugura minima, dico GH. IR. esse æqualia.

2 Dico Polygona inter se minima esse inter se vt bases.

DEMONSTRATIO.

CVm Triangulum HAG. habeat æqualem altitudinem cum terminis G. & I. minimũ est vtrique Polygono (18. p.) Ergo etiam Polygona ABCDE. & KLMN. sunt inter se minima (9. p.) Quod erat, &c.

Econtra: ⬠ABCDE minimum est △HAG. & ⏢ KLMN. minimum est △LRI (18. p.) Ergo si Polygona sunt minima etiam triangula (9. p.) Ergo vertices G. I. habent æqualem altitudinem (10. p.) Quod erat, &c.

2 Sint Polygona inter se minima ⬠ABCDE. & ⏢ KLMN. & termini rationum æque alti G. & I. ductisque rectis BG & KI. erit △ABG. æquale Polygono ABCDE. & △LKI. æquale Polygono KLMN (18. p.) Ergo Polygonũ ABCDE ad Polygonum KLMN erit vt triangulum ABG. ad triangulum LKI (2. l. 5.) sed triãgulum ABG. ad triangulum LKI est vt basis AB. ad basim KL. eo quod habeant æqualem altitudinem inter parallelas (1. l. 6.) Ergo Polygonum ABCDE. ad Polygonum KLMN. est vt basis AB. ad basim KL (1. l. 5.) & cũ hoc perpetuo demonstretur de quibuslibet Polygonis

nis

nis minimis, erunt Polygona minima inter se vt bases. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

SI Triangulum pluribus alijs triangulis simul æque altum sit, erit illud minimum ad aliorũ summam.

2 *Idem est de Parallelogrammis inter se.*

3 *Et etiam de vna summa ad aliam.*

4 *Et èconuerso etiam in omnibus.*

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Triangulum ABC. cuius altitudo æqualis sit altitudinum summæ aliorum, nempè △ GHI+IKL+LMN. quæ ita constituantur vt vnum supra alterius verticem sit, & bases habeant parallelas. Dico Triangulum ABC. minimum esse ad aliorum summam: *Et èconuerso* si aliorum summæ sit △ ABC. minimũ; eius altitudo æqualis erit altitudinum summæ, &c.

DEMONSTRATIO.

SVmantur æquales basium excessus BD. GZ. & sit DF. parallela lateri BC. & ZO. OP. PQ. parallelæ lateribus GI. IL. LN. Bases AB. GH. in eadem recta, & KR. MS. NC. ipsis parallelæ. Opposita latera in parallelogrammis æqualia sunt BD. CE. tum ZG. OI. PL. QN. (7. l. 1.) &

cum

cum BD. GZ. sint ex constructione æqualia: omnia erunt æqualia inter se: Ergo ex æquali basi, & altitudine sunt parallelogrāma æqualia DR. GO. tum RS. OL. tum SC. LQ (8. l. 1.) Ergo complementum DC. in △ABC. æquale est complementis GO + OL + LQ. triangulorum GHI. IKL. LMN. Ergo cum △ABC. habeat complementum æquale complementis aliorum erit △ABC. minimum ad summam △GHI + △IKL + △LMN (8. p.)

2 De Parallelogrammis eadem est omninò demonstratio ex complementis.

3 Si Triāgula ABR. FRC. tribus alijs æque alta sunt, erunt etiam complemēta DR + RE. æqualia complementis GO + OL + LQ. Ergo summa summæ erit minima: & etiam in Parallelogrammis.

4 Si △ABC. minimum sit △GHI + IKL + LMN. erit complementum DC. æquale cōplementis GO + OL + LQ (8. p.) Ergo cum bases BD. ZG. sint æquales; erunt etiam altitudines æquales (8. l. 1) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

SI plures figuræ fuerint singillatim minimæ cũ alijs figuris summa summæ erit minima.

2 *Figura quæ sit alicui summæ minima, etiã alteri summæ minima erit.*

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt △GHI. minimum □T. & △IKL. cum ⬠V. & △LMN. cum ⬡X. Dico summam △GHI + △IKL + △LMN. minimum esse □T + ⬠V + ⬡X.

DEMONSTRATIO.

CVm △GHI. minimum sit □T. erit complementum GO. æquale complementis □T (8. p.) tum OL. æquabitur complementis ⬠V. & LQ. complementis ⬡X (8. p.) Ergo summa complementorum GO + OL + LQ. æquatur summæ complementorum □T + ⬠V + ⬡X (4. p.) Ergo summa △GHI + △IKL + △LMN. minima est summæ □T + ⬠V + ⬡X (8. p.)

2 Cũ summa △GHI + △IKL + △LMN. demonstrata sit minima summæ □T + ⬠V + ⬡X. Si △ABC vel quælibet alia figura minima sit priori summæ, etiam alteri minima erit (9. p.) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerint plura Polygona, & altitudo alicuius trianguli sit ad altitudinem triangularium segmentorum, vt summa Polygonorum ad segmentorum summam, erit Triangulum summæ Polygonorum minimum, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SInt Polygona ▭ ABCD. & ⬠ EFH. eorum summa ad summam segmentorum ABD + EFI. est vt summa AE + EK ad AD + EI (17. p.) Sit ergo altitudo △ LOR ad altitudines △ ABD + EFI. etiam vt AE + EK. ad AD + EI Dico △ LOR esse minimum summæ ▭ ABCD + ⬠ EFH *& èконtra.*

DEMONSTRATIO.

DVcantur quælibet EM. KN. & △ MAE. erit minimum ▭ ABCD. & △ NEK. ipsi ⬠ EFH (18. p) Ergo altitudo △ MAE. ad altitudinem △ ABD. erit vt AE. ad AD. & similiter altitudo △ NEK ad altitudinem △ EFI. vt EK. ad EI. nempè vt Polygona ad segmenta (12. p.) Ergo summa altitudinũ △ MAE + △ NEK ad summam altitudinum segmentorum nempè △ ABD + △ EFI. est vt sũma AE + EK ad summam AD + EI (4 l. 5.) sed etiam altitudo △ LOR. ad altitudinem segmentorũ, nempe △

ABD+△EFI. est vt AE+EK. ad AD+EI. ex hypothesi. Ergo altitudo △LOR. æqualis est sũmæ altitudinum △MAE+△NEK. cum eidẽ eandem habeant rationem (2. l. 5.) Ergo △LOR. minimum erit summæ triangulorum MAE+NEK (21. p) Ergo cũ △MAE. minimũ sit ▱ ABCD. & △NEK. minimum ⬠EFH. erit △LOR. minimum summæ Polygonorum ▱ ABCD+ ⬠EFH (22. p.) Quod erat, &c.

E conuerso. Si △LOR. minimum sit summæ ▱ ABCD+ ⬠EFH. etiam erit minimum triãgulis NEK. MAE (22. p.) Ergo altitudo △LOR æqualis est altitudinum summæ △MAE+△NEK (21. p.) sed summa altitudinum △MAE+△NEK. ad summã △ABD+△EFI est vt AE+EK. ad AD+EI. vt antea: Ergo altitudo △LOR. ad summam altitudinum △ABD+△EFI. est vt summa AE+EK. ad summam AD+EI. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXIV.

SI Triangulum habeat æqualem altitudinem cum terminis parallelarum, quæ determinant Polygonorum rationes, erit summæ Polygonorum minimum, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt △LOR. Polygona sint ▱ ABCD. & ⬠EFH alti-

altitudo △LOR. æqualis sit summæ altitudinum punctorum E. & K. vbi determinantur Polygonorum rationes ex 17. p. vel sint RK. LB. parallelæ. Dico △LOR. minimum esse sumæ ▱ ABCD+ ⬠EFH. *& econtra.*

DEMONSTRATIO.

DVcantur quælibet KN. EM. & △LOR. minimum erit summæ △MAE+△NEK (21. p.) sed △MAE. minimum est ▱ ABCD. & △NEK. ipsi ⬠EFH (18. p) Ergo △LOR. minimum erit summæ ▱ ABCD+ ⬠EFH (22. p.) Quod erat, &c.

Econuerso. Si ipsis minimum sit etiam triãguli MAE. NEK. minimum erit (22. p.) Ergo & ipsis æquè altum (21. p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXV.

SI terminus parallelæ determinantis rectilinei rationem aliorum terminis æque altum sit, erit rectilineum aliorum summæ minimum, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt ▯ P. & ex alia parte ▱ ABCD. & ⬠EFH. & altitudo Q. æqualis sit summæ altitudinum punctorum E. & K. Dico ▯ P. minimum esse summæ ▱ ABCD + ⬠EFH. & *èconuerso* si ipsis minimum sit: dico altitudinem Q. æqualem esse E. & K.

DEMONSTRATIO.

SIt △ LOR. vt altitudines R. & Q. æquales sint. Ergo etiã altitudo R. æqualis erit summæ altitudinum E. & K. sed ▯ P. minimum est △ LOR (18. p.) & △ LOR minimum summæ ▱ ABCD + ⬠ EFH (24. p.) Ergo etiam ▯ P. erit minimum summæ ▱ ABCD + ⬠ EFH (9. p.) Quod, &c.

Si vero ▯ P. minimum ipsis sit, etiam minimũ erit △ LOR. & Q. æquè altum ipsi R. nempè summæ E. & K. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVI.

SI determinationes rationum in alterutra rectilineorum summa habeant æqualem altitudinem: erunt rectilineorum summæ inter se minimæ, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SInt ex vna parte ▱ ABCD + ⬠ EFH. & ex alia ⬡ X + ▭ Z. & summa altitudinum K. æqualis sit summæ altitudinum S. Dico summam ▱ ABCD + ⬠ EFH minimam esse summæ ⬡ X + ▭ Z. & si summa sit summæ minima dico altitudines K. & S. esse æquales.

DEMONSTRATIO.

SIt △LOR. æque altum puncto K. Ergo etiã puncto S. æque altum erit: Ergo erit △LOR. minimum vtrique summæ (24. p.) Ergo etiã summa erit alteri minima (9. p.) Quod erat &c.

E conuerso si summa sit summæ minima eidem △LOR. minima erit (9. p.) Ergo altitudo R. æqualis erit, & K. & S (24. p.) Ergo etiã altitudo K. erit altitudini S. æqualis (3. p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVII.

IN rectilineis similibus, rationum altitudines, sunt eorum basibus, & altitudinibus proportionales: etiamsi complexe sumantur.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SInt ⬠ABH. & ⬠KLR. similia, determinationes rationum sint D. & N (17. p.) & earum altitudines DF. & NP. Dico DF. ad NP esse vt bases AB. ad KL. vel vt altitudines HG ad RQ. Et si ⬠T. & ⬠V. & ⬠X sint ipsis similia: etiam complexe summa DF+NP. ad altitudines rationum in T+V+X. esse vt summam basium AB+KL. ad summam basium T+V+X.

DEMONSTRATIO.

VT AB. ad BC. ita KL. ad LM (4. l. 6.) & BC. ad ad BD. vt LM. ad LN (17. p.) & BD. ad DF. vt LN. ad NP (2. l. 6.) Ergo ex æquo AB. ad DF. vt KL. ad NP (1. l. 5.) Ergo alternãdo vt basis AB. ad KL. ita altitudo DF. ad NP (4. l. 5.) Similiter demonstrabitur AB. ad KL. esse vt HG. ad RQ. ergo etiam vt HG. ad RQ. ita DF. ad NP. (1. l. 5.) Ergo etiam summa ad summam erit in eadem ratione (4. l. 5.) Quod fuerat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

FIguræ similes si æqualem basim, vel altitudinem habeant, minimæ sunt inter se, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SVpra æquales bases T. V. X. Z. sint constituta similia Parallelogrãma: vel sint T. V. X. Z. æquales altitudines similium trapeziornm. Dico figuras esse inter se minimas; vel *ècontra* si ▭T. & ▭V. & ▭X. & ▭Z. similia sint, & minima, dico bases, vel altitudines T. V. X. Z. esse æquales.

DEMONSTRATIO.

CVm figuræ supponantur similes, erunt rationum altitudines, earum basibus, vel altitudinibus proportionales (27. p.) sed bases, vel altitudines T. V. X. Z. supponuntur æquales:

les: Ergo rationum altitudines erunt æquales (2. l. 5.) Ergo figuræ erunt inter ſe minimæ (20. p.)

Econtra ſi figuræ ſint minimæ, etiam rationum altitudines (20. p.) Ergo etiam baſes, vel figurarum altitudines erunt æquales (27. p.) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

SI Figurarum ſimilium ſumma æqualem habeat ſummam baſium: baſi alteri, vel baſium ſummæ; erit minima alteri figuræ ſimili, vel figurarum ſummæ, & ècontra. Idemque eſt de altitudine figurarum.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SVmma □T + □V + □X. & □Y + □Z. habeant æqualem baſium, vel altitudinum ſummam dico ſummam ſummæ eſſe minimam: & *èconuerſo.*

DEMONSTRATIO.

CVm figuræ ſimiles ſint: rationum altitudines etiam complexe erũt ſummæ baſium, vel altitudinum proportionales (27. p.) Ergo cum ſumma baſium T + V + X. ſupponatur æqualis ſummæ baſium Y + Z. rationes habebunt ſuarum altitudinum ſummam æqualẽ (1. l. 5.) Ergo ſumma figurarũ erit alteri ſummæ mæ, minima (20. p.) Similiter si basis Y, æqualis sit summæ T + V. erit □ Y. minimum □ T + □ V. &c.

Conuersa eadem ratione demonstratur, vt in præcedenti.

PROPOSITIO XXX.

Figuræ minimis licet dissimilibus similes, si ipsis proportionales fuerint, vel habuerint bases, aut altitudines proportionales minimæ sunt inter se, & è contra. Quod etiam dicitur de summa ad summam.

EXPOSITIO. Fig. 16.

Sit △ ABC. minimum □ BD. & △ PQS. simile △ ABC. & □ QR. simile □ BD. si fuerint proportionales vt △ ABC. ad □ BD. ita △ PQR ad □ QR. vel vt basis AB. ad BD. ita PQ. ad QR. Idemque est de altitudinibus. Dico △ PQS. & □ QR. esse minima inter se: & *è contra*.

DEMONSTRATIO.

Cvm △ ABC. ad □ BD. sit ex Hypothesi vt △ PQS. ad □ QR. erit etiam alternando △ ABC. ad △ PQS. vt □ BD. ad □ QR. sed △ ABC. ad △ PQS. est in duplicata ratione AB. ad PQ. & □ BD. ad □ QR. est in duplicata ratione BD. ad QR (4. l. 6.) Ergo ratio duplicata AB. ad PQ. est vt duplicata ratio BD. ad QR.

(1.

(1.*l.* 5.) Ergo etiam ratio simplex AB. ad PQ. ita BD. ad QR. (1.*l.* 5.) Similiter altitudines proportionales erũt: *& econtra* si altitudines proportionales sint, etiam bases figurarum similium erunt proportionales (4.*l.* 6.)

Iam positis basibus proportionalibus in figuris similibus, etiam rationum altitudines proportionales erunt (27.*p.*) Ergo altitudo rationis △ABC. ad altitudinem rationis △PQS. ita altitudo rationis □BD. ad altitudinem rationis □QR. Ergo etiam alternando vt altitudo rationis △ABC. ad altitudinem rationis □BD. ita altitudo rationis △PQS. ad altitudinem rationis □QR (4 *l* 5.) sed cum △ABC. & □BD. sint minima, habent rationum altitudines æquales (20.*p.*) Ergo etiã △PQS. & □QR. habent altitudines rationum æquales (2.*l.* 5.) Ergo sunt minima (20.*p.*) Quod eadem ratione de summa ad summam concluditur: vt perspicuum est.

Econuerso. Si △ABC minimum sit □BD. & similia minima sint △PQS. & □QR. erunt figuræ, & bases proportionales: cum enim sint minimæ △ABC □BD. sunt rationum altitudines æquales (20.*p.*) & etiam in △PQS. & □QR. Ergo altitudo rationis △ABC. ad altitudinem △PQS. est vt altitudo □BD. ad altitudinem □ QR (2.*l.* 5.) sed rationum altitudines sunt ut bases (27.*p.*) Ergo ut Basis AB. ad PQ. ita BD. ad QR (1.*l.* 5.) Ergo etiam figuræ sunt proportionales (4.*l.* 6) & alternando: bases, & figuræ proportionales erunt (4.*l.* 5.) Quod erat demonstrandum.

CAPVT II.

DE CENTRO MINIMO.

CEntrum minimum, *dicitur punctum, ex quo prodeunt rectæ ad qualibet data puncta, utcumque disposita, supra quas figuræ constitutæ, licèt inter se dissimiles, datis tamen similes, minimam omnium similium summam efficiunt.*

Si Figuræ similes esse debeant, dicetur Cētrum figurarum similiū: *& compendij gratia.* Centr. ff. ss. *Si figuræ dissimiles fuerint, vocabitur* Centrum figurarum dissimilium, *vel* Centr. ff. dd. *Si autem demonstratio figuris similibus, & dissimilibus communis fuerit dicetur absolutè* Centrum figurarum, *vel* Centr. ff.

Va-

Varie hoc figurarum centrum potest considerari, scilicet respectu eiusdem lineæ, vel plani, vel solidi: hoc vltimum est absolutè cētrum minimum. Ex primo tamen secundum infero, & ex secundo tertium, quod monitum velim, ne cui supponere videar id ipsum, quod probandum assumo.

PROPOSITIO XXXI.

SI recta coniungens duo puncta sit diuisa vnico puncto in figuras minimas, & sumatur in ea quodlibet aliud punctum, figuræ ex assumpto ad data superant minimas; totidem similibus ex intersegmento.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt data puncta A. & B. quæ coniungantur recta AB. & hæc diuisa sit in E. vt □ EA. & □ EB. minima sint: vel △ EA. & ⬠ EB. & sumatur in AB. quodlibet punctum F. Dico □ FA + □ FB. superare □ EA + □ EB. in 2 □ EF. vel △ FA. + ⬠ FB. superare △ EA + ⬠ EB. in vno △ EF. & vno ⬠ EF.

DEMONSTRATIO.

CVm △ EA. & ⬠ EB. sint minima, habebunt æqualia complementa (8. *p.*) sed assumpto quouis puncto F. summa △ FA + ⬠ FB. superat figuras æqualium complemētorum △ EA

 + ⬠

+ ⬠EB. in vno △EF + ⬠EF (6. p.) Ergo △FA + ⬠FB. superant figuras minimas duabus similibus ex intersegmento. Quod erat demonstrandum.

Eadem est demonstratio si duæ, vel plures figuræ EA. minimæ sint vni, vel pluribus EB.

PROPOSITIO XXXII.

IIsdem datis, si extra rectam in quolibet plano per illam transeunte sumatur punctum aliud; figuræ ex assumpto superant minimas totidem similibus ex recta ab assumpto ad punctum minimarum ducta.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt data puncta A. B. quæ iungatur recta AB. & hæc diuisa sit in E. vt △EA. & ⬠EB. sint inter se minima: Trãseat per AB. quodvis planum AGB. & in eo sumatur quodlibet punctum G. Dico △GA + ⬠GB. datis similia superare △EA + ⬠EB. duobus similibus ex EG. nempè △EG + ⬠EG. Idem quæ est de figuris similibus inter se.

DEMONSTRATIO.

SIt GF. perpendicularis ipsi AB. cum GA. & GB. opponantur angulis rectis in F. erit △GA. æquale △FA + △FG. & ⬠GB. æquale ⬠GF + ⬠FB (4. l. 6.) Ergo △GA + ⬠GB. æquãtur

tur △FA+△FG+⬠GF+⬠FB. ſed △FA+⬠FB. æquantur △EA+⬠EB+△EF+⬠EF (31 *p.*) Ergo △GA+⬠GB. æquatur △EA+⬠EB. & præterea △GF+△FE. tum ⬠GF+⬠FE. ſed △GF+△FE. æquantur △GE. tum ⬠GF+⬠FE. æquantur ⬠GE (4. *l*. 6.) cum GE. opponatur angulo recto F. Ergo △GA+⬠GB æquãtur △EA+⬠EB & præterea △GE+⬠GE. Ergo △GA+⬠GB. ſuperant figuras minimas, nempe △EA+⬠EB. duabus ſimilibus ex EG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI recta coniungens duo puncta ſit diuiſa in figuras minimas: & inde in quouis plano per rectam deſcribatur circulus, vel abſolutè ſphæra quolibet radio: Figuræ ex quouis peripheriæ circularis, vel ſuperficiei ſphæricæ puncto ad data puncta, ſuperant figuras minimas, totidem ſimilibus ex radio factis: & ſumma ſemper eſt eadem.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt puncta A. B. & recta AB diuiſa in figuras minimas, vt △EA. & ⬠EB. minima ſint: & per AB. tranſeat quodlibet planum ABG. in quo ex E. deſcribatur circulus GH. vel abſolutè ex E. deſcribatur ſphæra GH. Dico ex quolibet puncto G. circunfererentiæ GH. vel ſu-

ſuperficiei ſphæricæ figuras △ G A. & ⬠ G B. ſuperare minimas △ EA. & ⬠ EB. duabus ſimilibus ex radio EG.

DEMONSTRATIO.

ASſumpto quolibet punto G. figuræ ex illo ſuperant minimas ex E. duabus ſimilibus ex recta ab aſſumpto G. ad E(32. *p*) ſed quodlibet punctum G. ſumatur in circunferentia, recta EG. erit radius: Ergo ex quouis circunferentiæ puncto figuræ ſuperabunt minimas duabus ſimilibus ex Radio, &c.

2 Deſcribatur ex E. ſphæra GH. & aſſumpto in ſuperficie quouis puncto G. erit in eodẽ plano cum A. B nempe in plano A B G. in quo eſt tota AEB. & GE (1. *l.* 11.) Ergo △ GA + ⬠ GB. ſuperant △ EA + ⬠ EB. duabus ſimilibus figuris ex EG(32. *p.*) nempe ex radio ſphæræ. Quod erat, &c.

3 Summa ex G. ſemper eſt eadem: quia ſemper eſt æqualis minimæ ſummæ cum duabus ſimilibus figuris ex eodẽ radio, vel æquali: Ergo cum ſemper ijſdem æqualis ſit, ſemper erit æqualis, vel eadem. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

Centrum absolutè minimum inter duo puncta, est quod diuidit rectam puncta coniungentem in figuras minimas, quod vnicum est, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

Sint puncta A. B. & recta AB. diuisa in E. in figuras minimas △EA & ⬠EB. dico E. esse centrum absolute minimum ad puncta A. B. & esse vnicum, *& è contra.*

DEMONSTRATIO.

Si extra E. sumatur quodlibet punctum G. erit in superficie alicuius sphæræ ex cētro E. radio EG. descriptæ: Ergo △GA + ⬠GB. superant △EA + ⬠EB. duobus similibus ex EG (33. *p.*) Ergo summa ex E. est omnium minima, & E. centrum absolutè minimum: & vnicum est, quia ex quolibet alio fit maior summa. Quod erat, &c.

Conuersa patet, quia si E. non diuideret AB. in figuras minimas non esset centrum minimum contra hypothesim. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

SI punctum diuidat rectam æqualiter, erit cē-trum ff. ss.

2 *Si inæqualiter, erit centrum ff. dd. nempè quadrati vnius partis, & rectanguli vtriusque.*

3 *Si sphæra, vel circulus describatur, summa semper erit eadem iuxta centri qualitatem.*

EXPOSITIO. Fig. 17.

SI CB. diuidatur æqualiter, vel CD. inæqualiter in E. dico E. esse *centr. ff. ss.* ad C. & B. vel *centr. ff. dd.* nempe □ ED. & ▭ CED. &c.

DEMONSTRATIO.

CVm EC. EB. supponantur æquales, erunt minimæ quæcumque figuræ similes inter se (28. *p.*) Ergo erit E. *centr. ff. ss.* ad C. B (33. p.)

2 Quoniam rectangulum CED. & quadratum ED. habent æqualem altitudinem ED. sunt inter se minima (10. *p.*) Ergo erit E. centrum minimum *ff. dd.* quæ similes sint □ ED. & ▭ CED (33. *p.*)

3 Si sphæra, vel circulus describatur ex quolibet puncto G. summa *ff. ss.* GC GB. semper erit eadem: tum etiam summa ▭ GC. & □ GD. semper eadem (34 *p.*) &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

SI recta coniungens duo puncta diuidatur in quaslibet partes æquales, prima diuisio erit centrum minimum, totidem ff.ſſ. quarum vna ſit ex maiori parte, & reliquæ ex minori: & èconuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt recta KN. diuiſa in ſex partes vt KL. ſit quinta pars ipſius LN. dico L. eſſe *centrum* 6. *ff.ſſ.* quarum ſint 5. ex KL & vna ex LN. & *èconuerſo* ſi L. ſit *centrum ff.ſſ.* quarum 5. ſint ex KL. & vna ex LN. dico KL. eſſe quintam partem ipſius LN.

DEMONSTRATIO.

CVm recta KL. ſit quinta pars ipſius LN. quinque baſes figurarum ex KL. æquales erunt baſi LN. Ergo ſumma quinque *ff.ſſ.* ex KL, minima erit ſimili figuræ ex LN (29. *p.*) Ergo cũ recta KN. diuiſa ſit in L. in figuras minimas erit L. *centr. ff.ſſ.* vel centrum minimũ (34. *p.*) Quod, &c.

Econuerſo. Si L. ſit *centr. ff.ſſ.* ad 5. KL. & 1. LN. erunt iſtæ minimæ: Ergo KL. erit quinta pars ipſius LN (29. *p.*) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

SI recta coniungens duo puncta diuidatur in quaslibet partes æquales, quodlibet diuisionis punctum erit cētrum minimum tot idem ff. ss. ex vtraque parte, quot sunt partes in opposita, & èconuerso.

EXPOSITIO.

SInt data duo puncta K.N. & recta KN. diuisa in 6. partes æquales. Si sumatur punctū M. Dico esse *centrum* 6. *ff. ss.* quarum quatuor sint ex KM. quia pars opposita MN. continet 4. partes: & duæ ff. sint ex MN. quia pars opposita KM. continet duas partes: *& èconuerso.*

DEMONSTRATIO.

CVm KM. contineat duas sextas partes: si quater sumatur, erit summa basium æqualis 8. partibus, & cum MN. contineat 4. partes si bis sumatur, erit summa basium æqualis 8. partibus: ergo cū basium summæ sint æquales, erit summa 4 *ff. ss.* KM. minima summæ 2. *ff. ss.* MN (29.*p.*) Ergo cum KN. diuisa sit in figuras minimas, erit M. *centr. ff. ss.* (34.*p.*) &c.

Conuersa liquet, & demonstrari poterit, vt in præcedenti.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI in recta fuerint qualibet puncta, & vno puncto ita diuidatur, vt summa figurarum vnius partis minima sit ad summam alterius partis; figuræ ex quolibet alio rectæ puncto superabunt minimas totidem similibus ex intersegmento, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt data recta A B. & in ea sint puncta A. C. D. B. & punctum E. diuidat illam, vt △ EA + ▭ EC. minima sint cum □ ED + ⬠ EB. si in recta assumatur quodlibet punctũ F. Dico summam *ff. dd.* nempe △ FA + ▭ FC + □ FD + ⬠ FB. superare minimam summam ex E. totidem figuris prædictarum similibus ex EF.

DEMONSTRATIO.

CVm △ EA + ▭ EC. minima supponantur □ ED + ⬠ EB. erunt summæ æqualium complementorum (8. *p.*) Ergo figuræ ex F. superabunt figuras ex E. totidem similibus ex intersegmento EF (7. *p.*) Quod, &c.

Econtra si excessus talis fuerit, erunt figuræ ex E. æqualium complementorum (7. *p.*) Ergo Minimæ (8. *p.*) Quod, &c.

PROPOSITIO XXXIX.

SI in recta fuerint quolibet puncta, & ita vno puncto diuidatur, vt summa ff. summæ sit minima: figura ex quolibet alio plani, vel solidi puncto superat minimam totidem figuris ex recta ab assumpto ad punctum minima summa: & ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt data recta AB. & puncta A. C. D. B. & punctum E. diuidat rectam, vt summa △ EA + ▭ EC. minima sit summæ □ ED + ⬠ EB. Assumatur præterea extra rectā quodlibet plani, vel solidi punctum G. & iūgatur recta EG. Dico figuras datis similes ex G. superare minimam summam ex E. totidem similibus factis ex recta EG. *& èconuerso.*

DEMONSTRATIO.

DVctis GA. GB. erit idem planum AGB. (1. *l.* 11.) & cum in eo sit recta AB. etiam erunt in illo puncta A. C. E. D. B. ducatur igitur GF. perpendicularis ipsi AB. Ergo cum F. sit in recta AB. summa *ff.* ex F. superabit minimam ex E. totidem *ff.* EF. nempe △ FA + ▭ FC + □ FD + ⬠ FB. æqualia erunt △ EA + ▭ EC + □ ED + ⬠ EB. & præterea 4. *ff.* similibus ex EF (38. *p.*) Sed cum anguli ad F. sint recti △

GA.

GA. æquatur △FA+△FG.&▭GC. æquatur ▭FC+▭FG.&□GD.æquatur □FD+□FG. & ⬠GB æquatur ⬠FB+⬠FG (4.*l*.6.) Ergo summa ex G. nempe △GA+▭GC+□GD+⬠GB. æquatur minimæ summæ ex E.+4.*ff*. similibus ex EF. & 4. ex FG. sed cum angulus GFE rectus sit 4.*ff*.EF.& 4.*ff*. FG.æquantur 4.*ff*.EG. earundem similibus (4.*l*.6.) Ergo summa ex G. æquatur minimæ summæ ex E.+4.*ff*. ex EG. Ergo superat minimam summam 4 *ff*. EG. quæ datis similes sint, licet inter se dissimiles. Quod erat demonstrandum.

E conuerso. Si ex quolibet puncto G. summa superet modo dicto summam ex E. ordine retrogrado demonstrabitur, punctum E. diuidere rectam AB. in figuras minimas. Præterea eadem est demonstratio, licet puncta plura fuerint in vna parte, quàm in alia.

PROPOSITIO XLI.

SI in recta fuerint qualibet puncta; punctum diuidens illam in figuras minimas, erit centrum ff. absolutè minimum ad data puncta, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt recta AB. & puncta A.C.D.B.& E. diuidat illam in figuras minimas, vt in præcedenti.

Di-

Dico punctum E. esse *centrum ff.* absolutè minimum ad data puncta A.B.C.D. *& econtra.*

DEMONSTRATIO.

CVm E. diuidat AB. in figuras minimas, summa ex E. minor est, quàm summa ex quolibet puncto F. eiusdem rectæ (18. *p.*) & etiam minor, quàm ex quolibet pũcto G. plani, vel solidi (39. *p.*) Ergo cum summa ex E. minor sit, quàm ex quolibet alio excogitabili puncto, erit E. centrum absolutè minimum. Quod, &c.

Conuersa liquet. Si enim summa ex E. non esset omnium minima, non esset E. centtum minimum, quod est contra hypothesim: Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

SI in recta fuerint qualibet puncta, & ex centro ff. minimo sphæra describatur in solido, vel circulus in quouis plano per centrum ff. transeunte: summa ex quolibet superficiei sphæricæ, vel circunferentiæ circularis puncto, superabit minimam totidem ff. ex radio, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt E. *centrum ff.* ad A.C.D. B. ex quo describatur in solido sphæra GH. vel circulus in plano: dico summam ex quouis puncto G. vel

vel H. superficiei, vel circunferentiæ dictæ superare minimam ex E. totidem *ff.* ex radio EG. *& ècontra.*

DEMONSTRATIO.

RAdius EG. est distantia cētri à quouis puncto circunferentiæ, vel superficiei sphæricæ: sed ex quolibet puncto G. assumpto plani, vel solidi summa superat minimam totidem *ff.* distantiæ GE(39.*p.*) Ergo ex quolibet puncto circunferentiæ circularis in plano, vel superficiei sphæricæ in solido summa superat minimam totidem figuris ex radio EG. Quod erat demonstrandum.

2 Cum summa semper habeat eundem excessum eidem minimæ summæ, semper erit æqualis, vel eadem(3.*p.*)

3 *Et èconuerso* si ex quolibet puncto G. semper sit idem excessus, nēpe totidem *ff.* EG. punctum E. diuidet rectam AB. in figuras minimas(39.*p.*) Ergo erit E. *centrum ff.* absolutè minimum. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

SI qualibet puncta fuerint in recta punctum efficiens distantias, quæ ad vnam partem sunt, æquales illis, quæ ad aliam, est centrum ff. ss. & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN eadem recta NR. sint puncta N. O. P. Q. R. & punctum F. eam diuidat vt distantiæ FN. FO. FP. æquales sint FQ. FR. nempe summa summæ. Dico F. esse *centrum ff. ss.* ad N. O. P. Q. R. *& ècontra* si F. sit *centrum ff. ss.* dico distantias FN. FO. FP. æquales esse ipsis FQ. FR.

DEMONSTRATIO.

CVm summa basium figurarum similium FN+FO+FP. supponatur æqualis summæ basium figurarum inter se, & prioribus similium FQ+FR. erit vna summa alteri minima (29. *p.*) Ergo punctum F. diuidit rectam NR. in figuras minimas similes inter se: Ergo erit punctum F. *centr. ff. ss.* absolutè minimum ad N. O. P. Q. R (40. *p.*) Quod erat demonstrandum.

Econuerso. Si F. sit *centrum ff. ss.* absolutè minimum diuidit rectam NR. in minimas figuras similes inter se (40. *p.*) Ergo cum summa *ff. ss.* FN+FO+FP. minima sit summæ *ff. ss.*

FQ

FQ + FR. erit summa basium alteri summæ æqualis (*29. p.*) Ergo F. *centrum ff. ſſ.* efficit distantias vnius partis, nempe FN. FO. FP. æquales distantijs alterius partis FQ. FR. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIII.

SI per quælibet data puncta in eadem recta ducantur quæuis parallelæ, & alia per centrum ff. transiens secet ipsas, idem erit centrum ff. ad intersectiones, & econtra.

2. Si fuerit centrum ff. ſſ. sectiones vtriusque partis, æquales erunt, & ècontra.

3 *Idem est de parallelarum segmentis.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN recta NR. sint puncta N. O. P. Q. R. per quæ transeant quæuis parallelæ NH. OI. PK. QL. RM. & sit F. *centrum ff.* ad N. O. P. Q. R. & per F. transeat HFM. secans parallelas in H. I. K. L. M. Dico punctum F. esse *centrum ff.* (quæ prioribus similes sint, & inter se, vel similes, vel dissimiles iuxta cētri qualitatem) ad H. I. K. L. M. *& ècontra* si F. sit *centrum ff.* ad H. I. K. L. M. etiã esse centrum ad N. O. P. Q. R. Et si F. sit *centrum ff. ſſ.* ad N. O. P. Q. R. dico sectiones FH. FI. FK. æquales esse sectionibus FL. FM. *& ècontra* si

FH.FI.FK æquales sint FL.FM. dico F. esse centrum *ff.ſſ.* ad NOPQR.

DEMONSTRATIO.

CUm NH.OI.PK.QL.RM. sint parallelæ, secant N.R.&HM. in eadem ratione (2.*l*.6.) Ergo summa basium FH+FI+FK. ad summam FL+FM. est vt summa FN+FO+FP. ad summã FQ+FR (4.*l*.5.) sed cũ F. sit *centrũ ff.* ad N.O.P.Q.R est *summa ff.* FN.FO.FP. minima *summæ ff.* FQ.FR (40.*p*.) Ergo etiam *summa ff.* FH.FI.FK minima erit *summæ ff*. FL.FM (30.*p*.) Ergo F. est centrum minimum ad H.I.K.L.M.

E contra si F. centrum sit ad H.I.K.L.M. eadem ratione demonstrabitur, esse centrum ad N.O P.Q.R. quia NR. secatur sicut HM.

2 Si F. sit *cẽtrum ff ſſ.* ad N.O P.&c. etiam erit *centrum ff.ſſ.* ad H.I.K.&c. Ergo distantiæ FH.FI.FK. æquales erunt distantijs FL.FM. (42.*p*.)

E contra si distantiæ FH.FI.FK. æquales sint FL.FM. erit F. *centrum ff.ſſ.* ad H.I.K.L.M. (42.*p*.). Ergo etiam ad N.O.P.Q.R.&c. Quod erat demonstrandum.

3 Idem demonstrabitur, & eadem ratione de parallelarum segmentis.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

SI fuerint in plano qualibet puncta vt cumque disposita, & per eorum centrum minimum transeat quauis recta, ad quam demittantur ex punctis perpendicula, idem erit centrum minimũ ad intersectiones.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt data puncta in plano A. B. C D. E. & eorum centrum minimum F. per quod transeat recta H M. cui perpendiculares sint A H. B K. C I. D L. E M. Dico punctum F. esse centrũ minimum ad intersectiones H. I. K. L. M.

DEMONSTRATIO.

SVmatur in H M. quodlibet punctum G. Figuræ GA. GB. GC. GD. GE. superabunt minimas F A. F B. FC. FD. FE. aliter non esset F. centrum minimum: sed cum anguli H. I. K. L M. sint recti figuræ G A. G B. G C. G D. G E. æquantur GH. HA + GI. IC + GK. KB + GL. LD + GM. ME (4. *l*. 6.) & figuræ FA. FB. FC. FD. FE. æquantur FH. HA + FI. IC + FK. KB + FL. LD + FM. ME (4. *l*. 6.) Ergo ablatis communibus H A. I C. KB. LD. M E. remanebit *summa ff*. GH. GI. GK. GL. GM. maior quam *summa ff*. FH. FI. FK. FL. FM (4 *P*.) Ergo cum hoc de quolibet puncto G. extra F. demonstretur,

tur, erit summa ex F. semper minor; & omniū minima: Ergo cum F. diuidat rectam H M. in figuras minimas, erit *centrū ff.* ad H.I.K L. M. (40.*p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLV.

SI fuerint in plano qualibet puncta, per quæ ducantur qualibet rectæ parallelæ, & alia per centrum ff. vt cumque secet ipsas, idem etiam erit centrum ff. ad rectæ sectiones.

2 *Si fuerit centrum ff. ss summa segmentorum vtriusque partis æqualis erit, & econuerso.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt puncta in eodem pla A. B. C. D. E. & eorū centrum minimum F. & sint quæuis A H. B K. C I. D L. E M. inter se parallelæ, transeat per F. recta N R. secans vtcumque parallelas in N. O. P. Q. R. Dico punctum F. esse centrum minimum ad sectiones rectæ N. O. P. Q. R

DEMONSTRATIO.

CVilibet parallelarum sit perpendicularis FH. & erit omnibus perpēdicularis (13. *P.*) Ergo F. erit centrum minimum ad sectiones H. I. K. L. M (44. *p.*) Ergo cum NR. transeat per *centrum ff.* ad puncta rectæ H M. erit etiam F. centrum minimum ad sectiones N. O. P. Q. R. rectæ NR (43. *p.*) Quod erat demonstrandum.

2 Si

Si F. sit *centrum ff. ſſ.* ad A.B.C.D.E, etiã erit *centr. ff. ſſ.* ad H.I.K.L.M (44.*p.*) Ergo etiã ad N.O.P.Q.R (43.*p.*) Ergo ſumma FN. FO. FP. æqualis erit ſummæ ſegmentorum FQ. FR (42.*p.*) Quod erat, &c.

E conuerſo. Si F. faciat diſtantias FN. FO. FP. æquales ipſis FQ. FR. erit F. *centrum ff. ſſ.* ad N.O.P.Q.R (42.*p*) Ergo etiam erit *centr ff. ſſ.* ad puncta H.I.K.L.M (43.*p.*) Ergo cum H.I.K.L.M. ſint puncta perpendicularium: etiam F. erit *centrum ff. ſſ.* ad A.B.C.D.E (44 *p.*) Quia eiuſdem naturæ ſunt centra ex demonſtratis. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVI.

Datis quotcumque punctis in plano, ſi in eodem extra centrum ff. ſumatur quodlibet punctum, figuræ datis ſimiles ſuperant minimas totidem ſimilibus ex recta à centro ff. ad aſſumptum: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 18.

Sint data puncta A.B.C.D.E & eorum centrum minimum F. vt ſit minima ſumma △ FA + ▱ FB + ▭ FC + □ FD + ◇ FE. & in eodem plano extra F. ſumatur quodlibet punctum G. Dico figuras ex G. datis ſimiles ſuperare minimas totidem ſimilibus ex FG. nempe ex-

excessum esse △FG + ▭ FG + ▭FG + □ FG + ◇FG. quæ prioribus similia sint.

DEMONSTRATIO.

PEr F. & G. ducatur HM. vtrinque infinita, ad quam ex A. B. C. D. E. demittantur perpendicula AH. BK. CI. DL. EM. & erit F. *centrum ff.* datis similium ad H. I. K. L. M (44. *p.*) sed △GH. ▭GI. ▭GK. □GL ◇GM. superant similes figuras FH. FI, FK, FL. FM. totidem similibus ex FG (39. *p.*) Ergo si vtrique parti addantur similes figuræ ex perpendicularibus AH. CI BK. DL. EM. *summa ff.* GH, HA + GI, IC + GK. KB + GL. LD + GM. ME. superabit summam FH. HA + FI. IC + FK. KB + FL. LD + FM. ME totidem similibus figuris ex FG (4. *P.*) Sed cum anguli ad H. I. K. L. M. sint recti figuræ △GH + △HA æquatur △GA (4. *l.* 6.) & similiter △FH + △HA. æquantur △FA. & sic de reliquis: Ergo *summa ff.* ex G. nempe △ GA + ▭GB + ▭GC + □ GD + ◇GE. superant similes ex F. nempe △FA + ▭ FB. &c. totidem similibus ex FG. nempe △FG + ▭FG + ▭FG + □ FG + ◇FG. Quod erat, &c.

E conuerso si ex quolibet puncto G. extra F. figuræ ex G. superent figuras ex F. totidem *ff.* rectæ FG. erit F. *centrum minimum ff.* quia cũ summa ex illo sit qualibet alia minor, erit

om-

omnium minima. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVII.

SI fuerint in plano quælibet puncta vtcumque, & in eo ex centro ff. describatur circulus: summa figurarũ ex quolibet circunferentiæ puncto superat minimam totidem figuris similibus ex radio: & semper erit eadem: & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt in plano puncta A. B. C. D. E. & in illo eorum centrum F. ex quo describatur quilibet circulus ZX. Dico summam ex quolibet puncto Z in circunferentia assumpto superare minimam ex F. totidem figuris ex radio FZ. & *econuerso.*

DEMONSTRATIO.

CVm FZ. sit distantia centri à circunferentia: summa ex Z. superat summam ex F. totidem *ff.* ex FZ (46.*p.*) Ergo cum hoc de quolibet puncto demonstretur, constat veritas. Ergo cum summa semper habeat eundem excessum: semper erit æqualis, vel eadem (3.*P.*) Quod, &c.

Conuersa patet vt in præcedenti.

PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

DAtis quibuslibet punctis in plano, si extra illud supra, vel infra sumatur quodcumque punctum: Figuræ ex assumpto superant plani minimas totidem ff. similibus ex recta ab assumpto ad centrum ff. plani.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt pūcta A. B. C. D. E. & figurarum species △A. ▭B. ▭C. □D. ◇E. *centrum ff.* plani sit F. & assumatur quodlibet punctum Z. supra planum eleuatum, vel depressum infra. Dico *summam ff.* datis similium ex Z. superare summam *ff.* ex F. totidem figuris similibus ex recta FZ. quæ à centro ad assumptum ducitur.

DEMONSTRATIO.

DEmitatur ZG. ipsi plano perpendicularis: & ex puncto sectionis G. ducantur in plano rectæ ad data puncta. GA. GB. GC. GD. DE. quibus omnibus perpēdicularis erit ZG. & omnes anguli ZGA. ZGC. &c. erunt recti (23. *P.*) Ductis igitur ZA. ZB. ZC. ZD. ZE. opponentur angulis rectis: Ergo △ZA. superat △GA. toto △GZ. & ▭ZC. superat ▭GC. toto ▭GZ. &c. (4. *l.* 6.) Ergo *summa ff.* ex Z. superat summam ex G. totidem *ff.* ex GZ. Sed *summa*

ma

ma ff. ex G. superat minimam ex F. totidem similibus ex recta FG (46.p.) Ergo summa ff. ex Z. superat minimam ex F. totidem figuris ex recta GZ. & totidem ex recta FG. sed △ FG + △ GZ. æquantur △ FZ. quod angulo recto opponitur (4 l. 6.) & sic de reliquis; Ergo totidem ff. FG + totidem ff. GZ. æquatur totidem FZ. Ergo summa ex puncto Z. superat minimam ex centro plani F. totidem ff. rectæ FZ. Quod erat dec.

PROPOSITIO XLIX.

Centrum in plano minimū ad quævis eiusdem plani puncta est absolute minimum.

2 *Si ex eo describatur sphæra, summa ex quolibet superficiei puncto superat minimam, totidem ff. similibus ex radio.*

3 *Summa ff. semper est eadem.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt data in plano puncta A. B. C. D. E. & plani centrum ff. F. dico esse absolute centrum minimum etiam solidi: & summam ex superficie sphærica semper æqualem.

DEMONSTRATIO.

SI extra F. sumatur quodlibet punctum G. in plano: summa ex F. minor est (46.p.) Si punctum Z. extra planum sumatur etiam summa ex F. minor est (48. *p.*) Ergo cum summa ex F. sit qualibet alia minor, erit omnium absolute minima: & F. centrum absolute minimum, &c.

2 Si ex F. describatur sphæra, quodvis punctum superficiei distat à centro F. toto radio FZ. sed ex quolibet puncto extra centrum F. summa superat minimam totidem figuris distantiæ (46 & 48. *p.*) Ergo ex quolibet puncto Z. superficiei sphæricæ summa superabit minimam totidem figuris radij FZ. Quod erat, &c.

3 Cum summa semper excedat minimã eodem excessu, nempe totidem *ff.* datarum similibus, semper erit æqualis, vel eadẽ. Quod erat, &c.

PROPOSITIO L.

SI fuerint in plano qualibet puncta, ex quibus ducantur perpendiculares in ipsum planum, vel in aliud planum per centrum ff. transiens; idem etiam erit centrum ff. ad perpendiculorum sectiones in secundo plano.

EXPOSITIO. Fig. 19.

IN plano XZ. sint quælibet puncta A. B. C. D. E. quorum centrum minimum sit F. Trãseat per F. quodcumque planum RS. secans pri-

primum, & communis sectio sit P Q. Demittantur præterea rectæ A H. B I. C K. D L. E M. plano RS, perpendiculares, secantes ipsum in H. I. K. L. M. Dico punctum F. esse pariter *centrum ff.* ad H. I. K. L. M. quæ similes sint datis in A. B. C. D E.

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex F. rectæ F A. F B. F C. F D. F E. tū F H. F I. F K. F M. F L. & in plano R S. sumatur extra F. quodlibet punctum G. ex quo ducantur etiam rectæ ad omnia puncta: cum anguli F H A. F I B. &c. tum G H A. G I B. &c. recti sint (23. *P.*) △ F A. æquatur △ F H + △ H A. & ▭ F C. æquatur ▭ F K + ▭ K C. &c. (4 *l.* 6.) Similiter △ G A æquatur △ G H + △ H A, &c. (4 *l.* 6.) Ergo summa *ff.* G A. G B. G C. G D. G E. æquatur summæ *ff.* G H. H A + G I. I B + G K. K C + G L. L D + G M. M E. & summa *ff.* F A. F B F C. F D. F E. æquatur summæ *ff.* F H. H A + F I. I B + F K. K C + F L. L D + F M. M E.

Sed siue punctum G. sit in plano X Z siue extra, summa *ff.* ex G. superat summam *ff.* ex F. totidem figuris rectæ F G (46. vel 48. *p.*) Ergo figuræ G H. H A + G I. I B + G K. K C + G L. L D + G M. M D. superant figuras F H. H A + F I. I B + F K. K C + F L. L D + F M. M E. totidem figuris rectæ F G. Ergo ablatis vtrinque communibus

bus *ff*. HA.IB.KC.LD.ME. figuræ GH.GI.GK. GL.GM. superabunt FH.FI.FK FL.FM. totidem *ff*. rectæ FG. Ergo cum hoc de quolibet puncto G. demonstretur, erunt figuræ ex F. omnium minimæ, & F. *centrum ff*. ad sectiones perpendiculorum H.I.K.L.M. Quod erat &c.

Eadem est demonstratio si perpendiculares primo plano ducantur.

PROPOSITIO LI.

SI fuerint in plano qualibet puncta, & per illa ducantur quæuis parallelæ secantes ipsum, & quodlibet aliud planum transiens per centrum ff. vtcumque: idem etiam erit centrum ff. ad parallelarum sectiones in secundo plano.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt in plano XZ. puncta A. B. C. D. E. & eorum *centrum ff*. F. per quod transeat planum TV. & per A.B.C.D.E. parallelæ secantes vtcumque vtrumque planum; dico F. esse centrum ad sectiones parallelarum in plano TV.

DEMONSTRATIO.

SI parallelæ sint perpẽdiculares, vel plano XZ. vel plano TV. constat veritas ex (50. *p*.) Si neutro sint perpendiculares: concipiatur per F. planum RS. parallelis perpendiculare: Ergo erit

erit F. centrum ad sectiones plani RS (50.*p.*) Ergo cum ex punctis H. I. K. L. M. sint perpendicula parallela, & planum T V. sit per centrũ F. erit F. *centrũ ff.* ad sectiones plani TV (50.*p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

SI fuerint in solido qualibet puncta, & per centrum ff. transeat planum, ad quod ex datis ducantur perpendicula: idem erit centrum ff. ad plani sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt puncta A. B. C. D. E in solido, & *centrum ff.* F. per quod transeat planum R S. cui sint perpendiculares AH BI. CK. DL. EM. dico F. esse *centrum ff.* ad plani sectiones H. I. K. L. M.

DEMONSTRATIO.

ASsumatur in plano R S. quodlibet punctũ G. cum F. sit centrum minimum ad puncta solidi A B. C. D. E. ex hypothesi figuræ ex G. superant *ff.* ex F. aliquo excessu: aliter F. non esset centrum minimum: sit ergo excessus □ Y. cum anguli in H. I. K. L. M. sint recti, figuræ GA. GB. &c. æquantur *ff.* GHA. GIB. &c. Tum figuræ FA. FB. &c. æquantur *ff.* FHA. FIB. &c. (4.*l*.6.) Ergo *ff.* GHA. GIB. &c. superant FHA. FIB. &c. toto □ Y. Ergo ablatis communibus

HA.

HA.IB,&c. figuræ GH.GI,&c. superant ff. FH. FI.&c. toto □Y. Ergo F. est *centrum ff.* ad H. I. &c. ficut in 50. *p.* Quod,&c.

PROPOSITIO LIII.

SI fuerint in solido qualibet puncta, per quæ ducantur qualibet parallelæ secantes planū transiens per centrum ff. vtcumque: idem erit cētrum ff. ad plani sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt A. B. C D. E in solido *centrum ff.* F. per quod transeat planum TV. & quæuis parallelæ AH.BI.&c. secent ipsum vtcumque. Dico F. esse *centrum ff.* ad plani, & parallelarum sectiones.

DEMONSTRATIO.

SI planum TV. sit parallelis perpendiculare, constat veritas ex 52 *p.* si non fuerit: concipiatur planum RS. parallelis AH. BI. &c. perpendiculare: Ergo erit F *centrum ff.* ad sectiones H.I.K L.M(52. *p.*) ergo cum planum TV. transeat per F. *centrum ff.* plani RS & secet parallelas, erit F. *centrum ff.* ad sectiones plani TV (50 *p.*) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

SI qualibet puncta fuerint in solido, & extra centrum ff. sumatur quodlibet aliud; figuræ ex assumpto superant minimas totidem figuris rectæ ab assumpto ad centrum ff.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt A. B. C. D. E. in solido, & F. *centr. ff.* extra quod sumatur quodlibet punctum G. Dico figuras ex G. superare minimas ex F. totidem similibus rectæ F G.

DEMONSTRATIO.

PEr rectam F G. transeat planum RS. cui demittantur perpendicula AH. BI. &c. & erit F. *centr. ff.* ad H. I K L. M (52 *p.*) Ergo *ff.* GH. GI. GK. GL. GM. superant *ff.* FH. FI. &c. totidem *ff.* FG (46. *p.*) Ergo additis vtrique parti *ff.* HA. IB. KC. LD. EM. figuræ GHA. GIB. &c. superabunt *ff.* FHA. FIB. &c. totidem *ff.* FG. sed figuræ GHA. GIB. &c. æquātur *ff.* GA. GB. &c angulo recto oppositis: & *ff.* FHA. FIB. &c. æquantur *ff.* FA. FB. &c. (4. *l.* 6.) Ergo Figuræ ex G. superant *ff.* ex F. totidem *ff.* F G. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LV.

SI fuerint in solido qualibet puncta, & ex cētro ff. describatur sphæra; vel in plano per centrum ff. transeunte circulus: summa ex quolibet superficiei sphæricæ, vel circumferentiæ circularis puncto, superabit minimam totidem ff. radij, & semper erit eadem summa.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt puncta A.B.C.D.E. in solido, & cent *ff.* F. ex quo descripta sit sphæra; vel in plano R S. transeunte per F. sit descriptus circulus radio F G. dico summam semper esse eandem, & superare minimam totidem *ff.* radij FG.

DEMONSTRATIO.

RAdius FG. est distantia centri à quolibet puncto superficiei sphæricæ, vel circumferentiæ circularis: sed ex quolibet puncto G. summa superat minimā totidem *ff.* distantiæ FG (54. *p.*) Ergo summa ex quolibet puncto superficiei, vel circumferentiæ superat minimam totidem *ff.* radij FG. & semper est eadem, quia semper eidem eundem habet excessum (23. *P.*) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LVI.

SI fuerint in plano, vel in solido qualibet puncta, & ex centro ff. ducatur perpendicularis cuilibet recta, vel plano: summa ex puncto sectionis minor erit qualibet alia totidem ff. distantia. Et sectio erit centrum ff. in recta, vel plano ad data puncta.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt B. *centr. ff* ad quælibet puncta plani, vel solidi: ex quo ducatur B C. perpendicularis cuilibet rectæ DF. vel plano KL. dico C. esse *centr. ff.* in recta DF. vel in plano KL. & summam ex C. minorem esse quam ex F. totidem *ff*. CF.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff*. ex quouis puncto F. superat minimam ex B. totidem *ff*. BF. & summa ex C. eãdem superat totidẽ *ff*. BC. (46. vel 54. *p*.) sed cũ angulus C. rectus sit in recta, vel plano, figuræ BF. superant *ff*. BC. totidem *ff* CF (4 *l*. 6.) Ergo summa ex F. superat summam ex C. totidem *ff*. CF. Ergo cum summa ex C. semper sit minor, erit C. centrum *ff*. in recta D C. vel in plano KL. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LVII.

Iisdem positis, si ex penpendiculi sectione describatur circulus in plano: summa ex quouis circunferentiæ puncto, superabit plani minimam totidem ff. radij: & absolutè minimam totidem ff. ex latere coni recti, cuius vertex sit centrum minimum: & summa semper erit eadem.

EXPOSITIO. Fig. 20.

POsitis quæ in 56. *p.* sit ex C. descriptus circulus DEF. Dico summam ex quouis puncto D. superare plani minimam ex C. totidem *ff.* CD. vel minimam absolutè ex B. totidem *ff.* lateris DB. coni recti DEFGB.

DEMONSTRATIO.

RAdius CD. est distantia centri C. à quolibet circũferẽtiæ puncto: Ergo summa ex quouis puncto D. vel E. &c. superat summam ex C. totidem *ff.* radij DC (56. *p.*)

Similiter latus BD. est distantia verticis B. à quolibet puncto basis DEFG. coni recti: Ergo summa ex quouis puncto D. vel E. superat omnium minimam ex B. totidem *ff.* lateris BD (46. vel 54. *p.*) Ergo semper erit eadẽ (3. *P.*) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LVIII.

SI per centrum ff. ad qualibet plani, vel solidi puncta transeat axis, licet continuata sphæræ, sphæroidis, Cilindri, Coni, vel Conoidis Hyperbolici, aut Parabolici, & in istis sumatur quilibet circulus, cuius centro sit axis perpendicularis: ex quolibet circunferentiæ puncto summa ff. erit semper eandem.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt B. *centrum ff.* ad quælibet puncta: & BC. axis prædicta DEFG. circulus dictus, cuius plano sit BC. perpendicularis in centro C. Dico summam ex circunferentia semper esse eadem.

DEMONSTRATIO.

SIue circulus DEFG. sit in sphæra vbicumque constituta, siue in sphæroide, &c. cum sit axi BC. perpendicularis in centro, poterit esse basis coni recti, cuius vertex sit *centrum ff.* B. Ergo ex quolibet circunferentiæ puncto, semper erit eadem summa *ff.* (57. *p.*) Quod erat, &c.

Summa tamen circuli DGF. maior erit, quàm summa circuli PRS.

PROPOSITIO LIX.

SI recta libet continuata per duo centra ff. sit cuilibet plano perpendicularis: descripto ex intersectione quolibet circulo summa ff. ad puncta unius centri ex quouis circunferentiæ puncto, semper erit in eadem ratione ad summam ff. alterius centri.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt B. *centrum ff.* ad quælibet plani, vel solidi puncta: & X. centrum ad quælibet alia puncta: & recta BX. secet perpendiculariter quodlibet planum KL. in C. descripto ex C. quouis circulo DEFG. dico summam ex circunferētia ad puncta centri B. semper habere eandem rationem ad summam ex eadem circunferentia ad puncta centri X.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex quolibet puncto G. ad puncta cētri B. semper est eadem (57. *p.*) & semper eadem ad puncta centri X. (57. *p.*) Ergo summa ad summam semper est in eadē ratione (2. *l.* 5.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LX.

SI extra centrum ff. ad qualibet puncta eiusdem rectæ, plani, vel solidi sumatur quodlibet punctum: summa ff. excedit minimam totidem ff. distantiæ inter assumptum, & centrum ff. absolutè minimum; vel rectæ tantum, aut plani.

2 *Centrum ff. ad qualibet puncta rectæ, plani, vel solidi vnicum est, siue centrum ff. sit rectæ tantum, siue plani, siue absolutè minimum.*

3 *Si ex centro ff. absolute minimo ad qualibet rectæ, plani, vel solidi puncta describatur sphæra, vel ex centro ff. plani circulus, summa ex quouis superficiei sphericæ, vel circunferentiæ circularis puncto excedit minimam ex centro ff. totidem ff. radij, & semper est æqualis, vel eadem.*

DEMONSTRATIO.

PRimum constat ex 32.39.46.48.54.56.*p.* quas omnes complectitur hæc propositio.

Secundum ex primo infertur. Quoniam si ex quocumque alio puncto summa est maior totidem *ff.* distantiæ: ex nullo alio puncto colligi poterit summa minima: ergo nullum aliud punctum poterit esse *centrum ff* respectu rectæ, plani, vel solidi. Ergo *centrum ff.* quomodocumque accipiatur, vnicum est.

Tertium continetur in 33.41.47.49.55.57.*p.* quas

quas omnes complectitur hæc propositio: Ergo constat omnium veritas. Quod erat, &c.

Secunda propositionis pars necessaria fuit, reliquæ in vnam collectæ sunt, ne pro centri ff. vel punctorum diuersitate singulæ propositiones in operis decursu passim adducendæ sint.

PROPOSITIO LXI.

SI in plano, vel in solido fuerint quælibet puncta, & à centro ff. ducatur recta ad aliud nouum punctum, in ea erit centrum ff. ad omnia; & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SInt data puncta A.B.C.D. in plano, vel in solido vtcumque; & *cẽtrum ff.* ad illa sit F. Præterea datum sit nouum aliud punctum E. vel in eodem plano, vel in solido: Ducta FE. dico *centrum ff.* ad omnia puncta A.B C.D.E. esse in recta FE. *Et èconuerso* si F. sit centrum ad A. B. C.D.E. & L. sit centrum ad A. B. C. D. E. dico rectam FL. transire per E. vel rectam EL. transire per F.

DEMONSTRATIO.

SVmatur extra rectam FE. quodlibet punctum H. & ducatur FH. & hoc radio describatur sphæra secans FE. in L. & ducatur EH. Cum puncta H. L. sint in superficie sphæræ

ex

ex centro *ff.* F. descriptæ, summa *ff.* □ HA + △ HB + ▭ HC + ⬠ HD. æqualis est summæ *ff.* □ LA + △ LB + ▭ LC + ⬠ LD (55. *p.*) sed ◇ EH. maius est quàm ◇ EL. quia in triangulo FHE. latera FH. HE. maiora sunt quàm FE (5. *l.* 1.) & ablatis æqualibus radijs FH. FL. remanet HE. maior quàm LE. Ergo summa *ff.* HA. HB. HC. HD. HE. maior est summa *ff.* LA. LB. LC. LD. LE. Ergo cum hoc demonstretur de quolibet puncto H. extra rectam FL. assumpto; punctũ minimæ summæ, vel *centrum ff.* nequit esse extra rectam FE. & sic erit in illa. Quod erat demonstrandum.

Et conuerso si F. sit centrum ad A. B. C. D. & L. sit centrum ad A. B. C. D. E. recta FL. transibit per E. vel recta EL. transibit per F. quia cum recta FE. demonstrata sit eadem cum FL. vel cum EL. necessario FL. vel EL. transeunt per E. & L. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXII.

SI ex cognito centro ff. ad alia puncta plani, vel solidi, recta in aliud ducta ita diuidatur vt totidem figuræ iam positis similes ex parte centro proxima, sint minimæ ad nouam addendam ex alia parte: illud erit centrum ff. & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SInt data puncta A. B. C. D. & sit F. *centrum ff.* datis □. △. ▭. ⬠. similium collocanda est in nouo puncto E. figura ◇. Si FE. ita diuidatur in L. vt quatuor figuræ FL. datis similes (quia F. est cētrum quatuor punctorum A. B. C. D) minimæ sint ad nouam LE. scilicet vt □ LF + △LF + ▭ LF + ⬠ LF. minimæ figuræ sint ◇ LE. Dico L. fore *centrum ff.* ad omnia puncta A. B. C. D. E. & sic de quibuslibet alijs, siue figuræ datæ similes inter se sint, siue dissimiles.

E conuerso si F. sit *centrum ff.* ad A. B. C. D. & L. ad A. B. C. D. E. Dico rectam FE. diuisam esse in L. vt 4 *ff* FL. datis in A. B. C. D. similes, minimæ sint cum vltima figura LE.

DEMONSTRATIO.

CVm F. supponatur *centrum ff.* cognitum ad puncta A. B. C. D. E. & sit E. nouum punctum, ducta FE. in illa erit *centrum ff.* ad A. B. C. D. E (61. *p.*) sed assumpto in FE. quodlibet

alio

alio puncto extra L. summa ff. □ RA + △RB + □RC + ◇RD. æquatur minimæ ex F, nempe ff. FA. FB. FC. FD. + 4. ff. FR (60. *p.*) Ergo summa ex R, ad A, B. C. D. E. æquatur minimæ ex F. + 4. ff FR + ◇ LE. sed eadem ratione ff. ex L. æquantur minimæ summæ ex F + 4. ff. FL + ◇FE. Ergo cum 4 ff FL + ◇ LE. supponantur minimæ, hoc est; minores quibuslibet alijs 4. ff FR + ◇RE, erit summa ex L. minor qualibet alia ex quolibet puncto R. Ergo erit L. *centrum ff* vel *centrum minimum* ad omnia puncta A. B. C. D. E juxta species figurarum datas. Quod erat, &c.

Eadem omninò est demonstratio, siue *centrum ff.* prius cognitum sit ad duo, tria, vel plura quælibet puncta, dum prædicta diuisionis ratio obseruata sit.

E conuerso si F sit *centrum ff* ad A. B. C. D, & L. ad A. B. C. D. E. summa ff. ex L. minor erit qualibet alia ex quouis puncto R. sed summa ex L. æquatur minimæ ex F + 4 ff. FL + ◇LE. (60. *p.*) & summa ex R, similiter æquatur minimæ ex F + 4 ff FR + ◇RE. Ergo ablata vtrinque minima summa ff. ex F. ad A. B. C. D. remanebunt 4. ff. FL + ◇FE. minores quam 4. ff FR + ◇RE. Et cum hoc semper demonstretur de quolibet puncto R. extra L. erunt 4. ff. FL + ◇

L FE.

FE. omnium minimæ: Ergo *centrum ff.* L. ad A.B.C.D.E diuidit rectam FE in figuras minimas. Quod erat, &c.

SCHOLIVM.

HOc theorema fusius explicandum fuit, quia *centri ff.* inventio tota in eo consistit, obseruatis figurarum speciebus iuxta qualitatem quæstionis. Theorematis etiam conuersio insignem habet in Geometria vsum, quod Auspice Deo in secunda huius operis parte manifestum omnibus fiet.

PROPOSITIO LXIII.

REcta coniungens duo centra ff. ad alia, & alia plani, vel solidi puncta transit per centrum ff. ad omnia simul, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt punctum F. *centrum ff.* ad A B. C. D. siue in plano, siue in solido sint, & E. *centrum ff.* ad G. N. vel ad plura eiusdem, vel alterius plani, vel solidi; & recta FE coniungat vtrumque *centrum ff.* Dico *centrum ff.* ad omnia simul A. B. C. D. G. N. &c. esse in recta FE. vel illam transire per *centrum ff.* Et *è conuerso*: Si F. sit centrum ad A. B. C. D. & R. ad A. B. C. D. G. N. & ducatur recta FR Dico transire per E. *centrum ff.* punctorum G. N. & si ducatur E R.

tran-

transire per F. *centrum ff.* punctorum A.B.C.D.

DEMONSTRATIO.

SVmatur extra EF. quodlibet punctum H. & ducatur FH. HE. & radio FH. describatur sphæra secans FE. in L. In triangulo FHE. sunt FH. HE. maiores, quàm FE (5. *l.* 1.) & ablatis æqualibus radijs FH FL. remanebit EH. maior quàm EL.

Summa *ff.* ex H. ad A. B. C. D. æquatur minimæ ex F + 4. *ff.* FH (60. *p.*) & summa ex H. ad G. N. æquatur minimæ ex E + 2. *ff.* HE (60. *p.*) Ergo summa *ff.* ex H. ad A. B. C. D. G. N. æquatur minimis ex F. & E + 4. *ff.* FH + 2. *ff.* HE. Similiter summa *ff.* ex L. ad A. B. C. D. G. N. est æqualis minimis ex F. & E + 4. *ff.* FL. vel EH. + 2. *ff.* LE. Ergo cùm reliqua omnia sint æqualia, & 2 *ff.* HE. maiores sint quàm 2. *ff.* LE. quia basis HE. demonstrata est maior, erit summa ex H. maior quàm summa ex L. Ergo nullum punctum H. extra rectam FE. potest esse *centrum ff.* ad omnia puncta A. B. C. D. G. N. Ergo *centrum ff.* ad omnia est in recta FE. Quod erat, &c.

E conuerso si recta FE. transit per omnium *centrum ff.* R. recta FR. transibit per E. vel ER. per F. quia FR. ER. EF. eadem recta sunt. Quod, &c.

PROPOSITIO LXIV.

SI recta coniungens duo centra ff. ad alia, & alia eiusdem, vel diuersi plani, vel solidi puncta, ita diuisa sit vt totidem figuræ vnius partis, quot sua puncta, minimæ sint totidem figuris alterius partis, quot sua puncta: diuisionis punctum erit centrum ff. ad omnia simul, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt punctum F. *centrum ff.* ad A. B. C. D. in plano, vel in solido: & E. *centrum ff.* ad G. N &c. recta F E. coniungens *centra ff.* F. E. diuisa sit in R. vt quatuor figuræ FR. similes datis □ A. △ B. ▭ C. ⬠ D. minimæ sint duabus figuris R E. datarum similibus ▭ G. ⬡ N. Iuxta punctorũ cuiuslibet cẽtri numerum, & figurarum speciem. Dico R. esse *centrum ff.* ad omnia puncta simul A. B. C. D. G. N. *Et è conuerso* si R. sit *centrum ff.* ad A. B. C. D. G. N & F. ad A. B. C. D. & E. ad G. N. Dico F E. diuisam esse in R. vt 4. *ff.* FR. minimæ sint ad 2. *ff.* R E.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff.* ex R. ad A. B. C. D. æquatur minimæ ex F + 4. *ff.* FR. & summa *ff.* ex R. ad G. N. æquatur minimæ ex E + 2. *ff.* R E (60. *p.*) Ergo summa *ff.* ex R. ad A. B. C. D. G. N. æquatur minimis ex F. & E. + 4. *ff* FR + 2. *ff.* R E. Similiter

con-

conuincitur summam ex quolibet alio puncto L. rectæ F E. æquari minimis ex F. & E + 4 *ff.* FL + 2. *ff.* LE. Ergo cum minimæ summæ ex F. & E. communes sint, & 4 *ff.* FR + 2. *ff.* RE. minores sint ex Hypothesi quā quælibet aliæ 4. *ff.* FL + 2. *ff.* LE. summa ex R. erit omnium minima, quæ ex quolibet puncto rectæ FE. colligi potest: Ergo cum *centrum ff.* sit in recta FE (63. *p.*) erit R. *centrum ff.* absolutè minimū ad omnia puncta A. B. C. D. G. N. Quod erat demonstrandum.

E conuerso si R. sit *centrum ff.* ad omnia puncta ordine retrogrado conuincitur 4. *ff.* FR + 2. RE. minores esse quibuslibet 4. *ff.* FL + 2. *ff.* LE. prout in 62. *p.* Quod erat, &c.

CAP.

CAPVT III.

PROBLEMA CATHOLICVM RESOLVITVR.

OMnia, quæ in primo, & secundo capite tradita sunt ad Problema Catholicum diriguntur, cui facilem sternet viam aliorum Problematũ resolutio ex præcedentibus orta, ac eodem ferè ordine demonstrata.

Theorematum vernantes flores, haud sterilem prædicunt annonam, qui omnes, ni frigoris, vel æstus insolentia tabescant, in decoctos autumnabunt problematum fructus. Præcoces alij, quos in hoc capite colligemus; alij verò Serotini diutius calore Solis decoquendi in secundam operis partem colligendi venient: quorum sapor, eo fortè gratior, & iucundior erit, quo minus è minimo Geometriæ fundo, vel sperari potuit, vel saltem debuit.

PRO-

PROPOSITIO LXV.
Problema 1.

DAto quolibet Triangulo, vel parallelogrammo aliud ipsi minimum, & alteri dato simile inuenire, vel inter parallelas constituere.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt datum Triangulum ABC. inueniendum est BED. quod ipsi minimum sit, vel inter easdem parallelas, simile tamen HIK.

Constructio 1. Continuetur basis ABE. infinita, & fiat CD. ipsi parallela infinita, & angulus EBD. æqualis H. & BDE. æqualis HKI. Dico factum.

DEMONSTRATIO.

TRiangulum enim BDE. est ex constructione inter parallelas cum ABC. Ergo sunt triãgula æque alta (8. *l.* 1.) Ergo ABC. BDE. sũt minima (10. *p.*) sed cum anguli B. & D. æquales sint H & K. reliquus E. æqualis est I. (3. *l.* 1) Ergo BDE. HIK. cum sint æquiangula, habent latera proportionalia, & sunt similia (2. *l.* 6.) &c.

Construct. 2. Si datum sit parallelogrammum AF. & BG. simile debeat esse HL. ducatur diagonium KI. & fiat Triangulum BDE. simile HKI. vt antea, & sit EG. parallela BD. erit eritque parallelogrammum BG. minimum ipsi AF. quia sunt æque alta (10.*p*) & BG. simile HL. quia BDE. simile est HKI. & DGE. ipsi KIL. vt antea. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.
Problema 2.

SVpra datam rectam duo triangula constituere, quæ minima sint, vel inter parallelas, & duobus datis similia.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt data recta MO. & data triangula ABC. HIK. & supra MO. constituenda triangula MPN. NRO. quæ minima sint, vel inter parallelas, & similia datis ABC. HIK.

Construct. Fiat BDE. simile HIK. & minimum ipsi ABC (65.*p*.) Diuidatur postea recta MO. in N. vt AE. in B (2.*p*.3.) & fiat supra MN. triangulum MNP. simile ABC. & supra NO. triangulum NOR. simile BDE (3.*p*.7.) Dico MPN. NOR. esse minima, & inter se parallelas, & similia datis.

DEMONSTRATIO.

CVm enim ABC. BDE. sint minima ex constructione, & MO. sit diuisa in ratione rectæ AE. triangula MNP. NOR. similia ipsis ABC. BED. erunt etiam minima (30.*p*.) Ergo

MNP.

MNP. NOR. erunt triangula æque alta, vel inter duas parallelas (10.*p.*) Deinde MNP. simile est ABC. & NOR. simile BED. & BED. ipsi HIK. ex cõstructione: ergo NOR. simile etiam est ipsi HIK (4.*l.*6.) Quod, &c.

Si fuerint data duo parallelogramma AF. HL. fiat. BG. minimum ipsi AF. & simile HL. & diuisa MO. in N. vt AE. in B. fiant MQ. NS. similia ipsis AF. BG (3.*p.*7.) & erunt MQ. NS. similia datis AF. BG. & minima inter se: quæ omnia demonstrantur vt antea.

PROPOSITIO LXVII.
Problema 3.

Dato triangulo, parallelogrammum efficere ipsi minimum, & alteri simile, vel e contra.

EXPOSITIO. Fig. 23.

Sit datum triangulum ABC. & efficiendum parallelogrammum BF, ipsi minimum, & parallelogrammo IL. simile.

Construct. Ducatur CG. perpendicularis basi AB. & diuisa CG. bifariam in H. ducatur HF. basi AB. parallela, & continuata AB. infinitè, fiat angulus EBD. æqualis KIM. donec BD. secet HF. in D. præterea ducto diagonio MK. fiat angulus BDE. æqualis IMK. & duca-

 tur

tur EF. parallela BD. Dico parallelogrammum BF. esse minimum triangulo ABC. & simile dato IL.

DEMONSTRATIO.

CVm enim CG. sit altitudo Trianguli ABC. & HG. parallelogrammi BF. habet triangulum duplam parallelogrammi altitudinẽ ex constructione: Ergo △ABC. & ▭BF. sunt figuræ inter se minimæ (11. *p.*)

Deinde cum triangula BED. EDF. sint in omnibus æqualia (7. *l.* 1) sunt similia: tum etiam IKM. KLM. & BED. æquiangulum, & simile IMK. ex constructione, est parallelogrammum BF. simile dato IL. & minimum triangulo ABC. Quod erat demonstrandum.

Construct. 2. Eadem ratione si datum sit Parallelogrammum BF. & constituendum triangulum ABC. ipsi minimum, & simile dato NPQ. Continuata FDH. ex quolibet puncto H. demittatur perpendicularis HG. & HC. sumatur æqualis HG. & ducta CZ. basi BE. parallela, fiat angulus ABC. æqualis NPQ. & BCA æqualis NQP. eritque N. æqualis CAB. (3. *l.* 1.) & triangulum ABC. æquiangulum & simile NPQ. & cum ABC. habeat duplam parallelogrammi BF. altitudinem, erunt ABC. BF.

BF. figuræ minimæ (11.*p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.
Problema 4.

SVpra datam rectam constituere triangulum, & parallelogrammum datis similia, & inter se minima.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt data recta NO. supra quam constituenda sunt triangulum NPQ. & parallelogrammum PS. similia datis △ABC. & ▭IL. quæ sint inter se minima.

Construct. Fiat parallelogrammum BF. simile IL. & minimum ipsi ABC (97.*p.*) & diuisa NO. in P. vt AE. in B. (2.*p.*3.) Supra NP. fiat triangulum NPQ. simile ABC. & supra PO. parallelogrammum PS. simile BF. vel IL. (3.*p.*7.)

DEMONSTRATIO.

CVm NO & AE. sint similiter diuisæ, & ABC. BF. sint figuræ minimæ, erunt etiam △NPQ. & PS. ▭ minima inter se (30.*p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIX.
Problema 5.

DAto quolibet rectilineo inuenire rationem ipsius ad triangulare segmentum, & efficere triangulum ipsi minimum alteri similе.

EXPOSITIO. Fig. 24.

DAto rectilineo ABCDE efficiendum est Triangulum BHI. ipsi minimum, & simile dato KLM.

Construct. Ducatur diagonia AD. AC. &c. & continuato latere CD sit EF. parallela diagonio AD. & FG. parallela diagonio AC (quod continuandum est, donec omnibus diagonijs ducantur parallelæ ad continuata latera) & erit ratio BG. ad BC. vt Polygonum ABCDE. ad triangulare segmentum ABC (17. *p.*) Ducantur ergo GI. parallela basi ABH. & fiat angulus HBI. æqualis K. & BIH. æqualis M. Dico triangulum BHI. ex constructione simile KLM. esse minimum Polygono ABCDE.

DEMONSTRATIO.

DEmittatur enim perpendicularis IN. & fiat CO. parallela basi AB. Quoniam GI. CPO. BN. sunt parallelæ, est vt BG. ad BC. ita BI. ad BP. & vt BI. ad BP. ita IN. ad ON (2. *l.* 6.) Ergo IN. ad ON. est vt BG. ad BC (1. *l.* 5.) nempe vt

to-

totum Polygonum ABCDE. ad segmentum ABC. sed IN. est altitudo trianguli BIH. & ON. altitudo triangularis segmenti ABC. Ergo altitudo trianguli BIH. ad altitudinem segmenti ABC. est vt totum Polygonū ABCDE. ad triangulare segmentum ABC. Ergo Triāgulum BIH. minimum est Polygono ABCDE (12. *p.*) & ex constructione simile dato KLM. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXX.
Problema 6.

DAto Triangulo efficere rectilineum ipsi minimum, & dato simile.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt datum Triangulum QRS. & constituendum est rectilineum AGHIKM. ipsi minimum, & simile dato ABCDEF.

Construct. Ductis diagonijs AE. AD. AC. inueniatur ratio rectilinei ABCDEF. ad triāgulare segmentum ABC. vt BN. ad BC (69. *p.*) & si bases AB. QR. sunt in eadem recta ducatur SO. parallela basibus AB. QR. secans BN. in O. & fiat BO. ad BP. vt BN ad BC (2. *p.* 7.) Si verò AB. QR. non sint in eadem recta: ducatur SY. perpendicularis, & in recta AB continuata sumatur quodlibet punctum X. & perpendidicularis XZ æqualis YS. & ducatur ZO. parallela basi AB. & fiat vt antea vt BN. ad BC. ita BO. ad BP.

Deinde ducatur PH. parallela basi AB. secans diagonium in H. & fiant HG. HI. IK. KM. lateribus parallelæ, & erit rectilineum AGHIKM. simile ex parallelismo ipsi ABCDEF. (3.*p*.7.) Dico esse etiã minimũ triãgulo QRS.

DEMONSTRATIO.

PErpendiculum OT. est altitudo trianguli QRS. & VT. altitudo triangularis segmenti AGH. Est igitur TO. ad TV. sicut BO. ad BP. (2.*l*.6.) Sed in parallelogrãmo GP. sunt æquales GH. BP (7.*l*.1.) Ergo TO. ad TV. est vt BO. ad GH. vel BN. ad BC. ex constructione, hoc est, vt rectilineum ABCDEF. ad segmentum ABC (17.*p*.) sed etiam vt rectilineũ ABCDEF. ad triangulum ABC. ita rectilineum AGHIKM. ad triangulum AGH (4.*l*.6.) Ergo ratio BO. ad BP. vel BH. hoc est TO. ad TV. est ratio rectilinei AGHIKM. ad triangulare segmentum AGH (1.*l*.5.) Ergo TO. altitudo Trianguli QRS. est ad altitudinem TV. segmenti AGH. vt totum rectilineum AGHIKM. ad triangulare segmentum ABG. Ergo AGHIKLM & QRS. sũt figuræ minimæ (12.*p*.) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXI.
Problema 7.

SVpra datam rectam constituere triangulum, & rectilineum datis similia quæ inter se minima sint.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt data recta *fg*. & rectilineum ABCDEF. & Triangulum QRS. diuidenda est recta *fg*. in *y*. vt rectilineum supra *fy*. & triangulum supra *yg*. similia datis sint minima.

Construct. Fiat triangulum simile dato QRS. & minimũ rectilineo ABCDEF. ex 5. *p*. vel rectilineum AGHIKM. simile dato ABCDEF. & minimum triangulo QRS. ex 6. *p*. & diuidatur *fg*. in *y*. vt sit *fy*. ad *yg*. sicut AG. ad QR (2 *p*. 3.) & supra *fy*. fiat rectilineum simile AGHIKM. & supra *yg*. triangulum simile QRS. (3. *p*. 7.) Dico factum.

DEMONSTRATIO.

CVm enim AGHIKM. & QRS. sint figuræ minimæ ex cõstructione: & *fg*. sit diuisa in ratione basium AG. ad QR. erunt figuræ supra *fy*. *yg*. minimæ (30. *p*.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXII.
Problema 8.

DAtis quibuscumque triangulis, vel parallelogrammis aliud efficere omnium summæ minimum, & dato simile.

2 *Supra datam rectam triangula, vel parallelogramma constituere datis similia, quorum unum minimum sit reliquorum summa.*

EXPOSITIO. Fig. 26.

SInt data Triangula ABC. DEF. HIK. quæritur PQS omnium summæ minimum, & simile dato MON.

Construct. 1. Ducantur ex verticibus perpendiculares AB. DG. HL. & assumpto in recta infinita PQ. quolibet puncto P. sit PR. ipsi perpendicularis, & æqualis summæ omnium perpendiculorum AB+DG+HL. & ducatur RS. infinita parallela PQ. Fiat deinde angulus QPS. æqualis M. & PSQ. æqualis O. eritque SQP. æqualis N (3. *l.* 1.) & triangulum PQS. æquiangulum, & simile MNO. eritque minimum datis ABC. DEF. HIK.

DEMONSTRATIO.

QVoniam ex constructione habet PQS. altitudinem PR. æqualem summæ altitudinum AB. DG. HL. est omnium summæ mininimum (21.p.) Idemque est de Parallelogrammis. Quod erat demonstrandum.

EXPOSITIO 2.

2 Sit data recta TZ. supra quam constituenda sint quatuor triangula similla datis ABC. DEF. HIK. MNO. ita vt simile MNO. minimum sit ad summam similiũ ABC. DEF. HIK.

Construct. 2. Fiat primo triangulũ PQS. simile MNO. quod sit minimum reliquorum summæ ABC. DEF. HIK. vt antea. Deinde sumatur basium BC. EF. IK. PQ. summa: & fiat vt summa basium ad BC. ita TZ. ad TV: & iterum vt summa basium ad EF. ita TZ. ad VX: & iterum vt summæ basium ad IK. ita TZ. ad XY. (1.p.7.) Constituatur deinde supra TV. triangulum simile ABC. & supra VX. triangulum simile DEF. & supra XY. triangulum simile HIK. & supra YZ. simile PQS. Dico triangulũ supra YZ. esse omnium summæ minimum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim recta TZ. sit diuisa ex constructione in ratione basium BC. EF. IK. PQ. & △ PQ. sit minimum ad triangula BC. EF. IK. erit △ YZ. minimũ triangulis TV. VX. XZ. (30.p.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIII.
Problema 9.

CVilibet rectilineo aliud minimum efficere alteri dato simile.

2 *Supra datam rectam duo rectilinea constituere minima, & datis similia.*

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt datum rectilineum ABCDE. cui minimum efficiendum est IVST. simile dato IKLM.

Constructio. Ratio rectilinei ABCDE. ad ABE. sit AG. ad AE. (17. *p.*) & GH. perpendicularis BAH. Præterea ratio IKLM. ad IKL. sit KN. ad KL. (17. *p.*) & NO. perpendicularis basi IKO. sumatur OP. æqualis HG. & fiat vt NK. ad KL. ita OP. ad OR (2. *p.* 7.) & RS. parallela IK. secans diagonium in S. ductis ST SV. &c. parallelis erit IVST. simile IKLM (3. *p.* 7.) Dico IVST minimum esse ipsi ABCDE.

DEMONSTRATIO.

REctilineum IKLM. ad segmentum IKL. est vt IVST. ad IVS (4. *l.* 6.) sed IKLM. ad IKL. est vt KN. ad KL. hoc est vt PO. ad OR. Ergo IVST. ad IVS. est vt OP. ad OR. sed quodlibet triangulum nempe GHA. habens altitudinē GH. vel PO. est minimum ipsi ABCDE. quia

eius

eius altitudo GH, ad altitudinem HQ. segmēti ABE. est vt ABCDE. ad ABE. & etiam est minimum rectilineo IVST. quia altitudo eius OP. ad altitudinem OR. segmenti IVS. est vt IVST. ad IVS (12.*p.*) Ergo etiam rectilinea ABED. IVST. sunt inter se minima (9.*p.*) Quod fuerat demonstrandum.

CONSTRVCT. 2. ET DEMONST.

2 Sint data rectilinea ABCD. IVST. & recta XZ. supra quam duo alia ipsis similia collocanda sunt, & inter se minima.

Fiat IVST. minimum ipsi ABCDE. & simile IKLM. vt antea deinde diuidatur XZ. in Y. vt XY. ad YZ. sit vt AB. ad IV. vel vt summa AB + IV. ad AB. ita XZ. ad XY (2.*p.* 7.) & fiat supra XY. rectilineū simile ABCD. & supra YZ. aliud simile IVTS (3.*p.* 7.) & erunt inter se minima, quia XZ. diuisa est in ratione basium AB. IV. (30.*p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXIV.
Problema 19.

DAtis quibuslibet rectilineis alia similia inter se minima efficere.

2 *Datam rectam diuidere in quælibet rectilinea minima datis similia.*

EXPOSITIO. Fig. 28.

SInt data rectilinea A. B. C. D. E. efficienda sunt alia similia, vt omnia sint inter se minima.

Construct. 1. Fiat F. simile B. & minimum Triangulo A. (70. *p.*) Item G. simile C. & minimum ipsi A. Item H. simile D. & minimum eidem A. Item M. simile E. & minimum eidē A. (70. *p.*) vel si A. non sit triangulum (73. *p.*) Dico A. F. G. H. M. esse minima inter se.

DEMONSTRATIO.

CVm enim omnia minima sint ex constructione ipsi A. erunt inter se minima (9. *p.*) Quod erat, &c.

CONSTRVCT. 2. ET DEMONST.

2 Sit data recta XZ. diuidenda in figuras minimas similes A. B. C. D. E. Fiant minimæ A. F. G. H. M. vt antea, & postea fiat vt summa basium A. F. G. H. M. ad basim A. ita XZ. ad XP. & supra XP. fiat rectilineum simile A. Deinde vt

sum-

summa basium A. F. G. H. M. ad basim F. ita XZ. ad PQ. & fiat supra PQ. rectilineum simile F. (3.*p*.7.) Quod continuabitur donec expleatur rectilinea: eritque XZ. diuisa in ratione basium figurarum minimarum: Ergo figuræ supra partes rectæ XZ. constitutæ datis similes erunt inter se minimæ (30.*p*.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXV.

Problema 11.

D*Atam rectam diuidere in quotcumque figuras minimas similes inter se.*

2 *Datam rectam diuidere in duas partes, vt figura vnius minima sit ad quotcumque similes alterius partis.*

3 *Datam rectam diuidere in duas partes, vt quotcumque figuræ vnius minimæ sint ad quotcumque similes alterius.*

CONSTRVCT. ET DEMONST. Fig. 29.

SIt data recta AB. diuidatur in tot partes æquales, quot figuræ similes desiderantur: nempe bifariam in E. & erunt AE. EB figuræ minimæ, vel trifariam in E. G. & erunt AE. EG. GB. minimæ, vel quadrifariam in I. F. M. &c. Semper enim figuræ similes habebunt æqualem basim, ex æquali diuisione: Ergo erunt inter se minimæ (28. *p*.)

CONS-

CONSTRVCT. ET DEMONST. 2.

2 Sit diuidenda AB in duas partes vt figura vnius minima sit duabus alterius, vel tribus, &c. Diuidatur in tot partes æquales, quot sunt omnes figuræ,& primum punctum diuisionis est quæsitum: nempè si figura vnius minima esse debeat duabus alterius, quia sũt tres figuræ, diuidetur in tres partes AE.EG.GB. & figura EB. minima erit duabus AE. Si vna debeat esse minima quinque alijs diuidetur in 6. partes AD.DE.EF.FG.GH.HB. & figura DB. minima erit 5. AD. Ratio omnium est, quia semper maior pars est minoris multiplex: Ergo figura ex parte maiori, minima erit totidem figuris similibus ex minori, quoties hæc continetur in maiori, quia eius basis summæ basium est æqualis (29.*p*.) Quod,&c.

CONSTRVCT. ET DEMONST. 3.

3 Sit AB. diuidenda vt quinque figuræ vnius partis minimæ sint ad septem alterius: vel in quacumque alia ratione. Diuidatur tota recta in tot partes æquales, quot sunt omnes figuræ, nempe in 12. & sumatur AK continens quinque partes,& KB. septem. Dico 7. figuras ex AK. minimas esse 5. figuris ex KB. & sic de quacumque alia diuisione.

Ratio est, quia cum 5. AC. constituant AK. &

&7. AC. constituant KB. communis mensura AC. continetur quinquies in AK. & septies in KB. Ergo 7. figuræ AK. & 5. ff. KB continent æqualem basium summã: Ergo 7. AK. minimæ erũt 5. figuris partis oppositæ KB (29 p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVI.
Problema 12.

DAtis quibuscumque rectilineis aliud efficere alteri dato simile, quod minimum sit omnium antecedentium summa.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SInt Rectilinea ABCD. GHIKL. OPQ. ST. VX. & efficiendum est *bdf.* simile STVX. & reliquiquis omibus minimum.

Construct. Inueniatur omnium rationes ad Triangularia segmenta (69. *p.*) & demissis perpendicularibus FE. MN. QR. YZ. sumatur seorsum quælibet *bg* in finita, & fiat vt YZ. ad summam perpendicularium FE+MN+QR. ita basis ST. ad nouam basim *bd* (2 *p.*7.) & supra *bd.* fiat rectilineum *bfl.* simile SVX (3 *p.*7.) Dico rectilineum *bfl.* minimum esse reliquorum summæ ABCD+GHIKL+OPQ.

DEMONSTRATIO.

FIat enim vt TV. ad TY. ita *df.* ad *dq.* & demitta-

-tatur *qg*. perpēdicularis. Cum ex similitudine figurarum sint anguli Y T Z. *qdg*. æquales anguli, & Z. *g*. recti erunt Y. *q*. æquales (3. *l*. 1.) Ergo proportionales sunt, vt S T. ad T V. ita *bd*. ad *df* & (2. *l*. 6.) & vt T V. ad T Y. ita *df* ad *dq*. ex ex constructione; & vt T Y. ad Y Z. ita *dq*. ad *qg*. (2. *l*. 6.) Ergo vt composita ratio S T. ad Y Z. ita *bd*. ad *qg*. (1. *l*. 5.) & alternando vt S T. ad *bd*. ita Y Z. ad *qg*. sed S T. ad *bd*. ex constructione est vt Y Z. ad summam perpendiculorum F E + M N + Q R. Ergo Y Z. ad *qg*. est vt Y Z ad summam perpendiculorum F E + M N + Q R (1. *l*. 5.) Ergo *qg*. æqualis est summæ F E + M N + Q R (2. *l*. 5.) Ergo *bdfl*. minimum est summæ reliquorum A B C D + G H I K L + O P Q (25. *p*.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVII.
Problema 13.

Datis quotcumque rectilineis alia similia efficere in eadem, vel in qualibet alia ratione, vt istorum summa minima sit aliorum summæ.

EXPOSITIO. Fig. 30.

Sint data rectilinea A B C D. G H K L. O P Q. S T V X. *bdfl*. alia similia datis S T V X. *bdfl*. efficienda sunt in eadem basium ratione, quorum

sum-

summa minima sit trium priorū summæ AB CD+FGHKI+OPQ.

Construct. Inueniantur rectilineorum rationes ad sua triangularia segmenta (69 *p.*) & demissis perpendicularibus FE. MN. QR. tum YZ. *qg.* sit *mn.* summa trium FE. MN. QR. & sit *rp.* summa duarum YZ+*qg.* nempe *rk.* æqualis YZ. & *kp.* ipsi *qg.* diuidatur *mn.* in *y.* sicut *rp.* in *k.* (2. *p.* 3.) & fiat sicut *rk.* vel YZ. ad ST. ita *my.* ad *x.* & iterum sicut *kp.* vel *qg.* ad *bd.* ita *yn.* ad *z.* (3 *p.* 7.) Tandem supra *x.* fiat rectilineum simile STVX. & supra *z.* aliud simile *bdfl.* Dico horum summam minimam esse summæ rectilineorum ABCD+GHIK+OPQ.

DEMONSTRATIO.

CVm enim ex constructione sit *my.* ad basim *x.* vt YZ. ad basim ST. & *yn* ad basim *z.* vt *qg.* ad basim *bd.* erunt *my. yn.* altitudines figurarum *x. z.* similes iisis YZ. *qg.* (4 *l.* 6.) sed *mn.* est summa altitudinum FE+MN+QR. Ergo altitudines in figuris *x. z.* æquantur altitudinibus in figuris ABCD. FGHK. OPQ. Ergo summa figurarum *x. z.* minima est summæ figurarum ABCD+GHK+OPQ (26. *p.*) Quod erat demonstr. &c.

Construct. 2. Similiter si ratio data basiū homologarum ipsis ST. *bd.* sit *a* ad *c.* diuidatur

O summ-

ſumma altitudinum *mn.* in *y.* vt *my* ad *yn.* ſit vt *a* ad *c.* & reliqua eodem modo perficientur vt antea. Quod ſpeciali demonſtratione non indiget. Si verò nulla ratio determinata ſit, poteſt liberè ſumi quodlibet punctum *y.* in ſumma altitudinum *mn.* & ſemper figuræ ſupra inuentæ *x. z.* prioribus erunt minimæ. Vnde patet infinitas figuras datis STX. *bdl.* ſimiles inueniri poſſe, quarum ſumma ſit ſummæ trium antecedentium minima.

PROPOSITIO LXXVIII.
Problema 14.

DAtam rectam vno puncto diuidere vt rectilineum vnius partis dato ſimile minimum ſit ad ſummam duorum, trium, &c. alterius partis, alijs etiam datis ſimilium.

EXPOSITIO. Fig. 31.

SInt data rectilinea A.B.C.D.E. & recta LM. diuidenda eſt in N. vt rectilineũ ſupra NM. ſimile dato E. minimum ſit ad ſummam rectilineorum ſupra LN. quæ ſimilia ſint datis A.B.C.D.

Conſtruct. Sumantur quatuor rectæ F. G. H. I. æquales, quæcumque ſint: & ſupra F. fiat rectilineum ſimile A. & ſupra G. ſimile B. & ſupra H. ſimile C. & ſupra I. ſimile D. &c. Inueueniatur deinde rectilineum simile E. quod sit minimum factorum summæ F.G.H.I (76.*p.*) & sit eius basis K. Fiat præterea vt summa basium F+K. ad basim K. ita LM. ad NM (2.*p.*7.) & supra LN. fiant quatuor rectilinea similia datis A.B.C.D. vel F.G.H.I. & supra NM. aliud simile E. vel K. Dico rectilineum NM. esse minimum illorum quatuor summæ supra LN.

DEMONSTRATIO.

RECta enim LM. diuisa est in N. in ratione basium F. vel G. vel H. vel I. quæ omnes æquales sunt, & K. ex constructione: Ergo sicut K. minimum est ad summam F.G.H.I. ita NM. minimum erit ad summam 4 LN. factis F.G.H.I. similium, vel datis A.B.C.D. (30.*p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXIX.
Problema 15.

DAtam rectā vno puncto diuidere vt summa rectilineorum datis similium vnius partis, minima sit summa rectilineorum datis similium alterius partis, licet omnia sint inter se dissimilia.

EXPOSITIO. Fig. 32.

SInt data rectilinea A.B.C.D.E.F. & recta QR. diuidenda in S. vt tria rectilinea supra

QS. similia datis A. B C. minima sint duobus, vel tribus, vel pluribus supra SR. quæ datis D. E. F. &c. similia sint.

Construct. Primo assumpta pro basi quacumque recta G. fiant supra ipsam, vel supra æquales G. H. I. rectilinea similia datis A. B. C. & supra eandem, vel alias quascumque inter se æquales K. L M. rectilinea datis D. E. F. similia. Deinde fiant rectilinea N. O. P. similia factis K. L. M (77 *p.*) quæ minima sint factorum summæ G. H. I. & erunt bases N. O. P. æquales sicut K. L. M (13. *p.*)

Diuidatur præterea QR. in S. vt QR ad QS. sit veluti summa basium G + N. ad G. & fiant supra QR. tria rectilinea similia G. H I. vel A. B. C. & supra SR. alia similia N. O. P. vel K. L. M. vel D E F. Dico summam rectilineorum Q S. similium datis A. B. C. minimam esse summæ rectilineorum S R. similium D. E. F.

DEMONSTRATIO.

CVm enim QR. diuisa sit in S. in ratione G. ad N. & tres figuræ supra G. similes A. B. C. minimæ sint ex constructione tribus supra N. similibus D. E. F. erit Q R. diuisa in ratione basium figurarum minimarum: Ergo tres figuræ supra QS. similes datis A. B. C. minimæ etiã

erunt

erunt tribus supra SR. similibus D.E.F. (30.*p.*) Quod erat demonstrandum.

Eadem omninò est constructio, & demonstratio, licet in vna parte plures sint figuræ quā in alia, dum prius omnes vnius partis reducātur ad eandem basim, & similiter alterius. Si in vna parte aliquot figuræ similes fuerint, instituitur operatio omninò, ac si essent dissimiles.

PROPOSITIO LXXX.
Problema 16.

Datis quibuslibet punctis in plano, vel in solido inuenire centrum figurarum similium.

EXPOSITIO. Fig. 33.

Sint data puncta vtcumque disposita A. B. C. D. E. F. inueniendum est centrum *ff. ss.* L. ex quo ductis rectis ad A. B. C. D. E. F. summa figurarum similium inter se sit omnium minima, minor scilicèt quàm summa ex quocumque alio puncto plani, vel solidi.

CONSTRVCT. ET DEMONST.

Si puncta data sint tantum duo A. B. iungantur recta AB. & erunt A. & B. in eadem recta AB. diuidatur hæc bifariam in G. & erit G. cētrum *ff. ss.* ad duo puncta A. B (35. *p.*)

Si

QS. similia datis A. B. C. minima sint duobus, vel tribus, vel pluribus supra SR. quæ datis D. E. F. &c. similia sint.

Construct. Primo assumpta pro basi quacumque recta G. fiant supra ipsam, vel supra æquales G. H. I. rectilinea similia datis A. B. C. & supra eandem, vel alias quascumque inter se æquales K. L. M. rectilinea datis D. E. F. similia. Deinde fiant rectilinea N. O. P. similia factis K. L. M (77. *p.*) quæ minima sint factorum summæ G. H. I. & erunt bases N. O. P. æquales sicut K. L. M (13. *p.*)

Diuidatur præterea QR. in S. vt QR. ad QS. sit veluti summa basium G + N. ad G. & fiant supra QR. tria rectilinea similia G. H. I. vel A. B. C. & supra SR. alia similia N. O. P. vel K. L. M. vel D. E. F. Dico summam rectilineorum QS. similium datis A. B. C. minimam esse summæ rectilineorum SR. similium D. E. F.

DEMONSTRATIO.

CVm enim QR. diuisa sit in S. in ratione G. ad N. & tres figuræ supra G. similes A. B. C. minimæ sint ex constructione tribus supra N. similibus D. E. F. erit QR. diuisa in ratione basium figurarum minimarum: Ergo tres figuræ supra QS. similes datis A. B. C. minimæ etiã

erunt

erunt tribus supra SR. similibus D. E. F. (30. *p.*) Quod erat demonstrandum.

Eadem omninò est constructio, & demonstratio, licet in vna parte plures sint figuræ quā in alia, dum prius omnes vnius partis reducā-tur ad eandem basim, & similiter alterius. Si in vna parte aliquot figuræ similes fuerint, instituitur operatio omninò, ac si essent dissimiles.

PROPOSITIO LXXX.
Problema 16.

Datis quibuslibet punctis in plano, vel in solido inuenire centrum figurarum similium.

EXPOSITIO. Fig. 33.

Sint data puncta vtcumque disposita A. B. C. D. E. F. inueniendum est centrum ff. ss. L. ex quo ductis rectis ad A. B. C. D. E. F. summa figurarum similium inter se sit omnium minima, minor scilicèt quàm summa ex quocumque alio puncto plani, vel solidi.

CONSTRVCT. ET DEMONST.

Si puncta data sint tantum duo A. B. iungantur recta A B. & erunt A. & B. in eadem recta A B. diuidatur hæc bifariam in G. & erit G. cētrum ff. ss. ad duo puncta A. B (35. *p.*)

Si

Si puncta fuerint tria A. B. C. ex centro G. duorum A. B. ducatur recta ad tertium punctum C. & diuidatur trifariam, vel ſumatur tertia ipſius pars G H. & erunt 2 *ff*. G H. minimæ H C (37. *p*.) Ergo H. eſt *centr. ff. ſſ.* ad A. B. C (62. *p*.)

Si puncta fuerint quatuor A. B. C. D. inueniatur prius centrum H. trium punctorum A. B. C. & ex H. ducatur recta ad quartũ punctum D. & diuidatur quadrifariam, vel ſumatur HI. quarta pars totius H D. & erit I. *centr. ff. ſſ.* ad A. B. C. D (37. & 62. *p*.)

Si ex I. ducatur recta I F. ad quintum punctum F. & I K. ſit quinta pars ipſius IF. erit K. centrum punctorum A. B. C. D. F (37. & 62. *p*.)

Si ex K. ducatur recta KE. ad ſextum punctũ E. & ſumatur KL. ſexta pars totius KE. erit L. *centr. ff. ſſ.* ad 6. puncta A. B. C. D. F. E. & ita infinite continuabitur, quovſque expleãtur omnia puncta. Hæc praxis fuſius explicanda fuit in gratiam Tyronum.

SCHOLIVM.

CVm centrum *ff. ſſ.* ſit vnicum (60. *p*.) poterit punctum L. multiplici modo inueniri, ſicut enim prima operatio facta eſt in punctis A. B. fieri potuit in A. C. vel A. E. vel F. D. &c. In ſecunda etiam operatione ſumi potuit quod-

quodlibet punctum ex reliquis, & in tertia quodlibet etiam ex reliquis, &c. Semper vltima operatio finietur in L, quæ fæcunditas erit forte operanti iucunda, & mihi quidem mirabilis est.

PROPOSITIO LXXXI.
Problema 17.

Datis quibuscumque punctis vtcumque dispositis in plano, vel in solido, inuenire minimam summam figurarum similium inter se, quæ ex quouis spatij imaginarij puncto ad data colligi potest.

CONSTRVCTIO. Fig. 34.

Sint data puncta A. B. C. D. inueniatur centrũ minimum E *ff. ss.* (80. *p.*) & ducantur rectæ EA. EB. EC. ED. quæ erunt bases figurarum similium efficientium minimam summam.

Fiat præterea angulus rectus HGF. & sumatur GH. æqualis EA. & GF. æqualis EB. & ducta FH. fit HI. ipsi perpendicularis æqualis EC. & ducta FI. sit ipsi perpendicularis IK. æqualis ED. & iungatur FK. & ita continuè fiet donec expleantur omnia data puncta. Dico FK. esse basim similis figuræ, quæ est minima summa omniũ quæ ex quolibet plani, vel solidi puncto assumi potest puncta A. B. C. D.

DE-

DEMONSTRATIO.

QVoniam punctum E. est *centrum ff. ss.* ad A.B.C.D (80.*p.*) summa figurarum ex EA. EB.EC.ED. erit omnium minima; sed figura ex FK facta æqualis est summæ omnium FG. GH.HI.IK. vel EB.EA.EC.ED (6.*p.*2.) Ergo figura similis ex FK. erit summa omnium minima. Quod erat demonstrandum.

MONITVM.

OMnes rectæ, quæ ex *centro ff. ss.* ad data puncta ducuntur, esse debent latera homologa figurarum quæ ex ipsis fiunt, aliter res non succederet: vt si figuræ similes sint trapezio LMNO. & supra AE. fiat figura similis vt AE. sit latus homologum LM. omnes rectæ EB. EC.ED. & etiam FK. minimæ summæ debent esse latera homologa ipsi LM. Idem erit si AE. fiat latus homologum MN. etiam EB.EC.ED. & FK. &c.

Præterea minima summa inuenta FK. reducenda sæpius est ad speciem dati spatij, vel ad quadratum, aut rectangulum, quod fiet quando opus fuerit ex probl. 6. praxi. 7. nostræ Geometriæ Practicæ.

PROPOSITIO LXXXII.
Problema 18.

Datis quotcumque punctis in plano, vel in solido vtcumque, inuenire centrum ff. ff. in quouis plano dato, & minimam plani summam.

EXPOSITIO. Fig. 35.

Sint data quæcumque puncta A. B. C. D. in plano, vel in solido, & datum planum GH. in quo non sunt puncta saltem omnia. Quæritur in eo punctum F. ex quo eliciatur minima omnium figurarũ similium summa, quæ ex quolibet eiusdem plani puncto elici potest.

CONSTRVCT. ET DEMONST.

Inueniatur primo punctum E. *centrum ff. ff.* (80 *p.*) Secundo ex E ducatur EF. perpendicularis plano GH. secans planum in F. Dico F. esse *centrum ff. ff.* plani GH.

Demonstratio constat ex 56. p.

Tandem ex centro F. ducantur rectæ ad data puncta A. B. C. D. & inueniatur summa figurarum omninò, vt in præcedenti (81. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXIII.
Problema 19.

DAtis quotcumque punctis in plano, vel in solido vtcumque, describere in dato plano circulum, vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa figurarum similium æqualis sit cuicumque dato spatio.

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data puncta A.B.C.D. in plano, vel in solido: & datum planum GH. in quo describi debet circulus TV. vt ex quolibet circunferētiæ puncto T. summa figurarum similium K. quæ fieri possunt ex rectis TA. TB. TC. TD. æqualis sit spatio dato P.

Construct. Primo inueniatur E. *centrum ff. ss.* (80. *p.*) & ex E. ducatur EF. plano dato HG perpendicularis, & erit F. *centrum ff. ss.* in plano GH (82 *p.*) Deinde inueniatur minima summa figurarum ex F. (81. *p.*) & basis summæ homologa basi LM. sit NO. Præterea conuertatur P. in figuram similem ipsi K (6. *p.* 7.) & sit QR. basis homologa basi LM. Diuisa QR bifariam, fiat semicirculus QSR. & RS. æqualis minimæ summæ NO. & ducatur SQ.

Insuper addatur ipsi QS pars denominata à numero punctorum, nempè si puncta data

sint

sint duo erit SX. dimidium SQ. si puncta sint tria, erit SX. tertia pars ipsius SQ. vel quarta pars si puncta fuerint quatuor, vt in præsenti, & ita infinite.

Tandem diuisa XQ. bifariam, describatur semicirculus XZQ. secans SR. in Z. Dico SZ. esse radium quæsiti circuli, & si sumatur FT. æquali SZ. & eo radio describatur circulus TV. & ex quolibet circunferentiæ puncto T. ducantur rectæ ad data puncta A. B C. D. summa figurarum similium datæ K. erit æqualis dato spatio P.

DEMONSTRATIO.

Angulus QSR. in semicirculo est rectus (3. *l.* 3.) Ergo □ QR. æquale est □ RS + □ SQ. similibus (4 *l.* 6.) sed □ QR. æquale est ex constructione ○ P. Ergo ○ P. æquale est □ RS + □ SQ.

Deinde cum XZQ. sit semicirculus, & ZS. perpendicularis diametro XQ. est SZ. media inter XS. SQ. & sunt continuæ XS. SZ. SQ. (6. *l.* 6) Sed □ SZ ad □ SQ. est in duplicata ratione SZ. ad SQ (4 *l.* 6) Ergo est vt XS. ad SQ. Ergo cū XS. sit quarta pars SQ. erit □ SZ. quarta pars □ SQ. Ergo cum ○ P. æquetur □ RS + □ SQ. etiam ○ P. æquabitur □ RS + 4 □ SZ. vel 4 □ FT. sed etiam summa similium figurarum ex quolibet circunferentiæ puncto T, æquatur minimæ summæ, nempe □ NO. vel □ SR + 4 □ FT (60. *p.*) Ergo figuræ similes, vel □ □. ex T. ad A. B. C. D. æquantur ⬠ P. Quod erat demonstrandum.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SPatium datum P. maius esse debet minima summa RS, aliter nullus circulus posset describi, vt ex ipsa constructione manifestum est.

Si planum datum HG. transeat per *centrum ff. ss.* absolutè minimum, nulla perpendicularis EF. duci potest, quia *centrum* E. in ipso plano est. Tunc ex E. sumetur minima summa NO (81. *p.*) & inuenta vt antea SZ. fiat etiam E *centrum* circuli TV. Eadem enim est omninò & constructio, & demonstratio.

PROPOSITIO LXXXIV.
Problema 20.

D*Atis quotcumque punctis in plano, vel in solido vtcumque dispositis sphæram describere, vt ex quolibet superficiei puncto summa ff. ss. quæ datis similes sint, æqualis sit cuicumque dato spatio.*

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data puncta A. B. C. D. Quæritur sphæra TV.

TV. prout in thesi. Figuræ debeant esse similes ▱ LM. & omnium summa æqualis spatio ⬠ P.

Construct. Primo inueniatur *centrum ff. ff.* (80. *p.*) Deinde minima summa RS (81. *p.*) Tertio reducatur ⬠ P. ad figuram similem ▱ LM. (6. *p.* 7.) & sit QR. basis homologa LM. & semicirculus QSR. & in illo accomodetur RS. & ducta QSX. sit SX. quarta pars ipsius SQ. quia data sunt quatuor puncta A. B. C. D. & semicirculus XZQ. determinat radium SZ. quo describetur sphæra TV. ex E. *centro ff. ff.* factūque erit quod petitur.

DEMONSTRATIO.

EX quolibet puncto superficiei summa elicitur æqualis minimæ summæ RS + 4 ▱ radij ET. vel SZ (60. *p.*) sed 4 ▱ SZ. æquantur ▱ SQ. prout in 83. *p.* Ergo summa ex quolibet superficiei sphæricæ puncto æquatur minimæ summæ + 4 ▱ SQ. hoc est æquatur ▱ RS + 4 ▱ SQ. sed etiam ▱ QR. vel ⬠ P. æquatur ▱ RS + 4 ▱ SQ (4. *l.* 6.) Ergo summa ex quolibet superficiei sphæricæ puncto æquatur ⬠ P. Quod erat demonstrandum.

MONITVM.

QVotiescumque in quæstione proponitur inueniẽda sphæra, describi debet ex ipso

cen-

centro absolute minimo *ff. ſſ.* Circulus verò deſcribi poteſt, vel ex ipſo *centro* abſolute minimo *ff. ſſ.* vel ex *centro* cuiuſcumque plani non tranſeuntis per *centr. ff. ſſ.* vt conſtat ex 60. *p.*

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SPatium datum in hoc, & præcedenti problemate, debet eſſe maius minima ſumma. Quia ſi reducto ▭ P. ad ▭ QR. eſſet ▭ QR. æquale, vel minus ▭ SR. etiam baſis QR. æqualis eſſet, vel minor, quàm SR. & deſcripto ſemicirculo QSR. non poſſet in eo accomodari baſis RS. ſaltem vt remaneret differentia SQ. cuius figuræ ſub multiplex fieri poſſet figura ſimilis SZ. vnde nec ſphæra, nec circulus deſcribi poſſet deficiente radio. Quæ omnia ſatis perſpicua ſunt, nec vlteriore indigēt demonſtratione.

PROPOSITIO LXXXV.
Problema 21.

DAtis quotcumque punctis vtcũque, ſphæram deſcribere ex centro ff. ſſ. vel circulum in quolibet plano, vt ſumma figurarum datæ ſimiliũ, datam habeat ratione cuilibet ſpatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data puncta A. B. C. D. deſcribenda eſt ſphæ-

sphæra TV. vel circulus in plano HG. vt summa figurarum similium datæ K. ad spatium etiam datum P. habeat datam rationem *ab*. ad *cd*.

Construct. Inueniatur primo *centrum* E. *ff ss*. 80. *p*. vel F. in plano HG (82. *p*.) & minima summa sit NO. Reducatur ⬠P. ad figurã simi-lem ▱K. & sit eius basis *fl*. (6 *p*. 7.) fiat insuper vt *cd*. ad *ab*. ita *fl*. ad *qg* (2. *p*. 7.) & inter *fl*. & *qg*. inueniatur media *py*. (2. *p*. 5.)

Rursus sumatur QR. æqualis mediæ inuentæ *py*. & RS. æqualis minimæ summæ NO. reliqua perficientur vt in 83. vel 84. *p*. & describatur circulus radio SZ. ex centro F. plani HG. vel sphæra ex *centro* absolute minimo *ff*. *ss*. E. Dico satisfactum esse quæstioni.

DEMONSTRATIO.

CVm tres rectæ *qg*. *py*. *fl*. sint continuæ, erit ▱*py* ad ▱*fl*. vt *qg*. ad *fl*. (4 *l*. 6.) hoc est vt *ab*. ad *cd*. ex constructione: sed ▱*py*. æquatur ex constructione ▱QR. vel ▱RS + ▱SQ (4. *l*. 6.) hoc est ▱RS + 4▱SZ. vel TT. ex demonst. 19 *p*. Ergo minima summa, nempe ▱RS. vel ▱NO + 4▱FT. sunt ad ▱*fl*. vt *ab*. ad *cd*. (1 *l*. 5.) Sed ex constructione ▱*fl*. æquatur ⬠P. Ergo minima summa ▱NO + 4▱FT. se habent ad ⬠P. vt *ab*. ad *cd*. (2. *l*. 5.) sed summa *ff*. *ss*. ex quolibet

libet puncto circunferentiæ, vel superficiei sphæricæ æquatur minimæ summæ □ NO + 4 □ radij FT (60.*p.*) Ergo summa *ff.ss.* ex quolibet circunferentiæ circulis, vel superficiei sphæricæ puncto ad spatium datum ⬡ P. datam habet rationem *ab.* ad *cd.* Quod faciendum, & demonstrandum erat.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data *ab.* ad *cd.* maior esse debet, quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum, nempe quam ratio □ NO. ad □ *fl.* vel ⬡ P.

Demonstratio perspicua est. Cum enim si ex *centro ff.ss.* describatur sphæra, vel circulus, summa ex quolibet superficiei sphæricæ, vel circunferẽtiæ circularis puncto maior sit minima summa totidem figuris similibus radij (60.*p.*) ratio summæ ex quolibet puncto maior erit quàm ratio minimæ summæ ad quodcumque spatium datum (3.*l.*5.) Quarè si inueniatur ratio minimæ summæ ad spatium datum (6.*p.*7.) determinatum erit an problema possibile, vel impossibile sit. Si ratio sit eadẽ, minima summa erit quæsita, sed nulla sphæra, nec circulus describi poterit.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI.

Problema 22.

Datis quibuslibet punctis in plano, vel in solido utcumque dispositis, sphæram describere, vel in quovis dato plano circulum, ut si summæ ff. ss. ex quolibet superficiei sphæricæ, vel circunferentiæ circularis puncto addantur, vel subtrahantur quotcumque figuræ ex radio sphæræ, vel circuli, inter se, & prioribus similes: aggregatum, vel residuum datam habeat rationem cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 33.

Sint data puncta 4. nempe A. B. C. D. Quæritur sphæra T V. ex *centro* E. vel in dato plano G H. quæritur circulus T V. ex *centro* plani F. ut si ex quolibet puncto T. colligatur *summa ff. ss.* ▭ K. illique addantur, vel subtrahantur 2. *ff. ss.* vel plures factæ ex radio E T. vel F T. aggregatum, vel residuum sit, ad spatium datum ▭ P. in data ratione *ab.* ad *cd.* Et quoniam varij casus additionis, & subtractionis possunt contingere, singillatim omnes explicandi sunt.

Constructio. Primo inueniatur *centrum ff. ss.* E. (80. *p.*) & si datum sit planum G H. *centrum* F. (82. *p.*) 2. Colligatur minima summa ex E T.

 vel

vel F. (81. *p.*) & sit ▭ NO. 3. Reducatur ▭ P. ad figuram similem ipsi ▭ K. cuius basis sit *fl.* (6. *p.* 7.) 4. Fiat vt *cd.* ad *ab.* ita *fl.* ad *qg.* (2. *p.* 7.) & inter *fl.* & *qg.* inueniatur media proportionalis *py.* (2 *p.* 5.) 5. Sumatur QR æqualis *py.* si hæc maior fuerit quã NO. & in semicirculo QSR. accomodetur RS. æqualis NO. vel *è contra* si NO. fuerit maior, ipsi fiat æqualis QR. & RS. ipsi *py.* & ducatur QSX. hæc communia sunt.

Casus 1. Numero dato punctorum A. B. C. D. nempe 4. si figuræ ex radio addendæ sint. addatur numerus figurarum: quæ in nostro exemplo sunt 2 *ff. ff.* ex radio: & fiunt 6. Sumatur ergo SX. sexta pars ipsius QS. & descripto semicirculo XZQ. erit SZ. radius sphæræ ex E. describendæ, vel circuli ex F.

Casus 2. Si figuræ ex radio subtrahendæ sint, & numerus figurarum fuerit minor punctorum numero ille subtrahatur ab isto, nempe 2 *ff.* a 4 punctis, residuum erit 2. Fiat igitur SX. secunda pars, vel dimidium ipsius QS. & descripto semicirculo, erit SZ. radius sphæræ, vel circuli.

Casus 3. Si numerus figurarum subtrahendus æqualis sit punctorum numero, quælibet sphæra ex E. vel circulus ex F. quæstioni satisfaciet.

Ca-

Casus 4. Si numerus figurarum subtrahendus nempe 7 *ff.* maior sit punctorum numero 4. auferatur *è conuerso* 4. ex 7. residuum erit 3. Tunc fiet QR. æqualis NO. & RS. æqualis *py*. & SX. erit tertia pars ipsius QS. iuxta numerum residuum 3. & SZ. erit radius quæsitus.

DEMONSTRATIO.

CVm E. sit centrum *ff. ff.* summa ex quolibet puncto T. æquatur minimæ + 4 *ff. ff.* ex ET. (60. *p.*) Ergo additis pro *casu* 1. 2 *ff.* ET (vel ablatis pro *casu* 2.) aggregatum erit æquale minimæ summæ + 6 *ff.* ET. vel SX. sed cum QS. sit sextupla SX. & SZ. media (6. *l.* 6.) □ QS. æquatur 6 □ SZ (4. *l.* 6.) Ergo aggregatum erit æquale minimæ summæ □ RS + □ QS. hoc est □ QR. vel □ *py*. sed □ *py*. ad □ *fl*. vel ○ P. est vt *qg*. ad *fl*. (4 *l.* 6) vel ex constructione, vt *ab*. ad *cd*. Ergo aggregatum, vel summa ex T + 2 *ff.* ET. est ad ○ P. datum in data ratione *ab*. ad *cd*. & eadem est demonstratio de residuo pro *casu* 2.

In *casu* 3. Cum in qualibet sphæra summa ex T. æqualis sit minimæ + 4 *ff.* ET. ablatis 4 *ff.* ET. semper remanet minima summa. Ergo omnis sphæra quæstioni satisfacit, cum minima summa sit ad spatium datum in data ratione, aliter nulla.

In *casu* 4. Summa ex T. æquatur minimæ + 4 *ff*. ET. ergo ablatis 7 *ff*. ET. erit residuum æquale minimæ summæ — 3 *ff*. ET. vel SZ. hoc est æquale □ QR — □ SQ ex constructione: Ergo residuum æquale erit □ SR. (4. *l* 6.) vel □ *py*. sed □ *py* ad □ *fl*. vel □ P. est vt *qg*. ad *fl*. vel *ab*. ad *cd*. ex constructione. Ergo residuum erit ad spatium datum □ P, in ratione data *ab*. ad *cd*. Quod erat, &c.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data in *casu* 1., & 2. maior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum, in 3. eadem, & in 4 minor. Quæ omnia ex constructionis demonstratione satis manifesta sunt.

PROPOSITIO LXXXVII.

Problema 23.

DAtis quotcunque punctis in plano, vel in solido, vtcunque dispositis inuenire centrũ absolute minimum ff. dd. vel centrum in dato plano.

EXPOSITIO. Fig. 36.

SInt in eodem plano, vel in diuersis, nempe in solido puncta A. B. C. D. E. Quæritur punctum O. centrum figurarum dissimilium, vt ductis OA. OB. OC. OD. OE. figuræ □ OA. simimilis debeat esse △P. & □OB similis □Q. & ▭OC. similis ▭R. & ⬠OD. similis ⬠S. & ⬡OE. similis ⬡T. & summa ex O. sit omnium minima. Inuentio huius *cētri ff.dd.* operosior est, quàm inuentio *centri ff.ss.* ea tamen sic perficietur.

Construct. Primo ad confusionem, & æquiuocationem vitandam, singulis punctis apponantur figuræ datis similes iuxta quæstionis tenorem, prout apparet.

Deinde assumantur quæcumque duo puncta, vel AE. vel BD. &c. assumo igitur A. & B. & ducta recta AB diuidatur in F. vt △FA. simile △P. sit minimum □FB. simile □Q. (73. *p.*) & erit *centr. ff. dd* ad A. & B. Ex inuento centro F. ducatur recta ad tertiū punctum quodlibet E. vel D. vel C. Sit ergo recta FC. quæ diuidatur in G ita vt ▭GC. simile dato ▭R. minimum sit △GF. & □GF. nempe duabus figuris ex GF. quæ similes sint datis △P. & □Q. (78. *p.*) & erit G. *centr. ff. dd.* ad A. B. C.

Iterùm ex inuento centro G. ducatur recta ad quodlibet punctum ex reliquis; & sit GD. quæ diuidatur in H. vt ⬠HD. simile ⬠S. minimum sit ad tres figuras HG similes iam positis △P. □Q ▭R. hoc est vt ⬠HD. minimum sit ad summam △HG + □HG + ▭HG (78. *p.*)

De-

Denique ex H. ducatur recta ad quintum punctum E. & diuidatur HE. in O. vt ○ OE. simile dato ○ T. minimum ad summam quatuor figurarum supra OH. similium datis △P. □Q. ▭R. ⬠S. nempe ○ OE. minimum sit △ OH + □ OH + ▭ OH + ⬠ OH. & ita infinitè continuabitur donec omnia expleantur puncta. Dico vltimum punctum inuentum O. esse *centrum ff. dd.* ad data puncta A.B.C.D.E.

DEMONSTRATIO.

CVm AB. diuisa sit in figuras minimas △FA & □FB. est F. centrum ad A. & B (34 *p.*) & cum FC. sit à centro F. ad tertium punctum, & ▭GC. minimum sit △GF + □ GF. est G. centrum ad A.B.C. (62. *p.*) & cum ex centro G. sit GD. ad quartum punctum & ⬠HD. minimũ ▭HG + □HG + △HG. est H. cẽtrum ad A. B. C.D. (62. *p.*) & similiter O. ad A.B.C.D.E. & ita infinite. Quod erat efficiendum, & demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVIII.
Problema 24.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque inuenire minimam summam figurarum datis similium, & inter se dissimilum.

2. *Inuentam summam, & singulas figuras ad quadratum reducere.*

EXPOSITIO. Fig. 36.

Sint data puncta A. B. C. D. E. in plano, vel in solido: & sit O. centrum *ff. dd.* quæ similes sint datis △P. □Q. ▭R. ⬠S. & ⬡T. Quæritur minima summa △OA + □OB + ▭OC + ⬠OD + ⬡OE. & simul Quadratum inuentæ summæ æquale; & singula quadrata singulis figuris æqualia.

Construct. Assumatur ad libitum quælibet recta IK. supra quam fiat rectangulum I*v*. æquale △OA (ex 6. *p.* 6.) & supra L*v*. fiat rectãgulum L*a*. æquale □OB & supra M*a*. fiat rectangulum M*b*. æquale ▭OC. & supra N*b*. fiat rectangulum N*c*. æquale ⬠OD. & supra V*c*. fiat rectangulum V*d*. æquale ⬡OE. Dico esse I*d*. summam omnium, vel minimam summam.

Ad Quadrata facile reducentur hac arte: Fiat *dl*. æqualis *d*K. & *ch*. æqualis *cd*. & *bg*. æqualis

lis *bc*. & *ax* æqualis *ab*. & *vf*. æqualis *va*. & K*e*. æqualis K*v*. & deſcribantur ſemicirculi ſupra I*e*. L*f* M*x*. N*g*. V*h* *rl*. fiant ſemicirculi ſecantes K*y*. in *m*. *n*. *o*. *p*. *q*. *y*. Dico Quadratum K*m*. eſſe æquale △OA. & Quadratum *vb*. æquale □ OB. & Quadratum *an*. æquale ▭ OC. & Quadratum *bp*. æquale ⬠ OD. & Quadratum *cq*. æquale ⬡ OE. & Quadratum *dy*. æquale minimæ ſummæ I*d*.

DEMONSTRATIO.

Primo ex conſtructione rectangula I*v*. L*a*. M*b*. N*c*. V*d*. æqualia ſũt △OA, □OB. ▭OC. ⬠OD. ⬡OE Ergo cum I*d*. æquale ſit rectangulis I*v*. L*a*. M*b*. N*c*. V*d*. (1. *l*. 2) erit I*d*. ſumma omnium minima, æqualis ſcilicet △ O A + □ OB + ▭ OC + ⬠ OD + ⬡ OE &c.

Secundo *dy*. media eſt inter *rd*. *dl*. vel *d*K. (6. *l* 6.) Ergo Quadratum *dy*. æquale eſt ▭ I*d*. (1. *l*. 6.) nempe minimæ ſummæ. Similiter K*m*. media eſt inter IK. K*e*. vel K*v*. & *vn*. media inter L*v*. *vf*. vel *va*. & *ao*. media inter M*a*. & *ax*. vel *ab*. & *bp*. media inter N*b*. *bg*. vel *bc*. & *cq*. media inter V*c*. *ch*. vel *cd*. (ex 6. *l* 6.) Ergo □ K*m*. æquale eſt rectangulo IK*e*. vel I*v*. vel △OA. (1. *l*. 6.) & ſic de reliquis. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIX.
Problema 25.

Datis quibuscumque figuris rectam inuenire, supra quam totidem figuræ dd. datis similes constitutæ, æquales sint quadrato, vel cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 36.

Datæ sint figuræ △P. □Q. ▭R. ⬠S. ⬡T. quæritur recta Z. supra quam △Z. □Z. ▭Z. ⬠Z. ⬡Z. æquales sint quadrato dato, nempe □Y. vel cuicumque spatio cui □Y. sit æquale.

Construct. Assumpta qualibet recta X. fiant supra ipsam △X. □X. ▭X. &c. datis △P. □Q. &c. similia. Deinde inueniatur summa △X + □X + ▭X + ⬠X + ⬡X (88. *p.*) & sit I*d*. quæ reducatur ad quadratum *dy*. vt in præcedenti.

Præterea fiat vt inuenta *dy*. ad assumptam X. ita data Y. ad quartam Z. (2. *p.* 7.) Dico rectam Z esse quæsitam, & △Z + □Z + ▭Z + ⬠Z + ⬡Z. æquari □Y.

DEMONSTRATIO.

Quoniam sunt proportionales vt *dy*. ad X. ita Y. ad Z. ex constructione, etiam alternando proportionales erunt, vt *dy*. ad Y. ita X

R ad

ad Z.(4.*l* 5.) Ergo etiã figuræ ſimiles deſcriptæ, proportionales erunt (4.*l*.6.) nempe vt □ *dy*. ad □ Y. ita △X+□X+▭X+⬠X+○X. ad △Z+□Z+▭Z+⬠Z+○Z. Ergo etiam alternando vt □ *dy*. ad △X+□X+▭X+⬠X+○X. ita □Y ad △Z+□Z+▭Z+⬠Z+○Z (4.*l*.5) ſed □ *dy*. æquatur △X+□X+▭X+⬠X+○X. ex conſtructione: Ergo etiam □Y. æquatur △Z+□Z+▭Z+⬠Z+○Z. Quod efficiendum, & demonſtrandum erat.

Si autem ſpatium datum non fuerit quadratum, reducetur ad quadratum ex 88. *p*. & ſit □Y. æquale ſpatio dato. Quo poſito inſtituetur operatio omnino vt antea, & eadem erit demonſtratio. Quod in ſequentibus ſæpiſsime obſeruandum erit.

PROPOSITIO XC.
Problema 26.

Rectam inuenire ſupra quam figuræ datis ſimiles conſtitutæ: & aliæ alijs datis etiam ſimiles, datam habeant differentiam, æqualem ſcilicet cuilibet ſpatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 36.

Datæ ſint ſpecies figurarum △P. □Q. ▭R. ⬠S. ○T. Quæritur recta Z vt ſumma △Z +□Z+▭Z. datis ſimilium; & ſumma ⬠Z+○Z.

⬡Z. differant dato spatio □Y. vel vt differentia vtriusque summæ sit æqualis □Y.

Construct. Assumpta quælibet recta X. fiat supra ipsam △X □X ▭X. & inueniatur eorum summa, nempè □ *at*. (88. *p*.) similiter supra eandem X. fiant ⬠X. ⬡X. & inueniatur eorum summa, scilicèt □ *ts*. (88. *p*.) Descripto supra *at*. semicirculo *ast*. ipsi accomodetur *ts*. & ducatur *as*. Præterea fiat vt inuenta *as*. ad assumptam X. ita data Y. ad quartam Z. (2. *p*. 3.) Dico rectam Z. esse quæsitam, & satisfacere quæstioni.

DEMONSTRATIO.

QVoniam sunt ex constructione proportionales, vt *as*. ad X. ita Y. ad Z. & alternando vt *as*. ad Y. ita X. ad Z. (4. *l*. 5.) etiam figuræ similes erunt proportionales (4. *l*. 6.) vt □ *as*. ad □ Y. ita △X + □X + ▭X − ⬠X − ⬡X. ad △Z + □Z + ▭Z − ⬠Z − ⬡Z. Ergo etiam alternando vt □ *as*. ad △X + □X + ▭X − ⬠X − ⬡X. ita □ Y. ad △Z + □Z + ▭Z − ⬠Z − ⬡Z. (4. *l*. 5.) sed □ *as* est differentia quadratorum, nēpè □ *at* − □ *ts*. (4. *l*. 6.) quia angulus in semicirculo rectus est (3. *l*. 3.) & □ *at* − □ *ts*. ex constructione æquale est △X + □X + ▭X − ⬠X − ⬡X. Ergo □ Y. erit etiam æquale △Z + □Z + ▭Z − ⬠Z − ⬡Z. Ergo summa △Z + □Z

□Z.+▭Z. & summa ⬠Z.+⬡Z. habent differentiam datam, æqualem scilicet □Y. Quod erat demonstrandum.

Si spatium datum non fuerit quadratum reducetur ad illud, sicut in præcedenti.

PROPOSITIO XCI.
Problema 27.

Rectam inuenire supra quam aliæ, & aliæ figuræ constitutæ datis similes, summam efficiant, vel differentiam habeant in data ratione cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 23.

Species figurarum datæ sint △P. □Q. ▭R. ⬠S. ⬡T. Quæritur recta Z. vt summa omnium figurarum, nempe △Z.+□Z.+▭Z.+⬠Z.+⬡Z. ad spatium datum □Y. sit in ratione data IL. ad LN. vel quæritur Z. vt differentia similium △P. □Q. ▭R. & similium ⬠S. ⬡. ad spatium datum □Y. sit in data ratione IL. ad LN. hoc est vt △Z.+□Z.+▭Z.−⬠Z.−⬡Z. sit ad □Y. vt IL. ad LN.

Construct. Primo inueniatur LM. media inter IL. & LN. (2. *p.* 5.) Deinde fiat vt LM. ad ad IL. ita Y. ad *uz.* (2 *p.* 7.) & si quæritur Z. vt omnium summa sit in data ratione: inueniatur Z. vt summa △Z.+□Z.+▭Z.+⬠Z.+⬡Z. æqua-

æqualis sit □ *u*. ex 89. *p*. & recta Z. erit quæsita.

Secundo si quæratur Z. vt differẽtia vtriusque summæ, &c. inueniatur Z. vt △Z + □Z + ▭ — ⬠Z — ⬡Z. æqualis sit □ *u*. ex 90. *p*. & recta Z quæstioni satisfaciet.

DEMONSTRATIO.

QVoniam ex constructione, tã summa △Z + □Z + ▭Z + ⬠Z + ⬡Z. quam summarum differentia supra Z. nempe △Z + □Z + ▭Z — ⬠Z — ⬡Z. æquales sunt □ *u*. sed □ *u*. ad □ Y. est in duplicata ratione *u*. ad Y (4. *l*. 6.) vel ex constructione in ratione duplicata I L. ad LM. hoc est vt IL. ad LN. cum sint continuæ ex constructione IL. LM. LN. Ergo tam summa supra Z. ex 89. *p*. inuenta, quam differentia supra Z. ex 90. *p*. inuenta erit ad datum spatiũ □ Y. in ratione data I L. ad LN (1. *l*. 5.) Quod faciendum, & demonstrandum fuerat.

Problema omnem rationem admittere potest, dum summa affirmata signo + maior sit negatiua signo —. nec aliam determinationem requirit.

PRO-

PROPOSITIO XCII.
Problema 28.

Datis quibuslibet punctis vtcumque dispositis ex eorum centro ff. dd. spheram describere, vt summa figurarum datis quibuscumque similium, & inter se dissimilium, ex quolibet superficiei puncto sit æqualis cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 36.

Sint data pūcta A.B.C.D.E. Figuræ datæ △P. □Q. ▭R. ⬠S. ⬡T. quæritur *centrum* O. & radius sphæræ ex *centro* O. describendæ, vt ex quolibet superficiei puncto summa figurarum similium △P. □Q. &c. æqualis sit □ z. in *fig.* 24.

Construct. Primo □ z. reducatur ad □ *at.* (ex 88. *p.*) & diuisa basi *at.* bifariam, fiat semicirculus *ast.*.

Deinde inueniatur O. *centr. aff. dd.* (87. *p.*) & minima figurarum summa datis similium I *d.* quæ reducatur etiam ad quadratum *dy.* (88. *p.*)

Præterea fiat *ts.* æqualis *dy.* & ducatur *sa.*

Tandem inueniatur recta F*f.* vt quinque figuræ datis similes supra ipsam, nempe △F*f* + □F*f* + ▭F*f* + ⬠F*f* + ⬡F*f.* æquales sint □ *as.*

Di-

Dico rectam $Ff.$ esse radium sphæræ, quæ si eo radio describatur ex O satisfaciet quæstioni.

DEMONSTRATIO.

QVoniam O. est *centrum ff. dd.* ex constructione, descripta ex eo sphæra radio $Ff.$ summa ex quolibet puncto superficiei superabit minimam totidem figuris similibus ex eodem radio (60. *p.*) nempe $\triangle Ff + \square Ff.$ &c. Ergo cum $\square$ *st.* sit ex constructione minima summi, summa ex sphærica superficie superabit $\square$ *est.* 5. *ff* ex radio $Ff.$ nempe $\triangle Ff + \square Ff +$ ▭ $Ff.$ &c. sed 5 *ff.* ex $Ff.$ nempe $\triangle Ff + \square Ff.$ &c. æquantur ex constructione $\square$ *as.* Ergo summa ex sphærica superficie superat minimam, scilicet $\square$ *st.* toto $\square$ *as.* sed $\square$ *z.* hoc est $\square$ *at.* superat $\square$ *st.* minimam summam toto $\square$ *ks.* (4. *l.* 6) cũ angulus E. sit in semicirculo rectus (3. *l.* 3.) Ergo summa figurarum datis similiũ ex quocumque superficiei sphæricæ punto ex *centro* O. descriptæ radio $Ff.$ æquatur $\square$ *z.* dato, Quod erat efficiendum, & demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.
Problema 29.

Datis quibuslibet punctis vtcumque circulum describere in dato quolibet plano, vt summa figurarum datis similium ex quouis circumferentiæ puncto æqualis sit cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

Sint data puncta A.B.C.D.E. in plano, vel in solido. Datum planum quodlibet XZ vtcumque, siue in eo sint aliqua puncta, siue nullum: datum spatium sit □K. Quæritur circulus HI. in plano XZ. vt ex quolibet circumferentiæ puncto ducantur rectæ ad data puncta A.B. C.D.E. summa figurarum datis similium, & inter se dissimilium, æqualis sit □K. dato.

Construct. Primo reducatur □K ad □L. Secundo inueniatur *centrum ff. da.* F. ad data puncta A.B.C D.E (87.*p.*) Tertio ducatur ex F. recta FG. plano XZ. perpendicularis. Quarto inueniatur summa figurarum datis similiũ ex G ad A.B.C.D.E. & sit □M. (88.*p.*) Quinto sit □L. æquale □M + □N (6.*p.*2.) Inueniatur recta O. vt 5 *ff.* ex O. factæ, similes datis æquales sint □N (89.*p.*) Dico O. esse radium quæsiti circuli. Si ergo ex G. radio GH. ipsi O.

æqua-

æquali describatur circulus HI. in plano XZ. quæstioni satisfaciet.

DEMONSTRATIO.

CVm enim sit F *centrum* absolute minimũ ad A.B.C.D.E. ex constructione, & FG. plano perpendicularis, erit G *centrum* plani XZ. ad eadem puncta (56. *p.*) & descripto circulo HI. summa *ff.* ex quouis puncto superabit minimam ex G. quinque *ff.* GH (60. *p.*) hoc est, superabit □M. quinque *ff.* O. Ergo sũma æquabitur □M + □N. hoc est, æquabitur □L. vel □K. ex constructione. Quod fuerat demonstrandum.

DETERMINATIO PROBL. 26. & 27.

SPatium datum maius esse debet, quàm summa ex centro sphæræ describẽdæ in 92 *p.* vel circuli in 93. *p.* Cum enim summa ex quolibet puncto superficiei, vel circumferẽtiæ maior sit quàm summa ex centro totidem figuris ex radio: vt illa possit spatio dato æqualis esse debet hoc summam ex centro excedere, aliter erit quæstio omninò impossibilis.

PROPOSITIO XCIV.
Problema 30.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque ex eorum centro sphæram describere, vel in quouis plano circulum, vt ex quolibet superficiei, vel circunferentiæ puncto, summa ff. dd. datis similium, datam habeat rationem cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

SInt data puncta A. B. C. D. E. eorum *centrum* F. (87. *p.*) spatium datum △K. Ratio data R ad S. Quæritur radius sphæræ FP. vt summa *ff. dd.* datis similium ad △K. datam habeat rationem R. ad S.

Construct. Primo reducatur △K. ad □V. & fiat vt S. ad R. ita V. ad T. (2. *p.* 7.) & sit Y. media inter V. & T. (2. *p.* 5.) Inueniatur minima summa ex F. ad A. B. C. D. E (88. *p.*) & sit □ M. Præterea in fig. 24. BC. æqualis Y. & descripto semicirculo BEC. sit CE. æqualis M. & ducatur BE. Inueniatur postea F. vt 5 *ff. dd.* datis similes æquales sint □ BE. Dico F. esse radium sphæræ: descripta ergo hoc radio sphæra FP. in fig. 25. satisfaciet quæstioni.

DEMONSTRATIO.

CVm sint cōtinuæ ex constructione T. Y. V. erit

erit □ Y. ad □ V. sicut T. ad V (4. *l.* 6.) hoc est ex constructione vt R. ad S. sed □ Y. est □ B C. ex constructione: hoc est □ CE + □ EB. (4. *l.* 6.) hoc est minima summa □ M + 5 *ff. dd.* ex F. datis similes ex constructione: Ergo minima summa nempe □ M + 5 *ff. dd.* FP. radij datis tamen similes sunt ad □ V. vel △ K. in data ratione R. ad S (1. *l.* 5.) sed ex quolibet superficiei sphæricæ puncto summa æquatur minimæ summæ, scilicet □ M + 5 *ff. dd.* radij F P. quæ sint datis similes (60. *p.*) Ergo summa ex quouis superficiei sphæricæ puncto est ad △ K. in data ratione R. ad S. Quod erat demonstrandum, &c.

Si in dato plano XZ. licet in eo nullum sit punctum, quæratur circulus H I. quæstioni satisfaciens, ducatur ex F. recta FG. plano perpendicularis: & inueniatur minima summa ex G. in reliquis eadem est omninò constructio, & demonstratio.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data R. ad S. maior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum, nempe maior quàm ratio □ M. ad □ V. aliter quæstio erit impossibilis. Huius demonstratio eadem est, ac proposita in 85. *p.*

PROPOSITIO XCV.
Problema 31.

D*Atis quibuslibet punctis vtcumque, & qualibet recta, vel curva etiam vtcumque totidem rectas ex datis punctis inflectere ad idem rectæ, vel curvæ datæ punctum concurrentes, vt summa ff. datis similium, siue inter se similes, siue dissimiles sint, datam habeat rationem cuilibet spatio dato.*

EXPOSITIO. Fig. 37.

SInt data puncta A. B. C. D. E. in plano, vel in solido, & data quæuis recta, vel curva PQ. vel IH. in quouis plano XZ. quæritur vt ad idem punctum P. vel H. rectæ, vel curvæ datæ inflectantur ex datis punctis rectæ AP. BP. &c. vt summa *ff. dd.* quæ datis dissimilibus, vel similibus inter se, similes sint datam habeat rationē ad quodlibet spatium datum □ K. nempè vt R. ad S.

Construct. Primo inueniatur *centrum ff. ss.* vel *dd.* F. ex 80. vel 87. *p.* Secundo reducatur □ K. ad □ Z. & inueniatur minima summa ex F. (81. vel 82. *p.*). Tertio inueniatur sphæra GHN. vt ex quolibet puncto superficiei summa *ff. ss.* vel *dd.* datis similium datam habeat rationem R. ad S. ex 85. vel 94. *p.* quæ secet datam

cur-

curvam, vel rectam PQ. in P, & Q. Dico puncta P. Q. rectæ, vel curvæ PQ. satisfacere quæstioni.

Si verò recta, vel curva data sit IH. in plano dato XZ. ex eius *centro ff. ss.* vel *dd.* G. iuxta quæstionem inuento ex 82. *p.* vel 87. *p.* & describatur circulus ex *centro* G. iuxta quæstionem ex 83. *p.* vel 93. *p.* qui secet rectam, vel curvam datam in H. & I. Dico pũcta H & I. quæstioni satisfacere.

DEMONSTRATIO.

PVncta inuenta P. Q. sunt in superficie sphærica, cum ibi recta, vel curva secent illam: Ergo *summa ff.* datis similium erit ad □K. in data ratione R. ad S (ex 85. vel 94. *p.*)

Similiter cùm puncta H. I. sint in circumferentia circuli IH. *summa ff* datis similium erit ad □K. in data ratione R. ad S (ex 85. vel 94. *p.*) Quod erat demonstrandum.

Ratio data non debet esse minor, quàm ratio summæ ex superficie sphærica tangẽte rectam, vel curvam datam: hoc est, non debet esse minor quàm ratio minimæ summæ + tot *ff.* datis similium ex breuissima distantia à cẽtro in rectam, vel curvam ad spatium datum, aliter sphæra nec secaret, nec tangeret rectam, nec curvam, & esset quæstio impossibilis.

PRO-

PROPOSITIO XCVI.
Problema 32.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque totidem rectas inflectere ad idẽ cuiuslibet plani dati punctum, vt summa aliquarum figurarum datis similium datam habeat rationem cuilibet spatio dato, & omnium summa, vel aliarum summa quibuscumque alijs etiam datis similium, datam aliam rationem habeat cuilibet alteri spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 38.

SInt data puncta A. B. C. D. E. F. G. H. in vno, vel in diuersis planis: in vno, vel in diuersis solidis. Planum datum PQ. licet in eo nullum sit punctum datum: sint data spatia □ X. & □ Y. datæ rationes R. ad S. & T. ad V. Quæritur vt ad idem punctum M. plani PQ. inflectãtur ex datis pũctis rectæ AM. BM. &c. vt summa *ff. dd.* □ BM + □ CM + ⬠ EM. datis □. □. ⬠. similium ad □ X. sint vt R. ad S. & summa reliquarum *ff. dd.* △ AM + ▱ DM + ◺ HM + ▭ GM + ⬡ GM datis △. ▱. ◺. ▭. ⬡. similiũ ad □ Y. datam aliam habeat rationem T. ad V.

Construct. Primo inueniatur *centrum* ad assignata ex vna parte puncta B. C. E. quod sit L. (87. *p.*) Ex quo ad planum PQ. ducatur perpen-

pen-

pendicularis LO. & ex O. describatur circulus MN. vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa *ff. dd.* datis □. □. ⬠. similiũ sit ad □X. vt R. ad S. (94. *p.*)

Secundo inueniatur *centrum ff. dd.* ad assignata puncta ex alia parte A. D. H. G. F (87. *p.*) & sit pũctum I. Ex quo ducatur plano PQ. perpendicularis IK. & ex K. describatur circulus MN. vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa *ff. dd.* datis △. ⬠. △. ▭. ○. similium ad spatium datum □Y. datam habeat rationem T. ad V. (94. *p.*) Si circuli se intersecant in M. & N. Dico vtrumque punctum M. vel N. quæstioni propositæ satisfacere.

DEMONSTRATIO.

CVm puncta M. & N. sint vtrique circunferentiæ communia vbi circuli se mutuo secant summa *ff. dd.* nempe □BD + □CM + ⬠ EM. est ad spatium datum □X. vt R. ad S. (ex 94. *p.*) vel ex constructione: similiter summa *ff. dd.* △AM + ⬠DM + △HM + ▭GM + ○FM. ad □Y. est vt T. ad V. (ex 94. *p.*) vel ex constructione: Ergo Punctum M. quæstioni satisfacit: Idemque est de puncto N. Quod efficiendum, & demonstrandum erat.

Eadem omninò est constructio, & demonstratio si in secunda parte assumenda sint omnia

nia

nia puncta A.B.C.D.E.F.G.H. dum inueniatur ad omnia *centrum ff dd*.I.& in reliquo operatio instituatur vt antea.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

EX ipsa constructione patet determinatio problematis: si enim descripti circuli se nõ intersecant, vel tangunt, erit quæstio impossibilis. Vnde summa radiorũ nequit esse minor, quàm distantia centrorum K & O. dati plani PQ. Præterea quælibet ratio data maior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum. Quæ omnia satis ex præcedentibus constant.

PROPOSITIO XCVII.
Problema 33.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque, totidẽ rectas inflectere ad idem plani dati punctum, vt summa aliquarum figurarum datis similium, datam habeat rationem cuilibet spatio dato; & omnium, vel reliquarum summa datis etiam similium aliam datam habeat rationem priori summa.

EXPOSITIO. Fig. 38.

SInt data puncta A.B.C.D.E.F.G.H. Planum datum PQ. Spatium datum □X. rationes datæ R. ad S. & *cd*. ad *gi*. species datæ quæ in pũctis

ctis A. B. C. &c. appositæ sunt. Quæritur punctum M. vel N. ad quod inflectantur rectæ ex A. B. &c. ita vt summa ◻B + ◻C + ⌂E. ad ◻K. sit vt R. ad S. & omnium summa, nempe △A + ◻B + ◻C + ◻D + ⌂E + ⌂F + ◻G + △H. ad priorem summam ◻B + ◻C + ⌂E. sit in data ratione *cd.* ad *gi.*

Construct. Primo inueniatur *mn.* media inter R. & S. & fiat vt *mn.* ad R. ita X. ad *ab.* Itē vt *gi.* ad *cd.* ita *ab.* ad *xz.* & inueniatur *pq.* media inter *ab.* *xz.* Omnia ex 7. probl. nostræ Geometriæ practicæ.

Secundo inueniatur *centrum ff. dd.* ad puncta assignata ex vna parte B. C. E. (84. p.) & sit E. & LO. sit plano PQ. perpendicularis. Deinde inueniatur *centrum ff. dd.* ad puncta assignata ex alia parte, siue sint omnia, siue reliqua tantum: sint modo omnia A. B. C. D. E. F. G. H. & sit *centrum* I. (87. p.) & IK. perpendicularis plano PQ.

Tertio ex O. describatur circulus OMN. vt ex quolibet circumferentiæ puncto summa *ff. dd.* ad B. C. E. æqualis sit ◻ *ab.* (93. p.) Similiter ex K. describatur circulus KMN vt ex quolibet circumferentiæ puncto summa ad A. B. C. &c. æqualis sit ◻ *pq.* (93. p.) Dico quodlibet punctum intersectionis circulorum, scilicet

M. vel N. quæstioni satisfacere: & summam □ BO. + □ CO. + □ EO. ad □ X. esse vt R. ad S. & summam △ AK. + □ BK. + □ CK. + □ DK. + ⬠ EK. + ⬠ FK. + □ GK. + △ HK. ad summam □ BO. + □ CO. + ⬠ EO. esse in ratione data *cd.* ad *gi.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam summa ex O. ad B. C. E. æquatur □ *ab.* ex constructione, & *ab.* ad X. est vt R. ad *mn.* ex cõstructione: ex qua etiã sũt continuæ R. *mn.* S. erit summa ex O. ad B. C. E. vel □ *ab.* ad □ X. in duplicata ratione R. ad *mn.* hoc est vt R. ad S. (4. *l.* 6.) Quod erat primò demonstrandum.

Deinde cũ summa ex K. ad A. B. C. &c. æqualis sit ex constructione □ *pq.* & summa ex O. ad B. C. E. sit æqualis □ *ab.* erit illa summa ad istã, vt □ *pq.* ad □ *ab.* hoc est vt *xz.* ad *ab.* (4. *l.* 6.) cũ sint continuæ *xz. pq. ab.* ex constructione: sed vt *xz.* ad *ab* ita *cd.* ad *gi.* ex constructione: Ergo summa △ AK. + □ BK. + □ CK. &c. ad summam □ BO. + □ CO. + ⬠ EO. est vt *cd.* ad *gi.* Quod secundo erat demonstrandum.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio pro prima parte data maior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatiũ datum prout in 94. *p.* Ratio verò pro secunda

 par-

parte maior esse debet, quam ratio minimæ summæ ex assignatis punctis ad □ *ab*. vel summa radiorum maior esse debet quam distantia *centrorum* plani K. O. vt ex ipsa constructione liquet.

PROPOSITIO XCVIII.

Problema 34.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque, planũ inuenire, & in eo circulum describere, vt ex quouis circumferentiæ puncto summa aff. dd. datis similium, datam habeat rationem cuilibet spatio dato: & iterum alia summa aff. dd. ex ijsdem rectis similium etiam alijs datis aliam habeat rationem, eidem, vel cuilibet alteri spatio dato, vel priori summæ.

EXPOSITIO. Fig.

SInt data puncta A. B. C. D. in plano, vel in solido. Inueniendum est planum I K, in quo possit describi, & describatur circulus L N M Q. vt ex quolibet circumferentiæ puncto, summa *ff. dd*, ex rectis ad A. B. C. D. similium datis △. □. □. □. sit ad □ T. in ratione data R. ad S. & iterum summa *ff. dd.* ex ijsdem rectis ad A. B. C. D. similium datis □. □. □. △. sit ad □ T. vel ad aliud □ Y. vel ad priorem summam in data ratione X. ad Z.

Constr. Primo inueniatur *centrum ff. dd.* ad puncta A. B. C. D. quæ datis △. □. ⬠. ○. similes sint (87. *p.*) & sit E. Deinde inueniatur etiam *cētrum ff. dd.* ad eadem puncta A. B. C. D. quæ datis ▭. ⌂. ○. △. similes sint (87. *p.*) & sit F.

Secundo ducatur EF. vtrinque infinita, & transeat per ipsam quodcunque planum GH.

Tertio in plano GH. ex *centro* E. describatur circulus LPM. vt summa *ff. dd.* datis △. □. ⬠. ○. similium ad □ T. sit vt R. ad S (94. *p.*) Et similiter ex *centro* F. in eodem plano GH. describatur circulus LQM. vt summa *ff. dd.* datis ▭. ⌂. ○. △. similium sit ad idem □ T. vel ad □ X. vt X. ad Z (94. *p.*) vel ad priorem summam (97. *p.*)

Quarto per circulorū intersectiones L. M. ducatur in plano GH. infinita LM. & per rectam LM. ducatur planum IK. rectæ EF. vel priori plano GH. perpendiculare: & radio LV. describatur in eo circulus LNMO. Dico planum IK. esse quæsitum, & circulum LNMO. satisfacere quæstioni propositæ.

DEMONSTRATIO.

CVm recta EF. coniungat *centra* circulorū LPM. LQM. secat bifariam, communem chordam LM (5. *l.* 3.) Ergo circulus LNMO.

ra-

radio V L. descriptus transit per M. cum V L. V M. sint æquales: sed ex constructione E V. & F V. sunt plano I K. perpendiculares ad idem punctum V. quia sunt eadem recta E F. Ergo erit V. centrum plani I K. (56. p.) Ergo ex quolibet puncto circumferentiæ summa semper erit eadem (60. p.) sed ex puncto L. quod est in circulo L P M. summa ff. dd. datis △. ▭. □. ⌂. similium est ad □ T. vt R. ad S. ex constructione: & ex eodem puncto L. quod est in circulo L Q M. summa ff. dd. datis ▭. ▵. ⬠. △. similium ad □ T. vel ad □ Y. vel ad priorem summam est vt X. ad Z. ex constructione: Ergo cum etiam punctum L. sit in circulo L N M O. plani I K. ex quolibet circunferentiæ puncto erit summa ff. dd. datis △. ▭. □. ⌂. similium ad □ T. in ratione data R. ad S. & summa ff. dd. datis ▭. ▵. ⬠. △. similium ad □ T. vel ad □ Y. vel ad priorem summam, iuxta constructionem, in alia ratione data X. ad Z. Quod erat, &c.

ALIA CONSTRVCT. ET DEMONST.

EX primo inuentis centris E. & F. describantur duæ sphæræ iuxta quæstionis tenorem (94. p.) sint sphæræ L P M. L Q M. earum communis sectio erit planum circuli L N M O. cuius diameter L M. & cum tota periphæria L N M O. sit in superficie vtriusque sphæræ L P M. L Q

LQM. summa ex quolibet circunferentiæ puncto eadem erit quæ ex quouis superficiei sphærico puncto. Ergo cum sphæræ supponantur descriptæ iuxta quæstionis tenorem, quodlibet punctum circunferentiæ LNMO. quæstioni propositæ satisfaciet. Quod erat demonstrandum.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SI summa radiorum, tam sphærarum, quam circulorum plani GH. non sit maior distantia centrorum E. F. vel vnus radius sit maior quam summa alterius, & distantiæ centrorum, erit quæstio impossibilis, quia in neutro casu dabitur circulorum, vel sphærarum intersectio, vt ex ipsa constructione clarissime liquet.

PROPOSITIO XCIX.
Problema 35.

DAtis quibuslibet punctis vtrumque sphæram describere, vel circulum in dato plano, vt summa ff. datis similium ex quolibet superficiei, vel circunferentiæ puncto ad data quotcumque figuris ex radio datis similibus, datam habeat rationem cuilibet spatio dato: vel ex datis punctis ad datum rectam, vel curuam totidem rectas inflectere sub eadem conditione.

EXPOSITIO. Fig. 40.

DAta puncta in plano vel in solido vtcunque

sint

sint A. B. C. D. E. F. G. species figurarum datæ ad illa terminãdæ △a. ◺b. ▭c. ▯d. ⬠e. ⬡f. ⬠g. Quæritur sphæra H. vel in plano dato MN. quæritur circulus O. vt ex quolibet superficiei sphæricæ H. puncto, vel circumferentiæ circularis O. summa ff. datis a. b. &c. similium si ab illa prius auferantur quotcumque figuræ ex radio Z. datis aliis similes; vel addantur illi scilicet in nostro exemplo; si addantur, vel auferantur tres figuræ ex radio similes ▭K. ⬠m. ⬡n summa, vel residuum ad spatium datum □Y. sit in data ratione R. ad S.

Constructio. Primo inueniatur *centrum* absolute minimum H. vel *centrum* O. in plano MN (87. *p.*) Deinde inueniatur minima summa ex H. vel O. & reducatur ad Quadratum LK (88. *p.*) Insuper inueniatur T media inter R & S (2. *p.* 5.) & fiat vt T. ad R. ita Y. ad IK (2. *p.* 7.) & supra illam fiat semicirculus, cui accommodetur minima summa KL. & iungatur IL. Præterea inueniatur Z. vt summa ff. similium datis *a b, c, d, e, f, g,* + K, *m, n* sit æqualis □IL (ex 89. *p.*) si figuræ similes K, *m, n* addendæ sunt: vel si fuerint auferēdæ, inueniatur Z. vt summa ff. similium *a. b. c. d. e. f. g.* − summa ff. similium K. *m. n.* æqualis sit □IL (ex 90. *p.*) Dico rectã Z. esse radium sphæræ ex *cētro* minimo H. descri-

ben-

bensæ, vel circuli ex *centro* Θ. & satisfacere quæstioni.

Hæc constructio quatuor etiam casus admittit prout in figuris similibus obseruatū est (86.*p.*) Quod præmonuisse sufficiat, ne singulos cōstructionis casus cogamur repetere; hic tamen non attendendum est ad numerum figurarum subtrahendum, sed ad illarum summa, an scilicet maior, æqualis, vel minor sit sūma figurarum ex radio iuxta punctorum numerum, & qualitatem: cùm enim figuræ dissimiles sint, potest vna figura maior esse pluribus alijs dissimilibus ex eadē recta descriptis.

DEMONSTRATIO.

CVm H. sit *centrum* minimum, & sphæra sit radio Z. ex H. descripta, vel circulus ex Θ. summa ex quolibet circunferentiæ puncto ad A. B. C. D. &c. æquatur minimæ summæ ex H. vel Θ + totidem ff. similibus radij Z (60. *p.*) Ergo si addantur tres ff. □ Z + ⬠ Z + ⬡ Z. datis K. *m*. *n*. similes: erit summa æqualis minimæ + totidē ff. radij + □ Z + ⬠ Z + ⬡ Z. vel *econtr*. Si auferantur tres ff. □ Z. ⬠ Z. ⬡ Z. erit summa æqualis minimæ summæ − □ Z − ⬠ Z − ⬡. sed minima summa æquatur □ KE ex constructione: & 4 ff. ex Z. similibus *a*. *b*. *c*. *d*. & *f*. *g*. + vel − 3 ff. Z. similibus K. *m*. *n*. ex constructione

iux-

iuxta quæstionis tenorem, æquantur □ IL. Ergo summa ex quolibet superficiei sphæricæ, vel circunferētiæ circularis puncto æquatur □ LK + □ LI hoc est □ IK. (4. *l*. 6.) sed □ IK. ad □ Y. est in duplicata ratione IK ad Y. (4. *l*. 6.) vel in duplicata ratione R. ad T (1. *l*. 5.) hoc est vt R. ad S. quæ est ratio duplicata R. ad T. cùm sint continuæ R. T. S. ex constructione: Ergo summa ex quolibet puncto superficiei sphæricæ, vel circunferentiæ circularis + vel − 3 *ff*. radij Z. similibus K. *m*. *n*. est ad spatium datum □ Y. in ratione data R. ad S. Quod efficiēdum, & demonstrandum erat.

Si quæratur punctum in recta, vel curva data, ad quod inflectendæ sunt rectæ. Dico esse punctum in quo sphæra tangit, vel secat rectam, vel curvā: aliter impossibilis erit quæstio prout in 95. *p*.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

EAdem est quæ in 86. *p*. Si enim figuræ ex radio addendæ sint, vel subtrahendæ, & earū summa minor quàm summa figurarum ex radio punctorum numero correspondentium, ratio data maior esse debet, quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum: Si summa auferenda æqualis sit alteri summæ ex radio erit ratio data ipsa ratio minimæ summæ ad spatium datum, & quælibet sphæra satisfacit. Tandem si summa auferenda maior fuerit, ratio data minor esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum: quæ omnia ex constructione, & ex 86. *p.* clarissimè inferuntur.

PRO-

PROPOSITIO C.

PROBLEMA CATHOLICVM XXXVI.

DAtis quibuslibet punctis in plano, vel in solido vtcumque dispositis, circulũ describere, vt si ex quouis circunferentiæ puncto summæ figurarum datis similium ad omnia puncta, vel ad aliqua eorum determinata addantur, vel substrahantur quotcumque figuræ ex recta à circunferentia in centrum minimum, quæ datis alijs similes sint: summarum summa, vel differentia datam quamlibet rationem habeat cuilibet spatio dato.

Et iterum si summæ figurarum alijs etiam datis similium ad eadem omnia puncta, vel ad eorum aliqua, vel ad quælibet alia addantur, vel substrahantur quotcumque figuræ ex recta à circunferentia in secundum centrum minimum, quæ alijs etiam datis similes sint, summarum summa, vel differentia quamlibet aliam datam rationẽ habeat, eidem spatio, vel cuilibet alteri dato; vel priori summarum summæ, vel differentiæ.

EXPOSITIO. Fig. 41.

SInt data puncta A. B. C. D. E. F. G. H. I. K. in plano, vel in solido vtcũque disposita: Quæriritur circulus radio LP.deſcriptus, vt ex quolibet circunferentiæ puncto ſi primo ducatur rectæ ad A.B.C. D. quorum *centrum* O. ſumma figurarum ſimilium △*a*. □*b*. ▭*c*. ◇*d* cum 2*ff*. ex recta OP. quæ ſimiles ſin datis ⏢*e*. ◇*f*. ſũmarum ſumma, vel omnium ſumma: ſit ad □ X. in data ratione R. ad S. hoc eſt ſi punctum aſſumptum ſit P. ſumma *ff*. △PA + □ PB + ▭ PC + ◇PD addita ſũma ⏢ OP + ◇OP. vtraque ſimul ſit ad □ X. vt R. ad S.

Iterum ex quolibet eiuſdem circunferẽtiæ puncto ſi ducantur rectæ ad puncta B. C. G. H. I. K. quorum *centrum* M. ſumma *ff*. ſimiliũ datis ⏢ *e*. △*a*. △*g*. ⬠*h*. ▭*i* ⬡K. ablatis prius 3 *ff*. ex recta MP. quæ ſimiles ſint datis △*l*. □*m*. ◺ *n*. ſcilicet vtriuſque ſummæ differentia ſit: ad idem ſpatium □X. vel ad aliud ſpatium datũ □Z. vel ſi lubet ad priorem ſummam △ PA + □ PB + ▭PC + ◇PD + ⏢ PO. + ◇PO. in qualibet alia ratione data T. ad V.

Eadem ratione in prima quæſtionis parte potuerunt aſſumi plura puncta, vel omnia ſimul; & figuræ omnes inter ſe ſimiles, vel aliquæ ſimiles, & aliæ diſsimiles, vel omnes diſſimiles: & ſicut iubetur addi 2*ff*. rectæ OP. potuerunt addi, vel ſubſtrahi quotcumque aliæ, quibuslibet ſimiles, &c.

Et

Et in secunda quæstionis parte sicut ex prima fuere assumpta puncta B. & C. variatis figuris, potuere etiam omnia simul assumi: & figuræ pertinentes ad secundam partem etiā omnes similes inter se, vel aliquæ similes, & aliæ dissimiles; vel omnes dissimiles: & vt præcipiũtur substrahi 3ff. rectæ MP. similes *l. m. n.* plures aliæ similes, vel dissimiles substrahi, vel addi potuere: Idem de spatijs X. & Z. & rationibus datis intelligendum est. Quibus ritè intellectis accedamus ad constructionem.

CONSTRVCTIO.

PRimo claritati, & facilitati consulendum est intercluso æquiuocationi aditu, quæ facile in tanta punctorum, & figurarum diuersitate subrepere posset. Ponãtur ergo seorsum in compendium redacta, quæ vtraque pars quæstionis præscribit, hoc ordine.

Prima pars. △A. □B. ▭C. ◇D. + 2ff. OP. similes ▭ *e* ◇ *f* ad □ X. vt R. ad S.

Secunda pars ▭B. △C. ◺G. ⬠H. ▷I. ⬭K. + 3.ff. MP. similes △ *l*. □ *m*. ◿ *n*. ad X vel Z. vel ad priorem summam vt T. ad V.

Secundo inueniatur *centrũ ff.* ad A. B. C. D. (87. *p.*) & sit O. & similiter *centrum ff.* ad B. C. G. H. I. K. & sit M. & iungatur MO.

Tertio ducatur per rectam MO. quodsibet

bet planū: in quo describatur circulus QNP. primæ quæstionis parti satisfaciens (99.*p.*)

Quarto si in secunda quæstionis parte datum sit spatium □ Z. describatur in eodē plano ex *centro* M. circulus QYP. satisfaciens secundæ quæstionis parti (99.*p.*) & intersecans primum circulum in P. & Q.

Quinto ducta recta PQ. per ipsam transeat planum perpendiculare rectæ YM. & in illo cū radio LP. describatur circulus P*p*Q*q*. Dico circulum istum esse quæsitum, & satisfacere quæstioni omninò.

Sexto si ratio data T. ad V. debeat esse ad priorem summam: fiat prius vt S. ad R. ita □ X. ad □ Z. & erit □ Z. inuentum æquale priori summæ. Cognito iam □ Z. inueniatur circulus PYQ. & reliqua omnia omninò vt antea. Dico ex quolibet puncto Q circumferentiæ P*p*Q*q*. summam △QA. ⬠QB. ▭QC. ⬡QD. + ▱OP. ⬡OP. esse ad □ X. vt R. ad S. & iterum differētiam summarum, nempè ▱QB. △QC. △QG. ⬠QH. ▭QI. ⬡QK. − △MP. □MP. ◁ MP. esse ad □ Z. vel ad priorem summā quod idem est, in data ratione T. ad V.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff*. ex quolibet puncto circumferentiæ PNQ. + ▱OP. ⬡OP. est ad □ X. in data

ra-

ratione R. ad S. & iterum ex quolibet puncto circunferentiæ BYQ. summa + △MP □MP. ◁ MP. est ad □Z. in alia data ratione T. ad V. omnia ex constructione. Sed punctum P. est commune vtrique circunferentiæ, vbi illæ se intersecant. Ergo ex communi pũcto P. summa ff. ad A. B. C. D. + ▭ OP. ◇OP. est ad □X. vt R. ad S. & summa ad B. C. G. H. I. K. + △MP. □MP. ◁ MP. ad □Z. est etiam in ratione T. ad V. sed punctum P. est in circunferentia circuli P*p*Q*q*. ex L. *centro* plani perpendicularis rectæ OM. ex constructione. Ergo ex quolibet puncto circunferentiæ. P*p*Q*q*. sunt summæ semper eædem (57.*p.*) Ergo summa ex quolibet puncto Q. circunferentiæ P*p*Q*q*. in puncta A. B. C. D + ▭ OP. ◇OP. est ad □X. vt R. ad S. & ex eodem puncto Q. summa in B. C. G. H. I. K + △MP. □MP. ◁ MP. est ad □Z. in ratione data T. ad V. Quod erat demonstrandum.

Similiter si secunda summa ad priorem debuerit esse vt T. ad V. cum factum sit □X. ad □Z. vt R. ad S. & prior summa ad □X. etiam vt R. ad S. est □X. æquale priori summæ (2. *l.* 5.) Ergo cum demonstratum sit secundam summam ad □X. esse in data ratione T. ad V. etiã secunda summa ad priorem erit in eadem ratione T. ad V. prout cõstructio iuxta quæstionem

nem facta fuerit. Quod erat demonstrandū.

CONSTRVCTIO II.

Ex inuento *centro ff.* O. in puncta A. B. C. D. describatur sphæra PNQ. satisfaciens priori quæstionis parti (99. *p.*) & iterum ex inuento *centro* M. punctorum B. C. G. H. I. K. describatur sphæra PYQ. satisfaciens secundæ parti quæstionis: communis sphærarum sectio erit circulus P*p*Q*q*. & eius diameter PLQ. Dico circulum hunc esse quæsitum.

Demonstratio perspicua est. Quoniam circulus P*p*Q*q*. est communis sectio sphærarū est in superficie vtriusque sphæræ: Ergo cùm quodlibet pūctum primæ sphæræ satisfaciat primæ quæstionis parti, & quodlibet punctū secundæ sphæræ satisfaciat secundæ parti, tota circuli circunferentia, quæ est in vtraque superficie sphærica vtrique parti quæstionis satisfaciet. Quod erat, &c.

Si comparatio summæ ad summam facienda sit: debet prius inueniri □ Z. æquale priori summæ; vt antea efficiendo □ X. ad □ Z. vt R. ad S. Hæc demonstratio clarior, & facilior est. constructio tamen praxi minus est cōmoda.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

PRoblema triplicem determinationem requirit, scilicet pro prima, & secunda quæstiostionis parte, & pro vtraque simul. Determinatio pro qualibet parte, est eadem problematis præcedentis 99. *p*. Determinatio pro vtraque parte simul, est circulum QNP. PYQ. intersectio. Si enim circuli se nõ intersecent, erit quæstio omninò impossibilis, vt ex ista constructionis demonstratione liquet. Idemque dicendum de sphærarum intersectione in secunda praxi: vt perspicuum est.

OPERIS CONCLVSIO.

PRoblema Catholicum clara, ac facili methodo solutum dedimus, quod fortè nimis arduum, nedum impossibile cui videri poterat. Magna sane moles minimo cẽtro innixa Geometriæ magnitudinem satis indigitat; & non immeritò Geometria magna in minimis dicitur in hac parte prima. Magnam esse in minimis secunda, & tertia ostendent; quæ proximè sequuntur priori saltem eo nomine maiores, quòd in determinatis planis, ac solidis perspicua breuitate nobiliora concludant.

FINIS.

X AP-

APPENDIX
PRO CIRCVLI, ET ELLIPSIS QVADRATVRA.

EX demonſtratis *prop.* 8. ſequitur datam eſſe Quadraturam circuli, vel Ellipſis ſi inueniatur triangulum, vel polygonũ quodlibet circulo, aut ellipſi minimum. Sit enim in *fig* 3. ſemicirculus M ſupra diametrum AB, & Triangulum rectangulum H. ſupra baſim BC. detur eſſe minimum ſemicirculo M. Dico datam eſſe quadraturam totius circuli M. Si enim ſumatur BD. æqualis diametro BA. & ducatur DI. perpendicularis diametro, erit rectangulum F. æquale circulo M.

DEMONSTRATIO.

SI BE. ſumatur æqualis BA. erit ſemicirculus BNE. quadruplus ſemicirculi M. ſcilicet vt quadratum AE. ad quadratum AB (5. *l.* 6.) Ergo cum ſemicirculi M. & Y. ſint æquales, complementum N. erit æquale duobus ſemicirculis M. & Y. hoc eſt toti circulo M. ſed cõplementum F. eſt æquale etiam complemento N. quia figuræ minimæ habent æqualia cõplementa (8. *p.*) Ergo rectangulum, vel complementum F. æquale erit circulo M. Vnde

ſi

si detur triangulum rectangulum semicirculo minimum datum erit parallelogrammum rectangulum circulo æquale. Si verò triãgulum non sit rectangulum, erit parallelogrammum F. circulo æquale: & vtrumque facile ad quadratum reduci poterit, &c.

Tandem si rectilineum datum circulo minimum sit polygonum quodlibet irregulare, habebitur complementum rectilineú circulo æquale in quadratum facile reducendum. Qui ergo rectilineum circulo minimum demonstrauerit, circuli Quadraturam perficiat.

SCHOLIVM.

HInc apparet mirabilis connexio Minimorum cum grauitatis *centro*. Si enim rectilineum inueniatur circulo, ellipsi, vel sectori minimum data erit circuli, & ellipsis quadratura, vnde etiam, & grauitatis *centrum* partiũ ipsius circuli, prout exposuit P. IOANNES DE LA FAILLE, Regius Professor in hac Matritensi Acadæmia Antecessor noster: & *è conuerso* dato *centro* grauitatis dabitur etiam circuli Quadratura, vnde & polygonum cuilibet simile circulo minimum: Data etiam Quadratura vtrumque *centrum*, minimum scilicet, & grauitatis vice versa innotescet. Tres isti Gorgij nodi adeò inter se connexi, vt quo-

quouis ſoluto, ſoluti etiam reliqui ſint, hanc habent inconnexionem, vt quiuis ſeorſim ab alijs inveſtigari queat. Nouam igitur aperuimus viam ad circuli, vel ellipſis Quadraturam inveſtigandam Geometriæ ſtudioſis fortè non iniucundam.

FINIS.

GEOMETRIAE MAGNAE IN MINIMIS.

PARS SECVNDA. DE PLANIS.

AVTHORE

A. R. P. IOSEPHO ZARAGOZA,

Valentino Societatis Iesv, in Suprema Hispaniarum Inquisitione propositionum Fidei Censore: olim in Collegijs Baleárico, Barcinonensi, & Valentino Theologiæ Scolasticæ, modo in Matritensi Acadæmia Imperialis Collegij Matheseos Professore Regio.

AD ILLVSTRISSIMVM DOMINVM D. PETRVM FERNANDEZ DEL Campo, Angulo, & Velasco, Marchionem de Mejorada, Catholicæ Maiestati ab vniuersis Secretis, &c.

PRIMA EDITIO.

TOLETI. Apud Franciscum Calvo, Typogr. Reg. Anno Domini 1674.

Cum Superiorum licentia.

FACVLTATES SVPERIORVM.

Imprimatur.

Lic. D. Ioannes de Zeballos, Vic. Tol.

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS
Prouinciæ Toletanæ Societatis Iesv.

Didacus de Valdes.

IL 3

ILLVSTRISSIMO DOMINO

D. PETRO FERNANDEZ DEL CAMPO, ANGVLO, ET VELASCO,

Marchioni de Mejorada, B. Iacobi Stemmate insignito, & inter Primarios eius Ordinis Equites vulgo *Treze* numerato, Catholicæ Maiestatis in Supremo Belli, ac Status Senatu Secretario, in Camera Indiarum Consiliario, & pro vniuersa negotiorum expeditione Catholicæ Hispaniarum Reginæ à Secretis, &c.

GEometriæ Magnæ in Minimis Pars secunda de Planis T. Dominationis patrociniū ambit, tum quia me tātò nomini deuinctum agnoscit, tum quia nè in angulo lateat in *Angulo* patere, & in *Campo* conspicuam esse vult, vt omnibus plana fiat, quæ aliàs præruptia; & inaccessa culmina degere videbantur. A potentum planitie non fugiunt festina ingenia, quæ oderunt lucem, & speculas tenebrosas amant in quibus deliteant, ne ab inquirentibus capiantur. Mihi quidem Plana tractanti apertus Campus adeundus fuit, ac ingenti perfusus lumine, cùm ab omnibus etiam animi causa transeuntibus capi desiderem, ac reperiri etiam non quæsitus. Plana percurro, sed fortè parum trita, non communia, nec humilia, quæ enim silvis horrebant auia, omnibus pervia iterato securis ictu sternere conatus sum, aliquibus scilicet nouo lumine donatis, non omnibus, cum hoc in immenso Geometriæ latifundio, nec vnius ingenij sit, nec forte omnium, ni Deus vltrò super infusa luce tanti doni, quem voluerit esse participem.

Campus igitur Geometricus, & Gentilitius T. Dom. hanc mirabilem servant analogiam, vt vterque immensè difusus pari fertilitate, iuges, ac perennes laboris, & sudoris fructus cultoribus subministret. Perspicua sunt in Geometriæ fundo Archimedis, Apollinij, & aliorum siuè antiquos percurrere, siuè Recentiores libeat, clarissima inventa: sed me iudice clariora Maiorum tuorum gesta ad hunc nostrum diem ordine non intercisso deducta, & similia spero ad præfinitum mundi terminum à Successoribus deducenda.

Heu

Heu quantum Gentilitia tuis laudibus aperiebant campum, si diutius in eo immorari liceret. Fuit ex Progenitoribus, qui Martis æmulus inimicorum copias fuderit, & vt belli fulmẽ in hostes irruens, hostilem compresserit Tyrannidem Regemque subegerit. Hinc gloriosum stemma præcisi capitis, squallentis tabo, regia corona insigniti originem duxit, quo atauorum gloria recens perẽnet. Turribus superimposita sydera fortitudinis claritatem indigitant, & armatæ Gryphes leoninum robur, & aquilinam celeritatem in prælijs conficiendis adumbrant. Omitto Velascos de Vago, & Zuñiga, quorum ex felicissima proles, & gloriam immortalem nouis splendoribus corroborasti. Sileo Comites-Stabiles Castellæ militari gloria conspicuos inter maiores tuos enumerãdos. Prætereo maternam stirpem in qua Turrianos veneror, Lopezios colo alta nobilitatis cognomina, illud seipso illustrissimum, hoc verò egregijs Lupi Lopezij Salzedo vallis Ayalæ tertij Domini facinoribus clarum, quibus Aulam de Velasco sublatam propriæ ditioni restituit. Quid hos, & alios Progenitores clarissima Hispaniarum lumina in medium proferam, cùm quæ virtutes, & egregia facta amplis-

plissimumque, ac feracissimum tuis laudi-
bus Campum aperiant? Te enim ita ab incu-
nabulis magnum intueor, vt praecoces tuae
pueritiae anni maturam aliorum senectutem
excelluisse videantur: virtutem à puero colui-
sti, vt vitiorum insurgentium monstra faelici-
ter debellares: ab ineunte aetate, vt otium ma-
lorum omnium radicem fugeres, diuersarum
nationum idiomata didicisti. Faelix quidem
omen cum enim lingua mentis sit interpres,
altissima Regij capitis consilia te expressurũ,
communique tanti imperij bono, & saluti
consulturum praeclara tua indoles innuebat.
Aetate provectior in praelio Norligensi cum
Ferdinando Austriaco adeo magnum consilij
tui specimen posteris reliquisti, vt non exigua
tantae victoriae pars tibi cedat.

Magnus Philippus in concilijs Belli, & Sta-
tus secretorum te participem fecit, & custo-
dem. Heros ille maximus ad ardua, & subli-
miora virtutem, ac industriam tuam elegit, vt
stratam haberes viam, qua ingenium tuum
ad summa vniuersae expeditionis secreta as-
cenderet. Regiae mentis consilium, & rectissi-
mae voluntatis decretum coniugem latere nõ
potuit. Hinc autumo, Serenissima Hispania-
rum Regina Mariana Austriaca, potentissimi
hu-

huius Imperij Gubernatrix, vt illud Carolo Secundo Catholico, & Maximo incolume sistat, merita singularia, quibus fulges, ad summam rerum occurrentium expeditionẽ euexit: ea nempè fælicitate, vt parem Ministrum vix in idæis Platonicis liceat invenire. Atlantis humeri cœlo licet non impares, Catholico imperio sustinendo pares non essent: at vero Atlante maior Philippus Quartus vniuersam hanc machinam sustinuit, & rexit, cui ad superos translato succeſsit, non impar Alcides, sed Mariana Heroinis superior, & Alcide robustior, cuius leuamini demandatus es, vt qui sine comite tãto ponderi crederis suppar. Nescio quid diuinum redolet Prouidentia tua, vt ad consilium tuum, & nutum volvatur orbis iste, & quidem sine violenta coactione, non tam grauitatis suæ, quàm prudentiſsimæ tuæ dispositionis centro innixus. Omnia in rerum multitudine innumera, & magnitudine immensa ita suauiter ad numerum, & mẽsuram redigis, vt vtraque infinitudo a tuo ingenio circumscribi patiatur. Fælicitas hæc vnius hominis nõ est, nisi à Summo Deo quid supra humanum menti tuæ fuerit gratis, & largè superinfusum. Hæc mihi sæpius consideranti, nihil aliud occurrit, quàm singularis

illa

illa beneuolentia, qua Deus Optimus Maximus Catholicum hoc regnum intuetur, & protegit. Ex hac indeficienti scaturigine Prouidentiæ tuæ certitudo, regiminis suauitas; & reliquæ virtutes Supremo Gubernatori ad fœlicem rerum administrationem idoneæ largissimè fluunt. Singularis tua dispositio, quod æmulari possit nullum habet exemplar, in ea tamen habent singulare, quod venerentur posteri. Suauitas ea est vt iugū subiectionis nemo sentiat, cùm labores omnes tui sint, vt omnibus sis leuamini, saluti tuæ nihil aliud tribuens, quàm quod alienæ contulis. De virtutibus alijs Regio Ministro dignis satius est tacere, quàm pauca dicere. Ea est vigilantia, vt omnibus videaris præsens, maiora ita prospicis, ac si nihil de minimis tibi curæ esset: minima tamen, quæ ad Regni administrationem pertinent ita curas, ac si Maxima quæque solicitudini tuæ non essent tradita. Hæc tua solicitudo vbique præsens Antiquorum fatua deliramenta refellit. Crediderè Gentes pro diuersitate munerum numerum Deorum fore multiplicandum: alijs Reipublicæ commendabant tutelam, alijs imperij clauam, alijs familiæ curam; & eo insaniæ processit delirium, vt æquè vitijs, ac virtutibus sua præ-

es-

essent numina; præter innumeram Deorum turbam minimis rebus præfectam, cùm penès selectos (vt credebant ipsi) Deos minimarum rerum prouidentia esse non posset. *Opperiat igitur confusio faciem eorum*: impudentes quidem sunt si pudori ipsis non es, Homo enim cùm sis, tantam rerum machinam sustines, quantæ non sufficeret, vel Iuppiter ipse, vel innumera Deorum multitudo: vt Phœbeis radijs sensibilia viuunt, ita calore tuo viget omnia, nullusque est in hoc difuso imperio, quē benefica tua virtus non foueat, in dies, mirū, vegetior, & robustior; viue fælix, vt tot bellorum terminum, tot imminentium inimicorum stragem, tot machinantium interitum, tot dubiarum rerum fælicem exitum videamus, & aurea per te sæcula, vt cessura credimus, Carolo Secundo nouissimè cedant.

Væ Dominationis
obsequentissimus Servus
Iosephus Zaragozà.

ERRO-

ERRORES CORRIGENDI.

Pag.	Lin.	Error.	Corrẽ.
8.	1.	OD.DO.	OB.BO.
11.	11.	*ex.*	*&.*
15.	17.	EN.	EO.
15.	24.	2EB.	2ED.
17.	6.	EO.	EA.
17.	14.	FB.	FG.
21.	19.	SX.	SZ.
22.	27.	SZ.	SX.
31.	5.	IC.	IR.
41.	1.	ctione.	ctio.
52.	3.	EC.	EA.
56.	4.	*ut.*	*et.*
60.	15.	CL.	AL.
76.	8.	AB.	AC.
83.	18.	B.	H.
94.	21.	GH.	DH.
101.	8.	æquatur.	æquatur 2.
104.	1.	DC.	BC.
104.	6.	gonibus.	gonijs.
113.	17.	GE.	GC.
124.	10.	CA in B.	DA in C.
126.	9.	in G.	in F.
137.	2.	& HK.	& HN.
143.	23.	vel HY.	vel VY.
149.	9.	minus	maius
152.	15.	SV.	OV.
156.	3.	2.	20.
166.	22.	BQR.	BCR.
169.	24.25.	AD.	AB.
175.	12.	*omnium.*	*omnia.*
192.	15.	HC.	RC.
193.	22.	in E.	in G.
197.	19.	AB.	AB Pentagoni.
211.	2.	44388.	[illegible]383.
219.	2.	NARIA.	NATA.
223.	20.	ad GM.	ad GE.
226.	17.	ad EC.	ad BO.
227.	21.	5 RQ.	5 BQ.
229.	21.	BB.	BC.
233.	6.	*eq.4.*	*eq.*

GEO

GEOMETRIAE MAGNAE IN MINIMIS.

PARS SECVNDA DE FIGVRIS PLANIS.

EGimus in priori parte de centro minimo, nullo figurarum, quas puncta constituunt, respectu habito. Iam in determinatis planis centrum minimum est nobis determinandum, & quæ forte magna ex minimo inferantur sedula meditatione inuestiganda veniunt. Omnia ferè, quæ in hac parte aguntur, ad centrum figurarum similium spectant. Aliquid tamen concluditur de dissimilibus, quod scilicet perspicua breuitate, iam diu nobis præfixa, & altè animo insculpta comprehendi potuit, ac obseruatione dignum occurrit. Multa igitur consulto quia prolixa, plura autem, quæ nō occurrere ommissimus. Quem enim licet oculis præditum lynceis minima non subterfugient?

CAPVT I.

DE TRIANGVLIS.

SEcundam Geometriæ partem in quatuor diuisimus capita, quorum primũ de triangulis agit, vt quæ simpliciora sunt, & ab illis incipiendum esse, doctrinæ methodus, & demonstrationum ordo præscribit. Secundum de quadrilateris, & irregularibus, siue inordinatis Polygonis agit. Tertium continet ea, quæ ad figuras regulares spectant. In quarto Problemata ex specularibus orta soluuntur. Seiunximus ergo Problemata à Theorematibus, vt qui praxi delectantur, omnia quæ ad earum finem cõducunt in vnum collecta reperiant, quod etiam in Euclidæis elementis, & in prima huius Geometriæ parte obseruatum est, ac in tertia retinendum.

PROPOSITIO I.

IN quolibet Triangulo centrum ff ss est in tertia parte rectæ ex angulo bisecantis latus oppositum.

2 *Et in dimidio rectæ trisecantis latera.*

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Triangulo A B C. recta C F. diuidat bifariam latus AB. & sit FO. tertia pars rectæ FC. Dico punctum O. esse *centrum ff ss.* ad angulos A. B. C. Item recta HI trisecet latera AC. BC. & eius dimidium sit O. Dico etiam O. esse *cẽtrum ff. ss.* trianguli, scilicet punctorum A. BC.

DEMONSTRATIO.

CVm AB. sit bifariam diuisa in F. erit F. *centrum ff ss.* ad A. B. (35. M. 1.) Ergo cum FC. sit trifariam diuisa in O. erit O. *centrum ff ss.* ad A. B. C. (62. M. 1.) Quod, &c.

2 Cum AH ad AC. sit vt BI. ad BC. est HI. parallela ipsi AB (2. *l* 6.) Ergo etiam est vt AH. tertia pars AC. ita FO. tertia pars FC. & HO dimidium HI. sicut AF. dimidium AB (2. *l* 6.) Ergo *centrum ff ss.* O. quod est in tertia parte FC. est etiam in dimidio HI. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO II.

IN quolibet Triangulo rectæ ex angulis bisecantes latera opposita, trifariam inuicem diuiduntur in centro ff. ss. & quæ trisecant latera, diuiduntur bifariam in eodem centro, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Triangulo ABC. rectæ AG. BE. CF. bisecant opposita latera, & HI. KL. MN. trisecāt eiusdem anguli latera. Dico intersecari in *cētra ff. ss.* O. illas nempè trifariam, & bifariam istas: & *èContra.*

DEMONSTRATIO.

CVm recta CF. bisecet latus AB. est *centrum ff. ss.* O. in tertia ipsius parte (1. *p.*) Similiter est in tertia parte rectæ EB. & item rectæ GA. Tum quia HI. trisecat latera, est *cētrum ff. ss.* O. in ipsius dimidio: & similiter in dimidio rectarum KL. MN (1. *p.*) Ergo cum *centrum ff. ss.* O. sit vnicum punctum (60. M. 1.) omnes se in eo intersecant modo exposito.

Conuersa patet, quia si recta CF. trāsit per O. recta CO. transibit per F. & HO. per I. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO III.

IN quolibet Triangulo si rectæ coniungant laterum bisectiones, constituent Triangulum simile in versum: & si hoc infinite continuetur, desinent in centrum ff. ss. omnibus commune.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. sint latera AB. BC. CD. bisecta in F G. E & iungãtur EF. FG. GE. quæ iterum bifariam diuidantur in P. Q. X. & ducantur PQ. QX. XP. & ita infinitè continuetur. Dico omnia triangula similia esse Triangulo ABC. & habere cõmune *centrum ff. ss.* O. in quo tandem finietur triangulorum infinita series.

DEMONSTRATIO.

QVoniam sunt proportionales vt tota CA. ad totam CB. ita dimidium CE. ad dimidium CG (5. *l.* 5.) erunt EG. & AB. inter se parallelæ (2. *l.* 6.) Similiter erunt parallelæ EF. & CB. Tum etiam FG. & AC (2. *l.* 6.) Ergo parallelogramma sunt AFGE. BGEF. CEFG. Ergo oppositi anguli erunt æquales (7. *l.* 1.) nempè EAF. & FGE. Tum FBG. & GEF. Tum GCE. & EFG. Ergo Triangula ABC. EFG. æquiangula, & similia sunt.

Deinde cum in Parallelogrammis diametri

tri bifariam secentur (7. *l*. 1.) scilicet AG. EF. tum EB. FG. tum CF. EG. erunt latera trianguli EFG. bisecta in P. Q. X. Ergo cum rectæ FX. GP. EQ. bisecantes latera se intersecent in *cẽtro* Trianguli EFG. (2. *p.*) punctum intersectionis O. erit *centrum ff. ss.* trianguli EFG. & cũ idem sit etiam *centrum ff. ss.* trianguli ABC. (2. *p.*) erit O. commune *centrum*. Vnde PO. erit tertia pars ipsius PG. & XO. ipsius XF. & QO. ipsius QE (1. *p.*) Idem similiter demonstrabitur de Triangulo PQX. & ita infinitè vsque ad *centrum* O. Ergo omnia triangula similia sunt, & habent commune *centrum ff. ss.* Quod erat demonstrandum.

Triangulum EFG. inuersum est, quia angulus EFG. similis est ABC. & Triangulum PQX. est parallelum ipsi ABC.

PROPOSITIO IV.

IN quolibet Triangulo rectæ ex angulis per centrum ff. ss. bisecantes latera diuidunt ipsum in sex Triangula æqualia.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. rectæ AG. BE. CF. transeuntes per *centrum ff. ss.* O. bisecent latera. Dico Triangulum ABC. sectum esse in sex

Trian-

Triangula æqualia, scilicet AOF. FOD. DOG. GOC. COE. EOA.

DEMONSTRATIO.

CVm AC BC. sint proportionaliter diuisæ, nempè bifariam, sunt AB. & EG. parallelæ (2. *l.* 6.) Ergo Triangula ABG BAE. supra eandem basim AB. & inter parallelas AB, EG sunt æqualia (8. *l.* 1.) Ergo ablato communi AOB. erunt æqualia AOE. BOG. similiter quia BE. & FE. sunt parallelæ, demonstrantur æqualia triangula EOC. FOB. Tum etiam COG. AOF. sed etiam AOF. FOB, æqualia sunt, cùm habeant æquales bases AF. FB. & æqualem altitudinē in O (8. *l.* 1.) Tū BOG. GOC. & COE. EOA. Ergo omnia sunt æqualia. Quod, &c.

PROPOSITIO V.

REcta ex centro ff. ſſ. in angulos diuidunt Triangulum in tria triangula æqualia.

2 *Perpendicula à centro in latera sunt lateribus reciprocè proportionalia.*

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. sit *centrum ff. ſſ.* O. ex quo ducantur OA. OB. OC. & perpendicula OE. OG. OF. Dico triangula AOB. BOC. COA. esse inter se æqualia, & perpendicula esse lateribus reciprocè proportionalia.

DE-

DEMONSTRATIO.

CVm enim AOF. FOB. sint duæ sextæ partes (4.p) erit AOB. tertia pars trianguli ABC. similiter BOC. erit tertia ipsius pars: tum etiã COA. Ergo sunt triangula inter se æqualia.

2 Cum Triangulum ABO. sit dimidium rectanguli AB.FO. & BOC. dimidium rectanguli BC.GO. erunt rectangula æqualia: Ergo latus AB ad latus BC. erit vt perpendiculum OG. ad perpendiculum OF. (1.l.6.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

IN quolibet Triangulo summa ff ʃʃ. ex lateribus est sesquitertia summa ff. ʃʃ. ex bisecantibus latera: vt 4 ad 3.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. Dico summam quadratorum, vel quarumlibet *ff. ʃʃ.* ex lateribus AB. BC. CA. esse sesquitertiam summæ *ff ʃʃ.* ex bisecantibus AG. BE. CF. scilicet vt 4. ad 3.

DEMONSTRATIO.

CVm AB. sit bifariam diuisa in F. est F. *centrũ ff ʃʃ.* ad A.B (35. M. 1.) Ergo figuræ ex C. nẽpè CA. CB. æquantur *ff. ʃʃ.* FA. FB + 2 FC (60. M. 1.) Similiter AC. AB. æquantur GC. GB + 2 GA. Item BA. BC. æquantur EA. EC + 2 EB.

B (60.

(60.M.1.) sed AF. FB. sunt æquales, tum BG. GC. tum CE. EC. Ergo 2 AB + 2 BC + 2 CA. æquantur 2 AG + 2 BE + 2 CF + 2 AF + 2 BG + 2 CE. Ergo ff. ss. AB. BC. CA. æquantur AG. BE. CF + AF. BG. CE. Ergo illæ superant istas totis ff. ss. AF. BG. CE. nempè quarta sui parte, cum recta AF. sit dimidium AB & BG. ipsius BC. & CE. ipsius CA (3. l. 2.) Ergo ff. ss. AB. BC. CA. sunt ad ff. ss. AG. BE. CF. vt 4. ad 3. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

IN quolibet Triangulo summa ff. ss. ex bisecantibus latera est ad minimam summam ex centro, vt 9. ad 4. ista verò est quadrupla, & illa noncupla minimæ summæ trianguli inscripti.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. sit *centrum ff. ss.* O. Dico summam ff. ss. AG BE CF. ad minimam summam OA. OB. OC. esse vt 9 ad 4. & hanc ad minimam OE. OF. OG. vt 4 ad 1. & illam ad eandem vt 9. ad 1.

DEMONSTRATIO.

CVm FO. sit tertia pars ipsius FC. (1. *p.*) est recta FC. ad OC. vt 3. ad 2. Ergo quælibet figura FC. ad similem OC. est vt □ FC. ad □ OC (4. *l.* 6.) scilicet vt 9. ad 4. Idem demonstratur

de

de figuris BE.OB. tum AG.OA. Ergo summa ff.ſſ.AG.BE.CF.ad summam OA OB.OC.vt 9. ad 4 (4.*l*.5.) Insuper quoniam OC. est dupla ipsius OF. erit □ OC. quadruplum □ OC. Ergo etiam summa ff.ſſ.OA.OB.OC.est quadrupla summæ ff.ſſ.OF.OG.OE. vt 4. ad 1. Ergo summa ff.ſſ.AG.BE.CF.ad summam OE.OF. OG.erit vt 9.ad 1. Quod erat;&c.

PROPOSITIO VIII.

IN quolibet Triangulo summa ff.ſſ.ex lateribus ex tripla minimæ summæ: & summa ex lateribus inscripti est medio loco proportionalis inter summam ff.ſſ.ex bisecantibus, & minimam summam trianguli inscripti.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC.sit *centrum* ff.ſſ.O Dico summam ff.ſſ.AB.BC.CA. esse triplam minimæ OA.OB.OC.& esse continuas summas AG.BE.CF.&EF.FG.GE.& OE.OF.OG.

DEMONSTRATIO.

SVmma enim ff.ſſ.ex lateribus A B. B C. C A. est ad summam ff.ſſ.ex bisecantibus AG.BE. CF.vt 4 ad 3. vel vt 12. ad 9. (6.*p*.) sed summa ff.ſſ.ex bisecantibus AG.BE.CF.est ad minimã OA.OB.OC.vt 9.ad 4 (7.*p*.) Ergo summa ff.ſſ. ex lateribus est ad minimam summam vt 12.

ad 4. scilicet in ratione tripla. Similiter summa ff. ss. EF. FG. GE. erit ad summam OE. OF. OG. vt 3. ad 1. sed hæc ad summam ff. ss. ex bisecātibus est vt 1. ad 9. (7. p.) Ergo cum 9. 3. 1. sint continui, etiam summæ ff. ss. AG. BE. CF. & EF. FG. GE. & OE. OF. OG. continuæ erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

IN quibuslibet Triangulis summæ ff. ss. ex lateribus minimis summis sunt proportionales.

EXPOSITIO. Fig. 2.

SIt Triangulum ABC. & eius *centrum* O. Item Triangulum EFG. cuius *centrum* O. Dico summam ff. ss. AB. BC. CA. ad summā EF. FG. GE. esse vt minimam summam OA. OB. OC. ad minimam OE. OF. OG.

DEMONSTRATIO.

SVmma enim ff. ss. AB. BC. CA. tripla est minimæ OA. OB. OC. & summa ff. ss. EF. FG. GE. tripla est minimæ OE. OF. OG (8. p.) Ergo & alternando summa ex lateribus ad summā, vt minima ad minimam (4. l. 5.) Quod erat demonstrandum.

TA-

TABVLA POTENTIARVM
cuiuslibet Trianguli.

Summa ff. ss. ex lateribus trianguli.	*XII.*
Summa ff. ss. ex bisecantibus latera.	*IX.*
Minima summa ex centro.	*IV.*
Summ a ff. ss. ex lateribus inscripti.	*III.*
Minima summa inscripti.	*I.*

Hinc rationes continuæ, vel nõ continuæ facile colligi possunt.

PROPOSITIO X.

OMnia Triangula, quæ habent eandem basim, & æqualem summam ff. ss. ex reliquis lateribus, habebunt etiã angulos verticales in eadem peripheria, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SInt duo, vel infinita triangula A B C. A B D. &c. supra eandem basim A B. & summa *ff. ss.* ex lateribus A D. D B. æqualis sit summæ *ff. ss.* A C. C B. &c. Dico angulos D. & C. &c. esse in eadem peripheria ex E. dimidio basis descripta. *E conuerso* si anguli D. & C. &c. sint in eadẽ peripheria ex E. descripta. Dico summam *ff. ss.* alteri summæ esse æqualem.

DEMONSTRATIO.

EX E. dimidio A B. & radio E C. describatur circulus G C H. cum sit E *centrum ff. ss.* ad A. &

&B (35. M. 1.) Ergo summa ff. CA. CB. æqualis est ff. ff. AE. EB + 2 EC (60. M. 1.) & summa ff. DA. DB. æquatur ff. ff. AE. EB + 2 ED (60. M. 1.) Ergo cum summa CA. CB æqualis sit DA. DB. erunt ED. EB. æquales figuræ: Ergo & rectæ æquales radij erunt.

Conuersa patet ex eadem 60. M. 1.

PROPOSITIO XI.

IN omnibus Triangulis æqualem basim habentibus, differentia ff. ff. ex bisecantibus illam est semidifferentia inter summas ff. ff. ex lateribus: & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 3.

TRiangula ADB ANB. habeant eandem, vel æqualem basim, quam bisecent DE. NE. Dico differentiam ff. DE. NE. esse semidifferentiam inter summam ff. DA. DB. & NA. NB. & *ècontra* si differentia ff. ED. EN sit æqualis semidifferentiæ inter ff. DA. DB. & NA. NB. Dico bases æquales esse.

DEMONSTRATIO.

SVmma ff. DA. DB. æquatur 2 AE + 2 ED (60. M. 1.) & summa ff. NA. NB. æquatur 2 BE + 2 EN. sed cum AE. BE. supponantur æquales: differentia inter 2 AE + 2 ED. & 2 BE + 2 EN. est differentia inter 2 ED. & 2 EN. scilicet dupla dif-

differentiæ ſſ. ED. & EN. Ergo differentia ſſ. ED. EN. eſt ſemidifferentia inter ſſ. DA. DB. & NA. NB.

Conuerſa liquet. Si enim differentia inter ſſ DA. DB. & NA. NB. ſit differentia inter 2 ED. & 2 EN. nulla erit differentia inter ſſ. 2 EA. & 2 EB. Ergo erunt ſemibaſes, & baſes æquales. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XII.

SI plura Triangula habeant æqualem ſummam ſſ. ſſ. ex duobus lateribus collectam: differentia ſſ ex biſecantibus baſes, æqualis eſt differentiæ ſſ ſſ. ex ſemibaſibus, & èconuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SInt Triangula ABD. GHO. & ſumma ſſ. ſſ. DA. DB. æqualis ſummæ ſſ. ſſ OG. OH. Dico differentiam inter ſſ. ED. EN. æqualem eſſe differentiæ inter ſſ. EG. EA. & *èccontra* ſi iſtæ differētiæ ſint æquales. Dico etiam prædictas ſummas eſſe inter ſe æquales.

DEMONSTRATIO.

CVm enim ſſ. ſſ. DA. DB æquales ſint 2 AE + 2 ED (60. M. 1.) & OG. OH. æquales 2 EG + 2 EO. æquales etiam erunt 2 AE + 2 EB. ipſis 2 EG + 2 EO. Ergo quantum 2 EG. ſuperant 2 AE. tantum 2 ED. ſuperabunt 2 EO. Ergo eadem

dem est etiam differentia inter ff.ff. EG. EA quæ inter ff.ff. ED. EO.

E contra verò si eadem sit differentia inter ff. EG. EA. quæ inter ff. ED. EO. erunt ff.ff. 2EG + 2EO. æquales 2EA + 2ED. Ergo cũ OG. OH. æquales sint 2EG + 2EO. & DA. DB. æquales 2EA + 2ED. erunt OG. OH. æquales DA. DB.

PROPOSITIO XIII.

SI duo Triangula habeant æqualem summã ff. ex omnibus lateribus, erunt 3. figuræ ex semibasi unius cum simili figura ex bisecante æquales 3. figuris ex semibase alterius cum simili figura ex bisecante: & differentia ff. ff. ex bisecantibus tripla est differentiæ ff. ff. ex semibasibus.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SInt Triangula ABD. GOH. & summa ff.ff. AB. BD. DA. æqualis summæ ff.ff. GH. HO. OG. & DE. bisecet basim AB. & OE. basim GH. Dico 3 ff.ff. AE + ED. æquales esse 3 ff.ff. EG + EO. & differentiam ff.ff. ED. & EO. triplam esse differentiæ ff.ff. EA. & EG.

DEMONSTRATIO.

CVm figuræ DA. DB. æquales sint 2AE + 2ED (60. M. 1.) & AB. æqualis quatuor AE (3. *l.* 2.) erunt ff. AB. BD. DA. æquales 6 ff. AE + 2ED. similiter ff. GH. HO. OG. æquales

6 ff.

6ff. EG + 2EO. Ergo cũ AB. BD. DA. sint æquales GH. HO. OG. erunt 6AE + 2ED. æquales 6EG + 2EO. Ergo etiam 3AE + ED. æquales 3EG + EO. Ergo & differentia inter ED. & EO. eadem quæ inter 3EG. & 3AE. & tripla quæ inter EG. & EO. Quod, &c.

PROPOSITIO XIV.

SI intra angulum fuerit datum punctum, recta, quæ per illud ducitur bifariam diuisa, secat Triangulum omnium minimum eorum, quæ per tale punctum secari possunt.

EXPOSITIO. Fig. 4.

SIt angulus ACB. & intra illum sit datum pũctum D. & ducatur FB. transiens per D. quæ sit in D. bifariam secta. Dico Triangulũ GFC. esse omnium minimum eorum, quæ fieri possunt qualibet recta per datum punctũ D. transeunte.

DEMONSTRATIO.

DVcatur quælibet RDS. & fiat GT. parallela AC quæ cadet extra angulum, & Triangula RDF. TDG erunt æquiangula, & proportionalia (2. *l.* 6.) Ergo vt GD. est æqualis FD. ita TD. erit æqualis RD. & Triangula RDF. TDG. omninò æqualia (4. *l.* 1.) Ergo cum DSG. minus sit quàm DTG. etiam erit minus quàm

C RDF.

RDF. & addito communi ECSD, erit △ GFC. minus quàm △ RSC. Ergo cum hoc semper demonstretur, erit △ GFC. omnium minimū. Quod, &c.

PROPOSITIO XV.

SI ex dato intra angulum puncto ducatur lateri parallela, quæ per idem punctum ducta facit æqualia intersegmenta, est bifariam diuisa, & secat triangulum minimum: & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 4.

INtra angulum ACB. datum sit punctum D. per quod ducatur DL. parallela lateri BC. vel DE. parallela lateri AC. deinde si CL. LF. æqualia intersegmenta sint, vel CE. EG. Dico rectam FDG. vel GDF. esse bifariam diuisam, & secare triangulum minimum.

DEMONSTRATIO.

CVm enim DL. & GC. parallelæ sint, erunt triangula GFC. DFL. similia (2. *l.* 6.) Ergo vt FL. ad LC. ita FD. ad DG. sed FL. est æqualis LC. ex hypothesi: Ergo etiam FD. æqualis erit DG (2. *l.* 5.) Eadem ratione cum FC. DE. sint parallelæ, vt GE. est æqualis EC. ita GD. erit æqualis DF. Ergo cum GF. sit bifariam secta in D. erit triangulum GFC. minimum (14. *p.*) Vnde etiam *conuersa* liquet. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SI ex dato intra angulum puncto ducantur rectæ lateribus parallelæ, quæ per idem punctum ducitur, sectionibus laterum parallela, est bifariam diuisa, & secat triangulum minimum: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 4.

INtra angulum ACB. datum est punctum D. ex quo ductæ sint DL. DE. lateribus parallelæ, & FDB. sectionibus laterum LE. parallela sit. Dico FDB. esse bifariam diuisam in D. & secare triangulum minimum: & *è contra*.

DEMONSTRATIO.

CVm FC. DE. sint parallelæ, tum DL. BC. & sectionum LE. FB. est FE. parallelogrammum, & latera opposita FL. DE. æqualia sunt (7. *l*. 1.) & Triangula LFD. EDB. æquiangula, & latera proportionalia (2. *l*. 6.) Ergo vt LF. ad FD. ita ED. ad DB. & alternando vt FL. est æqualis BD. ita FD. æqualis erit DG. (4. *l*. 5.) Ergo est FB diuisa bifariam in D. Ergo secat triangulum minimum (14. *p*.)

Conuersa liquet ex triangulorum analogia.

PROPOSITIO XVII.

SI recta secet triangulum minimum per datum intra angulum punctum, & quælibet aliæ per idem punctum transeant, quæ illi proximior est, secat triangulum minus, quàm remotior: & ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 4.

INtra angulum ACB. datum sit punctum D. & recta GDF. secet triangulum minimum. Transeat etiā per D. rectæ RS. HK. Dico Triangulum RSC. minus esse triangulo HCK. & è *conuerso* si illud minus sit. Dico RS. proximiorem esse ipsi FDG. quàm recta HDK.

DEMONSTRATIO.

CVm RD. DT. sint æquales, & DS. sit minor DT. erit etiam minor quàm DR. Ergo ducta RI. parallela CB. erit DK. minor DI (*2. l. 6.*) & triangulum DSK. minus quàm △ DRI. Ergo etiam minus quàm DRH. Ergo addito cōmuni spatio RDKC. erit △ RSC. minus quàm △ HKC.

Conuersa patet, quoniam si triangulum maius non fieret linea remotiore; linea proximior non secaret △ minus contra id quod nuper demonstratum est.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

SI per datum in angulo punctum recta bifariam secta sit, per quod alia qualibet secet latera data Triangulorum ratione datur ratio laterum: & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 5.

SIt angulus ACB. & punctum datum F. & recta AFD. bisecta in F. per quod trãseat quælibet alia recta EFB. secans anguli latera in E. & B. dataque sit ratio trianguli ADC. ad △ EBC. vt SX. ad SZ. Dico datã esse rationẽ laterum, nempè CD. ad CB. & CA. ad CE. & *èconuerso* data laterum ratione, triangulorum rationem datam pariter esse. Si enim fiat ZR. media inter ZX. & ZS. Dico CD. ad CB. esse vt SR. ad SZ. & CA. ad CE. vt SX. ad SR.

DEMONSTRATIO.

CVm in △ ACD. minus sit quàm ECB (14. *p.*) est SX. minor quàm SX (3. *l.* 5.) Ducatur ergo DG. parallela ipsi AC. & quia AF. FD. supponuntur æquales, erit etiam EF. æqualis FG. (2. *l.* 6.) & triãgula AEF. DGF. æqualia (4. *l.* 1.) tum etiam BEC. BGD æquiangula, & similia (2. *l.* 6.) Ergo erit △BEC. ad △BGD. in duplicata ratione BC. ad BD (4. *l.* 6.) Deinde cum triangula AEF. DGF. sint æqualia addito communimuni E F D C erit trapezium EGDC æquale △ADC. sed △ADC. ad △EBC. est vt SX. ad SZ. ex hypothesi: Ergo ▭ EGDC. ad △EBC. est vt SX. ad SZ. (2. *l.* 5.) Ergo & invertẽdo totum △EBC. ad sui partem ▭ EGDC. erit vt tota SZ. ad sui partem SX (4. *l.* 5.) Ergo etiam totũ △EBC. ad residuum △ DGB. erit vt tota SZ ad residuũ XZ. (5. *l.* 5.) sed △EBC. ad △DBC. est in duplicata ratione CB. ad BD (4. *l.* 6.) Ergo ratio SZ. ad XZ. est duplicata rationis CB ad BD (1. *l.* 5) sed etiam ratio ZS. ad ZX. est duplicata rationis ZS. ad ZR. cum ex constructione continuæ sint ZS. ZR. ZX. Ergo ratio ZS. ad ZR. æqualis, vel similis est rationi laterum BC. ad BD (1. *l.* 5.) Ergo BC. ad CD. erit vt ZS. ad SR. Quod erat, &c.

Insuper cum sint tres quantitates SZ. SR. SX. est ratio SZ. ad SX. composita ex ratione SZ. ad SR. & ex ratione SR. ad SX (21. *P*) Similiter cũ triangula BCE. DCA. habeant æqualem angulum, vel communẽ C. ratio △BCE. ad △ DCA. cõposita est ex ratione BC. ad CD. & ex ratione EC. ad CA. (1. *l.* 6.) Ergo cùm ratio △ B C E. ad △ D C A. est ipsa ratio SZ. ad SX. & ratio BC. ad CD. demonstrata est eadẽ ac ratio SZ. ad SR. remanebit ratio CE. ad CA. eadẽ ac ratio SR. ad SZ (1. *l.* 5.) Quod erat, &c.

Econ-

E conuerso autem, si data sit ratio CB. ad CD. vt SZ. ad SR. & CE. ad CA. vt SR. ad SX. cum △ EBC ad △ ADC. habeat rationem compositam ex ratione CB. ad CD. & ex ratione CE. ad CA (1. *l*.6.) & ratio SZ. ad SX. ex similibus etiam composita sit, nempè ex ratione SZ. ad SR. & ex ratione SR. ad SX. cōpositæ ex æqualibus æquales erunt, nempè ratio △ EBC. ad △ ADC. & ratio SZ. ad SX. (1. *l*.5.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

IN quolibet triangulo si per centrum ff. ss. ducantur tres rectæ lateribus parallelæ secantur ab angulis oppositis triangula minima.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Triangulum ABC. & *centrum ff. ss.* O. & HOI. sit parallela lateri AB. Dico Triangulum HIC. esse minimum eorum quæ ab angulo C. per O. secari possunt. Similiter si KL. sit BC. parallela, & NM. ipsi AC. erunt triangula KLA. MNB. minima.

DEMONSTRATIO.

DVcta COF. bisecabit basim in F (1. *p*.) & cũ HOI. sit parallela AFB. erit vt CF. ad FA. id est ad FB. ita CO. ad OH. (2. *l*.6.) Sed etiam vt CF. ad FB. ita CO. ad OI. Ergo cum CO. eandem

dem habeat rationem ad OH. & ad OI. erunt istæ æquales (2.*l*.5.) Ergo cum HI. sit bifariã diuisa in O. erit HIC. triangulum minimum (14.*p*.) Similiter demonstrabitur KL. esse bifariam diuisam in O. & triangulum KLA. esse minimum anguli A. & MNB. esse minimum anguli B. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XX.

TRiangula minima per centrum ff. ss. cuiuslibet trianguli secta, similia sunt inter se, & omninò æqualia.

EXPOSITIO. Fig. I.

IN Triangulo ABC. rectæ HI. KL. MN. secant per *centrum ff. ss.* O. triangula minima. Dico illa esse inter se similia, & omninò æqualia.

DEMONSTRATIO.

CVm rectæ AB. HI. sint parallelæ (19.*p*.) est triangulum HIC. simile △ACB (2.*l*.6) Similiter KLA. ipsi CBA. & MNB. ipsi ACB. Ergo omnia sunt inter se similia (4 *l*.6.) Deindè cum latera trifariam secta sint in H.K. in N.L. in M. I. æquales rectæ erunt AK. HC. & AL. NB. & BM. IC. Ergo cum triãgula similia habeant latera proportionalia, quæ habent vnũ latus æquale, reliqua latera æqualia habebunt (2.

(2.*l*.6.) Ergo congruent, & erunt omninò inter se æqualia (4 *l*.1.)

CONSECTARIVM.

Nouem triangula AON. NOL. LOB. &c. æqualia sunt (1.l.6.) sicut etiam trapezia HOMC. HOL. LOM. KON. NOI. IOK. ex tribus æqualibus triangulis composita.

PROPOSITIO. XXI.

RECta, quæ per datum punctum efficit triangulum minimum secat triangulum in maxima ratione, quæ ratio per centrum ff. ss. est ut 5. ad 4.

EXPOSITIO. Fig. 6.

IN Triangulo ABC. sit datum punctum O. & GOH. secet triangulum minimum. Dico GH. secare △ ABC. per O. in maxima ratione, & si O. sit centrum *ff. ss.* esse ut 5. ad 4.

DEMONSTRATIO.

PEr datum punctum O. ducatur quælibet alia IOK. erit △ IKC. maius quam △ GHC. (14.*p*.) Ergo ⏢ AIKB minus est quam ⏢ AGHB. Ergo ratio ⏢ AGHB ad △ GHC. minimum maior erit, quam ratio ⏢ AIKB ad maius △ IKC. (3.*l*.9.)

Præterea si *centrum* O. sit *centrum* *ff. ss.* GOH secans △ GHC minimum per O [illegible] lela (19 p.) Ergo AG. erit tertia pars ipsius CA (1. p.) Ergo CA. ad CG. erit vt 3. ad 2. vel vt 9. ad 6. sed △ ABC. ad simile △ GHC. est in duplicata ratione CA. ad CG (4. l. 6.) Ergo cum sint continuæ 9. 6. 4 erit vt 9. ad 4. Ergo ▱ AGHB. ad △ GHC. vt 5. ad 4. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXII.

IN quolibet Triangulo si punctum sit intra aliud triangulum bisecans latera, ex tribus angulis secantur triangula minima omnino intra triangulum.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN Triangulo ABC. inscriptum sit △ EFG. bisecans latera, in quo sumatur quodlibet punctum Z. Dico Triangula minima, quæ ex tribus angulis A. B. C. abscindi possunt, cadere omninò intra △ ABC.

DEMONSTRATIO.

DVcantur per punctum Z. rectæ LK. HI. lateribus AC. AB. parallelæ, & sumpta HP. æquali AH, & LQ. ipsi AL. recta PQ. secabit per Z. triangulum minimum PQA. ex angulo A. (15. p.) Ergo cum punctum Z. sit inter parallelas EG. AB. parallela HZI. erit etiam inter ipsas: similiter KZL. erit inter AC. FG. Ergo cum AE. EG. sint æquales, tum AH. HP. & istæ

mi-

minores quam AE. EC. cadet P. infra C. & similiter cum AL. LQ. minores sint quam AF. FB. cadet Q. inter A. & B. Ergo tota PQ. & totum △PQA. quod est minimum anguli A. cadet intra triangulum CBA.

Præterea ductis per Z. rectis HI. MN. parallelis BA. BC. sumantur æquales BI. BR. cum BN. BS. & ducta RZS. erit △RSB. minimum anguli B. (15. p.) & quia Z. est infra EG. erunt BI. IR. minores quam BG. BC. Ergo cadet R. inter B. C & quia Z. est inter EF. BC. erunt BN. NS. minores quam BF. FA. Ergo etiam S. cadet inter A. & B. Ergo tota recta SR. cadet infra △ABC. & △RSB. minimum anguli B. cadet etiam intra △ABC. Idemque demonstrabitur de triangulo minimo anguli C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

PER quodlibet punctum bisecantis basim, recta basi parallela secat triangulum minimum.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN △ABC recta CF. bisecat basim, & in illa sumatur quodlibet punctum Z. Dico rectam HZI. basi AB. parallelam secare triangulum minimum.

DEMONSTRATIO.

CVm CF. diuidat bifariam HI. in Z. sicut AB. in F. (2. *l.* 6.) erit △ HIC. minimum (14. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXIV.

PER quodlibet punctum rectæ bisecantis basim abscinduntur ex angulis supra basim duo triangula minima inter se æqualia.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN Triangulo ABC. recta CF. bisecet latus oppositum AB. & in illa sumatur quodlibet punctum Z. per quod abscindantur triangula minima, scilicet △ PAQ. ex angulo A. & △ RBS. ex angulo B. Dico illa triangula esse inter se æqualia.

DEMONSTRATIO.

DVcatur recta HZI. basi AB. parallela, & cũ △ AQP. sit minimũ, erunt HA. HP. æquales (15. *p.*) & etiam IB. IR. Ergo cùm sit RI. ad IB. vt PH. ad HA. erunt PR. HI. AB. parallelæ (2. *l.* 6.) & cum CF. diuidat bifariam AB. similiter diuidit HI. PR. & etiam SQ. (2. *l.* 6.) Ergo si æqualibus SF. FQ. addantur æquales BF. FA. æquales erunt AQ. SB. Ergo cùm triangula AQP. SBR. habeant æquales bases AQ. SB. inter

ter parallelas AB. PR. erunt æqualia (1. l. 6.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

IN triangulo si extra inscriptum simile sumatur quodlibet punctum, vnum ex triangulis minimis cadet totum intra, reliqua verò duo cadent extra triangulum.

EXPOSITIO. Fig. 8.

TRiangulo ABC. inscriptum sit aliud simile EFG. bisecans latera, extra quod sumatur quodlibet punctum Z. intra aream trianguli ABC. Dico vnum ex triangulis minimis, scilicet ΔHIC. quod est minimum anguli C. cadere totum intra ΔABC. reliqua verò SRB. XVA, quæ sunt angulorũ B. & A. cadere partim extra.

DEMONSTRATIO.

DVcantur per Z. rectæ HI. KL. MN. lateribus parellelæ: cùm punctum Z. sit supra EG. bisecantem latera CA. CB. comprehendentia angulum C. erunt CM. CK. minores quàm CE CG. Ergo earumdem duplæ CP. CQ. minores erunt quàm latera CA. CB. & tota PQ. secans triangulum PQC. minimum anguli C. (15. p.) cadet intra triangulum ABC.

Vice versa, quia punctum Z. est supra EG.

bi-

bisecantem latera, erit BI. maior quàm BG. Ergo si sumatur IR. æqualis BI. cadet R. extra C. & triangulum RZC. erit minimum (15. *p.*) quod partim cadet extra triangulum ABC.

Similiter cum AH. sit maior quàm AE. si fiant æquales AH. HV. cadet punctum V. extra triangulum ABC. & △ AVX. minimum anguli A. (15. *p.*) cadet partim extra △ ABC. Quod erat demonstrandum.

CONSECTARIVM.

TRiangula minima à tribus angulis secta, vel cadunt omnia intra triangulum, vel vnum tantum, nunquàm verò duo; quoniam vel punctum assumptum est intra triãgulum inscriptum, & tunc omnia triangula minima cadunt intra ex 22. *p.* vel extra inscriptum, & tunc duo minima cadunt necessariò partim extra.

PROPOSITIO XXVI.

REcta per datum in triangulo punctum lateri parallela determinat rationem minimorum ad angulos lateri conterminos.

EXPOSITIO. Fig. 8.

IN triangulo ABC. sit assumptum punctum Z. per quod recta MN. sit lateri BC. parallela: & △ PQC. sit minimum anguli C. & SBR.

mi-

minimum anguli B. Dico △PQC. ad △SBR. esse vt MZ. ad ZN.

DEMONSTRATIO.

CVm sint æquales SZ. ZR. tum SN. NB. & BI. IC. (15. *p.*) △SBR. habet duplam basim, & altitudinem parallelogrammi ZB. & est ipsius duplum (8. l. 1.) Similiter △CPQ. est duplum ▭ ZC. Ergo △SBR. ad △CPQ. est vt ▭ ZB. ad ▭ ZC (5. *l.* 5.) sed ▭ ZB. ad ▭ ZC. est vt basis ZN. ad ZM. cum sint inter parallelas CB. MN. (1. *l* 6) Ergo △SBR. ad △CQP. est vt NZ. ad ZM. (1. *l.* 5.) Quod, &c.

Similiter △AXV. ad △CQP. erit vt LZ. ad ZK. & △AXV. ad △SBR. vt HZ. ad ZI. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVIII.

TRapezia facta rectis à centro ∬. ∬. ductis in dimidia latera, determinant triangulum omnium minimum per datum punctum.

EXPOSITIO. Fig. 8.

IN triangulo ABC. est O. *centrum* ∬. ∬. & OE. OF. OG. bisecant latera, & punctum Z. est in trapezio EOGC. quod pertinet ad angulum C. Dico △PQC. scilicet minimum anguli C. esse omnium minimum.

DEMONSTRATIO.

CVm enim recta MZN. lateri BC. parallela diuidatur bifariam recta AOG. in Y. (2. *l.* 6.) erit MZ. minor quàm ZN. sed △PQC. est ad △SBR. vt MZ. ZN. (26. *p.*) Ergo △PQC. minus est quam △SBR. Similiter demonstrabitur recta KZ. minor quàm ZX. & △CQP. minus quàm △AXV. Ergo △CQP. est absolutè omnium minimum per Z. Quod erat, &c.

CONSECTARIVM.

SI Z. fuerit in OE. vel OF. vel OG. erunt duo absolutè minima, & inter se æqualia. Si verò punctum fuerit O. erunt tria absolutè minima, & æqualia.

PROPOSITIO XXVIII.

IN quolibet Triangulo si duæ rectæ ex angulis secant latera opposita, vel se ipsas in eadem ratione, earum intersectio est centrum ff. dd. quarum duæ sunt similes, & tertia dissimilis.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SIt △ABC. & rectæ AG. BE. secent latera, vt CE. ad EA. sit veluti CG. ad GB. vel etiam AG. BE. se proportionaliter secent in O. & sit AO. ad OG. vt BO. ad OE. Dico intersectionem O. esse *centr. ff. dd.* quarũ similes sint quæ in A. & B. collocantur, & quæ in C. dissimilis.

DE-

DEMONSTRATIO.

1. Constituatur supra EC. quadratum EC. & supra EA. rectangulum AEC cum sint parallelogramma dissimilia æquè alta erunt minima (10. M. 1.) Ergo pũctum E. erit *centr. ff. dd* ad A & C. (35. M. 1.) sed latus BC. diuisum est in eadem ratione ex *hypoth.* Ergo recta BC. diuisa etiam erit in figuras minimas similes □ EC. & ▭ AEC (30. M. 1.) Ergo etiam punctũ G. erit *centr. ff. dd.* ad B. & C. (35. M. 1.) sed cum E. sit *centr. ff.* ad A. & C. ducta EB erit in illa *centrum ff.* ad A. C. B. (61. M. 1.) & etiam quia G. est *centrum ff.* ad C. & B. ducta GA. erit in illa *centr ff* ad C. B. A. (61. M. 1.) Igitur cùm *centrum* ad tria puncta A. B. C demonstratum sit in vtraque recta EB. & GA. erit in earum sectione O. Quod erat, &c.

2. Si rectæ AG & BE. se proportionaliter secent in O. secabunt etiam proportionaliter latera (3. *l.* 6.) Ergo demonstrabitur omninò idem quod in præcedenti *num.* Quod erat &c.

PROPOSITIO XXIX.

IN quolibet triãgulo si rectæ ex angulis secant latera, vel seipsas in eadem ratione, earum intersectio est in bisecante basim ex vertice.

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN △ ABC. rectæ AG. BE. secant proportionaliter latera, & ipsæ intersecantur in O. recta autem CF. secat bifariam basim AB. Dico igitur intersectionem O. esse in bisecante CF. vel rectam CF. transire per O. & rectam CO. transire per F. & FO. transire per C. Si autem AG. & BE. secantur invicem proportionaliter idem omninò erit.

DEMONSTRATIO.

1. CVm AG. & BE. secent proportionaliter latera, est O. *centr. ff. dd.* quarum A. & B. similes sunt (28. *p*) Ergo diuisa AB. bifariam in F. erit F. *centr. ff. ff.* ad A & B. (35. M. 1.) Ergo ducta FC. in ea erit *centr. ff.* ad A. BC. (61. M. 1.) sed punctum O. est *centrum* ad A. B. C. quarum duæ A. & B. sint similes, & tertia C. dissimilis (28. *p*) Ergo recta CF. bisecans basim, transit per intersectionem O Ergo pariter cum eadem sit linea COF. FOC. recta CO. transibit per F. & recta FO. transibit per C. sicut FC. trãsibit per O. Quod erat, &c.

Si

Si autem AG. & BE. secantur invicem in eadem ratione, secabunt etiam proportionaliter latera (3. *l.* 6.) Ergo eadem omninò erit demonstratio; vt antea. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXX.

INtra triangulum nullum datur punctum, per quod omnes rectæ ab angulis proportionaliter secent latera, & basim, præter centrum ff ss, per quod basim, & latera bifariam secant.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SIt △ABC. & Z. sit *centr. ff. ss.* Dico nullum aliud pūctū dari præter Z per quod rectæ ex angulis ductæ secent latera, & basim in eadem ratione.

DEMONSTRATIO.

SInt latera CA. CB. in quacumque eadem ratione diuisa in E & G. & ducantur BE. AG. se intersecantes in O. ducta CO. bifariam diuidet basim AB. in F. (29. *p.*) Cùm autem hoc semper de quacumque ratione demonstretur, nunquàm latera in eadem cum basi ratione secari poterunt, nisi bifariam secentur. Ergo si latera sint bifariam secta communis rectarum sectio erit *centr. ff. ss.* (2. *p.*) Ergo extra *centrum ff. ss.* nullum est punctum per quod posſint latera in eadem ratione ſecari. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXXI.

IN quolibet triangulo ſi per quodvis punctum biſecantis baſim ducantur rectæ ab angulis, ſecabunt latera, & ſe ipſas proportionaliter intra, vel extra ipſum triangulum.

2. *Et punctum aſſumptum intra Triangulum eſt centr. ſſ. dd prout in propoſitione 28.*

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN △ ABC. recta KCF. per angulum verticalem biſecat baſim in F. Si ergo in recta FK. ſumatur quodvis punctum O. intra triangulū, vel K. extra ipſum, & ducantur BOE AOG. vel BK. & AK. Dico habere eandem rationē CG. ad GB. vt CE. ad EA. tum GO. ad OA. vt EO. ad OB. vel BK. ad KI. vt AK. ad KH. & HC. ad CB. vt IC. ad CA. 2. Dico punctum aſſumptum O. intra △. eſſe *centr. ſſ. dd.* prout in 28. *p.*

DEMONSTRATIO.

CVm enim AB. ſit bifariam diuiſa in F. erit F. *centrum ſſ ſſ.* ad A. & B. (35. M. 1.) Ergo in recta FC. erit *centrum* ad ▭ A. & ▭ B. & □ C. (61. M. 1.) quorū ſimilia ſunt ▭ A. & ▭ B. Ducta igitur BOE. ſi conſtituatur ſuper EC. quadratum minimum rectangulo ▭ AEC. erit E.

cen-

centr. ff. dd. ad ▭ A. & □ C. (35. M. 1.) Ergo in recta EB. erit *cẽtr. ff.* ad ▭ A. □ C. ▭ B (61. M. 1.) igitur cùm idem *centrum* demonstratum sit etiam in recta CF. erit in earum intersectione O. Ergo si ex A. per O. quod est *centrum* ad A. B C ducatur AOG. transibit hæc per *centrum ff* B. & C. (61. M. 1.) Ergo cùm *centrum* ad B. & C. sit in recta BC. (34. M. 1.) & etiam in recta AOG. erit in earum intersectione G. vnde punctum G. erit *centr. ff.* ad B. & C. nempè ad □ C. & ▭ B. (35. M. 1.) igitur cum ▭ A. & ▭ B. similia demonstrata sint, & etiam quodvis □ C. cuilibet alteri □ C. erit recta AC. diuisa in figuras minimas similes minimis, in quas diuisa est recta BC. Ergo erit AE. ad EC. vt BG. ad GC. (30. M. 1.) Quod, &c.

Insuper cum AG. & BE. proportionaliter secent latera, se ipsas etiam proportionaliter secant (3. *l.* 6.) Ergo etiam AO. ad OG. est vt BO. ad OE. Quod, &c.

Hoc vltimum etiam hac ratione demonstrari potest. Cùm O. demonstratum sit *centrum ff.* ad ▭ A. ▭ B. □ C. & E. *centrum ff.* ad ▭ A. & □ C. & G. *centr. ff.* ad ▭ B. & □ C erit recta GA. secta in O. ita vt duæ figuræ GO. similes C. & B. minimæ sint ad ▭ A. & pariter recta EB. secta erit in O. vt duæ figuræ EO. similes C.

&

& A.vel C. & B.(cum ▭A.&▭B.similia ostensa sint) minimæ sint ad ▭B. (62.M.1.) Ergo recta GA. secta est in figuras minimas similes minimis, in quas secta est EB. igitur AG & EB. sunt proportionaliter sectæ in O. (30. M. 1.) vnde A O. ad OG. erit vt BO. ad OE. Quod &c.

Tandem si punctum assumptum sit extra triangulum, nempè K. fiet △ABK. Ergo cum intra △ABK sit punctum C. in recta KF. bisecante basim, si latera AC.BC. continuentur in I.& H secabunt proportionaliter noua latera AK.BK. vt antea demonstratum est, & etiam AI.& BH. erunt proportionaliter sectæ in C. Ergo AC. ad CI. erit vt BC. ad BH. & AH. ad HK. vt BI. ad IK. & componēdo vt AK. ad KH. vt BK. ad KI. Quod erat demonstrandum.

2. Secunda Propositionis pars constat ex præcedenti. Quoniam punctum O. itra △ ABC. sumptum, demonstratum est *centr. ff.* ad rectāgula similia ▭A. ▭B. & ad dissimile □ C. vnde punctum O. erit *centr. ff. dd.* quarum duæ similes sint, & tertia dissimilis prout in *prop.* 28. Quod erat, &c.

CONSECTARIVM.

SI ex terminis basis alicuius trianguli duæ rectæ ducendæ sint ad latera, continuata si opus fuerit,

rit, quæ rectæ debeant proportionaliter secare latera, vel seipsas; locus intersectionis erit recta bisecans trianguli basim continuata, si opus fuerit, vel supra verticem, vel infra basim.

PROPOSITIO XXXII.

IN quolibet Triangulo si recta per verticem bisecat basim, & alia vtcumque secat latus ex angulo opposito; segmenta istius sunt inter se, vt totum latus ad superius segmentum eiusdem: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN triangulo ABC. recta CF. secat bifariam basim CB. in F. & recta AOG. secat latus in G. & bisecantem in O. Dico segmentum AO. ad segmentum OG. esse vt totum latus BC. ad superius segmentum CG. & *è conuerso* si AO. ad OG. fuerit vt BC. ad CG. Dico rectam COF. secare bifariam basim.

DEMONSTRATIO.

FIat vt BG. ad GC. ita GC. ad CX. & componendo erit vt BC. ad CG. ita GX. ad CX. & alternando vt BC. ad GX. ita CG. ad CX (3. l. 5.) Ergo rectangulum BC. GX. ex antecedenti, & cõsequenti simile est rectangulo GCX. ex alio antecedenti, & consequenti, quod est simile rectangulo BG. GC. propter eandem rationẽ: sed

sed ▭ BC.GX. minimum est ipsi □ GC + ▭ GCX. cùm illius altitudo GX. æqualis est altitudinibus GC + CX (10. M. 1.) Ergo cùm G. sit *centr. ff. dd.* ad B.C. (35. M. 1.) in recta GA. est *centr. ff.* ad ▭ A ▭ B □ C. (61 M. 1.) & cum punctum O. sit tale *centr. ff.* ad A.B.C. (31. *p.*) erit recta GA. diuisa in O. in figuras minimas, ita vt □ GO + ▭ GO. simile ▭ BGC. minima sint ▭ OA simili etiam ▭ B. (62. M 1.) Ergo recta GA. diuisa est in figuras minimas puncto O. sicut recta BC. puncto C. Ergo sunt proportionales GO. ad OA. vt CG. ad CB (30. M. 1.) Ergo invertendo erit AO. ad OG vt BC. ad CG (4. *l.* 5.) Quod erat demonstrandum.

E conuersò. Si AO ad OG. est vt BC. ad CG. ducatur CF. bisecans basim in F. & rectam AG. in *o.* eritque A*o.* ad *o*G. vt BC ad CG. sed etiam AO. ad OG. est BC. ad CG Ergo punctum *o.* est ipsum O. datum: Ergo recta COF. est ipsa quæ bisecat basim. Quod erat demonstr.

CONSECTARIVM
Pro duabus Medijs, & Trisectione.

CVm sint proportionales AO. ad OG. vt BC. ad CG, erit ▭ AO. CG. æq. ▭ OG. BC. (1. *l.* 6) Si dato angulo BCF. & puncto A. ducatur recta AOG. vt ▭ AO. CG. æquale sit dato spatio, duci poterit etiam AOG. vt OG. sit æqualis datæ

datæ rectæ; vnde Trisectione anguli, & duæ Mediæ elici possent.

PROPOSITIO XXXIII.

IN quolibet triangulo si recta per verticem bifariam secat basim, & alia secat vtcumque latus ex angulo opposito, segmentum inferius bisecantis ad superius erit, vt segmentum inferius lateris ad duplum segmentum superius eiusdem lateris: & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN triangulo ABC. recta CF. bifariam secat basim AB. & recta BE. secat vtcumque latus AC. in E. & bisecantem CF. in O. Dico segmentum FO. ad OC. esse vt segmentum AE. ad duplũ segmenti EC. & *èconuerso* si FO. ad OC. fuerit vt AE. ad 2 EC. recta CF. diuidet bifariã basim AB. in F.

DEMONSTRATIO.

REctangulum AEC. minimum est quadrato EC. cum habeant æqualem altitudinem EC (10. M. 1.) Si ergo fiat CI. æqualis CE. habebit quadratum EI. duplam altitudinem rectanguli AEC. & erit □ EI. minimũ 2 ▭ AEC. (21. M. 1.) sed etiam cũ F. sit *centr. ff. ff.* ad A. B. & O. sit *centr. ff.* ad A. B. C. (28 *p.*) erit FC. secta in O. vt duo rectangula supra FO. similia datis AEC. BGC. inter se similibus, minima sint cum □ OC. (62. M. 1.) Ergo recta FC. diuisa est in O. in figuras minimas similes illis, in quas est diuisa recta AI. puncto E. Ergo proportionales sunt FO. ad OC. vt AE. ad EI. vel vt AE. ad 2 EC (30. M. 1.) Quod, &c.

E conuerso. Si FO. ad OC. fuerit vt AE. ad 2 EC. ducatur Cf. bisecans basim in f. & rectam BE. in o. Ergo erit fo. ad oC. vt AE. ad 2 EC. vel vt FO. ad OC. Ergo si CF. Cf. essent diuersæ lineæ, esset recta BE. parallela basi AB (2. l. 6.) Cum igitur BE. non sit basi parallela, non erunt CF. & Cf. diuersæ lineæ. Ergo cum CF. sit ipsa Cf. bisecabit CF. basim in F. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXXIV.

IN quolibet Triangulo si recta bisecet basim, & alia latus vtcumque, segmentum inferius illius ad superius, est vt differentia segmentorum istius ad duplum segmentum minus.

EXPOSITIO. Fig. 6.

IN Triangulo ABC. recta CF. secat bifariam basim, & ex angulo A. recta AG. secat vtcumque latus BC. in G. & bisecantem CG in O. facta OS. æquali OG. erit AS. differentia segmentorum AO. & OG. Dico ergo segmentum FO.

FO. ad segmentum OC. esse, vt AS. ad 2 SO. vel ad 2 OG. hoc est vt AS. ad SG.

DEMONSTRATIO.

QVoniã AO. ad OG. est vt BC. ad CG (32 *p*.) erit etiam diuidendo AO—OG. ad OG. vt BC—CG. ad CG. (4. *l*. 5.) hoc est AS. ad SO. vt BG. ad GC. Ergo etiam AS. ad 2 SO. vt BG. ad 2 GC. vel AS. ad SG. vt BG. ad 2 GC. sed etiã FO. ad OC. est vt BG. ad 2 GC (33. *p*.) Ergo FO. ad OC. est vt AS. differentia segmentorum ad SG. duplum segmenti OG. (1. l. 5.) Quod erat demonstrandum.

CONSECTARIVM.

IIsdem positis Recta bisecans basim ad segmentum superius est, vt recta secans latus ad duplũ sui segmenti minoris. Nempe FC. ad CO. vt AG. ad 2 GO. cùm enim sit AS. ad SG. vt FO. ad OC. erit AS+SG. ad SG. vt FO+OC. ad OC. (4. *l*. 5.) hoc est AG. ad SG. vt FC. ad CO. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXXV.

IN quolibet Triangulo si duæ rectæ ex angulis supra basim secant latera opposita dissimiliter, intersectio erit centrum ff. dd. ad tres angulos.

EXPOSITIO. Fig. 10.

REctæ AG. BE. secant dissimiliter latera.

Dico intersectionem O. esse *centrum ff. dd.* ad angulos A.B.C. nempè ad ▭ A. & ▭ B. dissimilia, & □ C.

DEMONSTRATIO.

CVm ▭ AEC & □ EC. habeant eandem altitudinem EC. erunt inter se minima (10. M. 1.) Similiter ▭ BGC. minimum est □ GC. Ergo E *centr. ff. dd.* erit ad A.C. & pariter G. ad B C. (35. M. 1.) Ergo si ducatur EB. ad tertium punctum B. in ea erit *centr. ff.* ad A. C. B. & similiter si ducatur G A. ad punctum A. in ea erit *centr. ff.* ad B C. A (61. M. 1.) Ergo intersectio O. erit *centr ff* ad A. B. C. quarum scilicèt OC. similis sit □ EC. vel GC. & ▭ OA. simile ▭ AEC. & ▭ OB. simile ▭ BGC. sed omnes dictæ figuræ sunt inter se dissimiles cum rectangulorum latera non sint proportionalia; etenim BG. ad GC. non est vt AE. ad EC. ex hypothesi: & vtrumque rectangulum est quadrato dissimile. Ergo pūctum O. est *centrum ff. dd.* Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

SI ex angulis supra basim cuiusvis Trianguli ducantur rectæ vtcumque secantes latera, & ex vertice per intersectionem alia secans basim.

Basis secatur in figuras minimas, vel in bases minimas rectangulorum similium illis, quæ ex laterum segmentis fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 10.

IN △ ABC. rectæ AG. BE. secant vtcumque latera, & se intersecāt in O. si ducātur COF. Dico basim AB. sectam esse puncto F. in figuras minimas similes rectangulis AEC. & BGC. quæ ex laterum segmentis fiunt.

DEMONSTRATIO.

PVnctum O. est *centrum ff.dd.* quæ similes sint rectangulis AEC. & BGC. & quadrato EC. vel GC. (35.*p.*) Ergo recta COF. transit per F. *centr. ff.dd.* ad A. & B. (61. M. 1.) Ergo cùm pūctum F. sit *centr. ff.dd.* ad A. & B. erit AB. secta in figuras minimas similes rectangulis AEC. & BGC. (34. M. 1.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Isdem positis, quæ in antecedenti, segmenta basis ad eandem altitudinem eandem habet rationem, quam segmenta laterum conterminorum inter se.

EXPOSITIO. Fig. 10.

IN △ABC. ductis vtcũque AG. BE. ac COF. si fiat vt AE. ad EC. ita AF. ad suam altitudinem Z. Dico etiam esse vt BG. ad GC. ita BF. ad eandem altitudinem Z.

DEMONSTRATIO.

CVm rectangula, supra AF. & BE. minima sint (36. *p.*) habebunt æqualem altitudinem, nempe Z (10. M. 1.) sed ▭ AFZ. simile est ▭ AEC. & ▭ BFZ. simile est ▭ BGC (36. *p.*) Ergo erunt latera proportionalia AF. ad Z. vt AE. ad EC. & BF. ad Z. vt BG. ad GC. (22. *P.*) Quod erat &c.

CONSECTARIVM.

Si latera sint proportionaliter secta, basis erit bifariam diuisa.

Quoniam si AE. ad EC. supponitur vt BG. ad GC. & AF. ad Z. est vt AE. ad EC. tum BF. ad Z. vt BG. ad GC. ex præsenti. Ergo erit AF. ad Z. vt BF. ad Z (11. *l.* 5.) & cum AF. & BF. habeant eandem rationem ad eadem Z. æquales erunt

(2.

(2.l.5.) Hoc consectarium est ipsa prop. 29. ex hac prop. 37. facilius demonstrata.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si fuerint tres rectæ, & cuiusvis trianguli latus ex termino basis secatur vt secunda ad primam, & alterum latus vt secunda ad tertiã recta per verticem, & intersectionem ducta secabit basim ex eodem termino vt tertia ad primam, vel in duplicata ratione si tres rectæ sint cõtinuæ.

EXPOSITIO. Fig. 10.

Sint datæ rectæ P. R. Z. & datum triangulum ABC. Latus verò AC. sectum sit in E. vt AE. ad EC. sit veluti R. ad P. & latus BC. sectum sit in G. vt BG. ad GC. sit veluti R. ad Z. ductis AG. BE. & per intersectionem O. recta COF. Dico AF. ad FB. esse vt Z. ad P. vel BF. ad FA. vt P. ad Z. nempè in duplicata ratione P. ad R. si continuæ sint P. R. Z.

DEMONSTRATIO.

Fiat vt AE. ad EC. vel vt R. ad P. ita AF. ad Q. & erit vt BG. ad GC. vel vt R. ad Z. ita FB. ad eandem Q. (30. p.) Ergo rectangulum RQ. erit æquale ▭ P. AF. & etiam rectangulum RQ. æquale ▭ Z. FB. (1. l. 6.) Ergo etiam erit ▭ P. AF. æquale ▭ Z. FB. Ergo latera reciproca erunt proportionalia vt P. ad Z. ita FB. ad AF. (1. V. 6.)

&

& conuertendo AF. ad FB. est vt Z ad P. (a l. 5.) Vnde si continuæ sint Z. R. P. erit AF. ad FB. in duplicata ratione R. ad P. vel BG. ad BC. Quod erat, &c.

CONSECTARIVM.

SI P. & Z. sint æquales, erunt AF. FB. æquales, & AE. ad EC. vt BG. ad GC. quo demonstratur iterum propositio 29.

PROPOSITIO XXXIX.

IN quolibet Triangulo si duæ rectæ ex angulis secent vtcumque latera, & vtraque ratio sectionis laterum habeat idem antecedens, recta ex vertice ad basim per intersectionem secatur 1. vt antecedens ad summam consequentium. 2. Et basis secatur vt consequentes.

EXPOSITIO. Fig. 16.

IN △ ABC. rectæ BE. AG. secant latera vtcumque, & COF. per intersectionem O. ducta secat basim, si fiat vt BG. ad GC. ita AE ad CI. ratio segmentorum vnius lateris erit AE. ad EC. & ratio alterius AE. ad CI. & antecedens vtriusque est AE. consequentes verò EC. & CI. Dico igitur FO. ad OC. esse vt AE. ad EC + CI. & AF. ad FB. esse vt CI. ad CE.

DEMONSTRATIO.

QVadratum EI. habet altitudinem EC + CI: sed

sed duo rectangula AEC. AE.CI. habent etiã altitudinem EC+ CI. Ergo □ EI. minimum est □ AEC+□ AE. CI (10 M. 1.) & cum basis A B sit diuisa in rectangula minima similia AEC.&BGC. vel AE.CI. (36. *p.*) erit F. *centrum ff. dd.* quæ tamen similes sint □ AEC & □ AE CI (34. M. 1) Ergo cùm O. sit *centr ff. dd.* ad □ A □ B. & □ C. (35. *p.*) erit recta COF. ita diuisa in O. vt □ CO. minimum sit ad duo rectangula facta ex OF. similia ipsis □ AEC. & □ BGC. vel □ AECI. (62. M. 1.) Ergo CF. diuisa est in O. in similes figuras minimas, in quas est diuisa AI. puncto E. Ergo proportionales sunt vt AE. ad EI. ita FO. ad OC. (30. M 1.) Quod erat, &c.

2. Insuper quoniam CE. EA. CI. tres rectæ sunt, & AE. ad EC est vt secunda ad primã, & BG. ad GC. est vt EA. ad CI. ex hypothesi, nempè vt secunda ad tertiam, erit AF. ad FB. vt tertia ad primam, scilicèt vt CI. ad CE (38. *p.*) Ergo basis secatur vt consequentes Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLI.

SI in quolibet triangulo sumatur quodlibet punctum, & ducantur per illud rectæ ab angulis, in quouis alio triangulo datur simile punctum, per quod recta, basis, & latera similiter secantur.

Consect. *In quolibet △ datis rationibus segmentorum laterum, omnium segmentorum rationes datæ sunt.*

EXPOSITIO. Fig. 11.

IN triangulo HIK. sit assumptum punctum D. per quod ducantur HN. IL. KM. & datū sit quodlibet aliud △ A B C. Dico dari in eo pūctū O. per quod si ducātur AG. BE. CF. rectæ basis, & latera secantur similiter, vel prout in △HIK. si enim sit vt HL. ad LK. ita AE. ad EC. & iterum vt IN. ad NK. ita BG. ad GC. ductis AG BE. & per intersectionem O. ducta CF. pūctum O. erit simile D.

DEMONSTRATIO.

SIt enim vt Q ad P. ita HL. ad L K. & AE. ad EC. tum vt Q. ad R. ita IN. ad NK. & BG. ad GC. Ergo erunt vt R. ad P. ita HM. ad MI. & AF. ad FB (38. *p.*) Ergo HM. ad MI. erit vt AF. ad FB (1. *l* 5.) Similiter vt Q. ad P+R. ita MD. ad DK. & FO. ad OC. (39. *p.*) Ergo, &c. Insuper

quo-

quoniam vt P. ad Q. ita KL. ad LH. & CE. ad EA. & vt P. ad R. ita IM. ad MH. & BF. ad FA. erit vt P. ad Q + R. ita ND. ad DH. & GO. ad OA (39. *p.*) Tandem quia est vt R. ad P. ita HM. ad MI. & AF. ad FB. & vt R. ad Q. ita KN. ad NI. & CG. ad GB. erit vt R. ad P + Q. ita LD. ad DI. & EO. ad OB. (39. *p.*) Ergo in vtroque triangulo omnia similiter secta sunt. Quod, &c.

CONSECTARIVM.

IN △ ABC. si data sit ratio AE. ad EC. vt Q. ad P. & ratio BG. ad GC. vt Z. ad *x*. reliquæ omnes rationes datæ erunt. Quoniam si fiat vt Z. ad *x*. ita Q ad R. iam vtraque Q. ad P. & Q. ad R. vel Z. ad *x*. habebit idem antecedens Q. Ergo omnium segmentorum rationes determinatæ erunt in rectis P. Q. R. vt in præsenti propositione demonstratum est. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLI.

SI fuerint quatuor continuæ, & in quolibet triangulo basis diuidatur vt extremæ, & vnum latus ex basi vt prima ad secundam; reliquum ex vertice diuisum erit vt prima ad tertiã, vel econtra.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SInt quatuor continuæ P. Q. R. Z. & in quolibet △ ABC. basis BA. diuisa sit BF. ad FA. vt P.

ad Z. & latus BC. diuisum sit BG. ad GC. vt P. ad Q. Dico latus CA. diuisum esse ex C. nempè CE. ad EC. vt P. ad R. vel *è conuerso* si latus CA. diuisum sit CE ad EA. vt P. ad R. Dico BG. ad GC. esse vt P. ad Q. Et iterum si BG. ad GC. fuerit vt P. ad Q. & CE. ad EA. vt P. ad R. erit BF. ad FA. vt P. ad Z. Ducantur enim GF. AG. & per intersectionem O. recta BOE.

DEMONSTRATIO.

SI enim CA. sumatur vt basis, & latus AB. sit diuisum AF. ad FB. vt Z. ad P. & latus CB. sic diuisum CG. ad GB. vt Q. ad P. velut Z. ad R. cum rationes Z. ad P. & Z. ad R. habeant idem antecedens erit CE. ad EA. vt consequentes, scilicet vt P. ad R. (29. *p.*)

Conuersa eadē ratione conuincitur, si enim fuerit CE. ad EA. vt P. ad R. & BF. ad FA. vt P. ad Z. erit BG. ad GC. vt consequentes scilicet vt R. ad Z. vel vt P. ad Q. (39. *p.*) Quod erat demonstrandum.

Tandem si BG. ad GC. est vt P. ad Q. & CE. ad EA. vt P. ad R. erit AE. ad EC. vt R. ad P. & BG. ad GC. vt R. ad Z. Ergo BF. ad FA. erit vt consequentes vt P. ad Z. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIII.

SI in basi cuiusvis triãguli sumatur punctum, per quod ex vertice ducatur recta, vnicum in ea est punctum, per quod rectæ ab angulis secent latera, alterum in duplicata ratione alterius.

2. Quo puncto dato, etiam duæ mediæ inter segmenta basis datæ erunt.

EXPOSITIO. Fig. 11.

IN Triangulo ABC. sumitur quodlibet punctum basis F. & ducatur FC. Dico in recta FC. vnicum punctum esse O per quod si ducatur BOE AOG. ratio CE. ad EO. sit duplicata rationis BG. ad GC. Et dico 2. Si tale punctũ inventum sit, etiam inventas esse duas medias inter segmenta AF. & FB.

DEMONSTRATIO.

RAtio CE. ad EA. sit vt P. ad R. & ratio BG. ad GC. vt P. ad Q. quoniam ratio CE. ad EA. supponitur duplicata rationis BG. ad GC. erit etiam ratio P. ad R. duplicata rationis P. ad Q. & erunt continuæ P. Q. R. (21. *P.*) Si ergo addatur Z. quarta continua, erunt quatuor continuæ P. Q. R. Z. Ergo BF. ad FA. erit vt P. ad Z. (41 *p.*) Ergo ratio BF. ad FA. erit triplicata rationis P. ad Q. vel BG. ad GC (21. *P.*) sed si in recta FC. sumatur præter O. quodlibet aliud

pun-

punctum O. & ducatur Aoh. non potest ratio BF. ad FA. esse triplicata rationis Bh. ad hC. cũ non sit eadem ratio BG. ad GC. quæ Bh. ad hC. (3. l. 5.) Ergo præter O. nullum est punctum in recta FC. per quod possint vnum latus secari in duplicata ratione alterius. Quod erat, &c.

2. *Dato puncto O. datæ erunt duæ mediæ inter AF. & FB.* Si enim fiat vt BG. ad GC. ita BF. ad *x*. cum ratio BF. ad FA. sit triplicata rationis BG. ad GC. vt supra demonstratum est, erit etiam ratio BF. ad FA. triplicata rationis BF. ad *x*. Iterum si fiat vt CE ad EA. ita BF. ad *z*. cũ ratio CE. ad EA. sit duplicata rationis BG. ad GC. vel BF. ad *x*. erit ratio BF. ad *z*. duplicata rationis BF. ad *x*. Ergo cum BF. ad FA. sit duplicata rationis BF. ad *x*. & triplicata rationis BF. ad *z*. erunt quatuor cõtinuæ BF. *x*. *z*. FA. (21. *P*.) Ergo inuentæ erunt duæ mediæ *x*. & *z*. inter segmẽta basis BF. & FA. Quod erat, &c.

CONSECTARIVM.

QVi inuenerit geometricè locum vbi rectæ AG. BE. secari debeant vt segmenta vnius lateris sint in duplicata ratione segmentorum alterius, inueniet duas medias inter datas extremas.

PRO-

PROPOSITIO XLIIII.

SI fuerint quatuor continua, & basis cuiusvis trianguli diuidatur vt extrema, & quæ inde ad verticem ducitur, diuidatur vt tertia ad compositam ex prima, & vltima; diuidentur latera vt prima ad secundam, & vt prima ad tertiam.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SInt continuæ P. Q. R. Z. & in triãgulo ABC. fit BF. ad FA. vt P. ad Z. & recta FC. diuidatur in O. vt FO. ad OC. sit veluti R. ad P+Z. ductis AOG. BOE. Dico BG. ad GC. esse vt P. ad Q. & CE. ad EA. vt P. ad R.

DEMONSTRATIO.

QVoniam si BC. diuidatur in G. vt sit BG. ad GC. veluti P. ad Q. vel R. ad Z. erit CE. ad EA. vt P. ad R. (41. *p.*) Ergo conuertendo AE. ad EC. vt R. ad P. (4. *l.* 5.) Ergo FO. ad OC. vt antecedens R. ad summam consequentium P+Z. (39. *p.*) Ergo recta AG. transibit per O. & consequenter recta AO. trãsit per G. & BO. per E. Ergo BG. ad GC. est vt P. ad Q. & CE. ad EA. vt P. ad R. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

SI fuerint quatuor continua, vel non continua, & ex his rationibus prima ad quartam + tertiam, vt tertia ad primam + quartam, & quarta ad primam + tertiam sumantur duæ qualibet illarum, in quas secentur rectæ ab angulis cuiuscumque trianguli, latera eiusdem secta erunt vt prima ad secundam, & vt prima ad tertiam, & vt prima ad quartam.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SInt quatuor rectæ P. Q. R. Z. & data sit ratio P. ad Z+R. tũ ratio R. ad P+Z. & in △ ABC. recta AG. secta sit vt P. ad Z+R. ita GO. ad OC. & recta CF. secta sit vt R. ad P+Z. ita FO. ad OC. Dico BG. ad GC. esse vt P. ad Q. & CE. ad EA. vt P. ad R. & BF. ad FA. vt P. ad Z. Idem omninò erit si GO ad OA. sit vt P. ad Z+R. & EO. ad OB. vt Z. ad P+R. tum si FO. ad OC. sit vt R. ad P+Z. & EO. ad OB. vt Z. ad P+R.

DEMONSTRATIO.

DVcta BOE. si fiat vt BG. ad GC. ita AE. ad *x*. cum AE. ad EC. sit vt AE. ad EC. erit BF. ad FA. vt consequentes, scilicet vt EC. ad *x*. Ergo cum CE. ad EA. sit vt CE. ad EA. BF. ad FA. vt EC. ad *x*. erit GO. ad OA. vt antecedens ad summam consequentium, scilicet vt EC. ad

EA

EA+x. (39. p.) sed GO. ad OA. *ex hyp.* est vt P. ad R+Z. Ergo EC. ad EA+x est vt P. ad R+Z. Insuper cum AE ad EC. sit vt AE ad EC. & BG ad GC. vt AE ad x. erit FO. ad OC. vt antecedens ad summam consequentium, nempe vt AE ad EC+x. sed FO. ad OC. *ex hyp.* est vt R. ad P+Z. Ergo AE ad EC+x. est vt R. ad P+Z.

Rationes cognitæ sunt.

vt. EC. — AE.
ad. EA+x. — EC+x.
item P. — R.
ad R+Z. — P+Z.

Ergo etiam componendo (4. *l.* 5.)

vt. EC. — AE.
ad. EC+EA+x. — AE+EC+x.
item P. — R.
ad P+R+Z. — R+P+Z.

Ergo etiam alternando (4. *l.* 5.)

vt. EC. — AE.
ad. P. — R.
item EC+EA+x. — AE+EC+x.
ad P+R+Z. — R+P+Z.

Ergo EC. ad P. est vt AE. ad R. (r. *l.* 5.) & alternando EC. ad AE. vt P. ad R. Quod erat, &c.

Rursus fiat P. ad z. vt BF. ad FA. & quia est CE. ad EA. vt P. ad R: erit GO ad OA. vt P. ad R.

+z.(39 *p.*) sed GO. ad OA. *ex hyp.* est vt P. ad R+Z. Ergo z. est æqualis Z.(2.*l.*5.) Ergo cum BF. ad FA. sit vt P. ad z. erit vt P. ad Z. Quod erat, &c.

Tandem quia BF. ad FA. est vt P. ad Z. & CE. ad EA. vt P. ad R. erit BG. ad GC. vt P. ad Q. vel vt R. ad Z. (39. *p.*) & EO. ad OB. vt Z. ad P+R. (39. *p.*) Ergo omnium rationes determinatæ sunt. Quod erat, &c.

Eadem ratione secundus, & tertius casus demonstrari poterunt, quod ommitto, ne cui prolixior videar.

PROPOSITIO XLV.

SI intra quodlibet Triangulum sumatur punctum per quod ducantur rectæ in latera opposita, datis duabus rationibus reliquæ omnes determinatæ sunt.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SIt △ABC. & punctum assumptum O. per quod ducantur AOG. BOE. FOC. Rationes verò datæ quatuor casus admittũt. Vel enim rationes sunt duorum quorumlibet ex tribus lateribus, vel duarum rectarum angularium, vel lateris, & rectæ oppositi anguli, vel lateris, & rectæ anguli contermini, in omnibus casi-

bus.

bus. Dico reliquas omnes rationes determinatas esse.

DEMONSTRATIO.

PRimus casus demonstratus est *prop.* 38. secundus verò *prop.* 44. & tertius *prop.* 39 vltimus tantum est hic demonstrandus. Data ergo sit ratio BF. ad FA. vt P. ad Z. & GO. ad OA. vt P. ad R+Z. fiat ergo vt CE. ad EA ita BF. ad *x*. & erit BG. ad GC. vt *x*. ad FA. & GO. ad OA. vt BF. ad FA+*x*. (39. *p.*) sed GO. ad OA. ex hyp. est vt P. ad R+Z. Ergo BF. ad FA+*x*. est vt P. ad R+Z.

	1. *Ratio.*	2. *Ratio.*
vt.	BF.	BF.
ad.	FA+*x*.	FA.
ita.	P.	P.
ad.	R+Z.	Z.

Ergo (ex 1. *l.* 6.) □BFR + □BFZ æquatur □FAP + □*x*P. sed in 2. ratione □BFZ æquatur □FAP. Ergo ablatis æqualib. remanebit □BFR. æquale □*x*P. Ergo latera reciproca sunt proportionalia (1. *l.* 6.) vt P. ad R. ita BF. ad *x*. vel *ex hyp.* ita CE ad EA. Cùm Ergo cognitæ iam sint rationes BF. ad FA. vt P. ad Z. & CE. ad EA. vt P. ad R. & GO. ad OA. vt P. ad R+Z. reliquæ omnes cognitæ sunt (38. *p.*) Quod erat, &c.

Si ratio data GO. ad OA sit vt *x*. ad z. redu-

 ce-

cetur ad antecedens P. & ex consequenti auferetur Z. vt habeatur R. & erit ratio P. ad R + Z.

PROPOSITIO XLVI.

IN quolibet Triangulo si per centrum ff. ss. ducatur qualibet infinita, ad quam ex angulis demittantur perpendicula, segmentum, & perpendiculum maius æquantur reliquis.

EXPOSITIO. Fig. 12.

IN △ ABC. sit O. *centr. ff. ss.* per quod transeat quæuis infinita QOR. cui ex angulis A. B. C. perpendiculares sint AL. BN. CM. Dico segmentum maius ON. æquari segmentis OL + OM. & perpendiculum maius CM. æquari reliquis CL + BN.

DEMONSTRATIO.

1. CVm O. sit *centr. ff. ss.* ad A. B. C. erit etiam O. *centr. ff. ss.* ad perpẽdiculorum sectiones N. M. L. (44. M. 1.) Ergo ON. æqualis erit OM + OL (42. M. 1.)

2. Continuata BOP. sit OP. æqualis OB. & PQ. perpendicularis QR. & PY. ipsi parallela: Ergo PQ. YM. æquales erunt (7. *l.* 1.) & cum OP. OB. sint æquales, & anguli verticales etiã POQ. BON (1. *l.* 1.) & anguli Q. N. recti, in triangulis OPQ. OBN. reliqua omnia erunt æqua-

æqualia, scilicet PQ. & BN (4. *l*. 1.) Ergo & BN. PQ. MY. æquales sunt inter se.

Deinde cùm EOB. transeat per *centr. ff. ss.* est EO. dimidium OB (1. *p*.) & quia OP. & OB. sunt æqu. *ex constr.* erit OE. æqualis EP. anguli præterea verticales PEK. OEV. æquales sunt (1. *l*. 1.) & anguli recti æquales OEV. PEK. Ergo in triãgulis PEK. EVO. reliqua omnia sunt æqualia, nempe EK & EV (4. *l*. 1.) Ergo cũ EC. & EA. sint æquales (1. *p*.) ablatis æqualibus EK. EV. remanebunt æquales KC. VA.

Insuper in triangulis ALV. CKY. anguli alterni LAV. KCY. in parallelis CM. AL. æquales sunt (2. *l*. 1.) & L. Y. recti æquales. Ergo reliqua sunt æqualia (4. *l*. 1.) nempe CY. AL. sed CM. componitur ex CY. YM. Ergo cùm YM. demonstrata sit æqualis ipsi BN. erit perpendiculum CM. æquale ipsis AL. & BN. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XLVII.

SI ex centro ff. ff. cuiusvis trianguli ducantur rectæ ad angulos, ad quas vtrinque cōtinuatas demittantur perpendicula ex quovis puncto intra, vel extra triangulum sumpto, rectangulū ex recta à centro in angulum, & ex maiori segmento, vel perpendiculo, æquatur rectangulis reliquis.

EXPOSITIO. Fig. 12.

IN △ABC. sit *centr. ff. ff.* O. & rectæ angulos AOX. BOP. COF. & assumpto quolibet puncto R. intra, vel extra demittantur perpendicula RZ. RX. RS. Dico 1. □BOZ. æquale esse □AOX + □COS. Dico 2. □CO. RS. æquale esse □AO. RX. + □BO. RZ.

DEMONSTRATIO.

1. IN triangulis ROZ. BON. angulus O. est cō-munis: & N. Z. recti sunt æquales. Ergo reliqui OBN. ORZ. sunt æquales, & triangula æquiangula (3. *l.* 1.) Ergo latera homologa sunt proportionalia (2. *l.* 6.) nempè BO. ad ON. vt RO. ad OZ. Ergo □BOZ. æq. □RON (1. *l.* 6) Similiter æquiangula sunt triangula ROX. AOL. quia anguli in O. verticales æquantur (1. *l.* 1.) & L. X. sunt recti: Ergo etiam proportionales sunt RO. ad OX. vt AO. ad OL (2. *l.* 6)

Er-

Ergo □ AOX æq. □ ROL. Tum in Triangulis ROS. COM similiter demonstrabitur □ COS. æquale □ ROM. sed □ RON. æquatur □ ROL + ROM. quia habet eandem basim RO. & altitudo ON. æqualis est altitudinibus OL + OM (46. *p.*) Ergo cum □ BOZ. demonstratum sit æquale □ RON. erit □ BOZ. æquale □ ROL + □ ROM. hoc est □ AOX + □ COS. Quod erat, &c.

2. Eadem ratione in triangulis similibus ROS. COM. est □ RO. CM. æq. □ CO. RS. & in △△ similibus ROX. AOL. est □ RO. AL. æq. □ AO. RX. & in △△ similibus ROZ. BON. est □ RO. BN. æquale □ BO. RZ. (ex 2. & 1. *l.* 6.) sed □ RO. CM. æquatur □ RO. AL + □ RO. BN. quia basis RO. est eadem, & altitudo CM. æq. AL + BN (46. *p.*) Ergo □ CO. RS. æq. □ AO. RX + □ BO. RZ. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVIII.

Iisdem positis quæ in præcedenti, si Triangulum sit æquilaterum maius intersegmentū æquatur reliquis, & perpendiculum maius etiam duobus minoribus.

EXPOSITIO. Fig. 12.

Sit ABC. Triangulum æquilaterum, & punctum assumptum R & perpēdicula RX. RS. RZ.

RZ. segmenta verò rectarum per *centr. ff. ſſ.* ſint OZ OX. OS. Dico OZ. æquari ipſis OX + OS. & perpendiculum RS. æquari RX + RZ.

DEMONSTRATIO.

QVia rectangulum BOZ. æquatur □ AOX + □ COS (47. *p.*) Ergo cum baſes BO. AO. CO. ſint æquales ex centro circuli circumſcripti ad angulos in circunferentia, erit altitudo OZ. æqualis ipſis OX + OS (8. *l.* 1.) Quod &c.

2. Similiter □ CO. RS. æq □ AO. RX + □ BO. RZ (47. *p.*) Ergo cum baſes CO. AO. BO. ſint æquales, erit altitudo RS. æqualis RX + RS. (8. *l.* 1.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLIX.

SI Triangulum ſit æquilaterum, & intra ſumatur quodlibet punctum, ex quo demittãtur perpendicula ad tria latera, omnium ſumma ſemper eſt æqualis Trianguli perpendiculo.

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt Triangulum æquilaterum ABC. intra quod aſſumatur quodlibet punctum O. ex quo ducantur perpendicula OE. OF. OG. & perpendiculum CF ab angulo in baſim. Dico OE + OP + OG. æquari perpendiculo CF.

DE-

DEMONSTRATIO.

DVcantur ex puncto assumpto O. ad angulos rectæ OA.OB.OC. fientque triangula ABO.BCO.CAO. sed Triangulū ABC. æquatur illis omnibus, quia ex ipsis componitur: Ergo cùm omnia æquales bases habeant AB. BC. CA. erit perpendiculum CF. æquale tribus reliquis OE + OF + OG (8. *l*. 1.) Quod erat, &c.

Hæc Propositio adducitur à Francisco Schrooten, sed nè huic operi videretur deficere ommittenda non fuit.

PROPOSITIO L.

SI △ sit æquilaterum, & inter latera extra tertium latus continuata sumatur punctum, ex quo ad omnia latera mittantur perpendicula, quod est ad tertium latus cum perpendiculo ipsius trianguli æquatur reliquis.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt △ ABC. æquilaterum, & inter latera AB. AC. continuata extra tertium BC. sumatur punctum quodlibet O. & sint OX OH. OZ. perpendicula, & AG. perpendiculum trianguli ABC. Dico OH + AG. æquari ipsis OX + OZ.

DEMONSTRATIO.

Fiat LOK parallela BC. erit vt AC. æqualis AB. ita AL. æqualis AK & vt AC. æqualis CB. ita AL. ipsi LK (2.*l*.5.) Ergo △ ALK. erit æquilaterum: Ergo OX+OZ. æquantur ipsi AE. perpendiculo totius ALK (49.*p*.) sed AE. æquatur AG+GE. vel AG+HO. quia HO. GE sũt æquales (7.*l*.1.) Ergo OX+OZ. æquãtur AG+OH. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LI.

SI △ fuerit æquilaterum, & inter latera supra verticem continuata sumatur punctum, ex quo ducantur perpendicula ad tria latera, quod est ad tertium latus æquatur reliquis + perpendiculo totius trianguli.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt △ ABC. æquilaterum, & inter latera continuata supra verticem ACS. BCR. sumatur quodlibet punctum P. indeque fiant perpendiculares PQ, PT. PV. & sit CF. perpendiculũ △ ABC. Dico PQ. æquari ipsis PT + PV + CF.

DEMONSTRATIO.

Fiat RPS. parallela basi AB. & erit △ RCS. æquilaterum sicut ABC (2.*l*.6.) Ergo perpẽdicula PT+PV. æqualia sunt ipsi CI. (44.*p*.) sed

sed IC+CF. æquantur ipsi IF. hoc est PQ. (7. *l*. 1.) Ergo PQ. æquatur ipsis PT + PV + CF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

IN omni Triangulo si recta ex vertice bisecat basim, summa ff. ss. ex lateribus est dupla summæ ff. ss. ex bisecante, & ex semibase.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt △AFC. & basis AC. bifariam diuisa in O. recta FO. Dico summam *ff. ss.* nempè □AF + □FC. duplam esse summæ *ff. ss.* □OF + □OA.

DEMONSTRATIO.

INtelligãtur AB. CB. parallelæ ipsis FC. FA. & erit AFCB parallelogrammum, & cum diameter AC. bifariam diuidatur in O. erit FO. continuata diameter etiam bifariam diuisa (7. *l*. 1.) Iam summa *ff. ss.* AF. FC. CB. BA. æqualis est in parallelogrammo summæ *ff. ss.* AC. FB. (57. *p*.) sed AF. FC. sunt dimidium AF. FC. CB. BA. quia opposita latera sunt æqualia: & *ff. ss.* AO. OF. ex dimidijs rectis sũt quarta pars *ff. ss.* AC. FB. (3. *l*. 2.) Ergo *ff ss.* AO. FO. sunt dimidium *ff. ss.* AF. FC. Quod, &c.

PROPOSITIO LIIII.

IN quolibet Triangulo differentia summæ ff. ex lateribus, & figuræ ex basi est dupla differẽtiæ figurarum ex bisecante, & ex semibasse.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN △ AFC. recta AO bisecat basim AC. Dico differentiam inter summam *ff. ſſ.* AF+FC. & figuram AC. duplam esse differentiæ *ff ſſ.* AO. & OF.

DEMONSTRATIO.

DVctis vt antea parallelis AB. CB. in parallelogrammo ABCF. differentia *ff. ſſ.* ex lateribus conterminis AF+FC. & diametri AC. est semissis differentiæ *ff. ſſ.* ex diametris AC. & FB (59. *p.*) sed differentia *ff. ſſ.* ex AO. & OF. est quarta pars differentiæ *ff. ſſ.* ex AC. & FB cũ figura ex tota recta sit quadrupla figuræ ex dimidio (.3.2.) Ergo differentia *ff. ſſ.* ex lateribus AF+FC. & basis AC. est dupla differentia *ff. ſſ.* ex bisecante FO. & semibasse AO. quia semissis est dupla quartæ partis. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

IN quolibet triangulo rectangulo recta, quæ basim bisecat est dimidium basis; in acutangulo est plus dimidio, in obtusangulo minus, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt △ACF. & recta FO. bisecet basim AC. Dico AO. & OF. esse æquales si angulus AFC. sit rectus: si verò acutus erit OF. maior quàm AO. si autem obtusus erit OF. minor quā AO. & è conuerso.

DEMONSTRATIO.

1. SIt AFC. angulus rectus erūt ff. ff. AF. FC. æquales ipsi AC. (4. *l.* 2.) sed ff. AO. OC. sunt dimidium AC (3. *l.* 2.) & etiam AO. OF. sunt dimidium ipsius AC. vel AF. & FC. (52. *p*) Ergo OF. + OC. æquales sunt inter se. Quod &c.

2. Si angulus AFC. sit acutus, sunt ff. ff. AF. FC. plus quàm AC (3. *l.* 2.) sed AO. & OF. sunt dimidium AF. FC. (52. *p.*) Ergo AO. OF. sunt plus quàm dimidium AC. Ergo cum AO. & OC. sint dimidium figuræ AC. (3. *l.* 2.) erunt ff. ff. AO. & OF. plus quàm AO. & OC. Ergo ablata vtrinque AO. erit OF. plus quā OC. Quod &c.

3. Sit

3. Sit tandē angulus AFC. obtusus erunt *ff. ſſ.* AF. FC. minus quam AC (4. *l.* 2.) ſed AO. OF. ſunt dimidium AF. FC. (52. *p.*) Ergo AO. OF. ſunt minus quam dimidium AC. ſed AO. OC. ſunt dimidium AC (3. *l.* 2.) Ergo AO. OF. minus ſunt quam AO. OC. Ergo ablata vtrinque AO. remanebit OF. minor quā OC. Quod erat, &c.

Conuerſa ordine retrogrado demonſtrabitur. Si OF. ſit æqualis OC. erunt *ff. ſſ.* AO. OF. æquales AO. OC. ſed AO. OF. ſunt dimidium AF. FC (52. *p.*) & AO. OC. dimidium AC (3. *l.* 2.) Ergo *ff. ſſ.* AF. FC. æq. AC. Ergo angulus AFC. erit rectus (4. *l.* 2.) Similiter demonſtrabitur acutus ſi OF. eſt maior OC. vel obtuſus ſi minor. Quod, &c.

Tres iſtæ propoſitiones pendent à prop. 57. & 59. quæ ab his non dependent, quibus tamē præpoſitæ ſunt, ne triangulorum doctrina interrupta maneret, licet demonſtrationis ſeruato ordine poſtponi debuiſſent.

CAPVT II.

DE QVADRILATERIS, ET POLYGONIS INORDINATIS.

QVadrilateræ figuræ, vel parallelogramma sunt, vel Trapezia. De vtrisque agendum est in hoc capite; primo loco de parallelogrammis, quæ scilicet ex oppositorum laterum æqualitate singularem exigunt meditationem. Deinde ea, quæ omnibus quadrilateris Trapezijs, vel parallelogrammis sunt communia, persequemur. Quæ verò ad Polygona inordinata spectant paucis complectar, nè intacta videatur relinqui. Si enim omnia, quæ ex ipsis deduci possunt, velit quis meditari, æternum sibi habebit. Sufficiat mihi aperuisse viam, qua ingeniosus Lector eorum meditationem, & Geometriam simul promouere possit.

PROPOSITIO LV.

IN omni parallelogrammo centr. ff. ff est in communi diametrorum sectione. 2. Et etiam in medio diametri, vel rectæ secantis subcontrarie latera opposita in partes æquales.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN parallelogrammo ABCF. diametri A C. FB. se intersecant in O. Dico O. esse *centr ff. ff.* in medio diametri A C. vel BF. vel rectæ MN. facientis æqualia segmenta FM. BN.

DEMONSTRATIO.

DIametri A C FB. diuisæ sunt bifariam in O. (7. *l.* 1.) Ergo O. est *centr. ff. ff.* ad A. C. tum etiam ad F. B. (35. M. 1.) Ergo etiam ad A. B. C. F. (64. M. 1.) Vnde *centr ff ff.* O. est in medio diametri AC vel FB. Tum si FM. & BN. sunt æquales, & anguli alterni OFM. OBN. tum OMF. ONB. (2. *l.* 1.) erunt FO. OB. æquales, tū MO. ON. (4. *l.* 1.) Ergo erit O *centr. ff ff.* in medio rectæ MO. Quod, &c.

PROPOSITIO LVI.

SI Quadrilaterum habeat centr. ff. ss. in communi diametrorum sectione, illud erit parallelogrammum: & tale non erit si centrum non sit in sectione.

EXPOSITIO. Fig. 14.

QVadrilaterum ABCF. habeat *centr. ff. ss.* in sectione diametrorum O. Dico illud esse parallelogrammum, secus verò si *centrum ff. ss.* non sit in O.

DEMONSTRATIO.

CVm O. sit *centr. ff. ss.* ad A.B.C.F. recta FOB. transit per *centr ff. ss.* ad A.B.C. (61. M. 1.) Ergo BO. bisecat AC (1. *p.*) Similiter FB. demonstrabitur bisecta in O. Ergo cùm æquales sint FO. & OA. ipsis BO. OC. & anguli verticales AOF. COB. (1. l. 1.) reliqua erunt æqualia in triangulis AOF. COB (4. *l.* 1.) nempè AF. BC. tum anguli OAF. OCB. alterni: Ergo FA. BC. sunt parallelæ æquales (2. *l.* 1.) Ergo AB CF. est parallelogrammum (7. *l.* 1.) Quod, &c.

Si *centr. ff. ss.* non sit in O. non erit ABCF. parallelogrammum: quia si tale esset, foret O. *centr. ff. ss.* (55. *p.*)

PROPOSITIO LVII.

IN omni Parallelogrammo summa ff. ff. ex 4. lateribus æqualis est summæ ff. ff. ex duabus diametris.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt Parallelogrammum ABCF. & diametri AC FB. Dico figuras similes ex lateribus AB. BC. CF. FA. æquales esse figuris similibus ex diametris AC. FB.

DEMONSTRATIO.

CVm AC. bifariam diuisa sit in O. erit O. *centr* ff. ff. ad A. C. (35. M. 1.) Ergo cũ punctũ B. sit extra *centr.* ff. ff. figuræ BA, BC. æquantur ff. ff. OA. OC + 2 OB (60 M. 1.) Similiter ff. ff FA. FC. æquantur OA. OC + 2 OF. Ergo 4 figuræ ex lateribus AB. BC. CF. FA. æquantur 2 OA + 2 OC + 2 OB + 2 OF. & cùm OA. OC. sint æquales, tum OF. OB. erunt ff. ff. AB. BC. CF. FA. æquales 4 OA + 4 OB. sed 4 □ □ OA + 4 □ □ OB. æqualia sunt □ AC + □ FB. (3. *l.* 2.) Ergo cùm omnes ff. ff. sint in ratione quadratorum (4. *l* 6.) erunt ff. ff. AB. BC. CF. FA. æquales ff. ff. AC. FB. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LVIII.

IN omni Parallelogrammo minima summa à centro ff. ss. est dimidium summæ ff. ss. ex lateribus, vel diametris. Et est æqualis summæ ff. ss. quæ ex lateribus conterminis fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt ABCF. Parallelogrammum, & illius *centrum ff. ss.* O Dico summã *ff. ss.* OA. OB. OC. OF. esse dimidiũ summæ *ff. ss.* AB. BC. CF. FA. vel *ff. ss.* AC. FB. & esse æqualem summæ *ff. ss.* AB. BC. vel AF. FC.

DEMONSTRATIO.

MInima *ff. ss.* summa est OA. OB. OC. OF & cum OA. & OC. sint æquales, tum OF. OB. erit minima summa 2 OA + 2 OB. sed figura AC. est 4 OA & figura FB. est 4 OB. (3 *l*. 2.) Ergo figuræ AC. BF. duplæ sũt *ff. ss.* 2 OA + 2 OB. vel *ff.* OA. OB. OC. OF. sed figuræ AB. BC. CF. FA. sunt æquales ipsis AC. FB (51. *p*.) & duplæ figurarum AB. BC. Ergo etiam sunt duplæ figurarum OA. OB. OC. OF. & istæ æquales ipsis AB. BC. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LIX.

IN quolibet Parallelogrammo differentia ff.ſſ. ex lateribus conterminis, & quauis diametro eadem eſt; & eſt ſemidifferentia ff.ſſ. ex diametris.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Parallelogrammo ABCF. Dico differentiam inter ff.ſſ. AF+FC. & AB. eſſe eandem quæ inter ff.ſſ. AF+FC. & FB. & hanc eſſe ipſam ſemidifferentiam inter ff.ſſ. AC. & FB.

DEMONSTRATIO.

DIfferentia inter ff.ſſ. AC. & FB ſit 2 X. Ergo FB+2 X. erit *æq.* AC. Ergo ſi X. auferatur ex vtraque parte erit FB+X *æq.* AC−X. ſed ſumma vtriuſque eſt FB+AC. quæ æqualis eſt ſummæ AB. BC. CF. FA (57.p.) hoc eſt 2 AF +2 FC Ergo FB+X+AC−X. æquatur 2 AF +2 FC. Ergo dimidium eſt æquale dimidio, nempè AF+FC *æq.* FB+X & differentia inter AF+FC. & FB. eſt X ſimiliter AF+FC. *æq.* AC −X. & *differ.* inter AF+FC. & AC. eſt eadē X. nempè dimidium 2 X vel differētiæ inter AC & FB. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LX.

SI plura parallelogramma dissimilia habeant æqualia latera, minimæ summæ ff. ff. æquales erunt.

DEMONSTRATIO. Fig. 14.

QVia si latera sint æqualia in vtroque, summæ ex lateribus æquales erũt. Ergo minimæ summæ, quæ sunt illarum semisses (58. p1) æquales erunt.

PROPOSITIO LXI.

SI in Parallelogrammo recta bisecat opposita latera, & alia secat vtcumque reliqua duo, hæc erit bifariam diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 14.

REcta RS. bisecat FC. & AB. & recta PQ. secat vtcumque FA. CB. Dico PQ. bifariam secari in O.

DEMONSTRATIO.

CVm RS. & CB. sint parallelæ (2 l.6.) ducta BP. erit in △ ABP. vt AS. dimidium AB. ita PZ. dimidium PB (2. l.6.) Ergo vt PZ. dimidiũ est BB. ita PO. est dimidium PQ. (2. l.6.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXII.

SI in Parallelogrammo sumatur quodlibet punctum, aut centrum ff. dd. similium illis, quæ rectis comprehenduntur lateribus parallelis.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Parallellogrammo ABCF. assumptum sit quodlibet punctum G. per quod ducantur rectæ LH. ED. oppositis lateribus parallelæ. Dico G. esse *centr. ff. dd.* similium tamen factis GF. GA. GB. GC.

DEMONSTRATIO.

CVm ▭ EL. & ▭ EH. habeant æqualem altitudinem, erunt inter se minima (10. M. 1) & E. est *centr. ff.* ad A. F. (34. M. 1.) similiter DL. DH. sunt *ff.* minimæ; & D. *centr. ff.* ad B. C. Ergo *cetr. ff.* ad F. A. B. C. est in recta ED. (6. M. 1) Pariter LE. LD. sunt minimæ, & L. *centr. ff.* ad F. C. tũ HE. HD. sunt minimæ, & H. est *centr. ff.* ad A. B. Ergo in HL. erit *centr. ff.* ad F. C. A. B. Ergo cùm sit in ED. & in HL. erit in sectione G. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIII.

SI ex lateribus conterminis Parallelogrammi unum diuidatur in duplicata alterius ratione, totum erit diuisum in quatuor parallelogramma continuè proportionalia.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Parallelogrammo AC. sit latus FC. vtcũque diuisum in L. & FE. ad EA. sit ratio duplicata FL. ad LC. ductis ED. LH. quæ oppositis lateribus sint parallelæ. Dico Parallelogrãma GF. GC. GA. GB. esse continuè proportionalia.

DEMONSTRATIO.

QVoniam GF. ad GC. est vt EG. ad GD. & GF. ad GA. vt LG. ad GH. (1. l. 6.) erit FG. ad GA. in duplicata ratione FG. ad GC. & erunt continua GF. GC. GA. sed ratio GA. ad GB. est eadem GE. ad GD. vel GF. ad GC. (1. l. 6.) Ergo erunt quatuor in eadem cõtinua ratione GF. GC. GA. GB. nempè in ratione EG. ad GD. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIV.

SI in quolibet parallelogrammi diametro punctum summatur, per quod recta lateribus oppositis parallela efficiant complementum toti simile, erunt latera in quatuor continuas diuisa, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SIt ▭ AC. & in diametro FB. assumptum punctum G. ita vt ductæ EGD. LGH. sit AG. simile toti AC. Dico esse quatuor continuas GL. GE. GH. GD. vel EF. FL. EA. LC. & è conuerso si continuæ sint EF. FL. EA. LC. Dico AG. esse simile ipsi AC.

DEMONSTRATIO.

QVoniam EL. & HD. similia sunt ipsi AC. (4. *l.* 6.) & AG. simile supponitur AC. similia erunt inter se EL. AG. HG. (4. *l.* 6.) Ergo latera homologa erũt proportionalia, vt GL. ad GE. ita GE. ad GH. & ita GH. ad GD. (22 P.) Ergo sunt continuæ GL. GE. GH. GD. Quod erat demonstrandum.

Econuerso. Si cõtinuæ sint GL. GE. GH. GD. erunt latera proportionalia GL. ad GE. vt GE. ad GH. deinde parallelogramma EL. EH. sunt æquiãgula ex parallelis (2. *l.* 1.) Ergo cùm sint æquiangula, & habeant latera proportiona-

na-

nalia erunt EL. EH. similia (22. *P.*) Quod, &c.

PROPOSITIO LXV.

IN quocumque Parallelogrammo recta per idem diametri punctum lateribus parallela secant latera in eadem ratione.

2. *Complementum est medium inter parallelogramma circa diametrum.*

Confect. *Parallelogrammum ex quibusuis 2. rectis medium est inter ipsarum quadrata, vel Rhombos sub eodem angulo.*

EXPOSITIO. Fig. 15.

SI in diametro FB. sumatur quodlibet punctum G. per quod ducantur EGD. LGH. Dico FL. ad LC esse vt FE. ad EA.

2. Et complementum GC. vel GA. mediũ esse inter ▭EL. & ▭HD.

DEMONSTRATIO.

CVm FE. BD. sint parallelæ, est EG. ad GD. vel FL. ad LC. vt FE. ad DB. vel FE. ad EA (2. *l.* 6.) 2 ▭EL. ad LD. est vt EG. ad GD (1. *l.* 6.) & LD. ad DH est vt GD. ad DB. vel vt FE. ad EA. (1. *l.* 6) Ergo vt EL. ad LD. ita LD. ad DH (1. *l.* 5.) Quod, &c.

Confect. Liquet ex dictis, si enim rectæ sint FL. LC. & ex composita FL+LC. fiat quadratum,

tum,

tum, vel Rhombus, circa diametrum fient quadrata, vel Rhombi, &c.

PROPOSITIO LXVI.

SI latera circa eundem parallelogrammi angulum continuentur, & ex angulo opposito ducatur recta faciens vnum segmentum mediũ inter latus conterminum, & segmentum reliquũ, datæ erunt duæ mediæ inter latera parallelogrammi.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SIt parallelogrammum GC. continuentur latera CLF. CDB. infinite, sitex G. ducantur BGF. vt FL. media sit inter LG. & DB. Dico FL. & DB. medias esse inter latera LG. & LC.

DEMONSTRATIO.

CVm LG. & CB. sint parallelæ, est GL. ad LF. vt BD. ad DG (2. *l.* 6.) sed ex hypothesi vt GL. ad LF. ita LF. ad BD. Ergo continuæ sunt GL. LF. BD. DG. Quod erat demonstrandum.

Hæc Propositio licet duas medias non cõcludat, ommittenda non fuit cum viam ad earum inquisitionem aperiat.

PRO-

PROPOSITIO LXVII.

SI planum aliquod secat planum parallelogrammi per centr. ff. ss. ex angulis ducantur quæuis parallelæ secantes illud, sectiones constituent parallelogrammũ cum eodem centro ff ss.

EXPOSITIO. Fig. 16.

SIt Parallelogrammũ A B C D. & illius *centr. ff. ss.* O per quod transeat quodlibet planum EF. secans planum parallelogrammi, & communis sectio MN. Deinde ex punctis, vel angulis parallelogrammi A. B. C. D. prodeant quælibet parallelæ AG. BH. CI. DK. secantes planum EF. in G. H. I. K. Dico GHIK esse parallelogrammum, & illius *centr. ff. ss.* etiam esse punctum O.

DEMONSTRATIO.

CVm planũ EF. trãseat per *centr. ff. ss.* ad A. B. C. D. & sint parallelæ AG. BH. CI. DK. erit etiã O. *centr. ff. ss.* ad G. H. I. K. (51. M. 1.) Deinde si per O. intelligatur parallela ipsis AG. BH. CI. DK. cum pũcta A. O. C in eadem sint recta, erunt parallelæ AG. CI. in eodẽ plano (2. *l.* 11.) quod facit cum plano EF. communem sectionem GOI. (1. *l.* 11.) Similiter planum trãsiens per parallelas DK. BH. facit cum plano EF. communem sectionem KOH. Ergo *centr. ff. ss.*

O. ad puncta G. H. I. K. est in communi diametrorum KH. GI. sectione O. Ergo quadrilaterum GHIK. habens *centr. ff. ff.* in diametrorũ sectione erit parallelogrammũ (*56. p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

Quodlibet quadrilaterum habet centr. ff. ff. in medio rectæ bisecantis latera opposita, & in communi sectione bisecantium, quæ se bifariam intersecant.

EXPOSITIO. Fig. 17.

Sit Quadrilaterum ABCD. & latera AB. BC. CD. DA. sint bifariam diuisa in E. F. G. H. ductis GE. HF. se intersecantibus in O. Dico puuctum O. esse *centrum ff. ff.* ad A. B. C. D. & GE. HF. esse in O. bifariam diuisas.

DEMONSTRATIO.

CVm omnia latera supponantur bifariam diuisa erit E. *centr. ff. ff.* ad A. B. (35. M. 1.) & similiter G. ad D. C. Ergo *centr. ff. ff.* ad A. B. C. D. erit in dimidio rectæ GE (64. M. 1.) Eodẽ modo demonstrabitur H. esse *centr. ff. ff.* ad A. D. & F. ad B. C. & *centr. ff. ff.* ad A. D. B. C. esse in dimidio rectæ HF. Ergo cum sit in dimidio vtriusque rectæ GE. & HF erit *centr. ff. ff.* in cõmuni sectione O. & punctum O. bifariam di-

ui-

uidet vtramque rectam GE. HF. Quod erat &c.

PROPOSITIO LXIX.

SI Trapezium habeat duo latera parallela, quodlibet diagonium secat ipsum in ratione laterum parallelorum.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Trapezium ABCD. & latera AB. BC. parallela. Dico diagonia AC. & BD. secare ipsum in ratione AB. ad DC.

DEMONSTRATIO.

CVm Triangula ABC. DCA. sint inter parallelas, sunt æquè alta (8. *l.* 1.) Ergo se habent vt basis AB. ad basim DC (1. *l.* 6.) Idem omninò est de Triangulis ABD, CDB. Ergo, &c. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXX.

SI Quadrilaterum habeat cētrum ff. ſſ. in diametro, altera diameter erit bifariam diuisa: & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SIt Quadrilaterum quodlibet ABCF. & illius *centr. ff. ſſ.* sit in diametro FB. Dico reliquam diametrum AC. esse bifariam diuisam in cōmuni sectione O. & *èconuerso* si diameter AC. sit

sit bifariã diuisa in sectione O. Dico *centr. ff. ss.* Quadrilateri esse in diametro FB.

DEMONSTRATIO.

QVia *centr. ff. ss.* ad A. B. C. F. est in recta F B. transit hæc per *centr.* & per punctum B. Ergo in BF. est *centr. ff. ss.* ad A. C. F (61. M. 1.) Ergo cum recta F O B. transeat per *centrum* △ A C F. diuidet bifariam basim, vel diametrũ AC. (1. *p.*) Quod, &c.

E conuerso si FB. diuidat bifariam AC. erit in FO. *cẽtrum ff. ss.* ad C. F. A. (1. *p.*) Ergo cũ *FOB.* transeat per *centrum* ad A. C. F. & per punctum B in recta FOB. erit *centr ff. ss.* ad B. C. F. A. (61. M. 1.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXI.

SI diameter quadrilateri ipsum bifariam secet, etiam secũdam diametrum bifariam secabit, & in prima diametro erit centr. ff. ss. & e conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 13.

QVadrilaterum ABCF. bifariam diuiditur diametro FB. Dico diametrum AC. etiã esse bifariam diuisam in O. & Quadrilateri *cẽtrum ff. ss.* esse in diametro FB. & *e cõuerso* si diameter AC. fuerit bifariam diuisa, vel *centr. ff. ss.* sit in FB. Dico FB. diuidere bifariam Quadrilaterum ABCF.

DEMONSTRATIO.

1. DVcantur CH. & AG. parallelæ ipsi FB. & OHG. vtrique perpendicularis. Cū Triãgula FBC. FAB. supponantur æqualia, & habeant eandē basim FB. habebũt æquales altitudines OH. OG (8. *l.* 1.) Ergo cùm sint parallelæ HC. & AG. erunt proportionales, vt OH. æqualis OG. ita OC. æqualis ipsi OA (2. *l.* 6.) Ergo diameter AC. est bifariã diuisa in O. Ergo *centr. ff. ss.* Quadrilateri ABCF. erit in diametro FB (70. *p.*) Quod erat, &c.

2. *E conuerso* si diameter AC. bifariam sit diuisa in O. erit vt AO. æqualis OC. ita perpendiculum GO. æquale ipsi OH (2. *l.* 6.) Ergo cùm Triangula FBC. FBA. habeant æqualē basim FB. & æquales altitudines OH. OG. erunt æqualia (8. *l.* 1.) & sic diameter FB. diuidet bifariam quadrilaterum ABCF. & in illa erit *cētr. ff. ss.* vt modo est demonstratum 1. *num.*

3. Si autem *centr ff. ss.* supponatur in FB. erit diameter AC. bifariam diuisa (70. *p*) Ergo cum AC. bifariam diuisa erit in FB. *centr. ff. ss.* vt demonstratum est 2. *num.*

PRO-

PROPOSITIO LXXII.

SI Quadrilaterum habeat cẽtrum ff. ſſ. in diametro, vel hac ſecet ipſum biſariam, recta à reliquis angulis per quodlibet diametri punctum ſecant latera, & ſe ipſas proportionaliter: & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 18.

QVadrilaterum ABCF. habeat *centr. ff. ſſ.* in diametro FB. vel diameter FB. biſariam ſecet quadrilaterum, ſi in FB ſumatur quodlibet punctum L. & ducantur ALP. CLR. Dico AR. ad RB. eſſe vt CP. ad PB. & AL. ad LP. vt CL. ad LR. Et *è conuerſo* ſi AL. ad LP. ſit vt CL. ad LR. Dico FB. ſecare biſariam quadrilaterũ, & huius *centr. ff. ſſ.* eſſe in FB.

DEMONSTRATIO.

QVia in vtroque caſu erit AC. biſariam diuiſa (70. & 71. *p.*) Ergo in triãgulo ABC. erunt latera proportionaliter ſecta, & etiam rectæ angulares (31. *p.*)

E conuerſo, ſi rectæ, & latera ſecantur proportionaliter, erit AC. biſecta (29. *p.*) Ergo FB. biſecabit quadrilaterum, & *centr. ff. ſſ.* quadrilateri ABCF. erit in diametro FB (70. & 71.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

SI latera Quadrilateri circa oppositos angulos proportionaliter diuidantur, rectæ, quæ iungunt sectiones, constituent parallelogrammum, non è contra.

EXPOSITIO. Fig. 19.

IN Quadrilatero ABCD. diuisa sint latera circa oppositos angulos B. & D. vt DH. ad HA. ita DG. ad GC. & BE. ad EA. BF. ad FC. Dico EFGH. esse parallelogrammum: non *è contra.*

DEMONSTRATIO.

DVctis diametris AC. DB. quia in △ ADC. recta HG. secat proportionaliter latera sũt HG, AC. parallelæ (*2. l. 6*) Similiter AC. EF. Ergo & HG. EF. idem ostendetur de HE. GF. Ergo cum latera opposita sint parallela, erit EF GH parallelogrammum. Quod, &c.

Non *è conuerso*, quia parallelogrammum potest esse inscriptum, quin Trapezij latera sint proportionaliter secta.

PROPOSITIO LXXIV.

SI intra, vel extra parallelogrammum sumatur quodlibet punctum, ex quo ducantur per quosvis duos angulos non oppositos rectæ in eadẽ ratione diuisæ, & ex terminis ducantur aliæ per reliquos angulos, hæ concurrent si non fuerint eadem recta, & erunt in eadem ratione diuisæ, & facient quadrilaterum.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SIt Parallelogrammum EFGH. & punctum assumptum intra, vel extra sit A. ex quo ducantur AEB. AHD. in eadem ratione: & ex D. & B. ducantur DGC. BFC. Dico has concurrere in C. & esse CG. ad GD. vt CF. ad FB. & vt AE. ad EB. &c.

DEMONSTRATIO.

DVcatur BD. cùm AE. ad EB. sit vt AH. ad HD. sunt HE. DB. parallelæ (2. *l.* 6.) Ergo cũ HE. GF. sint parallelæ; erit DB. eadem GF. vel ipsi parallela: sed DGC. BFC. si non fuerint eadem recta DB. nequeunt esse parallelæ, quia DB. est maior quàm HE. vel GF. & sic non est parallelogrammũ HEGD (7. *l* 1.) Ergo DGC. BFC. concurrunt in C. & cùm sint parallelæ DB. GF. erũt proportionales CF. ad FB. vt CG. ad GD (2. *l.* 6.) sed etiam proportionales sunt

CG.

CG. ad CD. vt GF. ad DB. & item AH. ad AD. vt HE. ad DB (2. l. 6.) Ergo cum HE. GF. aequales sint, eadem erit ratio FG. ad DB. quae HE. ad DB (2. l. 5.) Ergo pariter eadem erit ratio CG. ad CD. quae AH. ad AD (1. l. 5.) Ergo etiam diuidẽdo CG. ad CD — CG. vt AH. ad AD — AH. (4 l. 5.) hoc est vt CG. ad GD. vt AH. ad HD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXV.

Si duae rectae quadrilateri opposita latera sub cõtrarie secent in eadem ratione, se ipsas mutuo bifariam diuident.

2. Si autem se ipsas bifariam diuidant, & duo latera contermina in eadem ratione, etiam reliqua latera in eadem ratione diuident.

EXPOSITIO. Fig. 19.

IN quadrilatero ABCD. rectae HF. EG. secant opposita latera subcõtrariè in eadem ratione, hoc est vt BE. ad EA. ita DG. ad GC. & ita BF. ad FC. tum DH. ad HA. Dico HF. & GE. esse bifariam diuisas in O. Si autem HF. GE. sint bifariam diuisae, & DH. ad HA. vt DG. ad GC. etiam BE. ad EA. & BF. ad FC. erunt in eadem ratione.

DEMONSTRATIO.

QVoniam DH. ad HA. est vt DG. ad GC. & vt vt BE. ad EA. & vt BF. ad FC. erit EFGH. parallelogrammum (73. *p.*) Ergo diametri HF. GE. sunt bifariam diuisæ (7. *l.* 1.) Si autem HF. GE. sint bifariam diuisæ erit EFGH. parallelogrãmum (4. & 7. *l.* 1.) Ergo cùm ex puncto D. rectæ DHA. DGC. sint in eadem ratione diuisæ, erunt etiam BEA. BFC in ipsamet ratione diuisæ (74 *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVI.

Omne Quadrilaterum habet centrum ff. ss. in dimidio rectæ bisecantis diagonales.

EXPOSITIO. Fig. 19.

Sit Quadrilaterum ABCD. eiusque diagonales AC. BD. sint bifariam diuisæ in S. & R. Dico *centr. ff. ss.* ad A. B. C. D. esse in dimidio rectæ R. S. quæ diagonales bifariam diuidit.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC. est bifariam diuisa in S. erit S. *centr. ff. ss.* ad A. C. (35. M. 1.) Similiter R. erit *centr. ff. ss.* ad B. D. Ergo *centr. ff. ss.* ad A. B. C. D. erit in recta RS (63 M. 1.) Ergo si RS. bifariã diuidatur, duæ figuræ similes ex vna parte minimæ erunt duabus similibus ex altera (29. M. 1.) Ergo punctum bisectionis erit *centr. ff. ss.* ad A. B. C. D (64. M. 1.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXVII.

SI recta Quadrilateri latera opposita subcontrariè in eadem ratione secet, etiam bisecantem diagonales in eadem ratione secabit, & se ipsam bifariam.

EXPOSITIO. Fig. 19.

IN quadrilatero ABCD. diagonales sunt AC. DB. quas bisecat RS. & recta GE. subcontrariè secat in eadem ratione latera opposita AB. DC. scilicet DG ad GC. vt BE. ad EA. Dico RO. ad OS. etiam esse vt DG. ad GC. & GE esse bifariam diuisam in O.

DEMONSTRATIO.

PVnctum G. est *centrum ff. dd.* nempè quadrati GC. & rectanguli DGC (35. M. 1.) & cum BA. sit diuisa, similiter est E. simile *centrum* ad B. & A. Ergo cum figuræ ad D. & C. similes sint figuris ad B. & A. in medio rectæ GE. erit *centr. ff.* ad A. B. C. D. (64. M. 1.)

Deinde cum figuræ ad A, & C. similes sint, nempè quadrata, & AC. bifariam sit diuisa in S. erit S. *centr. ff. ff.* vel quadratorum (35. M. 1.) & similiter quia figuræ ad D. & B. similes sunt, nempè rectangula similia DGC. BEA. erit R. *centrum* rectãgulorum similium, quia DB. est bifariam diuisa in R. (35. M. 1.) Ergo *centr. ff.*

ad

ad A. C. D. B. erit in recta R S. (63. M. 1.) sed si recta R S. diuisa sit in O. in ratione DG. ad GC. duo rectangula ROS. erunt similia rectangulis DGC. BEA. & erunt minima duobus quadratis OS. propter altitudinem æqualem (10. M. 1.) Ergo erit punctum O. *centr. ff.* ad A. B. C. D. (64. M. 1.) Ergo cum *centr. ff.* sit in dimidio GE. & in recta R S. diuisa vt DG. ad GC. erit in communi sectione O. Ergo punctum O. diuidit R. S. in ratione laterum, & GE. Bifariā. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVIII.

SI duæ rectæ secent quadrilateri opposita latera subcontrariè in eadem ratione, locus intersectionis ipsarum est in bisecante diagonales similiter diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt quadrilaterum ABCD. & diagonales AC. BD. quas bisecet RS. & GE. HF. secent opposita latera subcontrariè in eadem ratione, scilicet DG. ad GC. vt BE. ad EA. & ita GH. ad HA. & BF. ad FC. Dico punctum O. in quo se intersecant GE. HF. esse in recta R S. diuisa vt DG. ad GC.

DEMONSTRATIO.

CVm DG. ad GC. sit vt BE. ad EA. recta GE. se-

secabit RS. in eadem ratione (77. p.) & quia DH. ad HA. est vt BF. ad FC. recta HF. secat RS. in eadem ratione DH. ad HA. (77. p.) Ergo cũ ratio DG. ad GC. sit eadem, quæ DH. ad HA. vtraque recta GE. HF. secat rectam RS. in eadem ratione, hoc est in eodem puncto O. rectæ RS. Ergo locus intersectionis rectarum GE. HF. est recta RS. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXIX.

Si recta secans opposita latera quadrilateri, secet vnum latus in ratione bisecantis diagonales, secabit etiam latus reliquum subcontrarie in ratione bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Recta GE. secet DC. AB. in G. & E. & sit DG. ad GC. vt RO. ad OS. Dico etiam BE. ad EA. esse vt RO. ad OS.

DEMONSTRATIO.

Intelligantur in A. & C. duo quadrata : & in D. & B. duo rectangula similia ▭ ROS. vel ▭ CGD. Cùm A. C. sint *ff. ss.* erit S. *centr. ff. ss.* ad A. C. & quia D. B. sunt *ff. ss.* erit R. *centr. ff. ss.* ad D. B (35. M. 1.) Ergo cùm RS. sit diuisa in O. vt DC in G. erit O. *centr. ff.* ad A. B. C. D (64. M. 1) Ergo cùm G. sit *centrum* ad D. C. (35. M. 1.) recta GOE. transit per E *centrũ* ad A. B (63. M. 1)

Er-

Ergo cùm figuræ B.A. similes sint D. & C. erit BA. diuisa in E. sicut DC. in G (30. M. 1.) Quod, &c.

PROPOSITIO LXXX.

Quodlibet punctum bisecantis diagonales quadrilateri est centr. ff. dd. quarum duæ opposita sint quadrata, & reliquæ rectangula similia rectangulo ex partibus bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Recta RS. bisecat diagonales. Dico quod*li*bet punctum O. esse *centrum* ad quadrata A.C. & ad rectangula D.B. similia ▭ ROS.

DEMONSTRATIO.

Cum Quadrata A.C. similia sint, & AC. bisecta in S. erit S. *centr. ff. ss.* ad A.C. & similiter R. ad ▭ D. & ▭ B. (35. M. 1.) sed RS diuisa est in O. vt duo rectangula ROS. minima sint duobus quadratis OS (10. M. 1.) Ergo erit O. *centr. ff.* ad duo quadrata A. C. & duo rectangula D.B. similia ▭ ROS (64. M. 1.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXI.

QVodlibet punctum bisecantis diagonales quadrilateri est centr ff. ss parallelogrammi secantis latera circa oppositos angulos in ratione bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

REcta RS. bisecat diagonales. Dico quodlibet punctum O. esse *centr ff. ss.* parallelogrāmi EFGH secantis latera circa oppositos angulos D. B. in ratione RO. ad OS. incipiendo à punctis eiusdē diagonalis: D. R. B. nempè DG. ad GC. & DH ad HA. & BF. ad FC. & FE. ad EA. esse vt RO. ad OS.

DEMONSTRATIO.

SVmantur DC. DA. diuisæ in G. & H. vt RO. ad OS. ducta GOE. erit BE. ad EA. vt RO. ad OS. & ducta HOF. erit BF. ad FC. vt RO. ad OS. (79. *p.*) Ergo cū latera circa angulos D. B. sint in eadem ratione diuisa, erit EFGH. parallelogrammum (73. *p.*) Ergo punctum O vbi secantur diametri AC. DB. erit *centr. ff. ss.* parallelogrammi EFGH. (55. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXII.

EX omnibus parallelogrammis secantibus latera Quadrilateri proportionaliter, solum quod diuidit bifariam latera habet commune centrum ff. ss. & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt Quadrilaterum ABCD. & parallelogrammum EFGH diuidit bifariam latera. Dico vtrumque habere commune *centrum ff. ss.* & nullum aliud posse idem *centrum* habere, & *è conuerso*. Si EFGH. habeat idem *centr. ff. ss.* & secet proportionaliter latera. Dico secare illa bifariam.

DEMONSTRATIO.

CVm recta GE bifariam secet latera opposita, in eius dimidio O. est *centr. ff. ss.* quadrilateri ABCD. (68 *p*) sed etiã quia GE. est diameter parallelogrammi in eius dimidio O est *centr. ff. ss.* parallelogrammi EFGH (55. *p.*) Ergo vtrumque habet idem *centr. ff. ss.* Quod erat.

Deinde cùm *centr. ff. ss.* quadrilateri ABCD. sit in dimidio rectæ RS (76. *p*) sed pũctum O. est *centrum ff. ss.* parallelogrammi secantis latera in ratione RO. ad OS. (81. *p.*) Ergo cũ RS. sit bifariam diuisa, solum parallelogrammum di-

diuidens bifariam latera habebit *centr. ff. ff.* in O. Quod &c.

Econuerso si ABCD. & EFGH. habeant idem *centr. ff. ff* O. erit in medio RS (76. *p.*) Ergo parallelogrammum EFGH secabit latera in eadem ratione, scilicet bifariam (81. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXIII.

IN Quadrilatero minima summa ff. ff. æqualis est semisummæ ff. ff. ex lateribus oppositis cũ simili figura recta bisecantis latera.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt Quadrilaterum ABCD. & GE. bifariam secet latera opposita, in cuius medio O. erit *centr. ff. ff* (68. *p.*) Ductis AO. BO. CO DO. harum figuræ erunt minimæ. Dico igitur minimam summã *ff. ff.* AO. BO. CO. DO. esse æqualem semisummæ *ff. ff.* AB. DC. cum tota figura GE.

DEMONSTRATIO.

CVm AB. DC. bisectæ sint in E. & G. erit E. *centr.* ad A.B & G. ad D.C (35. M. 1.) Ergo figuræ OA. OB. æquales sunt *ff.* AE + EB + 2OE. (32. M. 1.) Similiter *ff.* DO. OC. æquantur 2 *ff.* DG + GC + 2GO sed figura GE. æqualis est 4 *ff.* GO (2. L. 2.) vel 2 GO + 2OE. & cum AB. æqualis sit 4ff. AE. sunt AE + EB. dimidium figuræ AB. & similiter DG + GC. sunt dimidium figuræ DC (3.*l*.2.) Ergo ff. ss. AO. BO. CO. DO. cùm sint æquales AE + EB + 2EO. & DG + GC + 2GO. æquales etiam erunt dimidio ff ss. AB. DC. & figuræ ex integra GE. Similiter demonstrabitur AO. BO. CO. DO. æquales esse dimidio ff. ss. AD. BC. cum figura ex tota HF. Ergo minima summa ff. ss. æqualis est semisummæ ff ss. ex lateribus oppositis cum simili figura ex tota recta bisecante latera. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

IN Quadrilatero figuræ ex lateribus oppositis cum 2ff. ss. ex bisecante reliquis oppositis sunt æquales.

2. *Differentia ff. ss. ex bisecantibus æqualis est semidifferentiæ ff. ex binis lateribus oppositis.*

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt Quadrilaterum ABCD. Dico ff. ss. AB + DC + 2GE. æquales esse ff. ss. AD + BC + 2HF, & differentiam inter ff. GE. & HF. æqualẽ esse semidifferentiæ inter ff. AD + CB. & AB + DC.

DEMONSTRATIO.

QVoniam dimidium ff. ss. AB + DC. cũ tota

GE.

GE. æquatur minimæ summæ, cui etiã æquatur dimidium ff. ss. AD + BC. cum tota HF. (83. *p.*) erunt hæ summæ inter se æquales: Ergo earum dupla erunt etiam æqualia, scilicet ff. ss. AB + DC + 2GE. æquabuntur ff. ss. AD + BC + 2HF. Quod erat, &c.

2. Sit □ GE + □ X æquale □ HF. Ergo 2 □ GE + 2 □ X. æquãtur □ HF. sed □ AB + □ DC + 2 □ GE. *æq.* □ AD + □ BC + 2 □ HF (1. *n.*) Ergo □ AB + □ DC + 2 □ GE. *æqu.* □ AD + □ BC + 2 □ GE + 2 □ X. Ergo si vtrinque auferantur 2 □ GE. remanebunt □ AB + □ DC. *æqu.* □ AD + □ BC + 2 □ X. Ergo differentia inter ff. ss. AB + DC. & AD + BC. sunt 2 ff. X. & semidifferẽtia est figura X. sed figura X. est differentia ff. ss. GE. & HF. ex *hypoth.* Ergo differentia ff. ss. ex bisecantibus GE. & HF. æqualis est semidifferentiæ ff. ss. ex binis lateribus oppositis AB + DC. & AD + BC. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXV.

IN Quadrilatero summa ff. ss. ex bisecantibus latera opposita æquatur ff. ss ex bisecantibus cõterminia: summa vero ff. ss. ex diagonijs vniuscuiusque est dupla, & vtrique simul æqualis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

REctæ GE. HF. bisecant latera opposita, & EF.

EF.FG.GH. HE. conterminia, diagonia verò sunt AC. DB. Dico igitur ff. ss. GE+HF. æquales esse ff. ss. EF+FG+GH+HE. cum ff. ss. AC +DB. duplas esse ff. ss. GE+HF. vel EF+FG +GH+HE. vnde ff. ss. AC+DB. æquales esse ff. ss. GE. HF. EF. FG. GH. HE.

DEMONSTRATIO.

CVm latera sint proportionaliter secta nēpè bifariam, est EFGH. parallelogrammū (73.p.) Ergo ff. ss. GE. HF. æquales sunt ff. ss. EF. FG. GH. HE. (57.p.)

2. Quia vt AH. est dimidium AD. ita AE. ipsius AB sunt HE. DB. parallelæ, & vt AH. est dimidium AD. ita HE. ipsius DB. & similiter FE. ipsius AC. (2. l. 6) Ergo □ HE. est quarta pars □ DB. & □ FE. est quarta pars □ AC (3 l. 2.) Ergo cum HE. & GF. sint quales (7. l. 1.) erunt □ HE+□ GF. dimidium □ DB. & similiter □ EF+□ HG. dimidium □ AC. Ergo ff. ss. DB. AC. sunt duplæ figurarum similium EF. FG. GH. HE. sed figuræ GE HF. sunt æquales ipsis EF. FG. GH. HE (84. p.) Ergo etiam fig ss. DB. AC. duplæ sunt ff. ss. GE. HF. Vnde etiam ff. ss. BD. AC. æquales erunt vtrique summæ, scilicet ff. ss. GE. HF. EF. FG. GH. HE. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI.

In quadrilatero minima summa ff. ff. est quarta pars ff. ff. ex lateribus, & diagonijs simul.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Centrum ff. ff. quadrilateri ABCD. sit O. Dico minimam summam ff. ff. AO. BO. CO. DO. esse quartã partem ff. ff. AB. BC. CD. DA. AC. DB.

DEMONSTRATIO.

Minima sũma ff. ff. AO. BO. CO. DO. æqualis est dimidio ff. ff. AB. DC cum simili figura GE (83. *p.*) Similiter eadẽ minima summa æqualis dimidio ff. ff. DA. BC. cum simili figura HF (83. *p.*) Ergo duæ minimæ summæ æquantur dimidio ff. ff. ex omnibus lateribus AB. BC. CD. DA. cũ similibus figuris GE. HF. Ergo si vtraque pars bifariam diuidatur, vna minima summa ff. ff. æqualis erit quartæ parti summæ ff. ff. ex omnibus lateribus AB. BC. CD. DA. cum dimidio ff. ff. GE. HF. sed figuræ GE. HF. sunt dimidium ff. ff. ex diagonijs AC. DB (85. *p.*) Ergo dimidium ff. ff. GE. HF. æquabitur quartæ parti ff. ff. ex diagonijs AC. DB. Ergo si pro dimidio ff. ff. GE. HF. substituatur quarta pars ff. ff. ex diagonijs AC. DB. erit minima summa ff. ff. æqualis quartæ parti ff. ff. ex omni-

omnibus lateribus AB.DC.CD.DA. cũ quarta parte simul ff.ff. ex diagonijs AC.DB. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXVII.

IN quadrilatero Minima summa ff.ff. æqualis est dimidio ff.ff. ex diagonibus cum simili figura ex recta bisecante ipsas.

EXPOSITIO. Fig. 20.

RECta SR. bisecat diagonales AC. DB. & in illius dimidio O. est *centrum ff.ff.* (76.p.) Dico minimam summam ff.ff. AO. BO. CO. DO. æqualem esse dimidio ff.ff. AC. DB. cum simili figura SR.

DEMONSTRATIO.

CVm AC.DB. sint bifariam diuisæ est S. *cētr.* ff.ff. ad A.C. & R. ad D.B. (35.M. 1.) Ergo cum O. sit extra *centra* S.R. erunt figuræ AO. CO. æquales 2ff.ff. AS.SC+2SO (60.M. 1.) tũ BO.DO. æquales sunt 2ff. DR.RB+2OR. (60. M. 1.) Ergo AO.CO.BO.DO. scilicet minima summa ff.ff. æqualis est 2ff. AS. 2SC. 2DR. 2RB. 2SO. 2OR. sed cum omnes rectæ sint bifariam diuisæ, est figura totius quadrupla figuræ ex dimidia recta (3.l.2.) Ergo 2ff. AS+2SC+2DR+2RB. æquales dimidio ff.ff. AC. DB. & 2SO+2OR. æquales sunt figuræ SR.

Er-

Ergo *ff* *ss*. AO. BO. CO DO. æquales dimidio *ff*. *ss*. AC. DB. cũ simili figura ex tota SR Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXVIII.

IN quadrilatero figuræ ex lateribus æquantur figuris similibus ex diagonalibus, & ex dupla bisecante ipsas.

EXPOSITIO. Fig. 20.

REcta R S. bisecat diagonia A C. D B. Dico summam *ff*. *ss*. AB. BC. CD. DA. æqualem esse figuris similibus AC. DB. cum simili figura duplæ RS.

DEMONSTRATIO.

MInima sũma *ff* *ss*. AO. BO. CO. DO. æquatur dimidio *ff*. *ss*. AC. DB. cum simili figura RS (87. *p.*) sed eadem minima summa est quarta pars *ff* *ss*. AB BC. CD. DA. AC. DB (86. *p.*) Ergo dimidium *ff*. *ss*. AC. DB. cum simili figura RS. est quarta pars *ff*. *ss*. AB. BC. CD. DA. AC. DB. Ergo vtriusque partis quadruplum æquale est: nẽpè 2 AC. 2 DB. 4 RS *æqu*. AB. BC. CD. DA. AC. DB. Et si vtrinque auferantur semel AC. DB. erunt *ff*. *ss*. AB. BC. CD. DA. *æqu*. AC. DB + 4 RS. vel + figura duplæ R S. quæ est *æq*. 4 RS (3. *l*. 2.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXIX.

SI recta bifariam secet opposita latera quadrilateri, quodlibet rectæ punctum est cētr. ff dd. quarum binæ sint quadrata, & binæ rectangula similia illi, quod fit ex partibus rectæ.

EXPOSITIO. Fig. 21.

REcta GE. bifariam secet opposita latera A B. DC. Dico quodlibet pūctum L. rectæ EG. esse *centr. ff. dd.* quarum D. C. sint quadrata, & A. B. rectangula similia rectangulo E L G. ex partibus rectæ.

DEMONSTRATIO.

CVm AB sit bifariam diuisa in E. erit E. *cētr. ff. ss.* ad A. B. quæ figuræ similes sint ▭ E L G. (35. M. 1.) Similiter G. erit *centr. ff. ss.* ad D. C. quæ figuræ sint quadrata: Ergo in recta GE. erit *centr. ff.* ad A. B. D. C (63. M. 1.) Ergo cum GE. ita sit diuisa in L. vt duo quadrata GL. minima sint duobus rectangulis ELG. (10. M. 1.) erit L *centr. ff.* ad A. B. C. D. (64. M. 1.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XC.

SI è duabus rectis altera bisecet opposita latera quadrilateri, & altera in quacumque simili ratione secet reliqua latera; se ipsas in iisdem rationibus opposite secant; & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN quadrilatero ABCD. rectæ EG. bisecat latera opposita AB. CD. & recta HF. simili ratione secat reliqua latera AD. BC. nempè DH. ad HA. vt CF. ad FB. Dico HF. esse bifariam diuisam in L. & GL. ad LE. esse vt DH. ad HA. *Et èconuerso*, si GE. bifariam diuidat opposita latera, & sint DH. ad HA. vt GL. ad LE. Dico etiã esse CF. ad FB. vt DH. ad HA. vel GL. ad LE.

DEMONSTRATIO.

QVoniam rectangulum AHD. & quadratũ HD. habent æqualem altitudinem HD. sunt figuræ minimæ (10. M. 1.) Ergo cum recta DA, sit diuisa in figuras minimas, erit H, *centr. ff* ad A. D. (34. M. 1.) Eadem ratione cum BC. sit diuisa similiter, erit F. *centr. ff.* ad BC. Ergo *cẽtr ff.* ad A. B. C. D. est in recta HF (63. M. 1) & quia figuræ A. D. similes sunt ipsis B. C. erit *centr. ff.* ad A. B. C. D. in dimidio rectæ HF. (64. M. 1.)

Insuper cùm quadrata D. C. similia sint: &

 etiam

etiam rectangula A.C.& rectæ DC. AB bifariam diuisæ, erit G. *centr. ff ss*. ad D.C. & E. ad A B. 35.M.1.) Ergo *centr ff*. ad A.B.C.D. erit in recta EG (63.M.1.) Ergo cũ *centr. ff*. sit in vtraque recta HF. EG. erit in communi sectione L. Ergo recta EG. diuisa est in L. vt duo rectan gula supra EL. similia dato A H D. minima sint duobus quadratis supra LG. similibus dato HD (64.M.1.) Ergo recta EG. diuisa est in L. sicut AD in H. (30.M.1.) Ergo cum HF. sit bifariam diuisæ in L sicut DC. in G. & EG. sit diuisa in L. sicut AD. in H. rectæ HF. EG. se ipsas in ijsdem rationibus opposite secãt. Quod erat, &c.

Conuersa demonstratur. Quoniam si CF. ad FB esset vt DH. ad H A. recta H F. transiret per punctum L. vt modo demonstratum est: Ergo cum eadem recta sit FLH. & HLF. recta HL cõtinuata trãsit per F. & efficit CF. ad FB. vt DH. ad HA. & vt GL ad LE. & erit HF. bisecta in L. vt antea. Quod erat, &c.

PBO-

PROPOSITIO XCI.

SI recta secet opposita quadrilateri latera in eadem ratione, & alia per eius dimidium sit in eadem ratione secta, hac secabit bifariam reliqua latera non parallela.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN quadrilatero ABCD. recta HE. secat in eadem ratione latera DA. CB. & per eius dimidium L. recta GLE. sit in eadem ratione secta. Dico GE. bifariam diuidere latera DC. AB. si hæc non sint parallela.

DEMONSTRATIO.

SI enim recta GE. non diuidit bifariam latera DC. AB. præstet hoc recta XZ. quæ transibit per L. & erit XL ad LZ vt DH. ad HA. (90. *p.*) sed *ex hyp.* GL. ad LE. est vt DH. ad HA. Ergo XG. & EZ. erunt parallelæ, quod est contra hypothesim: Ergo impossibile est rectã GLE. sectam esse in ratione DHA. quin bisecet latera non parallela DC. AB. Quod erat, &c.

etiam rectangula A.C.& rectæ DC. AB bifariam diuisæ, erit G. *centr. ff ss*. ad D.C. & E. ad A B. 35.M.1.) Ergo *centr ff*. ad A.B.C.D. erit in recta EG (63.M.1.) Ergo cũ *centr. ff*. sit in vtraque recta HF. EG. erit in communi sectione L. Ergo recta EG. diuisa est in L. vt duo rectangula supra EL. similia dato AHD. minima sint duobus quadratis supra LG. similibus dato HD (64.M.1.) Ergo recta EG. diuisa est in L. sicut AD. in H. (30.M.1.) Ergo cum HF. sit bifariam diuisæ in L sicut DC. in G. & EG. sit diuisa in L. sicut AD. in H. rectæ HF. EG. se ipsas in ijsdem rationibus opposité secãt. Quod erat, &c.

Conuersa demonstratur. Quoniam si CF. ad FB esset vt DH. ad HA. recta HF. transiret per punctum L. vt modo demonstratum est: Ergo cum eadem recta sit FLH. & HLF. recta HL cõtinuata trãsit per F. & efficit CF. ad FB. vt DH. ad HA. & vt GL ad LE. & erit HF. bisecta in L. vt antea. Quod erat, &c.

PBO-

PROPOSITIO XCI.

SI recta secet opposita quadrilateri latera in eadem ratione, & alia per eius dimidium sit in eadem ratione secta, hæc secabit bifariam reliqua latera non parallela.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN quadrilatero ABCD. recta HE. secat in eadem ratione latera DA. CB. & per eius dimidium L. recta GLE. sit in eadem ratione secta. Dico GE. bifariam diuidere latera DC. AB. si hæc non sint parallela.

DEMONSTRATIO.

SI enim recta GE. non diuidit bifariam latera DC. AB. præstet hoc recta XZ. quæ transibit per L. & erit XL ad LZ vt DH. ad HA. (90. *p.*) sed *ex hyp.* GL. ad LE. est vt DH. ad HA. Ergo XG. & EZ. erunt parallelæ, quod est contra hypothesim: Ergo impossibile est rectā GLE. sectam esse in ratione DHA. quin bisecet latera non parallela DC. AB. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XCII.

SI recta bisecet opposita latera quadrilateri, & alia ipsam secans sit bifariam diuisa, secabit reliqua latera in ratione prioris.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN quadrilatero ABCD. recta GE. bisecat latera DC. AB. & HLF. est bifariam secta in L. secans latera reliqua DA. CB. nō parallela. Dico DHA. CFB. sectas esse, sicut GLE.

DEMONSTRATIO.

SI enim HLF. nō secat latera in ratione GLE. fiat DP. ad PA. vt GL. ad LE. & erit etiam CR. ad RB. vt GL. ad LE. & PR. bifariā diuisa in L. (60. *p.*) Ergo cum HL. ad LF. sint in ratione æqualitatis, sicut PL. ad LR. erunt PH. & FR. parallelæ. (1. *l.* 6.) Quod est cōtra hypothesim. Ergo nulla recta HLF. quæ non secet latera in ratione GLE. poterit esse bifariam secta in L. Ergo, &c. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XCIII.

SI recta bisecet quadrilateri opposita latera, & alia diametros secet in quacumque ratione similiter, intersectio erit cẽtrum ff. dd. quarum duæ sint quadrata, & duæ rectangula similia illis, quæ ex partibus diametrorum fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 22.

REcta GE. bisecat latera DC. AB. & RS. secat DR. ad RB. vt CS. ad SA. Dico intersectionẽ L. esse *centr. ff. dd.* quarum D. C. sint quadrata, & A. B. rectangula similia rectangulo DRB. vel CSA.

DEMONSTRATIO.

QVoniam DC. est bifariam diuisa erit G. *centr.* quadratorũ D. C. (35. M. 1.) & quia AB. est bifariam diuisa, erit E. *centr.* rectangulorũ A. B. similium ipsis ASC. BRD (35. M. 1.) Ergo in recta GE. erit *centr.* □ D. □ C. ▭ A. ▭ B. (63. M. 1.)

Deinde S. est *centr. ff. dd.* nempè □ C. ▭ A. similis ASC (35. M. 1.) & similiter R. est *centr.* □ D. ▭ B. similis BRD. vel ASC (35. M. 1.) Ergo in recta RS. erit *centr. ff. dd.* nempè □ D. □ C. ▭ A. ▭ B (63. M. 1.) Ergo cùm idem *centrum* sit in vtraque recta GE. RS. erit in earum sectione L. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCIV.

SI recta bisecet Quadrilateri opposita latera, & alia diametros in quacumque simili ratione, se ipsas pariter in ijsdem rationibus oppositè secant.

EXPOSITIO. Fig. 22.

REcta GE. bisecat DC. AB & recta R S. secat similiter DB. AC. Dico RS. bisectam esse in L. & GL. ad LE. esse vt DR. ad RB.

DEMONSTRATIO.

QVoniam G. est *centr. ff. ss.* □ D. □ C. & E. *centr. ff. ss.* ▭ A. ▭ B. (35. M. 1) & L. est *cētr. ff. dd.* ad A. B. C. D. (93. *p.*) erit GE. diuisa, vt duo quadrata GL. minima sint duobus rectangulis supra LE. similibus dato BRD (64. M. 1.) Ergo cum EG. diuisa sit in L. in figuras minimas, sicut BD. in R. erit GL. ad LE. vt DR. ad RB. (30. M. 1.)

Deinde cùm R. sit *centr. ff.* □ D. ▭ B. & S. sit *centr. ff.* □ C. ▭ A. (35. M. 1.) quoniam □ D ▭ B. similes figuræ sunt □ C ▭ A. *centr. ff dd.* A. B. C. D. erit in dimidio rectæ RS (64. M. 1.) sed *centr. ff. dd.* A. B. C. D. est punctum L. (93. *p.*) Ergo recta RS. erit bifariam diuisa in L. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCV.

SI è duabus rectis altera diagonales quadrilateri similiter secet, altera verò latera subcontrariè in quauis alia ratione, se ipsas pariter in iisdem rationibus oppositè secant: & qualibet est locus sectionis alterius.

EXPOSITIO. Fig. 22.

REcta RS. secat diagonia AS. ad SC. vt BR. ad RD. & IK. secat latera opposita subcontrariè in quauis alia ratione. DI. ad IC. vt BK. ad KA. Dico RS. & IK. secari oppositè in easdē rationes: nempè RM. ad MS. vt DI. ad IC. & IM. ad MK. vt DR. ad RB. &c.

DEMONSTRATIO.

PRimo diuidat GE. latera opposita æqualiter, & erit GL. ad LE. vt DR. ad RB. tum RL. ad LS. vt DG. ad GE. (94. *p.*) Deinde si DG. & EB. diuidantur bifariam in I. & K. & ductæ intelligantur DE. BG. erit DEBG. quadrilaterum, & GE. DB. diametri: Ergo cum RL. secet in eadem ratione diametros, nempè DR. ad RB. vt GL. ad LE. erit etiam IM. ad MK. vt DR. ad RB. & RM. ad ML. vt DI. ad IG. (94. *p.*) Ergo & componendo RM. ad RM + ML. vt DI. ad DI + IG. (4. *l.* 5.) hoc est vt RM. ad MS. vt DI. ad IG. &c.

Tandem si IG. & EK. bifariam diuidantur

P in

in X. & Z. tum DI. & KB, & ita infinitè eadem erit demonstratio: Ergo de quacumque recta IK. subcontrariè diuidente latera in eadem ratione concludetur diuidi in M. vt DB. in R. & RS. in M. vt DC. in I. Quod erat, &c.

Hæc demonstratio ostensiua est de continua bisectione, illatio verò vniuersalis cõcluditur ad modum primæ libri sexti Elementorum Euclidis.

Vnde fit rectam RS. esse locum vbi quæuis recta IK. subcontrariè diuidens latera opposita, secatur vt diametri; & rectam IK. locum esse vbi quæuis RS. secans diametros in eadem ratione, secatur vt latera.

PROPOSITIO XCVI.

SI duæ rectæ diuidant in eadem ratione latera opposita, & diametros Quadrilateri, erunt ipsæ bifariam diuisæ, & locus intersectionis ipsarum erit recta bisecans reliqua latera.

EXPOSITIO. Fig. 22.

REcta HF. diuidit latera DA. CB. & RS. diametros DB. CA. in eadem ratione: & recta GE. bisecat reliqua latera DC. AB. Dico rectas HF. & RS. bifariã secari in L. & intersectionẽ L. esse in recta GE.

DEMONSTRATIO.

QVoniam HF. secat in eadem ratione latera; erit GL. ad LE. vt DH. ad HA (90. *p.*) Similiter quia RS. in eadem ratione secat diametros, erit GL. ad LE. vt DR. ad RB (94. *p.*) hoc est vt DH. ad HA. *ex hypothesi*: Ergo vtraque recta intersecatur in eodem puncto L. rectæ GE. sed HF. est bifariam diuisa in L. (90. *p.*) & RS. bifariam diuisa in L. (94. *p.*) Ergo mutuo bisecantur; & locus intersectionis est recta GE. Quod, &c.

PROPOSITIO XCVII.

SI duæ rectæ in eadem ratione diuidant latera opposita quadrilateri, & diametros, quæ extrema coniungunt. efficiunt parallelogrammum, cuius centr. ff. ss. est in bisecante reliqua latera similiter diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 22.

REcta HF. diuidit latera DA. CB. in eadẽ ratione, & similiter RS. diametros DB. CA. Dico HR. RF. FS. SH. efficere parallelogrammum, cuius *centr. ff ss.* est L. in recta GE. bisecante latera DC. AB. & GL. ad LE. vt DR. ad RB.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in △ ABD. recta HR in eadem ratione diuidit latera DA. DB. sunt HR. AB. parallelæ (2. *l.* 6.) Similiter in △ ABC. sunt SF. AB. parallelæ: Ergo HR. SF. sunt inter se parallelæ. Deinde in △ DCA. sunt DC. HS. parallelæ, & in △ DCB. sunt DC. RF. parallelæ (2. *l.* 6.) Ergo sunt HS. RF. parallelæ inter se, & HRFS. parallelogrammum: Ergo æquales sunt HR. SF. tum RF. HS. (7 *l.* 1.) Ergo cum HF. RS. sint diametri, & earũ intersectio sit *centr. ff. ss.* (55. *p.*) & locus intersectionis sit recta GE, (96. *p.*) erit L. *centr. ff. ss.* parallelogrãmi in recta GE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCVIII.

SI recta in eadem ratione diuidat quadrilateri diametrum, & secantem subcontrariè similiter opposita latera, reliquã diametrum in eadem ratione diuidet, & ipsa diuidetur vt latera.

EXPOSITIO. Fig. 22.

RECta GE. diuidat subcontrariè latera DG. ad GC. vt BE. ad EA. in quacumque ratione: & RLS. efficiat DR. ad RB. vt GL. ad LE. Dico etiam CS. ad SA. esse vt GL. ad LE. & RL. ad LS. esse vt DG. ad GC.

DEMONSTRATIO.

QVoniam si CS. ad SA. sit vt DR. ad RB. transit RS. per L. vbi est GL. ad LE. vt DR. ad

RS.

RS. & RL. ad LS. vt DG. ad GC. (95. *p.*) Ergo cum recta RS. transeat per L. recta RL. transit per S. efficiens easdem rationes. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XCIX.

SI recta in eadem ratione subcontrariè secet latera opposita quadrilateri; & per quodlibet eius punctum ducatur alia inter diametros diuisa vt latera, diametros hæc diuidet in ratione prioris: Vnde prior locus est, &c.

EXPOSITIO. Fig. 22.

REcta GE subcontrariè efficiat in quacumque ratione DG. ad GC. vt BE. ad EA. & per quodlibet punctũ L. rectæ GE. trãseat RLS. inter diametros vt RL. ad LS. sit veluti DG. ad GC. Dico DR. ad RB. & CS. ad SA. esse vt GL. ad LE. &c.

DEMONSTRATIO.

SI non ita, fiat DP. ad PB. vt GL. ad LE. & ducta PLQ. erit CQ. ad QA. vt GL. ad LE. & PL. ad LQ. vt DG. ad GC (98. *p.*) Ergo etiam erit vt RL. ad LS. ita PL ad LQ. (1. *l* 5.) Ergo PR. & SQ. vel diametri DB & CA. erunt parallelæ (2. *l*. 6.) quod est impossibile: Ergo nulla recta præter RS. potest in eadem ratione secare diametros. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO C.

Recta quæ in eadem ratione subcontrariè secat latera opposita, secat etiam diametros in eadem ratione, & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta GE. secat opposita latera DG. ad GC. vt BE. ad EA. in quacunque ratione, & diametros DB. CA. in z. & x. Dico Dz. ad zB. esse vt Cx. ad xA. & econuerso si Cx. ad x A. sit vt Dz. ad zB. & zx. secet latera in G. & E. erit DG. ad GC. vt BE. ad EA.

DEMONSTRATIO.

Intersegmentum xz. diuidatur in o. vt zo. ad ox. sit veluti DG. ad GC. Quoniam punctum o. est in recta GE. & zx. transit per o. diuisa zo. ad ox. vt DG. ad GC. secabit zx. vel GE. diametros in eadem ratione (99. p.) Ergo Dz. ad zB. est vt Cx. ad xA. Quod erat, &c.

Conuersa patet, quoniam si GE. transit per x. & z. necessariò xz. transibit per G & E &c.

PRO-

PROPOSITIO CI.

Omnes rectæ secantes subcontrariè similiter opposita latera quadrilateri, diuiduntur vt diametri à bisecante latera; & intersegmentum bisecantis diuiditur vt latera.

Consect. *Intersegmentum est locus vbi quæuis subcontraria secatur vt diametri.*

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta IK. in quacunque ratione efficiat subcontrariè DI. ad IC. vt BK. ad KA. & GE. diuidat bifariam eadem latera in G. & E. & secet diametros in x. & z. eritque xz. intersegmentum, vel pars bisecantis à diametris intercepta. Dico IK. secari in o. vt diametri in x. & z. & z.x. secari vt latera in I. & K. nempè Io. ad oK esse vt Dz. ad zB. vel vt Cx. ad xA. & zo. ad ox. esse vt DI. ad IC. vel vt BK. ad KA. Vnde xz. locus est vbi quæuis IK. subcontrariè secans latera opposita diuiditur in ratione Dz. ad zB.

Idemque est de recta XZ. si ducatur vel quæuis alia, &c.

DEMONSTRATIO.

Qvoniam GE. bisecat latera, erunt subcontrariè vt DG. ad GC. ita BE. ad EA. Ergo GE. secat diametros in eadem ratione Dz. ad zB. vt Cx. ad xA (100. p.) sed IK. subcontrariè

se-

secat latera in eadem ratione ex *hyp.* & *xz.* quæ est ipsa GE. diametros etiam secat in eadem ratione: Ergo IK. & *xz.* secantur invicem oppositè in iisdē rationibus, nempè I*o.* ad *o* K. vt D*x.* ad *z*B. vel vt C*x.* ad *x*A. & *zo.* ad *ox.* vt DI. ad IC (95.*p.*) Quod erat, &c.

CONSECTARIUM.

SAtis perspicuum est, Quoniam si quævis rectæ IK. XZ. secantes subcontrariè latera in eadem ratione diuidantur vt D*z*. ad *z*B. quarum sectio incidet in aliquod punctum rectæ *xz.* vt patet ex demonstratis. Quod etiam liquet ex 95. *prop.*

PROPOSITIO CII.

SI in quolibet polygono ommissis singulis angulis reliquorum centra inueniantur à quibus ducantur rectæ ad ommissos angulos, omnes in eodem puncto se in eadem ratione secabunt: & centra constituent simile polygonum inuersum, & parallelum priori, cum eodem centro ff. ss.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Quadrilaterum, vel Pentagonum, &c. ABCD. & ommisso angulo A. sit E. *centr. ff. ss.* angulorum B. C. D. & E. *centr.* C. D. A. & H. *centr.* D. A. B. & G *centr.* A. B. C. Dico rectas FA. EB. HC. GD. omnes in eodem puncto L. secari in ea-

eadem ratione, & EFGH. esse figuram similē BADC. inversam, & EF. esse parallelam A B. tum EH. CB. tum HG. DC. tum GF. DA. & I. esse commune *centr. ff. ss.*

DEMONSTRATIO.

CVm anguli A. B. C. D. in data figura sint quatuor, & F. sit *centr. ff. ss* B. C. D. transibit FA. per I. *centr. ff. ss.* B. C. D. A. & erit FI. quarta pars totius FA (62. M. 1.) Eadem ratione demonstrabitur EB. trāsire per I. & EI. esse quartem partem totius EB. similiter FA. GD. Ergo vt EI ad IB. ita HI. ad IC. & GI. ad ID. & FI. ad IA. Ergo quoniam EI. ad IB. est vt FI. ad IA. sunt EF. & BA. parallelæ (2. l. 6.) & similiter GF. DA. tum GH DC. tum HE CB Cum ergo anguli sint æquales ex parallelismo H. C. tum G. D tum F. A. tum EB. & latera proportionalia HG. ad DC. vt EH. ad CB. &c. erunt figuræ similes. Quod erat, &c.

Deindè cum BI. CI. DI. AI. concurrant in I. *centro ff. ss* ABCD & EI. HI. GI. FI. similiter diuidant angulos figuræ similis FEHG. concurrent etiam in *centro ff. ss.* Ergo I. est communè *centrum ff. ss.* vtriusque figuræ A B CD . & FE HG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CIII.

SI in quolibet Polygono æquilatero etiam non regulari ex quolibet puncto ducantur perpẽdiculares in latera, omnium summa æqualis est summæ perpendicularium ex centro ff. ss. & semper est eadem.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Pentagonum æquilaterum A B C D E, & *centr. ff. ss.* F. si sumatur intra Polygonum quodlibet punctum X. vel Z. Dico summam perpendiculorum ex X. vel Z. æqualem esse summæ ex F. & ex X. & Z. esse eandem.

DEMONSTRATIO.

DVcantur FA. FB. FC. FD. FE. tum XA. XB. XC, XD. XE. & perpendicula ex F. & X. Quoniam triangula ABF. ABX. habent eandem basim, se habent vt perpendicula (1. *l.* 6.) Idemque est de reliquis: & de summa ad summam: Ergo quia summa triangulorum in F. æqualis est summæ triangulorum in X. etiam summa perpendiculorum, prout in 49. *prop.* Quod, &c.

CA-

CAPVT III.

DE FIGVRIS REGVLARIBVS.

TAndem ad regulares figuras pervenimus, in quibus Minimorum dignitas, & præstantia luculentius apparebit; cum omnia, quæ Magnus Euclides in decimo tertio libro de ordinatis spatijs demõstrabit, & multa non ignobilia Campani, & Hypsiclis Theoremata, aspera quidem, & senticosa, imò pleraque alia studioso, vt spero, Iucunda Minima huius Geometriæ beneficio clarius, & facilius mirabili quodam compendio plana, & cuius obvia fiant. Prius tamen aliqua de recta proportionaliter secta venient exponenda, quæ, licet ex decimo tertio Elementorum supponi potuissent, nè tamen Lectorem extra nostram Geometriam progredi cogeremus, non licuit hac in parte ommitti.

PROPOSITIO CIV.

SI recta sit proportionaliter secta, & toti addatur maius segmentum, composita erit proportionaliter diuisa.

2. *Si autem minus auferatur à maiori, hoc erit proportionaliter sectum.*

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt AC. proportionaliter secta in B. & continuetur CD. æqualis maiori segmento BC. Dico CA. esse in B. proportionaliter sectam.

2. Sit DA. proportionaliter secta in C. & fiat CB. æqualis minori segmento CD. Dico AC. esse proportionaliter sectam in B.

DEMONSTRATIO.

CVm sint continuæ AB. BC. AC. invertendo erit AC. ad BC. vel CD. vt CB ad AB (4. *l.* 5) Ergo AD. est diuisa in C. vt CA. in B. scilicèt proportionaliter. Est. 5. *lib.* 13. *Eucl.*

2. Cùm sint continuæ DA. AC. CD. erit DA. ad AC vt AC. ad CD. vel CB. Ergo AC. est proportionaliter secta in B. sicut DA. in C. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CV.

SI recta sit proportionaliter secta, & minus extremum assumat dimidium maioris, composita poterit quintuplum assumpti, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt recta proportionaliter secta FH. in G. & GX. sit dimidium segmẽti maioris GH. Dico FX. posse quintuplum ipsius GX. *Econuersò* si FX. posſit quintuplum ipsius GX. & fiat XH. æqualis GX. Dico FH. esse proportionaliter sectam in G.

DEMONSTRATIO.

CVm FG. sit differentia inter FX. & XH. vel XG. erit □ FX. æquale □ XH + ▭ HFG (21 *l.* 2.) sed quia sunt cõtinuæ FG. GH. HF. ex *hyp.* □ GH. æquatur ▭ HFG (1. *l.* 6) Ergo □ FX. *æq.* □ XH + □ GH. sed □ GH. *æq.* 4 □ XH (3. *l.* 2.) Ergo □ FX. *æq.* □ XH + 4 □ XH. hoc est □ FX. *æq.* 5 □ XH Ergo FX. potest quintuplum ipsius XH. Quod erat, &c. Est. 3 *lib.* 13. *Eucl.*

Econuersò si FX. posſit quintuplum ipsius XH. sumatur KM. proportionaliter diuiſa in L. & ZM. sit dimidium segmenti maioris LM. & □ KL. erit æquale 5 □ ZL. vt demonstratum est: sed etiam □ FX. est æquale 5 □ GX. ex *hyp.*

Er-

Ergo FH. est proportionaliter secta in G. sicut KM in L. Quod erat, &c.

Conuersa Euclidis non est.

PROPOSITIO CVI.

SI recta sit proportionaliter secta, & maius extremum assumat dimidium totius, composita potest quintuplum assumpti, & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt EG. proportionaliter diuisa in G. & GH. æqualis EG. & GX. dimidium GH. vel EG. Dico FX. compositam ex maiori segmēto FG. & ex GX. dimidio totius posse quintuplum ipsius GX. *Econuersò* si GX. posit quintuplum ipsius XG. vel XH. & fiat GE. æqualis GH. Dico EG. esse proportionaliter sectam in F.

DEMONSTRATIO.

CVm GH. æqualis sit toti GE, illique sit additum maius segmētum GF. erit composita FH. proportionaliter secta in G. (104. *p.*) Ergo cum GX. sit dimidium maioris segmenti GH. erit □ FX. *æq.* 5 □ GX. (105. *p.*) Quod erat, &c. Est 1. *lib.* 13. *Eucl.*

Econuersò si FX. posit quintuplum GX. sumatur IL. proportionaliter secta in K. & LZ. dimidium IL. vel LM. & □ KZ. erit æquale 5 □ LZ. vel ZM. vt demōstratum est: Ergo EH. erit

pro-

proportionaliter secta in G. & E G. in F. sicut KM. in L. & IL. in K. Quod erat, &c. Est. 2. *lib.* 13. *Eucl.*

PROPOSITIO CVII.

SI recta sit proportionaliter secta, composita ex tota, & minori segmento potest quintuplum maioris, & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt PR. proportionaliter secta in Q. & OP. sit æqualis minori segmento PQ. Dico OR. posse quintuplum maioris segmenti QR. Et *econuerso* si OR. posit quintuplum segmenti QR. diuisa OQ. bifariam. Dico PR. proportionaliter fore diuisam in Q.

DEMONSTRATIO.

DIuisa QR. bifariam in S. cùm sint æquales OP. PQ. tum QS SR. erit PS. dimidiũ OR. Ergo □ OR. *æq.* 4 □ PS (3. *l.* 2) sed □ PS. *æq.* 5 □ QS. (105. *p.*) Ergo □ OR. *æq.* 20 □ QS. sed 4 □ QS. *æq.* □ QR. (3. *l.* 2) Ergo □ OS. *æq.* 5 □ QR. Quod erat, &c.

Conuersa demonst. Si quæuis *pr.* sit proportionaliter diuisa in *q.* & *po.* æqualis *pq.* erit □ *or.* æquale 5 □ *qr.* vt antea: Ergo erit OR. diuisa vt *or.* & PR. proportionaliter in Q. sicut *pr.* in *q.* Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CVIII.

SI recta sit proportionaliter secta □ totius cum □ minoris segmenti æquantur 3 □ maioris segmenti, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt recta FH. proportionaliter secta in G. Dico □ FH + □ FG. æquari 3 □ GH. Et ecõuersò si □ FH + □ FG. æquantur 3 □ GH. Dico FH. esse proportionaliter sectam in G.

DEMONSTRATIO.

DIuidatur GH. bifariam in X. cum FH. sit inæqualiter diuisa in X. & FG. sit differentia inter FX. XH. erit □ FH + □ FG. æquale 2 □ FX + 2 □ XH (2. *l*. 2.) sed □ FX. *æq*. 5 □ XH (105. *p*) Ergo 2 □ FX + 2 □ XH. erunt 12 □ XH. Ergo □ FH + □ FG. æquantur 12 □ XH. sed □ GH. æquatur 4 □ XH. & 3 □ GH. *æq*. 12 □ XH. Ergo □ FH + □ FG. æquantur 3 □ GH. Quod erat, &c. Est 4, *lib*. 13. *Eucl*.

Conuersa demonst. Sit KM. proportionaliter secta in L. & erunt □ KM + □ KL. *æq*. 3 □ LM. vt antea: Ergo FH. erit secta in G. vt KM. in L. scilicet proportionaliter. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CIX.

IN figuris regularibus centrum ff ss. est ipsum centrum circuli circunscripti.

DEMONSTRATIO. Fig. 26. 27.

SIt figura laterum parium ABCDEF *fig.* 26. Cum G *centrũ* circuli diuidat bifariam omnes diametros, erit G. *centr ff. ss.* ad A.D. (35. M. 1.) tum ad B.E. Ergo cum ex G. in G. nulla possit duci recta linea, ipsum G. erit *centr. ff. ss.* ad A.D.B.E (63. M. 1.) & cum G. sit etiam *centrum ff ss.* ad C.F (35. M. 1.) ipsum G. erit etiã *centr. ff. ss.* ad A.B.C.D.E.F. (63. M. 1.) Quod, &c.

Deinde sit HIKLM. figura laterum impariũ *fig.* 27. & ex angulo H. ducatur diameter HP. quæ diuidet bifariam arcus IPM KPL. & consequenter etiam rectas IM. KL (2. *l.* 3) Ergo *centr. ff. ss.* ad I.M erit S. & R. *centr.* ad KL. (35. M. 1.) Ergo *centr. ff. ss.* ad I.K.L.M. est in diametro HP. (63. M. 1.) Ergo cum diameter HP. transeat per *centr. ff. ss.* ad I.K.L.M. & per punctum H. *centrum ff ss.* ad omnia puncta H.I.K.L.M. erit in diametro HP. (63. M. 1.) Eadem ratione si ducatur diameter MN. bisecabit rectas HL. & IK. & demonstrabitur in MN. esse *centrum ff. ss.* ad H. I. K. L. M. Ergo cùm sit in vtraque diametro erit in *centro*, siue in communi sectione O. Ideque est de quolibet alio polygono. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CX.

IN omnibus spatijs ordinatis minima summa ff. ss. æqualis est tot ff. ss. ex radio circuli circunscripti, quot sunt figuræ regularis latera, aut anguli.

EXPOSITIO. Fig. 26.

SIt figura regularis ABCDEF. Hexagona: Dico minimam summam *ff. ss.* æqualem esse 6 *ff. ss.* ex radio GA. & in triangulo tribus, in quadrato quatuor, & ita infinitè.

DEMONSTRATIO.

QVoniam *centrum* circuli G. est *centrum ff. ss.* spatij regularis (109. *p.*) si ex G. ducantur radij ad omnes angulos, erit minima summa GA+GB+GC+GD+GE+GF. scilicèt totidem figuræ ex radio circuli quot sunt anguli, vel latera; idemque est in omnibus spatijs ordinatis: Ergo, &c. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXI.

IN spatijs ordinatis summa ff. ss. ex quolibet angulo ad reliquos est dupla minimæ: & æqualis summæ ff. ss. ex diagonijs cum 2. ff. ss. ex latere.

EXPOSITIO. Fig. 26.

DIco summã ex quolibet angulo æqualem esse duplo numero figurarũ ex radio, quot sunt latera: Vnde in △ erunt 6. in □ erunt 8. in ⬠ erunt 10. &c. Idemque est de figuris ex diagonijs + 2 *ff*. ex latere polygoni.

DEMONSTRATIO.

SIt figura ABCDEF. si ex angulo A. ducantur AB. AC. AD. AE. AF. summa *ff. ff.* excedet minimam tot figuris ex radio quot sunt latera, vel puncta angularia (60. M. 1.) Ergo cum minima summa sit æqualis tot *ff. ss.* ex radio quot latera (110. *p.*) summa ex angulo continet bis minimam, & erit eius dupla. Vnde figuræ ex diagonijs AC AD. AE. cum 2 *ff*. ex lateribus AB. AE. sunt ipsæ figuræ ex angulo A. Ergo duplæ sunt ipsius minimæ.

PROPOSITIO CXII.

LAtus Trianguli regularis potest triplum radij circularis. 2 Et duodecuplum perpendiculi à centro 3 Et sesquitertium perpendiculi à vertice.

EXPOSITIO. Fig. 26.

SIt △ regulare circulo inscriptum ACE. Dico AC. posse triplum GA. & duodecuplum GQ. & sesquitertium AQ.

DEMONSTRATIO.

QVoniam AC AE. possunt 6 □ AG. (111. *p.*) Ergo cum AC. AE. sint æquales potentia AC. erit 3 □ AG. Est 12. *lib.* 13. *Eucl.*

2. Quoniam QG. est dimidium GA (1. *p*) si potentia QG. est 1. erit potentia GA. 4 (3. *l.* 2) sed potentia AC. est tripla GA. Ergo potentia AC. erit 12. nempe duodecupla GQ.

3. Cum AQ. sit tripla GQ. (1. *p.*) si □ GQ. est 1. erit □ AQ. 9 sed □ AC. est 12. Ergo □ AC. ad □ AQ est vt 12. ad 9. vel vt 4. ad 3. vel sesquitertium.

PRO-

PROPOSITIO CXIII.

IN Triangulo regulari potentia perpendiculi à vertice est noncupla potentiæ perpendiculi à centro. 2. Et dupla sesquiquarta radij. 3. Et tripla potentiæ segmentorum basis.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN △ regulari ACE. Dico □ AQ esse ad □ GQ. vt 9. ad 1. & ad □ GA. vt 9. ad 4. & ad □ CQ. vt 9. ad 3. vel 3. ad 1.

DEMONSTRATIO.

QVoniam GQ. est tertia pars ipsius AQ (1. *p*) qualium □ GQ. est 1. erit □ AQ. 9. Ergo □ AQ. ad □ GQ. est vt 9. ad 1. sed etiam qualiũ □ GQ. est 1. est □ GA. 4 (112. *p*.) Ergo □ AQ. ad □ AG. est vt 9 ad 4. vel duplum sesquiquartum. Deinde cùm CQ. sit dimidium CE. vel AC. qualium □ AC. est 12. erit □ CQ. 3. scilicet quarta pars □ AC. (3. *l*. 2.) sed qualium □ AC. est 12. est □ AQ. 9. (112. *p*.) Ergo □ AQ. ad □ CQ. est vt 9. ad 3. vel vt 3. ad 1. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXIV.

Latus Quadrati potest duplum radij circuli circunscripti.

2. *Latus Quadrati, & Hexagoni æquè possunt ac latus Trianguli.*

3. *Diagonia Hexagoni possunt decuplum radij circularis.*

DEMONSTRATIO. Fig. 26.

Sit Quadratum circulo inscriptum ASDT, & quadrata AS AD. AT. æqualia erũt 8 □ GA. (111. *p.*) sed quia AD. est dupla GA. est □ DA. æquale 4 □ GA. (3. *l.* 2.) Ergo □ AS + □ AT. æquantur 4 □ GA. & cum AS. AT. sint æquales erit □ AS. æquale 2 □ AG. Quod erat, &c.

2. Quoniam latus Hexagoni est ipse radius, & □ AC. est 2 □ AG. erunt □ AB + □ AS. æqualia 3 □ AG. hoc est ipsi □ AC (113. *p*) Quod erat, &c,

3. Quoniam □ AB + □ AC + □ AD + □ AE + □ AF. æquantur. 12 □ AG (111. *p.*) si auferantur □ AB + □ AF. nempè 2 □ radij remanebunt quadrata diagoniorum æqualia 10 □ radij, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXV.

IN Pentagono Latus, & diagonium possunt quintuplum radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Pentagonum HIKLM. & eius diagonia HK. HL. Dico latus HI. & diagonium HK. posse quintuplum radij OH.

DEMONSTRATIO.

QVadrata enim HI. HK. HL HM. æquantur 10 quadratis radij HO (111 *p.*) Ergo cũ sint æqualia quadrata HI. HK. ipsis HM. HL. erunt quadrata HI. HK æqualia quinque quadratis radij OH. Ergo possunt quintuplum radij. Quod erat, &c.

Hæc propositio fuit Hypsiclis.

PROPOSITIO CXVI.

DIagonium Pentagoni, & latus decagoni possunt quadruplum radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Pentagono HIKLM. sit diameter HOP. perpendicularis lateri KL. bifariam diuidẽs arcum KPL (2. *l.* 3.) eritque KP. latus Decagoni. Dico Diagonium HK. & latus KP. quadruplum posse radij.

DE-

DEMONSTRATIO.

QVoniam HP. est diameter dupla radij HO. erit □HP *æq.* 4□OH(3.*l*.2.) sed cùm angulus HKP. in semicirculo rectus sit (3.*l*.3.) □HK+□KP *æq.* □HP(4.*l*.2.) Ergo □HK+□KP. *æq.* 4□OH. Ergo possunt quadruplum radij. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXVII.

LAtus Pentagoni æquè potest, ac latus Hexagoni, & decagoni simul.

EXPOSITIO. Fig. 27.

CVm radius HO. sit ipsum latus Hexagoni. Dico latus Pentagoni HI. æquè posse, ac Radius OH, & latus Decagoni KP.

DEMONSTRATIO.

QVoniam □HK+□HI. æquantur 5□OH. (115.*p*.) sed HK æquatur 4□HO-□KP(116 *p*.) Ergo □HI. æquatur □HO+□KP. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXVIII.

IN Decagono primum, & secundum diagonium æquè possunt ac latus, & tertium diagonium, scilicet quatuor quadrata radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Decagonum HTIN, &c. primum diagonium

nium HI. secundum HN. tertium HK. Dico HI. & HK. æquè posse ac HK & latus HT. vel KP. scilicet quatuor quadrata radij.

DEMONSTRATIO.

QVoniam HT. HI. HN. HK. HP. HL. HG. HM. HD, possūt 20. quadrata radij (111. *p.*) Ergo cùm HP. possit 4 □ radij (3. *l.* 2.) reliquæ poterunt 16 □ radij: Ergo cùm sint æquales HT. HI. HN. HK. ipsis HD. HM HG. HL. ipsæ HT. HI. HN. HK. poterunt 8 □ radij: sed HK. & HT. vel KP. possunt 4 □ radij (116 *p.*) Ergo HI. HN. primum, & secundum diagonium poterunt alia 4 □ radij. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXIX.

IN Decagono Latus, & secundum diagonium æquè possunt, ac latus Trianguli nempè triplū radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Decagono HTIN, &c. Dico latus HT. & diagonium HN. posse triplum radij, & æquè ac latus Trianguli in eodem circulo inscripti.

DEMONSTRATIO.

QVoniam HI. HN. possunt 4 □ radij (118. *p.*) sed primum diagonium HI. cum sit latus Pentagoni potest □ Radij + □ HT. lateris decagoni (117. *p.*) Ergo HN potest 3 □ radij — □

HT. Ergo □ HN + □ HT. æquantur 3 □ radij, scilicet □ Trianguli (112. *p.*) Quod erat, &c.

Aliter. HT. HI. HN. HK. possunt 8 □ radij ex *demonst. prop.* 118 sed HI. HK. possunt 5 □ radij (115. *p*) Ergo HT HN. possunt 3 □ radij. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXX.

IN Decagono tertium diagonium æquè potest ac secundum, & radius: Vnde □ tertij superat □ secundi toto □ radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN decagono HTIN, &c. Dico □ HK. superare □ HN. toto □ radij, vel □ HK. esse æquale □ HN + □ OH.

DEMONSTRATIO.

QVoniã □ HN. æquale est 3 □ OH — □ HT. (119 *p.*) sed □ HK. est æquale 4 □ OH — □ HT (118. *p.*) Ergo □ HK. superat □ HN. toto □ OH. scilicet radij. Quod erat, &c.

Aliter. □ HN + □ HT. æquantur 3 □ OH. (119. *p.*) sed □ HK + □ HT. vel KP. æquantur 4 □ OH (118. *p.*) Ergo ablato vtrinque □ HT. superabit □ HK. ipsum □ HN. toto □ OH. Ergo tertium diagonium HK. æquè potest ac secundum HN. & radius OH. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXI.

IN figuris regularibus potentiarum ratio est ut patet in sequenti tabella, qualium semiradius est 1.

In △ & □. Fig. 26.

1. □ GQ.	1.	ex hypoth.
2. □ GA. radij.	4.	3. l. 2.
3. □ CQ.	3.	112. p.
4. □ AQ. perpend.	9.	113. p.
5. □ AC. lateris △.	12.	112. p.
6. □ AS. lat. □.	8.	114. p.
7. □ AC + □ AE.	24.	112. p.
8. □ AQ − □ GA.	5.	ex 3. & 4.
9. □ AS − □ CQ.	5.	ex 3. & 6.
10. □ GA + □ GQ.	5.	ex 1. & 2.
11. □ AQ − □ GQ.	6.	ex 4. & 3.

In ⬡ & decag. Fig. 27.

12. □ HI + □ HK.	20.	115. p.
13. □ HN + □ HT.	12.	119. p.
14. □ HT + □ HK.	16.	118. p.
15. □ HI + □ HN.	16.	118. p.
16. □ HI − □ HT.	4.	117. p.

Omnia hæc constant ex præcedentibus.

PROPORTIONES.

EX præcedenti tabella facile determinari possunt.

Cõtinuè proportionalia sũt □ GQ. □ CQ. □ AQ. nempè 1. 3. 9.

Cõtinuè proportionalia sunt □ GA. □ AS. □ HI + □ HN. vt 4. 8. 16.

Continua etiam sunt □ GQ. □ GA. □ HT + □ HK. vt 1. 4. 16.

Continua etiã sunt □ CQ. □ AQ + □ CQ. □ AC. vt 3. 6 12.

Proportionalia sunt.

Vt 1. ad 4.	Ita	3. ad 12.
Vt 1. ad 4.	Ita	5. ad 20.
Vt 3. ad 12.	Ita	5. ad 20.
Vt 3. ad 4	Ita	9. ad 12.
Vt 3. ad 4.	Ita	12. ad 16.
Vt 3. ad 5.	Ita	12. ad 20.
Vt 4. ad 5.	Ita	16. ad 20.

Hinc etiam alternando, inuertendo, componendo, diuidendo proportionalia erunt quadrata, quæ in tabula his numeris correspondent.

PROPOSITIO CXXIII.

IN Pentagono regulari diagonia intersecantur media, & extrema ratione, & maius segmentum est Pentagoni latus.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Pentagonum HIKLM, & diagonia IM, HL, sese intersecant in V. Dico vtrumque secari media, & extrema ratione, vel proportionaliter, & maius segmentum VL æquale esse lateri ML ipsius Pentagoni.

DEMONSTRATIO.

QVoniam arcus HI, ML sunt æquales, etiam anguli HMI MHL (3 l. 27.) Ergo cum angulus MVL externus sit duobus illis æqualis, erit duplus vnius (3. *l*. 1.) sed etiam quia arcus IKL est duplus LM, angulus IML erit duplus LHM (3. *l*. 3.) Ergo anguli VLM MVL sunt æquales: Ergo etiam latera opposita LM, LV (5 l. 11.) Ergo cum recta MV faciat angulum VMH æqualem opposito MLH in △ HML. erit HM. vel ML. vel LV. media inter totam HL. & segmentum HV (3. *l*. 6.) Ergo cum sint continuæ HV VL LH erit HL proportionaliter secta in V. & maius segmentum VL. est latus Pentagoni. Quod, &c.

Hæc Propositio est 8. lib. 13. Eucl.

PRO-

PROPOSITIO CXXIII.

IN Pentagono regulari diagonium basi parallelum secat media, & extrema ratione perpendiculum.

EXPOSITIO. Fig. 22.

IN eodem Pentagono sit IM. diagonium, basi KL. parallelum, & HR. perpendiculum. Dico hoc secari in S. media & extrema ratione.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in Triangulo RHL. recta IM. est basi parallela, secabit proportionaliter latera in S. & V. (2. l. 6.) sed recta HL. est secta in V. media & extrema ratione (122. p.) Ergo & HR. erit secta in S. media & extrema ratione. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXIV.

SI recta linea sit proportionaliter secta, & maius eius segmentum fiat circuli radius; minus erit latus decagoni.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt LH. proportionaliter secta in V. & radio LV. describatur circulus KVM. Dico minus segmentum VH. esse latus decagoni circulo KVM. inscripti.

DE-

DEMONSTRATIO.

QVoniam anguli HMV. VHM. sunt æquales (3. *l.* 3.) erunt æquales HV. VM (5. *l.* 1) sed quia arcus H M. est quinta pars circuli HMK. angulus HLM. erit decima pars circuli (3. *l.* 3.) Ergo quia angulus MLV. est in L. *cētro* circuli KVM. erit arcus VM. decima ipsius circuli pars. Ergo recta VM. subtendens hunc arcum est latus decagoni: sed VM. est æqualis VH. minori segmento: Ergo minus segmētum est latus decagoni si maius fiat circuli radius. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXV.

SI Radius circuli, vel latus Hexagoni fuerit proportionaliter sectum, maius segmentum erit latus decagoni.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit radius LV. circuli KVM. proportionaliter sectus in Y. Dico maius segmentum VY. esse latus decagoni.

DEMONSTRATIO.

SI LH. sit proportionaliter secta in V. & auferatur minus HV. vel HY. à maiori VL. erit VL. proportionaliter secta (104. *p.*) sed si VL. sit radius, est HV. latus decagoni (124 *p.*) Ergo si radius VL. sit proportionaliter sectum, maius

ius segmentum VY. est latus decagoni. Quod erat, &c.

Hæc Propositio est Campani.

PROPOSITIO CXXVI.

Composita ex latere Hexagoni, & Decagoni est proportionaliter secta.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SI radio LV. addatur latus decagoni: Dico totam LH esse proportionaliter sectam.

DEMONSTRATIO.

QVoniam si radio VL. proportionaliter secto, addatur maius segmentum VY. latus decagoni, vel VH. erit tota LH. proportionaliter secta (104. p.) Quod erat, &c.

Hæc prop. est 9. lib. 13. Eucl.

PROPOSITIO CXXVII.

IN Pentagono perpendiculum a centro est dimidium composita ex latere decagoni, & Hexagoni, vel radio. 2. Et est æquale lateri decagoni, & continuationi eiusdem perpendiculi in peripheriam.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Pentagono HIKLM: si ex L. describatur arcus KVM. cum anguli MLH. & HLI. sint æquales; & quiuis decima pars circuli; erit ar-

arcus QVM. quinta circuli pars: & recta QM. latus Pentagoni, & LZ perpendiculum a *centro*, & VM. latus decagoni. Dico LZ esse dimidium radij LV. & lateris decagoni VM. vel LZ esse æqualem ZV. & VM.

DEMONSTRATIO.

RElta LH. est composita ex radio LV. & ex latere decagoni VH. vel VM. (125. *p*) sed radius OM. bisecat arcum HML. & chordam LH (2. *l.* 3.) Ergo LZ. est dimidiũ LH. & æqualis ZH. vel ZV + VM. Quod erat, &c.

Hæc prop. est Hypsiclis.

PROPOSITIO CXXVIII.

SI radius lateri Pentagoni perpendicularis bifariam diuidatur, erit perpendiculum proportionaliter sectum, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Pentagonum HIKLM. & Radius OP. perpendicularis lateri KL. sit bifariam diuisus in F. Dico perpendiculum OR à *centro* O esse diuisum in F. media, & extrema ratione. Et *è conuerso*. si OR. sit proportionaliter diuisum in F. Dico FO. esse semiradium.

DEMONSTRATIO.

QVia OR. est dimidium radij OP. & lateris decagoni PK (127. *p.*) cum OF. sit dimidium

T

dium OP. erit FR. dimidium PK. Ergo OF. ad FR. erit vt OP. ad PK (5. *l*. 5.) sed OP + PK. est recta proportionaliter diuisa (125. *p*.) Ergo OF + FR. erit etiam proportionaliter diuisa. Quod, &c.

Econuersò. Si OF. ad FR. sit vt OP. ad PK. quia OF + FR. est dimidium OP + PK (125. *p*.) erit OF. dimidium OP (4. *l*. 5.) Quod erat, &c

PROPOSITIO CXXIX.

SI Radius lateri Pentagoni perpendicularis bifariam diuidatur, erit semiradius à latere diuisus media, & extrema ratione, & èconuersò.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Pentagono HIKLM. sit radius OP. lateri KL. perpendicularis, & bifariam diuisus in F. Dico semiradium FP. esse proportionaliter sectum in R. Et *è conuersò* si recta PF. sit proportionaliter secta in R. Dico PF. esse semiradium.

DEMONSTRATIO.

PErpendiculum OR. est proportionaliter sectum in F (128. *p*.) & maius segmentum est OF. vel FP. Ergo si à maiori segmento FP. auferatur minus FR. erit FP. proportionaliter sectum (104. *p*.) Quod erat, &c.

Econuersò si FP. sit proportionaliter secta, erit

erit PR. ad PF. vt PR. ad semiradium: Ergo PF. erit semiradius (2. *l.* 5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXX.

Radius per intersectionem diagonorum Pẽtagoni ductus secatur media, & extrema ratione.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Pẽtagono HIKLM. sint duo diagonia IL. KM. se intersecantia in C. quà ducatur radius OCP. Dico Radium OP. esse diuisum media, & extrema ratione in C.

DEMONSTRATIO.

IN Triãgulis CPK. CMH. anguli CPK. CMH. in eodem segmento KGH. sunt æquales (3. *l.* 3.) & anguli KCP. HCM. quia verticales (1. *l.* 1.) Ergo triangula sunt æquiangula (3. *l.* 1.) & latera proportionalia vt CM. ad MH. ita CP. ad PK (2. *l.* 6.) sed CM. est æqualis MH (122. *p.*) Ergo CP. est æqualis PK. lateri decagoni: sed PK est maius segmẽtum radij OP. proportionaliter secti (125. *p*) Ergo etiam PC. Vnde OP. est proportionaliter secta in C. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXI.

IN Pentagono si diameter per intersectionem diagonorum ducatur, maius segmentum ipsius potest quintuplum minoris.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Pentagonum HIKLM. & illius diagonia KM. LI. se intersecantia in C. qua ducatur HCP. Dico segmētum maius HC. posse quintuplum minoris CP.

DEMONSTRATIO.

RAdius enim OP. est diuisus media, & extrema ratione in C (130. *p.*) sed radius OH. æqualis est radio OP. Ergo CH. composita est ex minori segmento OC. & ex tota proportionaliter diuisa OH. vel OP. sed si recta sit proportionaliter diuisa, composita ex minori segmento, & tota potest quintuplum maioris (107. *p.*) Ergo CH. potest quintuplum CP. scilicet maius segmentum diametri potest quintuplum minoris. Quod; &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXXII.

SI ex angulo Pentagoni cadant duo perpendicula in diagonium, & latus continuatum, perpendiculum minus est maius segmentum maioris proportionaliter secti.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Pentagono HIKLM. sit HS. perpendicularis diagonio IM. & HB. lateri LM. continuato. Dico HS. esse minus segmentum ipsius HB proportionaliter sectæ.

DEMONSTRATIO.

IN △△ LHB. MHS. sunt æquales anguli MLH. HMI. æqualibus arcubus MH. HI. insistentes (3. *l*. 3.) sed anguli S. & B. sunt recti æquales: Ergo æquiangula sunt triangula LHB. MHS. (3. *l*. 1.) Ergo & latera proportionalia HS. ad HM. vt HB. ad HL (12. *l*. 6.) Ergo alternādo HS. ad HB. vt HM ad HL. (4. *l*. 5.) sed HM. est maius segmentum HL (122. *p*.) Ergo HS. est maius segmentum ipsius HB. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXXIII.

IN Pentagono si ex angulo cadat perpendiculum in latus continuatum, lateris continuatio æqualis est dimidio minoris segmẽti diagonorum.

EXPOSITIO. Fig. 27.

EX H. cadat perpendiculũ HB. in latus LM. continuatum. Dico continuationem MB. esse dimidium segmenti minoris diametrorũ HV. vel VM.

DEMONSTRATIO.

CVm HÆ, K, & ML. sint parallelæ, in △△ ÆHV. MLV. proportionalia sunt latera ÆV. ad VM. vt HV. ad VL. (4. l. 6.) Ergo vt SV. dimidium ÆV. ad VM. vel VH. ita dimidium HV. ad VL. (15. l. 5.) sed △△ SHV. BHM. cum anguli SHV. MHB. sint æquales ex æqualibus arcubus PL. DM. & anguli B. S. recti, sunt æquiangula (32. l. 1.) & proportionalia (4. l. 6.) Ergo SV. ad VH. vel VM.) vt BM. ad MH. hoc est ad VL. (12. l. p.) Ergo etiam BM. ad VL. est vt dimidium HV. ad VL. (11. l. 5.) Ergo BM. est dimidium HV. (9. l. 5.) Quod, &c.

PROPOSITIO CXXXIV.

SI ex angulo Pentagoni ducatur perpendiculum in latus continuatum; semidiagonium erit segmentum maius lateris continuati proportionaliter secti.

EXPOSITIO.

EX angulo H. pentagoni HIKLM. cadat perpendiculum HB. in latus LM. continuatum. Dico semidiagonium ZL. esse maius segmentum rectae LB. proportionaliter sectae.

DEMONSTRATIO.

QVoniam Triangula ZLM. BLH. habent angulum ZLM. communem, & Z. B. rectos aequales, sunt aequiangula (3. *l.* 1.) Ergo latera sunt proportionalia ZL ad LM. vt BL. ad LH. (2. *l.* 6.) & alternando ZL. ad BL. vt LM. ad LH. (4. *l.* 5.) sed LM. est maius segmentum diagonij LH. proportionaliter secti (122. *p.*) Ergo LZ. erit maius segmentum rectae LB. proportionaliter sectae. Quod erat &c.

PROPOSITIO CXXXV.

PErpendiculum à centro Pentagoni est minus segmentum perpendiculi in latus proportionaliter secti.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Pentagonum HIKLM centrum ipsius O. & OS. perpendiculum in diagonium IM. & OE. perpendiculum in latus HM. Dico OS. esse minus segmentum perpendiculi OE. proportionaliter secti.

DEMONSTRATIO.

TRiangula OSV. OEH. habent angulũ SOV. communem, & S. E. rectos æquales: Ergo sunt æquiangula (3. *l*. 1.) & habent latera proportionalia OS. ad SV. vt OE. ad OH (2. *l*. 6.) & alternando OS. ad OE. vt OV. ad OH (4. *l*. 5.) sed OV. per intersectionem diametrorum est minus segmentum radij OD. vel OH. (130. *p*.) Ergo OS. erit minus segmentum perpendiculi OE. proportionaliter secti. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXXVI.

IN Pentagono segmenta perpendiculi, inter verticem, & diagonia æqualia sunt, & totum proportionaliter secatur à diagonijs in quatuor continuas.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Pentagonum HIKLM. perpendiculum verticis HR. quod secatur à diagonijs IM. IL. in S. C. Dico segmenta HS. SC. esse æqualia, & RC. CS. SR. RH. esse quatuor continuas.

DEMONSTRATIO.

CVm IS. RL. sint parallelæ erunt △△ CRL. CSI. proportionalia (2. *l.* 6.) sed CL. est minus segmentum, & CI. maius rectæ proportionaliter sectæ (122. *p.*) Ergo RC. erit minus segmentum, & CS. maius rectæ RS. proportionaliter sectæ: Ergo etiam SC. erit minus segmentum respectu totius SR (104. *p.*) sed etiam HS. est minus segmentum respectu maioris SR. (123. *p.*) Ergo æquales sunt SC. & SH (1 *l.* 5.) Ergo CR. ad CS. est vt CS. ad SR. & vt CS. vel HS ad SR. ita SR ad RH (22. *P.*) Ergo sunt continuæ RC. CS. SR. RH. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXVII.

IN Pentagono si perpendiculo à vertice ablatus semiradius, residuum in centro, & diagonio basi parallelo secatur in quinque continuas secundum mediam, & extremam rationem.

EXPOSITIO. Fig. 27.

EX vertice H. pẽtagoni HIKLM. cadat perpendiculum HR. & IM. sit diagonium basi KL. parallelum, & HA. sit dimidium radij OH. Dico AR. in S. & O. secari in quinque continuas AS. SO. AO. OR. RA.

DEMONSTRATIO.

QVia OS. est diametro IM. perpẽdicularis est OS. minus segmentum perpendiculi OR. proportionaliter secti (135. *p*.) sed si radius OP. sit bifariam sectus in F. est FR. minus segmentum ipsius OR. proportionaliter secti (128. *p*.) Ergo FR & SO æquales sunt (2. *l*. 5.) Ergo si ex æqualibus semiradijs OA. & FP. auferantur æquales rectæ OS. FR. remanebũt æquales AS. & RP. sed PF. est proportionaliter diuisa in R. (129. *p*.) Ergo etiam AO. erit proportionaliter diuisa in S. (2. *l*. 5.) Ergo si rectæ OR. proportionaliter sectæ in F (128. *p*.) addatur maius segmentum OF. vel OA. erit AR. proportionaliter secta in O (104. *p*.) sicut PF. in R.

(129.

(129.*p.*) & sicut OR. in F (128.*p.*) Ergo continuæ sunt secundum mediam, & extremam rationem P.R RF.FO OR RA. Ergo si loco trium priorum substituantur ipsi æquales AS.SO.OA. erunt continuæ secundum mediã, & extremam rationem AS.SO.OA.OR.RA. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXVIII.

Latus, & diagonium Pentagoni quadruplũ possunt rectæ compositæ ex semiradio, & latere decagoni.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN circulo HIKL. inscriptum sit Pentagonũ, & decagonũ, & radius OP. sit bifariam diuisus in E. & sit HK. pentagoni diagonium. Dico latus HI. & diagonium HK posse quadruplum rectæ KPF. compositæ ex latere decagoni KP. & ex semiradio PF.

DEMONSTRATIO.

COmposita ex radio, & latere decagoni est proportionaliter secta, & latus est minus segmentum (126 *p.*) sed composita ex minori segmento, & semisse maioris potest quintuplum ipsius semissis (105 *p.*) Ergo KPF. potest quintuplum semiradij PC. sed radius OP. potest quadruplum semiradij PC (3.*l.*2.) Ergo

5. □OP. erunt 20 □PC. sed □HI + □HK. æquantur 5 □OP (115 *p.*) Ergo □HI + □HK. æquãtur 2 □PC. Ergo quadrupla sunt □KBC. quod æquatur 5 □PC. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXIX.

IN Decagono secundum diagonium æquatur recta composita ex radio, & latere decagoni.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt HTIN, &c. decagonum & HN. secũdum diagonium, & KPO. recta composita ex latere decagoni KP. & radio PO. Dico diagoniũ HN. æquale esse rectæ KPO: vel KP + PO.

DEMONSTRATIO.

QVoniam KPO. composita ex latere decagoni, & radio est proportionaliter secta in P. (126 *p.*) quadratum totius compositæ KPO. simul cum quadrato minoris segmenti KP. æquabũtur tribus quadratis maioris segmenti, vel radij PO. (108 *p.*) sed etiam quadratum HN. secundi diagonij cum quadrato lateris decagoni HT. vel KP. æquantur tribus quadratis radij OP. (115 *p.*) Ergo ablato communi quadrato KP. remanebit □HN. æquale □KPO. Ergo & rectæ æquales erunt. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXL.

IN Heptagono regulari diagonium minus, & maius cum latere possunt septuplum radij.

2. *Si duo minora diagonia se intersecent, latus est medium inter diagonium, & segmentum minus.*

EXPOSITIO. Fig. 28.

SIt Heptagonum regulare circulo inscriptũ ABCDEFG. minora diagonia AC. BD. se in H. intersecent, & AD. sit diagonium maius. Dico 1. AB. AC. AD. posse septuplum radij. Dico 2. latus CB. esse medium inter HC. CA.

DEMONSTRATIO.

QVia AB. AC. AD. AE AF. AG. possunt 14 □ radij (111. *p.*) Ergo AB. AC. AD. cùm sint æquales AG. AF. AE. poterunt 7 □ radij. Quod &c.

2. Cum arcus BC. CD. sint æquales, etiam anguli CBH. CAB (3. *l.* 3.) Ergo in △ABC. quia BH. facit angulum CBH. æqualem opposito BAC. erit latus BC. medium inter CH. CA. (3. *l.* 6.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXLI.

IN Heptagono regulari diagonium minus secat ex maiori differentiam vtriusque.

2. Latus est medium inter hanc, & diagonium maius.

3 Si ab hoc auferatur latus remanet maius segmentum minoris diagonij.

EXPOSITIO. Fig. 28.

DIagonium CE. secat AD. in L. Dico DL. esse differentiam inter CE. & AD. & DC. esse medium inter DL. & DA. & si ex EA. auferatur EK æqualis EF. residuum KA. esse æquale AH.

DEMONSTRATIO.

IN Triangulo CLA. Angulus ACE. continet 3 septimas semicirculi, & CAD. vnam septimam (3.*l*.3.) Ergo CLA. continet 3 septimas (3.*l*.1.) Ergo æquales sunt C. & L. Ergo & AC. AL (5.*l*.1.) Ergo DL. est differentia inter AC. vel AL. & AD. Quod erat, &c.

2. In △ACD. recta CL. facit angulũ DCL. æqualẽ opposito CAD (3.*l*.3.) Ergo latus CD. erit mediũ inter DL. & DA (3.*l*.6) Quod, &c.

3. Anguli FDG. DFE. alterni sunt æquales (3.*l*.3.) Ergo DG. EF. sunt parallelæ (2.*l*.1.) similiter AE. GF. Tum AE. BD. tum CA. DG. parallelogramma igitur sunt GKEF. AHDK.

Er-

Ergo latera opposita FG. EK. sunt æqualia; tũ KA. & HD. (7. *l* 1.) Ergo si ex maiori diagonio AB. auferatur latus FG. vel EK. residuum KA. æquale erit maiori segmẽto HD. minoris diagonij BD. ab alio minori CA. secti in H Quod &c.

SCHOLIVM.

DAto Heptagoni latere, & duplicis diagonij differentia, vel diagonio maiore, vel ratio lateris ad differentiam dictam, Geometrica Heptagoni descriptio ex hoc theoremate haberi potest. Tum etiam ex præcedenti, si potẽtia lateris, & vnius diagonij determinetur, quod à Geometriæ studiosis promouendum spero.

PROPOSITIO CXLII.

SI semicirculus diuisus sit in quaslibet partes æquales, ratio figuræ inscriptæ ad triangulare segmentũ ex termino diametri, est vt semissumma laterum ad vnum latus; & parallela determinans rationem dictam secat laterum semissummam.

EXPOSITIO. Fig. 29.

IN semicirculo AFB. inscripta sit figura habens æqualia latera, & ex termino diametri B. recta BH. faciat triangulare segmentum

AB

ABH. Dico totum polygonum ABDEFGH. ad △ABH. esse vt semisumma laterum æqualium AH.HG.GF.FE.ED.DB. ad vnum latus BD. Si autem ex B. ducantur BE.BF.BG.BH. & ex D ipsis parallelæ in continuata latera nẽpè DI.IK.KL LM. prout in (17. M.1.) Dico AM. esse semisummam omnium laterum.

DEMONSTRATIO.

Ex cẽtro C. ducãtur CH CG.CF.CE.CD. & △ABH. erit duplum △ACH. cũ basis AB. sit dupla basis AC. & altitudo in H. sit eadem (1.*l*.6.) Ergo cum ACH.HCG. sint æqualia, erit △BAH. æquale △ACH+△HCG sed totum poly gonum componitur ex triangulis æquè altis ACH.HCG.&c. quorum bases sunt AH.HG. &c. Ergo totum polygonum ad △ ACH+△HCG. est vt summa triangulorum ACH.HCG.GCF.FED.DCB. ad △ACH+△ HCG. sed cùm triangula sint æquè alta summa triangulorum se habet ad duo dicta, vt summa basium ad bases AH+HG (1.*l*.6.) Ergo polygonum ad △ACH+△HCG. est vt summa laterum ad AH+HG. (1.*l*.5.) sed vt summa ad duo latera ita semisumma ad vnum latus AH. (5.*l*.5.) Ergo polygonum ad △ACH +△HCG. hoc est ad △ABH. est vt semisumma laterum ad AH. (1.*l*.5) sed etiam AM.

ad

ad AH. est vt polygonum ad △ABH (17.M.1) Ergo AM. est semisumma laterũ (2.*l*.5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXLIII.

IIsdem positis si ex termino diametri ad continuata latera demittantur perpendicula, omnium summa ad perpendiculum maius, est vt semisumma laterum ad vnum latus.

EXPOSITIO. Fig. 29.

SI ex B. ad latus ED. continuatum cadat perpendiculum BN. & ita in FE, &c. quæ omissa sunt. Dico omnium summam ad perpendiculum maius BH esse vt semisumma laterum AM. ad latus AH.

DEMONSTRATIO.

PErpendiculum maius est BH. quia angulus AHB. rectus est (3.*l*.3.) sed triangula ABH. HBG. &c. cùm habeat æquales bases AH. HG. &c. se habent vt perpendicula (1.*l*.6.) Ergo componendo summa triangulorum ad △ABH. est vt summa perpendiculorum ad perpẽdiculum BH. (4.*l*.5.) sed polygonum, vel summa triãgulorum ad △ABH. est vt MA. ad AH. (142.*p*) Ergo summa perpẽdiculorum ad BH. est vt AM. ad AH. Quod, &c.

PROPOSITIO CXLIV.

SI ex centro circuli recta bifariam diuidat arcum, & alia semissem, & ita infinitè, & ex termino arcus ducantur per sectiones rectæ, & ex alio termino parallelæ determinantes rationem illæ secabunt ex qualibet aliarum inscriptorū laterum summam.

EXPOSITIO. Fig. 36.

SIt ACB. sector quilibet: & BE. diuidat bifariam arcum AC. in E. & BF. arcum AE. in F. & BG. arcum AF. in G. deinde ex A. ducantur AEL. AFK. AGo. & ex C. ducatur CL. parallela BE. & LK. parallela BF. & Ko. parallela BG. & ita infinitè. Dico AL. esse summam laterum inscriptorum AE. EC. & AK. esse summam laterum AF. FE. ED. DC. &c. vel AL. esse duplam AE. & AK. quadruplam AF. & Ao. octuplam ipsius AG. & ita infinitè.

DEMONSTRATIO.

REcta BE. bisecat arcum in E. Ergo etiam chordam AC. in O. (2.*l*.3.) sed OE. CL. sunt parallelæ ex *hyp*. Ergo vt AO. est æqualis OC. ita AE. ipsi EL. (2.*l*.6.) Vnde AL. est dupla ipsius AE. vel æqualis ipsis AE. EC. Quod, &c.

Deindè cum BF. bifariam diuidat arcū AE. etiam chordam AE. in P. (2.*l*.3.) erit AE. dupla

pla AP. & AL. quadrupla ipsius AP. sed cum LK. & PF. sint parallelæ ex *hypoth.* proportionales erunt, vt AL. quadrupla AP. ita AK. quadrupla AF. (2.*l*.6.) Quod, &c.

Tandem quia BG. bisecat arcum AGF. & chordam AXF. erit AK. octupla ipsius AX. & cum sint parallelæ BXG. & K*o*. erit vt AK. octupla ipsius AX. ita A*o*. octupla ipsius AG (2.*l*.6.) Ergo AL. æquatur summæ duorum laterum AE. EC. & AK. summæ quatuor laterum AF. FE. ED. DC. & ita infinitè. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXLV.

SI recta extremum sectoris tangat, & angulus ipsius, & chordæ bifariam continuè diuidantur, & similiter angulus centri; locus intersectionis erit peripheria, & parallelæ radijs idem efficient quod in præcedenti.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SIt ABC. sector maior, vel minor semicirculo, quem recta A*m*. tangat in A. & chorda sit AC. deinde AL. diuidat bifariam angulum CA*m*. & CR. angulum CBA. Insuper AK. bisecet angulum LA*m*. & BS. angulum EBA. & ita infinitè. Dico AL. & BR. se intersecare in puncto E. arcus AEC. & AK. BS. in puncto F. arcus AFE. &c. Tum si ex C. ducatur CL. parallela

X 2 ra-

radio BE. & LK. parallela ipsi BS, &c. Dico AL. esse duplam AE. & AK. quadruplam ipsius AF. & ita infinitè omninò, vt in præcedenti.

DEMONSTRATIO.

Continuato radio AB. vsque ad Z. & ducta ZC. tangens A*m*. cum secante AC. facit angulum CA*m*. æqualem Z. (7.*l*.3.) sed angulus Z. est dimidium arcus AEC (3.*l*.3.) Ergo CA*m*. est dimidium arcus AEC. sed CAL. est dimidium CA*m* ex *hyp.* & dimidium arcus CE (3.*l*.3.) Ergo CE est dimidium arcus CA. similiter EF. demonstrabitur dimidium arcus AE. & ita infinitè. Præterea cum BR. bisecet angulum *centri* ABC. bisecat arcum AEC. & transit per E. Ergo AL. BR. se intersecant in dimidio arcus AEC. similiter AK. & BS. in dimidio arcus AFE. &c. Ergo cũ BE. bisecet arcũ, & ducta sit AE. & similiter BF. & AFK. & ita infinitè, parallelæ CL. LK. K*o*. &c. idem omninò efficient, quod in præcedenti, cum eadem sit hypothesis. Ergo AL. est dupla AE. & AK. quadrupla AF. &c. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXLVI.

Iisdem positis eædem parallelæ determinant in tangente laterum circumscriptorum summam in eadem continua progressione dupla.

EXPOSITIO. Fig. 30.

Si BE. diuidat arcum AEC. bifariam, & AEL. angulum CAm. & CR. sit perpendicularis radio BC. erit ARC. figura circumscripta. Similiter SET. sit radio BE. perpendicularis, erit ASETC. figura circumscripta. Idemque esset si per puncta F. & D. ducerentur perpendiculares radijs BF. BD. &c. Dico ergo rectam GL. continuatam in *m*. secare A*m*. duplam ipsius AR. vel æqualem AR. & RC. & L*n*. parallelam radio BFS. secare A*n*. quadruplam ipsius AS. vel æqualem AS. SE. ET. TC. & ita infinitè, &c.

DEMONSTRATIO.

Cum recta GL*m*. sit parallela radio BER. in △△ AER. AL*m*. sunt latera proportionalia (2. *l*. 6.) sed AL. est dupla ipsius AE. (145. *p*.) Ergo A*m*. est dupla ipsius AR. Similiter quia L*on*. est parallela BFS. sunt latera proportionalia (2. *l*. 6.) sed AK. est quadrupla ipsius AF (145. *p*.) Ergo A*n*. est quadrupla ipsius AS. & similiter si *oc*. parallela sit AG. erit A*c*. octupla ipsius AG. & ita infinitè. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXLVIII.

Figura inscripta est medio loco proportionalis inter inscriptam, & circunscriptam dimidio laterum numero.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SIt △ ABC. quarta pars quadrati inscripti circulo, & ABCR quarta pars circunscripti, & ABCEA. quarta pars octagoni inscripti. Dico octagonum inscriptum esse mediũ proportionale inter quadratum inscriptum, & circunscriptum. Similitèr decagonũ inscriptum esse medium proportionale inter pentagonum inscriptum, & circunscriptum, &c.

DEMONSTRATIO.

IN ⊿ rectangulo BAR. est AO. perpendicularis basi BR (2. l 3.) Ergo BA vel BE. radius est medius inter BO. & BR (3 l 6.) sed triangula BOA. BEA. BRA. æquè alta in A. sunt vt bases BO. BE. BR. (1. l. 6.) Ergo cum BE. sit media inter BO. & BR. erit △BEA. medium inter △B OA. & △BRA. (1. l. 5.) & similiter BEC. inter BOC. & BOR. Ergo componẽdo BAEC. quarta pars octagoni inscripti media erit inter BAOC & BARC (4 l. 5.) Ergo & totum octagonum inscriptum medium erit inter □ inscriptum, & □ circunscriptum (5. l. 5.) Quod, &c.

Si-

Similiter BFA. ostendetur medium inter BPA. BSA. Ergo figura 16. laterum inscripta AFEDC. media erit inter octagonum inscriptum AEC. &c. & circunscriptum ASTC. &c. & ita infinitè. Quod &c.

PROPOSITIO CXLVIII.

PErimeter figuræ inscriptæ est medio loco proportionalis inter perimetrum circunscriptæ eodem numero laterum, & inscriptæ dimidio laterum numero.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SIt BAEC. quarta pars Octagoni inscripti: & ASTC. circunscripti, & AOC. quadrati inscripti. Dico perimetrum AEC. &c. esse mediũ inter AOC. & ASTC. & ita de reliquis.

DEMONSTRATIO.

REcta AL. est æqualis AE. EC. (145. *p.*) & recta An. æqualis AS. SE. ET. TC. (146. *p.*) Deinde anguli CAL. LAn. æquales sunt, & anguli ACL. ALn. recti æquales: Ergo △△ ACL. ALn. æquiangula sunt (3. *l.* 1) & latera proportionalia (2. *l.* 6.) vt AC. ad AL. ita AL. ad An. Ergo AL. vel AE. EC. media est inter AC. & An. vel AS. SE. ET. TC. & vt quarta pars ad quartã partem, ità totum ad totum (5. *l.* 5.) Similiter

AK.

AK. ostendetur media inter AL. & Ac. & ita infinitè. Quod, &c.

PROPOSITIO CXLIX.

IN Triangulo rectangulo dimidium lateris est medium geometricum inter semidifferentiam reliqui, & hypothenusæ, & medium arithmeticū ipsorum.

EXPOSITIO. Fig. 31.

SIt ⊿ ABC. rectangulum, & DC. dimidium lateris BC. & EC. differētia lateris AB. & hypothenusæ AC. diuisa EC. bifariam in F. erit AF. medium arithmeticum inter AB. vel AE. & AC. tum CF. erit semidifferentia eorund. Dico DC. esse medium geometricū inter AF. & FC.

DEMONSTRATIO.

QVadratum AC. æquatur □ AE + □ EC + 2▭ AEC (1. *l.* 2.) sed ▭ AEC. æquatur 2▭ AEF. quia altitudo EC. est dupla EF (1. *l.* 6.) & □ EC. *æq.* 4 □ EF (3. *l.* 2.) Ergo □ AC. *æq.* □ AE + 4▭ AEF + 4 □ EF. sed ▭ AEF + □ EF. *æq.* ▭ AFE. vel AFC (1. *l.* 2.) Ergo □ AC. *æq.* □ AE. vel AB. + 4▭ AFC. sed etiam □ AC. *æq.* □ AB + □ BC. (4. *l.* 2.) Ergo □ BC. *æq.* 4▭ AFC. sed □ BC. *æq.* 4 □ DC (3. *l.* 2.) Ergo □ DC. *æq.* ▭ AFC. Ergo sunt continuæ FC. CD. FA. (1. *l.* 6.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CL.

IN Triangulo rectangulo, recta quæ ex angulo bisecat unum latus, minor est semper medio arithmetico inter reliquum latus, & hypothenusam; & etiam geometrico si hæc non fuerit tripla illius.

EXPOSITIO.

SIt ⊿ ABC. rectangulum, & AD. bisecet latus BC. & AF. sit medium Arithmeticum inter AB. AC. Dico AD. semper esse minorē ipsa AF. & AD. esse minorē medio geometrico inter AB. AC. quotiès AC. non est tripla AB. si verò AC. tripla fuerit AB erit AD. mediū: vel minor medio si AC. fuerit plusquàm tripla ipsius AB.

DEMONSTRATIO.

QVoniā angulus B. est rectus □ AD. est æquale □ AB + □ BD (4 *l.* 2) & □ AF. est æquale □ AE + □ EF + 2 ▭ AEF. hoc est □ AF. *aq.* □ AE vel AB + ▭ AFE + ▭ AEF (1. *l.* 2) sed ▭ AFE. *aq.* □ BD (149. *p.*) Ergo □ AF. *aq.* □ AB + □ BD + ▭ AEF. Ergo □ AF. superat □ AD. toto ▭ AEF. Ergo medium arithmeticum AF. semper est maius rectā AD. &c.

2. Si AC. ad AD. habeat rationem minorem tripla, invento medio Z. inter AC. AD. erit ratio □ AC. ad □ Z. minor tripla, nēpè vt AC.

 ad

ad tertiam Aβ(4 l.6) & similiter □ Z. ad □ AB. Ergo & differentiæ quadratorum erunt etiam in eadē ratione AC. ad AB. quia quadrata sunt continua, & differentiæ in eadem ratione (4 l.5.) sed quia □ AC. superat AB. toto □ BC (4. l.2.) hoc est 4 □ BD (3. l.2.) & □ AD. superat □ AB. vno □ BD (4. l.2.) □ AC. superabit □ AD. in 3 □ BD. Ergo differentiæ quadratorum AC. AD AB. sunt in maiori ratione quam differentiæ quadratorum AC. Z. AB. Vnde Z. maior erit quam AD. Quod, &c.

Hinc si AC. fuerit tripla AB. erit AD. æqualis Z. vel minor si AC. sit plusquam tripla maius AB.

Hæc duæ propositiones ad approximādā circuli quadraturam inseruient in fine cap.4.

PROPOSITIO CLI.

Polygona regularia, vel irregularia, quæ habent æquales rationum altitudines, se habent vt bases, & è conuersò.

EXPOSITIO. Fig.32.

Sint Polygona ABCD. KLMN & diagonalis parallelæ CF. FG. tum NO. OV. VP. determinent rationum altitudines GH. PQ (prout in 17 M.1.) Si GH. PQ. sint æquales. Dico ⬠ ABD. ad ⬠ KMN. esse vt basis AB. ad KL. Si verò rò ⬠ ABD. ad ⬡ KMN. sit vt basis AB. ad KL. Dico altitudines rationum GH. PQ. esse æquales.

DEMONSTRATIO.

DVctis BG. KP. est △ ABG. æquale polygono ABCDE. & △ KLP. æquale ⬡ KMN. (18. M. 1) sed △ ABG. ad △ KLP. est vt basis AB. ad KL. cum altitudines GH. PQ. sint æquales (1. l. 6.) Ergo ⬠. ad ⬡. est vt AB. ad KL (2. l. 5.) Quod, &c.

E conuersò si ⬠. ad ⬡. sit vt AB. ad KL. etiam △ ABG. ad △ KLP. erit vt AB. ad KL (2. l. 5.) Ergo altitudines GH. PQ. erunt æquales (1. l. 6.) Quod, &c.

PROPOSITIO CLII.

POlygona quæ habent æqualem basim se habent, vt rationum altitudines, & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 326.

SInt polygona ⬠ & ⬡. quorum bases AB. KL. sint æquales. Dico ⬠. ad ⬡. esse vt altitudo GH ad PQ. & *econtra* si ⬠. ad ⬡. sit vt GH. ad PQ. Dico bases AB. KL. esse æquales.

DEMONSTRATIO.

ETenim △ ABG. ad △ KLP. est vt altitudo GH. ad PQ (1. l. 6.) sed △ ABG. est æquale ⬠. & △ KLP. est æquale ⬡ (18. M. 1.) Ergo ⬠. ad ⬡.

⬡ est vt GH. ad PQ. Quod erat, &c.

E conuerso. Si ⬠ ad ⬡ sit vt GH. ad PQ. etiam △ABG. ad △KLP erit vt GH. ad PQ (2. *l.*5.) sed triangula quæ se habent vt altitudines, habent æquales bases (1. *l.*6.) Ergo bases AB. KL. sunt æquales. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLIII.

Polygona, quæ habent rationum altitudines, & bases reciprocas sunt æqualia, & conuersò.

EXPOSITIO. Fig. 32.

Sit ⬠. & ⬡. quorum bases, & rationum altitudines sint reciprocè proportionales, vt AB. ad KL. ita PQ. ad GH. Dico ⬠. esse æquale ⬡. & *è conuersò* si ⬠. sit æquale ⬡. Dico esse reciprocè proportionales bases, & altitudines AB. ad KL. vt PQ. ad GH.

DEMONSTRATIO.

Etenim cum bases, & altitudines sint proportionales reciprocè, est △ABG. æquale △KLP (1. *l.*6.) sed etiam △ABG. est æquale ⬠. & △KLP. est æquale ⬡ (18. M. 1.) Ergo etiam ⬠. erit æquale ⬡. Quod erat, &c.

E conuersò. Quia triangula sunt polygonis æqualia; & polygona inter se ex *hyp.* etiam triangula inter se: sed triangula æqualia habent

bent bases, & altitudines reciprocas (1. l. 6.) Ergo vt AB ad KL. ita PQ ad GH. &c.

PROPOSITIO CLIV.

POlygona qualibet inter se habent rationem compositam, ex rationum altitudinibus, & basibus.

EXPOSITIO. Fig. 32.

SInt idem O & O. Dico rationem Pentagoni ABCDE ad Hexagonum KLMN. esse cōpositam ex rationibus AB. ad KL. & GH. ad PQ.

DEMONSTRATIO.

QVoniam Triangulum ABG. est æquale Pētagono AB CDE. & Triangulum KLP. Hexagono KLMN (18. M. 1.) erit Pentagonū ad Hexagonum, vt Triangulum ABG. ad triāgulum KLP (2. l. 5.) sed Triangula habent rationem compositam ex basibus, & altitudinibus (1. l. 6.) Ergo etiam Pentagonum ad Hexagonum habebit rationem compositam ex AB. ad KL. & GH. ad PQ. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLV.

SI Polygonum habeat æqualem rationis altitudinem, aliorum summæ, erit ad Polygonorum summam vt basis ad basium summam, & èconuerso.

2 *Si habeat æqualem basim aliorum summæ, erit vt altitudo ad altitudinum summam, & èconuerso.*

3. *Si habeat basim, vt altitudinem reciprocas aliorum summis, erit illud omnium summæ æquale, & ècontra.*

4. *Polygonum ad aliorum summam habet rationem compositam ex basibus, & altitudinibus.*

5. *Omnia prædicta intelligenda etiam sunt de Polygonorum summa ad summam aliorum.*

DEMONSTRATIO.

SVmitur ex Triangulis habentibus eandem Poligonorum basim, & rationis altitudine; quæ cùm sint Polygonis singulatim æqualia, de Polygonis omnia prædicta concludunt, siue ordinata, siue inordinata sint.

CAPVT IV.

DE RESOLVTIONE PROBLEMATVM.

QVI Theoremata omnia in præmissis capitibus iam demonstrata perceperit, leui meditatione problemata, quam plura excogitare poterit, & resoluere, cum maior eorum pars geometricæ praxi accommodari possit. Nos aliqua delibabimus, nè videamur praxim reliquisse intactam: omnium tamen quæ occurrunt non persequemur, illa enim quæ ex primis 13 propositionibus inferuntur, Trigonographicæ iam prælo parata committimus; alia vero Lectorum ingenio inuestiganda, proponenda, & resoluenda commissa volumus, quo maiorem possint & voluptatem, & fructum ex meditatione percipere: etenim illa, quæ proprio marte inueniuntur, singularem pariunt delectationem, & studiosos nouo induunt animo, vt & maiora audeant, & promoueant.

PRO-

PROPOSITIO CLVI.
Problema I.

DAtum Triangulum ex dato in latere puncto in quascumque rationes diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 33.

SIt datum △ ABC. & punctum in latere D. petitur vt diuidatur △ in rationes similes ijs, in quas diuisa est recta *xz*. punctis *g.p.q.y*.

Constructio. Ex dato puncto D. in angulum oppositum C. ducatur recta DC. & ex angulo B. recta BE. parallela ipsi DC. occurrens lateri AC. cõtinuato, & erit E. altitudo rationis quadrilateri ADBC (14 M. 1.) Diuidatur ergo AE. in F. G. H. I. sicut *xz*. in *g.p.q.y* (2 *p*. 3) & ductis IK. HL. parallelis EB. Dico DF. DG. DL. DK. diuidere △ sicut *xz*.

DEMONSTRATIO.

TRiangulum ADF. ad △ FDG est vt AF. ad FG (1. *l*. 6) hoc est vt *xg*. ad *gp*. & △ LDK. ad △ KDB. vt LK. ad KB (1. *l* 6.) vel vt HI. ad IE (2. *l*. 6.) vel vt *qy*. ad *yz*. Deindè △ CDH. est æquale △ CDL. supra eandem basim CD. & inter parallelas CD. HL. (8 *l*. 1.) Ergo addito communi GDC. erit trapezium GDLC. æquale △ GDH. sed △ FDG. ad △ GDH. est vt basis FG. ad GH. (1. *l*. 6.) Ergo △ FDG. ad trapezium GD-

LC.

LC. est etiam vt FG ad GH. (1. l. 5.) nempè ex *constr.* vt *gp.* ad *pq.* Ergo totum triangulum diuisum est sicut *xz.* Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLVII.

Problema 2.

Datum Triangulum ex dato intra ipsum puncto, & inde recta ad angulum, in quascunque rationes diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 34.

Sit △ ABC. punctum D. & recta in angulum DA. petitur vt ex D. diuidatur triangulum in quatuor partes, prout recta *x z.* diuisa est in *p. q. y.*

Constructio. Ducantur ex D. in angulos rectæ DB. DC. & fiat AE. parallela DC. occurrens lateri CB. continuato in E. & EF. parallela DG. occurrens lateri AC. continuato. Diuidatur posteà AF in G. H. I. vt *xz.* in *p. q. y.* (2. *p.* 3.) & ducantur HM. IK. parallelæ CD. & quia K. est extra B. in continuatione lateris fiat KL. parallela ipsi BD & ducantur DG. DM. DL. Dico △ ABC. rectis DA. DG. DM. DL. diuisum esse in ratione rectæ *xz.*

DEMONSTRATIO.

In trapezio ADMC. quia MH. est diagonio DC. parallela, erit △ ADG. ad segmentum

DMCG. vt AG. ad GH. (14.M.1.) Deinde in Polygono GDABC. quia diagonia sunt DB. DC. ipsis parallelæ AE. LK. & EF. KI. MH. determinant segmentorum rationes in recta GF (17.M.1.) Ergo GDMC. ad MDLB. est vt GH. ad HI. vel vt *pq*. ad *qy*. & MBLD. ad LDA. est vt HI. ad IF. vel vt *qy*. ad *yz*. (17.M.1.) Ergo totum △ABC. diuisum est in quatuor partes, prout recta *xz*. in *p.q.y.* Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLVIII.

Problema 3.

DAtum Triangulum ex dato intra ipsum puncto, & inde recta in latus in datas partes, vel rationes diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 35.

SIt △ABC. punctum D. recta DE. petitur vt diuidatur in duas, vel plures partes, prout recta *xz*. diuisa est in *p*. &c.

Constructio. Continuentur omnia latera prout in *fig*. 35. & ex D. in angulos ducantur DB. DC. DA. tum EF. sit parallela DB. & FG. ipsi DC. & GH. ipsi DA. Diuidatur præterea EH. in I. prout *xz*. in *p*. nempe EI. ad IH. vt *xp*. ad *pz*. & fiat IK. parallela IG. si autem IK. secet lateris continuationem, fiat KL. parallela GF (similiter procedendum est quosque vna ex paralrallelis secet aliquod latus) Si ergo ducatur DL. Dico segmentum DEACL. ad DEBL esse in data ratione *xp.* ad *pz.* vel triangulum esse diuisum vt *xz.*

DEMONSTRATIO.

IN Polygono DEACL. quoniam LK. KI sunt diagonijs CD. DA. parallelæ est segmentum AED ad DACL. vt EA. ad AI (17. M. 1.) Similiter in Polygono DACBE. quia EF. FG. sunt diagonijs DB. DC. parallelæ, & LK. ipsi DC. est segmentum DACL. ad DEBL. vt AK. ad KG. (17. M. 1.) hoc est vt AI. ad IH (2. *l.* 6.) Ergo rationes ex æqualibus compositæ erunt æquales (1. *l.* 5.) nempè segmentum AED + DACL. ad DEBL. erit vt EA + AI. ad IH. sed DEA + DACL. est segmentum DEACL. & EA + AI. est EI. Ergo segmentum DEACL. ad DEBL est vt EI. ad IK. vel ex *constr.* vt *xp.* ad *pz.* Quod erat, &c.

Eadem erit constructio, & demonstratio si triangulum in tres, quatuor, vel plures partes sit diuidendum data earum ratione, vt ex ipsa constructione liquet.

DMCB. vt AG. ad GH. (14.M.1.) Deinde in Polygono GDABC, quia diagonia sunt DB. DC ipsis parallelæ AE. LK. & EF. KI. MH. determinant segmentorum rationes in recta GF (17.M.1.) Ergo GDMC. ad MDLB. est vt GH. ad HI. vel vt *pq*. ad *qy*. & MBLD. ad LDA. est vt HI. ad IF. vel vt *qy*. ad *yz*. (17.M.1.) Ergo totum △ABC. diuisum est in quatuor partes, prout recta *xz*. in *p*.*q*.*y*. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLVIII.

Problema 3.

Datum Triangulum ex dato intra ipsum puncto, & inde recta in latus in datas partes, vel rationes diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 35.

Sit △ABC. punctum D. recta DE. petitur vt diuidatur in duas, vel plures partes, prout recta *xz*. diuisa est in *p*. &c.

Constructio. Continuentur omnia latera prout in *fig*. 35. & ex D. in angulos ducantur DB. DC. DA. tum EF. sit parallela DB. & FG. ipsi DC. & GH. ipsi DA. Diuidatur prætereà EH. in I. prout *xz*. in *p*. nempè EI. ad IH. vt *xp*. ad *pz*. & fiat IK. parallela HG. si autem IK. secet lateris continuationem, fiat KL. parallela GF (similiter procedendum est quosque vna ex paralrallelis secet aliquod latus) Si ergo ducatur DL. Dico segmentum DEACL. ad DEBL esse in data ratione *xp.* ad *pz.* vel triangulum esse diuisum vt *xz.*

DEMONSTRATIO.

IN Polygono DEACL. quoniam LK. KI sunt diagonijs CD. DA. parallelæ est segmentum AED ad DACL. vt EA. ad AI (17. M. 1.) Similiter in Polygono DACBE. quia EF. FG. sunt diagonijs DB. DC. parallelæ, & LK. ipsi DC. est segmentum DACL. ad DEBL. vt AK. ad KG. (17. M. 1.) hoc est vt AI. ad IH (2. *l*. 6.) Ergo rationes ex æqualibus compositæ erunt æquales (1. *l*. 5.) nempè segmentum AED + DACL. ad DEBL. erit vt EA + AI. ad IH. sed DEA + DACL. est segmentum DEACL. & EA + AI. est EI. Ergo segmentum DEACL. ad DEBL est vt EI. ad IK. vel ex *constr.* vt *xp.* ad *pz.* Quod erat, &c.

Eadem erit constructio, & demonstratio si triangulum in tres, quatuor, vel plures partes sit diuidendum data earum ratione, vt ex ipsa constructione liquet.

PROPOSITIO CLIX.
Problema 4.

DAtum triangulum ex dato intra ipsum puncto, in quascumque partes, data earũ ratione diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 35.

SIt datum triangulum ABC. & punctum intra ipsum D. quod △ in quotcumque partes data earum ratione diuidendum sit.

Constr. Si ducatur recta DA. vel DB. vel DC. ad quemvis angulorum diuidetur triãgulum prout in *prop.* 157. & problema tres solutiones admittet. Si verò ducatur in quodlibet latus, quævis DE. poterit triangulum in quotcumque partes diuidi prout in *prop.* 158.

DEMONSTRATIO.

EX ipsis *prop.* 157. vel 158. desumẽda est prout ex puncto D. recta liberè ducitur in angulum, vel in latus. Vndè cum ex D. in latera infinitæ rectæ liberè duduci possint, problema infinitas solutiones admittet.

PROPOSITIO CLX.
Problema 5.

PEr datum intra angulum punctum rectam ducere bifariam diuisam.

2. *Triangulum minimum abscindere.*
3. *Trianguli minimam partem auferre.*
4. *Vel illud in maxima ratione diuidere.*

EXPOSITIO. Fig. 5. 6.

SIt datus angulus ABC. & punctum D; quæsitum FDG. bifariam diuisa in D. vel △FBG. minimum quod abscindi potest ex angulo B. vel triangulo ABC. &c.

Constr. Fiat DE. parallela CB. & EF. æqualis BE. Dico FDG. satisfacere quæstioni. Si datum sit △ABC. diuidantur omnia latera bifariam, & ducta CH. sit HO. tertia pars ipsius HC. & ducantur OI. OK. & quia punctum D. est in trapezio HOIB. ducatur FDG. bifariam diuisa, quæ diuidet △ABC. in maxima ratione.

DEMONSTRATIO.

COnstat ex 14. & 15. *prop.* tũ ex 21. & 27. *prop.* Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXI.
Problema 6.

EX dato intra angulum, vel triãgulum puncto, triangulum secare dato æquale, & maius minimo.

EXPOSITIO. Fig. 37.

SIt angulus, vel △HCI. & punctum intra ipsum F. per quod ducẽda sit recta EFB. secans triangulum EBC. æquale dato MON.

Const. Ducatur prius recta AFD. bifariam diuisa in F. secans △ ADC minimum (160. *p.*) & DK. perpendicularis lateri CH. & NL. perpendicularis basi MO. tum fiat vt DK. ad NL. ita OM. ad CQ. (2. *p.* 7.) & erunt triangula QDC. MON. æqualia cum habeant bases, & altitudines reciprocas (1. *l.* 6.) Fiat ergo QE. media inter QA. QC. & ducta EFB. erit quæsita, nempè △ EBC. æquale △MNO.

DEMONSTRATIO.

SIt SX. ad SZ. vt △EBC. ad △ADC. & ZR. media inter ZX & ZS. & quia AD. bifariã secta est in F. erit CB. ad CD. vt SZ. ad SR. & CE. ad CA. vt SR. ad SX (18. *p*) Ergo & diuidẽdo erit CE ad EA. vt SR. ad RX (4. *l.* 5.) sed quia sunt três continuæ QC. QE. QA. tum etiam ZS. ZR. ZX. differentiæ sunt in eadem ratione, nempè CE. ad

EA.

EA. vt QC. ad QE. & SR. ad RX. vt ZS. ad ZR (4. *l.* 5.) Ergo cum CE. ad EA. sit vt SR. ad RX. erit QC. ad QE. vt ZS. ad ZR. & QA. ad QE. vt ZX. ad ZR (1. *l.* 5.) Vnde ZS. diuisa est in X. & R. sicut QC. in A. & E. sed CB. ad CD. est vt SZ. ad SR (18. *p.*) Ergo CD. ad CB. est vt CQ. ad CE (1. *l.* 5.) Ergo cùm Triangula BEC. ADC. communem angulum C. & latera circa ipsum reciproca CB. ad CD. vt CQ. ad CE. erit △BEC. æquale △QDC (1. *l.* 6.) sed △QDC. *ex constr.* est æquale △MNO. Ergo △EBC. est etiam æquale ipsi △MNO. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXII.
Problema 7.

EX dato angulo per datum extra ipsum punctum, secare triangulum æquale dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

SIt datus angulus GDB. & extra ipsum punctum F. quæritur recta FGB. vt triangulum GDB. sit æquale dato triangulo MVN.

Constructio. Ducatur DFA. & sit FA. æqualis FD. & fiat AC. parallela lateri GD. & ducto perpendiculo NL. fiat vt DA. ad MV. ita NL. ad AP (2. *p.* 7.) & AP. perpẽdicularis DA. & PQ. parallela AD. eritq́ △AQD. æquale ipsi MVN. cum habeant bases, & altitudines reciprocas (1.

(1, l 6) Si ergo inveniatur QE. media inter QA. & QC. & ducatur EFB. Dico △GDB. esse æquale ipsi QAD. vel MVN.

DEMONSTRATIO.

QVoniam AD. est bisecta in F. & sunt continuæ QA. QE. QC. erit △EBC. æquale triãgulo QDC (161. p) sed quia triãgula EFA. GFD. sunt similia ex parallelis EA. GD. cum DF. FA. sint æquales, erunt etiam æquales EF. FG. tum DG. EA (2. l 6.) & triangula æqualia (4 l. 1.) Ergo si à triangulo ADC. auferatur △ AEF. & illius loco substituatur △FGD. erit trapezium EGDC. æquale △ADC. Ergo si ex æqualibus triangulis EBC. QDC. auferantur æqualia EGDC. ADC. remanebit △GDB. æquale △QDA. vel MVN. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXIII.

Problema 8.

DAtum Triangulum per datum punctum in data ratione diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 38.

SIt datum △ABC. diuidendum ex dato puncto in data ratione X. ad Z. Hoc problema varias habet constructiones à dato puncto pẽdentes.

Constr. 1. Si punctum sit angulus A. diuidadatur latus oppositum BC. in ratione X. ad Z. & △ BEA. ad △ EAC. æquè altum erit vt basis BE. ad EC. vel vt X. ad Z (1. *l.* 6.)

Constr. 2. Si punctum sit in latere vt F. diuisio fiet ex 156. *p.* & vterque casus omnes rationes admittit.

Constr. 3. Si punctum sit G. intra △ determinetur prius angulus ex quo minimum △ abscindi potest (27. *p.*) & abscindatur minimum quod dabit maximam rationem (60. *p.*) Si autem ratio data maior sit quàm ratio inuenta per △ minimum erit problema impossibile: si æqualis triangulum minimum satisfaciet quæstioni. Si verò minor diuidatur quodlibet latus BC. in data ratione X. ad Z. & per G. abscindatur △ æquale ipsi AEB (161. *p.*)

Constr. 4. Si punctum sit D. extra △ etiam omnes rationes admittit. Ducatur ergo recta in aliquem angulum secans latus illi oppositum, vt DC. Si ratio BF. ad FA. sit ipsa data X. ad Z. recta DC. satisfacit quæstioni. Si autem minor, poterit sectio fieri ex angulo B. vel A. Si verò maior, fiet tantum sectio ex angulo A. Diuiso igitur latere BC. vt X. ad Z. & ducta BE. si ex D. secatur △ æquale ipsi AEB (162. *p.*) vel ex angulo B. vel ex angulo A. iuxta determinationem dictam, erit problema solutum.

SCHOLIVM.

Hoc problema solutum dedit R. P. Andræas Tacquet Soc. IESV, *Geometra insignis lib. 2. Geom. Pract. cap. 14. ad quod septem lemmata adducit. An noster labor inutilis censendus sit, studioso Lectori iudicandum relinquo. Nostra saltem determinatio trianguli minimi prop. 27. tradita facillima, & clarissima est, ex qua huius problematis resolutio pendet, si datum punctum intra ipsum triangulum fuerit. Quomodo Polygonum ex dato intra, vel extra puncto unica recta in duas partes data earum ratione diuidendum sit, videatur apud P. Tacquet citatum cap. 15.*

PROPOSITIO CLXIV.

Problema 9.

Datum Polygonum in datam rationem diuidere ex puncto in latere, vel angulo dato, vel liberè assumpto.

EXPOSITIO. Fig. 39.

Sit datum Pentagonum ABCDE. & punctum F. quæritur recta FO. illud diuidens in ratione X. ad Z.

Constr. Ex F. ducantur ad angulos FC. FD. FE. quibus ex angulo B. proximo fiant parallelæ in latera continuata BG. GH. HI. Fiat deindè AK. ad KI. vt X. ad Z. (2. *p.* 7.) & ducantur

tur parallelæ KL. LO. donec aliqua secet quodlibet latus, ducta FO. diuidet polygonum in ratione X ad Z. Si datum punctum esset ipse angulus B. inciperent parallelæ ab angulo C, &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam parallelæ determinant segmentorum rationes, est AFODE. ad FBCO. vt AK. ad KI (17. M. 1.) Ergo vt X. ad Z. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXV.

Problema 10.

DAtum Polygonum ex dato intra ipsum puncto, & inde recta in latus, vel angulum data, vel liberè assumpta diuidere in data ratione.

EXPOSITIO. Fig. 40.

SIt datum ⬠ ABKC. & punctum O. & data recta, vel liberè ducta OG. quæritur OK. diuidens ⬠ in ratione X ad Z.

Constr. Ex O. in omnes angulos ducantur rectæ: & ex G. vbi recta secat latus ducantur parallelæ angularibus, donec secent latus GA. continuatum in F. Si fiat GH. ad HF. vt X. ad Z. (*2. p. 7.*) & ex H. ducantur parallelæ donec occurrant alicui lateri in K. erit OK. quæsita.

Si recta data esset OB. inciperent parallelæ ex B.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ in præcedenti (ex 17. M. 1.)

Hoc Problema, & præcedens eandem habent constructionem, & demonstrationem si Polygonum in plures partes data earum ratione diuidendum sit.

PROPOSITIO CLXVI.

Problema 11.

Datam rectam media, & extrema ratione diuidere.

2. *Dato maiori extremo addere minus.*

3. *Dato minori extremo addere maius.*

CONSTRVCTIO 1. Fig. 41.

Data recta AC. diuidenda sit in F. media, & extrema ratione. Fiat CB. æqualis AC. & describatur semicirculus ADB. radius CB. diuidatur bifariam in E. & CD. sit perpendicularis ipsi AB. ducatur ED. & ex cẽtro E. radio ED. fiat arcus DF. Dico AC. diuisam esse in F. media, & extrema ratione.

Demonstr. Quoniam CD. est dupla CE. erit □ DC. æquale 4 □ CE (3. *l.* 2.) sed □ DE. vel EF. æquatur □ DC + □ CE (4. *l.* 2.) Ergo □ ED. vel □ EF. *æq.* 5 □ CE. Ergo quia FC. assumpsit CE.

quæ

quæ est dimidium totius AC. & composita FE potest quintuplum assumpti CE erit AC. proportionaliter secta in F. (106. *p.*) Quod, &c.

Constr. 2. Dato maiori extremo BC. quæritur minus CF. vt tota FB. sit proportionaliter secta in C. Fiat CA. æqualis CB. & diuisa bifariam CB. in E. fiat vt antea arcus DF. Dico FC. esse minus segmentum.

Demonstr. Quoniam AC est proportionaliter secta in F. ex *constr.* 1. & maiori segmento FC. addita est tota CB. vel CA. erit composita FB. proportionaliter secta in C (104. *p.*) Ergo maiori segmento BC. additum est minus CF. Quod, &c.

Constr. 3. Dato minori segmẽto BC. quæritur maius GC. vt tota BG. sit proportionaliter secta in C. Fiat CA. æqualis CB. & facto arcu DF. vt antea sumatur CG. æqualis BF. Dico BG. esse proportionaliter sectam in C.

Demonstr. Quoniam FB. est proportionaliter secta in C. ex *constr.* 2. si maiori extremo CB. addatur tota FB. vel ipsi æqualis CG. erit tota BG proportionaliter secta in C. & BC. minus segmentum (104. *p.*) Ergo minori segmento BC. additum est maius CG. & tota est proportionaliter secta. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXVII.
Problema 12.

DAto circulo Decagonum, & Pentagonum regulare inscribere.

CONSTRVCTIO I. Fig. 41.

SIt datus circulus ADB. & eius *centrum* C, ducta diametro AB. & perpendiculari CD. & bifariam diuisa CB. in E. describatur ex E. arcus DF. Dico FC. esse latus Decagoni, & rectā FD. latus Pentagoni, & ducto ex D. arcu FM. erit DM. quinta circuli pars.

Demonstr. Quoniam radius AC. est proportionaliter sectus, erit maius segmentum FC. latus decagoni (125. *p.*) & quia □ FD. est æquale □ FC + □ CD. recta FD. æquè potest, ac radius DC. & latus decagoni FC (4. *l.* 2.) sed latus Pētagoni æquè potest etiam ac radius CD. & latus decagoni FC (117. *p.*) Ergo FD. æqualis est lateri Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRVCTIO II. Fig. 41.

DVcto ex E. arcu DF. vt antea, fiat ex B. arcus FK. & KI. æqualis AK. Dico AK. esse arcum Pentagoni, & BI. decagoni.

Demonstr. Quoniam BK. vel BF. composita est ex radio BC. & latere decagoni CF. erit BK. secūdum diagoniū decagoni subtendens

tres

tres circuli decimas, vel tres semicirculi quintas (139. *p.*) Ergo AK. subtendet duas semicirculi quintas, vel quintam circuli partem, eritque recta AK. latus Pentagoni. Si ergo ex semicirculo AKB. auferantur AK. KI. quatuor quintæ, remanebit IB. quinta semicirculi pars, vel decima circuli: Ergo recta BI. erit decagoni latus, &c.

CONSTRVCTIO III. Fig. 41.

SI recta FB. diuidatur bifariam in O. & fiat CP. æqualis FO. recta HPL. perpendicularis radio CD. erit latus Pentagoni.

Demonstr. Quoniam FB. composita est ex radio BC. & latere decagoni CF. *ex constr.* 1. & CP. est æqualis FO. dimidio compositæ, erit CP. perpendiculum à *centro* in latus Pentagoni (126. *p.*) Ergo cum CP. sit perpendicularis HL. à *centro*, erit HL. latus Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRVCTIO IV. Fig. 41.

BIfariam diuisa FB. in O. fiat DP. æqualis CO. Dico perpendicularem HPL. esse latus Pētagoni.

Demonstr. Quoniam Perpendiculum à *cētro* est æquale lateri decagoni, & continuationi eiusdem perpēdiculi in peripheriam (127. *p.*) & etiam rectæ FO (126. *p.*) ablato latere de-

decagoni HG. erit CO. continuatio perpendiculi: Ergo cum DP. sit æqualis CO. erit PD. continuatio perpendiculi; vnde CP. erit perpendiculum à *centro* in latus: Ergo cum CP. sit perpēdicularis à *centro* in rectam HL. erit HL latus Pentagoni, &c.

CONSTRVCTIO V. Fig. 41.

DIuisa CF. bifariam in Q. fiat ex C. arcus QR. & perpendicularis MRN. secabit arcus Pentagoni DM. DN.

Demonstr. Quoniam CF est maius segmentum radij proportionaliter secti; eius dimidium CR. erit maius segmentum semiradij proportionaliter secti. Sed diagonium basi parallelum secat HC. maius segmentum semiradij (137. *p.*) Ergo MRN. erit diagonium Pētagoni, & DM. DN. arcus Pētagoni. Quod &c.

CONSTRVCTIO VI. Fig. 42.

SIt datus circulus AMBN: diameter AB. *centrum* C. diuiso radio CB. bifariam in D. & CD. in E. fiat semicirculus CFB. & DF. perpendicularis CB. & ex E. distantia CF. fiat arcus FI. & per I. fit KIL. perpendicularis radio CB. Dico KL. esse latus Pentagoni.

Demonstr. Semiradius DB. est proportionaliter sectus in I. (166. *p*) sed latus Pentagoni ni secat proportionaliter semiradiũ sibi perpendicularem (129 p.) Ergo KIL hoc efficiens erit latus Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRVCTIO VII.

Diuisa CB bifariam in D. & CD. in E. fit CG. perpẽdicularis, & facto semicirculo DGO. in E. fiat arcus GH & fit MHN perpendicularis CA. Dico MA. AN esse arcus Pentagoni.

Demonstr. Quoniã semiradius CO. est proportionaliter sectus in H. & CH. maius segmentum, est MN diagonium Pentagoni; & istius arcus sunt AM. AN. *ex constr.* 5. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXVIII.
Problema 13.

D*Ato latere Pentagoni, ipsum describere, & circuli radium inuenire.*

CONSTRVCTIO I. Fig. 43.

Sit datum latus AB. quod continuetur in H. & ex A. fiat semicirculus BIH. & ex B. arcus AF. & AI. fit perpendicularis HB. diuisa AB. bifariam in E. sumatur GC. æqualis distãtiæ GI. ex B. fiat arcus CDE. & eodem interuallo ex A. fiat arcus EF. secans arcum CDE. in E. & AF. in F. ductis AD. DE. EF. FB. Dico ADEFB. esse Pẽtagonum regulare.

 De-

Demonstr. Quoniam recta BC. est proportionaliter secta in A. (166. *p.*) & maius segmentum est latus Pentagoni datum erit BC. diagonium (122. *p.*) Ergo triangula ABE. BAD. AEB. sunt ipsa triangula Pentagoni, unde tota ipsius constructio constat. Quod, &c.

CONSTRVCTIO II.

DEscriptis arcubus BD. AE. inueniatur punctum C vt antea, & diuisa AC. bifariam in K. sumatur BL. æqualis AK. & fiant KD. LF. perpendiculares secantes arcus in D. F. tum radio AB. fiant ex D. & F. duo arcus se intersecantes in E. Dico ADEFB. esse Pentagonum regulare.

Demonstr. Quoniam CA. est minus segmentum diagonij CB. proportionaliter secti ex *constr.* 1. & AK. illius dimidium est AK. continuatio lateris Pentagoni in perpendiculum, & angulus DAB angulus Pentagoni, similiter ABF (123. *p.*) Vnde tota constructio Pentagoni constat.

CONSTRVCTIO III. Fig. 44.

SIt datum latus BA. inuenta AC. vt in *constr.* 1. ex B radio BA. describatur arcus FAE. & ex C. FKD. secans priorem in F. & in K. & semicirculum in D. ductis DAF. CKE. secantes arcus in E. & F. vel ex D. fiat arcus secans FAE.

in

Dico DCFBE. esse Pentagonum regulare.

Demonstr. Cum BC. proportionaliter secta sit in A. & CF. BF. æquales sint maiori segmento BA. vel CO. est angulus CFB. Pentagoni (122.*p.*) & quia FA. est æqualis AC. & angulus BFC. ipsi CAB. vel DAB. (3.*p*.3.) & DA. AB. ipsis DC. CF. FB. erit DCF. æqualis CFB. & DE. ipsi BC. & DEB. ipsi CFB (4.*l*.1.) Vnde Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit. Quod, &c.

CONSTRVCTIO IV. Fig. 45.

Inuento puncto C. vt antea distantia AC. transferatur ex A. in E. & ex E. in F. Arcus AB. bifariam diuidatur in K. & ducatur BK. AF. Dico rectam OF. esse radium circuli, in quem si transferatur quinquies latus AB. erit Pentagonum descriptum.

Demonstr. Cũ AC. sit latus decagoni (167. *p*.) erit AE. decima circuli, & AK. vigesima circuli, vel decima semicirculi pars: & AF. quatuor decimæ semicirculi: Ergo cum BA. BF. æquales sint, & etiam anguli A. F. (5.*l*.1.) quilibet erit 3 decimæ semicirculi: Ergo cũ K. etiam sit 3 decimæ est angulus B. æqualis F. & OF. OB. sunt æquales (5.*l*.1.) Ergo angulus BOF. erit 4 decimæ semicirculi, vel duæ quintæ, hoc est Quinta circuli pars 1. Ergo FB. vel BA. subtedens angulum FOB. quintam circuli partem est Pentagoni latus in circulo radii OF. Quod, &c.

CONSTRVCTIO V. Fig. 45.

DVcta AF. vt antea, & BF Fiat angulus FBO. æqualis OFB. *Aliter*. Fiat angulus FBO. æqualis angulo OAB. Dico OF. esse radium circuli in quo BF. vel BA. est latus Pentagoni.

Demonstr. 1. Cum angulus F. demonstratus sit 3 decimæ: & B. erit 3 decimæ: Ergo O. erit 4 decimæ semicirculi, vel quinta pars circuli.

Demonstr. 2. Cum BO. faciat angulum OBF. opposito FOB. æqualem erit BF. media inter AF. & FO (3. *l.* 6) Ergo OF. ad FB. vel BA. est vt FB. vel BA. ad AF. sed BA. est radius & AF. latus Pentagoni cũ arcus AF. sit quinta circuli pars: Ergo etiam OF. est radius & FB. vel BA. latus Pentagoni in eo circulo descripti. Quod, &c.

CONSTRVCTIO VI. Fig. 45.

DVcta IC. vt in *constr*. 1. fiat ID. æqualis IA. vel AB. & DL parallela ipsi CA. Dico IE. esse radium circuli. *Alitèr*. Ducatur AZ. & angulus IAZ. æqualis sit ZCA. Dico IZ. esse circuli radium.

De-

Demonstr. 1. IA. est media inter IL. IC. quia vt IC. ad IA. ita ID. vel IA. ad IL. (2. *l.* 6.) sed IC. est latus Pentagoni respectu radij IC (167. *p.*) Ergo ID. vel IA. vel AB. est latus pentagoni respectu radij IL. Quod, &c.

Demonstr. 2. Quoniam AZ. facit angulum IAZ. æqualem opposito ZCA. erit IA. media inter IC. & IZ (3. *l.* 6.) Ergo erit IZ. radius respectu lateris Pentagoni IA. vel AB. vt AB. est radius respectu lateris IC. Quod, &c.

CONSTRVCTIO VII. Fig. 46.

In quouis puncto C, fiat CO. perpendicularis, & æqualis CA. & CL. æqualis AB. & LD. parallela OL. & BD. erit diameter circuli, in quo AB. erit latus Pentagoni, & CD. decagoni.

Demonstr. CD. ad CL. est vt CO. ad CL. (2. *l.* 6.) sed CO. vel CA. est latus decagoni, & CL. Pentagoni eiusdem circuli (167. *p.*) Ergo CD. est latus decagoni, & CL. vel AB. eiusdē circuli; sed quia CB. est proportionaliter secta in A. (166. *p.*) & AB. segmentum maius est latus Pētagoni est CB. diagonium (122. *p.*) Ergo cum angulus DCB. sit rectus recta BD. æque potest ac DC. CB (4. *l.* 2.) sed latus decagoni, & diagonium Pentagoni æquè possunt ac diameter, scilicet quadruplum semidiametri. (116. *p.*) Ergo Recta BD. erit diameter, & eius dimidiū

BK.

BK. radius circuli in quo erit CD. latus decagoni, & AB. latus Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRVCTIO VIII.

DVcta perpendiculari CO. infinita, sit HM. æqualis CA. & ducatur BM secans CO. in D. Dico CD. esse latus decagoni; & BD. diametrum circuli in quo AB. est Pentagoni latus.

Demonstr. Cum angulus in semicirculo rectus sit (3. *l.* 3.) HM. & MB. æque possunt ac diameter HB (4. *l.* 2.) sed latus decagoni, & diagonium Pentagoni æquè possunt ac diagonium (116. *p.*) Ergo cum HM. vel CA. sit latus decagoni (164. *p.*) erit BM. diagonium Pentagoni: sed cum triangula HMB. DCM. habeant angulum B. communem, & HMB. DCB. rectos æquales, sunt æquiangula, & latera proportionalia, vt BM. ad BH. ita BC. ad BD (2. *l.* 6.) Ergo sicut BH. est diameter circuli, & BM diagonium Pentagoni; erit BD. diameter circuli in quo BC. est diagonium Pentagoni: sed cum BC. proportionaliter secta sit in A (166. *p.*) est BC. diagonium Pentagoni, cuius latus est AB (122. *p.*) Ergo BD, est diameter circuli in quo descriptum sit pentagonum lateris AB. Similiter quia est vt diameter BH. ad HM. latus decagoni, ita BD. ad DC. erit DC, latus decagoni in cir-

circulo cuius diameter est BD. & latus Pentagoni AB. Quod erat &c.

CONSTRVCTIO IX.

Facta HM. æquali CA. ducatur CM. & BM. cum AK. faciat angulum BAK. æqualem CMB. Dico BK. esse radium circuli in quo AB. est Pentagoni latus.

Demonstr. Quoniam anguli BAK. CMB. sunt æquales, & B. communis, sunt æquiangula triangula CMB. KAB. & latera proportionalia, vt BM. ad BC. ita BA. ad BK. (*p. l. 6.*) & alternando vt BM. ad BA. ita BC. ad BK. sed BM. est diagonium Pentagoni in circulo radij AB. Ergo BC. etiam est diagonium in circulo radij BK. sed BC. est diagonium Pentagoni AB. ex *demonstr.* 8. Ergo BK. est radius circuli in quo inscribi potest Pentagonum lateris AB. Quod, &c.

CONSTRVCTIO X.

Fiat BR. perpendicularis, & æqualis AB. & inuento puncto C. ducatur CR. ex cuius dimidio P. fiat semicirculus CBR. & RX. sit quinta pars totius RC. & RY. perpendicularis diametro CR. secet circulum in Y. Dico RY. esse radium circuli in quo AB. est latus Pentagoni.

Demonstr. Cum angulus CBR. sit rectus,

□ CR. *æq.* □ CB + □ RB (4. *l.* 2.) sed □ CB + □ BR. diagonij, & lateris æquantur 5 □ radij circularis (115 *p.*) Ergo □ CR. *æq.* 5 □ radij: sed cùm sint continuæ RC. RY. RX (3. *l.* 6.) □ CR. ad □ RY. est vt RC. ad RX (4. *l.* 6.) Ergo cùm RC. quintupla sit ipsius RX. *ex hypoth.* erit □ RC. *æq.* 5 □ RY. Ergo cum □ RC. *æq.* 5 □ radij; erit RY. radius circuli in quo est BR. vel BA. latus Pentagoni, & BC. diagonium. Quod, &c.

CONSTRVCTIO XI. Fig. 46.

DIuisa CR. bifariam in P. ducatur PG. & ex A. recta AQ. parallela ipsi PG. Dico PQ. esse semiradium, & eius duplam QZ. esse radium.

Demonstr. Quoniam □ CB + □ BR. *æq.* □ CR. & □ RC *æq.* 4 □ CP (3 *l.* 2.) erit □ CB + □ BR. *æq.* 4 □ CP. sed latus Pentagoni AB. vel BR. & diagonium BC. possunt quadruplum cõpositæ ex latere decagoni, & ex semiradio circuli circunscripti (128. *p.*) Ergo recta CP. erit composita ex latere decagoni, & ex semiradio circuli circunscribentis Pentagonum, cuius latus sit AB. & diagonium BC. sed etiam recta CG. cõposita est ex semiradio AG. & ex latere decagoni CA. inscripti circulo radij AB (167. *p.*) Ergo cum sint parallelæ AQ. GP. & proportionales vt CG. ad AG. ita CP. ad QP.

(2.

(2. l. 6.) erit vt CG. composita ex latere decagoni, & semiradio ad semiradium AG. ita CP. composita ex semiradio, & latere decagoni ad semiradium QP. Ergo QP. est semiradius, & illius dupla QZ. radius circuli in quo AB. vel BR. est latus Pentagoni, & BC. diagonium eiusdem. Quod erat, &c.

Alias constructiones ommitto, cum exposita Geometriæ fæcunditatem satis commendent.

PROPOSITIO CLXIX.
Problema 14.

DAto diagonio Pentagoni ipsum describere, & invenire circulum.

CONSTRVCTIO. Fig. 46.

SIt datum diagonium CB. quod diuidatur media, & extrema ratione in A (*166. p.*) & maius segmentum AB. erit latus Pentagoni (*122. p.*) Invento iam latere AB & diagonio dato BC describatur Pentagonum qualibet ex vndecim constructionibus *prop.* 168. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXX.
Problema 15.

DAto perpendiculo à vertice Pentagoni in basim ipsum describere.

CONSTRVCTIO. Fig. 27.

SIt datum perpendiculum HR. quod diuidatur media, & extrema ratione in S. (166.*p.*) & ducantur ISM. KRL. perpendiculares ipsi HR. tum fiat SC. æqualis SH. & erit SR. proportionaliter secta in C (104.*p.*) cõtinuetur deindè CR. in P. vt CP. sit media inter CH. & quintam ipsius partem (2.*p.*5.) & erit □ HC. ad □ CP. vt HC. ad quintam sui partem, scilicet quintuplum. Dico HP. esse diametrum circuli. Si ergo bifariam diuidatur HP. in O. & radio OH. describatur circulus secãs rectas IM. KL. in I. K. L. M. erit HIKLM. Pentagonum regulare, & illius perpendiculum datum HR.

DEMONSTRATIO.

QVoniam IM. secat proportionalitèr perpendiculum HR. & est basi parallelum, erit IM. diagonium Pentagoni (123.*p*) & quia HS. SC. æquales sunt, erit punctum C. in quo intersecantur diagonia (136.*p.*) sed si in Pentagono regulari diametèr per intersectionem diagonorum ducatur maius segmentum potest

test quintuplum minoris (131. *p.*) Ergo cùm HC. possit quintuplum CP. erit HP. diameter, & HIKLM pentagonum regulare. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXI.
Problema 16.

Dato Perpendiculo à centro Pentagoni in latus invenire Pentagonum.

CONSTRVCTIO I. Fig. 47.

Sit datum perpendiculum AB. à *centro* in latus Pentagoni, continuetur in C. vt AB. BC. sint æquales: si tota AC. diuidatur media, & extrema ratione in D. (166. *p.*) Dico DC. esse radium circuli, quo invento describi potest Pẽtagonus, quauis ex 7. constructionibus *prop.* 167.

Demonstr. Quoniam A B. est dimidium AC. & perpendiculum *centri* est dimidium compositæ ex latere decagoni, & radio (126. *p.*) erit AC. composita ex latere decagoni, & radio: sed si composita ex radio, & latere decagoni sit proportionaliter secta, maius segmentum est radius circuli, & minus est latus decagoni (125. *p.*) Ergo maius segmentum DC. est radius circuli, & AD. latus decagoni: Ergo si radio DC. describatur circulus, & inscribatur

Pentagon :m(ex 167.*p.*) erit Problema solutum,&c.

CONSTRVCTIO II. Fig. 47.

SIt datum perpendiculum AC. quod diuidatur media, & extrema ratione in D. (166.*p.*) & fiat CE. æqualis maiori segmento DC. Dico DE. esse radium circuli, cui inscribendum sit Pentagonum ex 167.*prop.* & illius perpendiculum à *centro* erit data recta AC.

Demonstr. Quoniam si perpendiculum à *centro* sit proportionaliter sectum, illius segmentum maius est semiradius (128.*p.*) duplũ maioris segmenti, nempè DE. erit circuli radius. Ergo,&c. Quod erat,&c.

SCHOLIVM.

D*Ato perpendiculo à centro in diagonium inuenietur perpendiculum in latus, 135.p. & indè Pentagonum. Dato perpendiculo in latus continuatum, invenietur perpendiculum in diagonium 122.p. data continuatione lateris datum est minus segmentum diagonorum (123.p.) Dato latere continuato datur semidiagonium (124 p.) ex omnibus describi potest Pentagonum.*

PRO-

PROPOSITIO CLXXII.
Problema 17.

D*Ato latere, & diagonio maiori, vel minori Heptagonum describere.*

CONSTRVCTIO. Fig. 28.

SIt datum diagonium minus AC. & latus AB. supra basim AC. fiat triangulum Isosceles ABC (3. *p*. 2.) cui circumscribatur circulus ACEG (5 *p*. 1.) si verò latus AB. septies sumatur, perficiet Heptagonum circulo inscriptum.

2. Datum sit diagonium maius AD, & latus DE. supra basim DE. fiat triangulum Isosceles DAE. cui circũscribatur circulus DGB. & distantia DE. septies in circũferentia sumpta dabit omnia puncta angularia Heptagoni.

Demonstratio ex ipsa constructione perspicua est: neque constructio adducta fuisset, si ad sequentia problemata non conduceret.

PROPOSITIO CLXXIII.
Problema 18.

D*Ato latere, & diagonorum differentia inuenire Heptagonum.*

CONSTRVCTIO Fig. 28.

SIt datum latus DE. & differentia diagonorũ DL. faciant quemcumque angulum LDE.

Du-

Ducatur deindè EA. faciens angulum DEA. æqualem ipsi DLE. & continuata DL. quousque secet EA. in A. Dico DA. esse diagonium maius, quo invento describi poterit Heptagonum vt in 172. *prop.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam triangula LDE. ADE. habent angulum D. communem, & DLE. DEA. æquales ex *constr.* erit angulus DEL. æqualis DAE. (3. *l.* 1.) Ergo quia in △ DEA. recta EL. facit angulum DEL. æqualem opposito A. erit DE. media inter DL. DA (3. l. 6.) sed latus DE. medium est inter diagonium maius, & differentiam vtriusque (141. *p.*) Ergo cum DL. sit diagoniorum differentia erit DA. diagonium maius. Vnde, &c. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXIV.

Problema 19.

D*Atis diagonijs maiori, & minori Heptagonum describere.*

CONSTRVCTIO Fig. 28.

SIt datum diagonium maius AD. & minus AC. sumatur in maiori AD. recta AL. æqualis ipsi AC. & erit DL. differētia diagoniorum. Si ergo inveniatur DC. media inter diagoniū maius AD. & differentiam vtriusque DL. (121. p. 5.)

p.51.) erit DG. latus Heptagoni, cognito ergo latere, & diagonio maiori, vel minori describetur Heptagonum ex 172. *prop.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam latus Heptagoni medium est inter diagonium maius AD. & differentiā DL. maioris, & minoris (141. *p.*) cum sit DC. media inter DA. & DL. erit DC. latus Heptagoni. Vnde constat constructio ipsius. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXV.

Problema 20.

DAtam rectam ita diuidere, ut alia data media sit inter segmentum maius, & differentiam utriusque, vel rectam diuidere, ut rectangulum ex maiori segmento, & differentia utriusque æquale sit spatio dato.

CONSTRVCTIO. Fig. 48.

SIt recta diuidenda AB. & alia data ED. hæc diuidatur bifariam in A. & sit AB. ipsi perpendicularis: & AE. AF. æquales: tum AB. diuidatur bifariam in C. & AC. in G. fiat AH. æqualis ipsi EF. & ex G. describatur circulus AICL. & ducta HGL fiat IK. æqualis IH Dico HL esse segmentum maius, & KL. minus, & HK. differentiam, & ED. esse mediam inter LH. HK.

vel

vel rectangulum LHK. esse æquale □ ED.

DEMONSTRATIO.

QVoniam angulus EAF. est rectus, & EA. AF. sunt æquales; □ EF. æquatur 2 □ EA (4. *l.* 2.) sed quia ED. est dupla ipsius EA. erit □ ED. *æq.* 4 □ EA (3. *l.* 2.) Ergo □ ED. *æq.* 2 □ EF. vel [illegible] sed cum tangens HA. sit media inter secantem LH. & exterius segmentum HI. (6. *l.* 6.) erit □ HA. *æq.* ▭ LHI (1. *l.* 6.) Ergo □ ED. æquatur 2 ▭ LHI sed quia HK. est dupla ipsius HI. erit ▭ LHK est æquale 2 ▭ LHI (1. *l.* 6.) Ergo □ ED. æquatur ▭ LHK. sed quia AC. vel LI. est dimidium AB. erunt 2 IL. æquales ipsi AB. & etiam 2 IL. æquantur LI+IH: & LI−IK. hoc est LH. & LK. Ergo etiam LH+LK. æquantur ipsi AB. Ergo cum HK. sit differentia inter LH. & LK. est □ ED. æquale ▭ LHK. scilicet maioris segmenti LH. & differentiæ HK. Ergo ED. media erit inter maius segmentum LH. & HK. differentiam maioris, & minoris segmenti (1. *l.* 6.) Vnde secta est AB. modo quæsito. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CLXXVI.

Problema 21.

Dato latere, & duplicis diagonij maioris, & minoris summa Heptagonum regulare describere.

CONSTRVCTIO. Fig. 43.

Sit datum Heptagoni latus ED. & summa vtriusque diagonij AB. diuidatur AB. in duo segmenta, vt datum latus ED. medium sit inter segmentum maius LH. & differentiam vtriusque HK (175. *p.*) Dico LH. esse diagonium maius & LK. diagonium minus. Cognito ergo latere ED. & vtroque diagonio LH. LK. describatur Heptagonum (172. *p.*)

DEMONSTRATIO.

QVoniam latus Heptagoni medium est inter diagonium maius, & differentiam vtriusque (141. *p.*) sed latus ED. medium est inter LH. HK. & LH + LK. est diagonij vtriusque summa (175. *p.*) Ergo LH. & LK. erunt diagonia. Vnde Heptagoni descriptio constat ex 172. *p.* Quod erat &c.

PROPOSITIO CLXXVII.

Problema 22.

DAto latere Heptagoni ipsum quàm proximum geometricè describere.

CONSTRVCTIO. Fig. 48.

SIt datum latus ED. bifariam diuisum in C. cui sit perpendicularis AB. infinita, & qualium ED. est 20. sumatur AB. 81. scilicet quadrupla sesquivigesima; & erit AB. vtriusque diagonij summa veritati proxima. Cognito iam latere ED. & vtriusque diagonij summa describatur Heptagonum (176. Prop.)

Si verò exactior operatio requiratur qualium ED. est 10000. sumatur AB. 40489. & erit vtriusque diagonij summa.

Examen per numeros.

Quoniam latus DE (in *fig.* 28.) latus Heptagoni subtendit septimam circuli partem: diuiso integro circulo per 7. erit quotiens arcus DE. 51. *gr.* 25. $\frac{5}{7}$. Et quia diagonium minus DB. subtēdit arcum duplum, erit arcus DGB. 102. *gr.* 51. $\frac{3}{7}$. & quia diagonium maius DA. subtendit arcum DBA. triplum ipsius DE. erit DBA. *gr.* 154. 17. $\frac{2}{7}$. Insuper quia chorda est dupla sinus dimidij arcus [illegible] 17. *Trigonometriæ* nostræ: sumpti sunt sinus ex Canone Pitisci.

Di-

Dimidium arcus DE est

gr. 25.42.$\frac{6}{7}$.	Sinus	43388.37389.
& chorda DE.		86776.74778.
semiarcus DB. 51.25.$\frac{5}{7}$.	Sin.	78183.14812.
& chorda DB.		156366.29264.
semiarcus DBA. 77.8.$\frac{4}{7}$.	Sin.	97492.32885.
& chorda BA.		194985.58257.
summa chor. DB. DA.		351351.87896.

Si ergo fiat vt 20 ad 81. ita chorda DE. latus heptagoni ad aliud, veniet quartus proportionalis 351445.82850.
Qui numerus maior est summa diagonij duplicis DB. DA. sed excessus non peruenit ad vnam millesimam semidiametri partem. Vnde constructio satis proxima est veritati, & tuto in praxi retineri potest.

Iterum si fiat vt 10000 ad 40489. ita DE 86776.74778. ad aliud, veniet quartus proportionalis 351350.36630. qui numerus minor est summa vtriusque diagonij DB, DA. vna tantũ centesima millesima semidiametri parte. Constructio ergo ista exactissima est, licet praecedens praxi Geometricae sit accommodatior.

PROPOSITIO CLXXVIII.
Problema 23.

Dato arcui rectam proximè æqualem inuenire, & circulum quadrare.

CONSTRVCTIO. Fig. 30.

SIt datus arcus AEC ductis radio BA. & tangente perpendiculari AR. & chorda AC. diuidatur angulus RAC. bifariam recta AI. & angulus RAL. recta AK. & angulus RAK. recta Ao. tum fiat CL. perpēdicularis ipsi AC. & IK ipsi AI. & Ko ipsi AK. & oa. ipsi Ao. tandem diuidatur oa. in z. vt □ oa. sit triplum □ oz. vel oz. ad oa. sit vt radius circuli ad latus trianguli regularis inscripti, & ducatur Az. Dico Az. esse rectam arcui AEC. quā proximè æqualem.

Examen per numeros.

Sit datus arcus AEC. sexta circuli pars, nempè 60. *gr.* eritque AE. 30. *gr.* & AF. 15. *gr.* & AG. 7. 30. Ergo eius dimidium erit 3. 45. & sinus huius ex tabulis Pitisci erit 6540. 31596. 59043. & erit chorda ipsius arcus AG. qualium diameter AZ. est 10000. 00000. 00000. Ergo cum Ao. sit octupla ipsius AG. (145. *p.*) tota Ao. erit 52322. 50338. 41144. Similiter tangens arcus 7. 30. erit 6554. 34628. 15238. & eius octupla 52434. 77025. 21904. erit Aa. laterum circumscripcriptorum [illegible] diameter AZ. est vt supra. Quadratum igitur rectæ Aa est 27494. 05131. 30999. 13040. 15997. 85216. Et Quadratum rectæ Ao erit 27376. 44360. [illegible] 28736. Differentia Quadratorum 00117. 60771. 31932. 84637. 87719. 56480. & est quadratum rectæ ao. (4. 121) Reliqua enim pars est Quadr. rectæ oZ. 25299. 20257. 00644. 28212. 64908. 42505. Summa quadratorum Ao & oZ est 27417. 64617. 98710. 56614. 02140. 80896. hoc est quadratum rectæ AZ. (4. 121) Huius ergo radix quadrata 52359. 95244. 96415. est recta AZ. Dico hanc esse proximè æqualem circumferentiæ AEC, quæ supponitur sexta circuli pars. Sexenim multiplicatur sextupla rectæ AZ. erit 3. 14159. 71451. 78458. peripheria circuli, cuius diameter AZ est 100000. 00000. 00000. sed debuit esse iuxta accuratiorem rationem Ludolphi a Ceulen 3. 14159. 26535. 89793. Nostra ergo approximatio cum hac Ludolphi in sex prioribus literis conuenit; neque veram superat dimidio centesimæ millesimæ partis diametri. Cussani approximatio dat 3. 1423. Vietæa 3. 14164. Illa in tribus prioribus notis, hæc in quatuor prio-

 ri-

ribus cum Ludolphæa convenit: nostra ergo accuratior est. De Vietæa meritò Ceulen scriptum reliquit. *Quare ratio Vietæa omnium quotquot hactenus extant accuratissima est.* pag. 141. An verò post Ludolphum alia prodierint nostra accuratior, me prorsus latet.

CIRCVLI QVADRATVRA. Fig. 10.

QVoniam circulus æqualis est triangulo, cuius basis sit recta periphæriæ æqualis, & perpendiculum, vel altitudo radius circuli (7. *p.* 2. vel 8. *p.* 4.) & triangulum est æquale rectangulo habente idem perpendiculum, & dimidiam basim (8. *l.* 1.) Quoniam AB. est radius, & Az. est sexta pars circumferentiæ: Verùm Az. ter sumpta dimidium circumferentiæ: Ergò rectangulum ex AB. & 3 Az. erit æquale circulo. Vnde si inveniatur media proportionalis inter AB. & 3 Az. Quadratum illius mediæ æquale erit dicto rectāgulo, & ipsi circulo (1. *l.* 6.)

Hæc quadratura licèt omninò vera non sit, omnibus tamen Geometricis, quas hucusque videre licuit accuratior est, ac veritati proximior.

PRO-

PROPOSITIO CLXXIX.
Problema 24.

Datorum Polygonorum rationem invenire.

CONSTRVCTIO. Fig. 32.

Sint data Polygona ⬠KLMN. & ⬠ABCDE. quorum ratio inquiritur.

Primo inveniantur rationum altitudines PQ & GH prout in 151. p. vel 17. M. 1. Fiat deinde vt PQ ad GH. ita AB. ad LT. Dico ⬠KLMN. ad ⬠ABCDE. esse vt LK. ad LT.

DEMONSTRATIO.

CVm sint tres rectæ KL AB. TL. ratio KL. ad TL. composita est ex ratione KL. ad AB. & ex ratione AB. ad TL (21. *P.*) sed etiam ⬠KLMN ad ⬠ABCDE. habet rationem compositam ex ratione basium KL. ad AB. & ex ratione altitudinum PQ. ad GH. vel ex *constr.* AB. ad TL (154 *p.*) Ergo ⬠KLMN. ad ⬠ABCDE. est etiam vt KL. ad TL (1. l. 5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXX.
Problema 25.

POlygonum dato simile efficere datam habens rationem cuilibet alteri dato.

CONSTRVCTIO. [illegible]

PRimò quæratur Polygonum simile ipsi ◯ K L I. & æquale dato ◯ A B D. Inveniatur [illegible] num multitudinibus G H. R Q. [illegible] (41. M. 4.) fiat Q S. æqualis ipsi G H. & ducta S R. parallela basi K L. sit R T. parallela ipsi P K. Deinde inter A B. & T L. inveniatur media N L. Dico ◯ N L. simile ipsi ◯ K L. æquale esse dato ◯ A B D.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △ K L P. æquale est ◯ K L I. & △ R T L. simile ipsi æquale. erit ◯ T L. simile dato ◯ K L I (18. M. 1.) Ergo quoniam [illegible] do rationis R. vel S Q. æqualis est [illegible] G H. etiam ◯ T L. ad ◯ A B. vt T L. ad A B. [illegible] sed cùm T L. N L. A B. sint continuæ [illegible] ratio T L ad A B. est duplicata rationis T L. ad N L. (21. *P.*) & ◯ T L. ad simile ◯ N L. habet etiam rationem duplicatam T L. ad N L. (4. *l.* 6.) Ergo ◯ T L. ad ◯ N L. erit vt T L. ad A B. (1. *l.* 5.) Ergo cùm ◯ T L. simile ipsi ◯ K L. & ◯ N L. ipsi simile eandem habeat rationem,

quam

quam ad ⬠ ABD. nempè TL, ad AB. erit ⬠ NL. æquale ⬠ ABD (2. *l.* 5.) & ex *hyp.* simile ipsi ⬠ KL. Quod erat, &c.

CONSTRVCTIO II.

Secundo quæritur Polygonum simile ipsi ⬠ KLI. quod sit ad ⬠ ABD. in data ratione X. ad Z. Primò inveniatur Y. media inter X. & Z. (2. *p.* 5.) & inveniatur LN. vt ⬠ NL æquale sit ⬠ ABD. ex *præc. constr.* Deinde fiat vt Y. ad X. ita NL. ad LO. Dico ⬠ OL. simile ipsi ⬠ KLI. esse ad ⬠ ABD. vt X. ad Z.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ⬠ OL. ad simile ⬠ NL. est in duplicata ratione OL ad NL (4. *l.* 6.) vel X. ad Y. ex *constr.* sed cum sint continuæ X. Y. Z. ratio X. ad Z. est duplicata rationis X. ad Y (21. *P.*) vel rationis OL. ad NL. Ergo ratio ⬠ OL. ad simile ⬠ NL. est vt X. ad Z (1. *l.* 5.) sed ⬠ NL. æquale est ipsi ⬠ ABD ex *constr.* Ergo ⬠ OL. ad ⬠ ABD. est in data ratione X. ad Z. (2. *l.* 5.) & simile dato ⬠ KLI. ex *constr.* Quod erat, &c.

Hac ratione Polygonũ quodlibet in aliud dato simile potest immediatè sine reductione ad triangula, vel rectangula non iniucunda metamorphosi converti, augeri etiam, & minui in quacumque ratione ad liberum quærentis, vel ipsius Geometræ arbitrium.

OPE-

OPERIS CONCLVSIO.

PRoblematibus quamplurimis scienter ommissis ob rationes in principio huius capitis assignatas, hac de Figuris planis dicta sufficiant, quæ Minimorum dignitatem satis commendant. Cui hactenus demonstrata non displicuerint, laxato aliquantisper animo sese ad tertiam partem accingat, quæ pari, vt spero, felicitate, Geometriam Magnam esse in Minimis solidorum expositione conuincet.

FINIS.

APPENDIX

AD ORDINARIA PLANA.

SEquentes propositiones in mentem venere hac secunda parte iam typis excusa, quas tamen addere libuit continuato præcedentium ordine, ut quæ fortè ad solida ordinata faciliùs demonstranda, saltèm earum aliqua, non erunt inutiles.

PROPOSITIO CLXXXI.

DEcagoni latus, & Perpendiculum à centro Pentagoni in eodem circulo, æquè possunt ac radius, & semisegmẽtum minus eiusdem proportionalitèr secti.

EXPOSITIO. Fig. 50.

SIt ⬠BDGMR. & latus decagoni LM. & erit LK. minus segmentum semiradij (129 *p.*) vel semi segmentum minus radij. Dico igitur □LM + □AK. æquari □AL + □LK.

DEMONSTRATIO.

QVia □AL. vel AM. æquatur □AK + □KM (4 l 21). Ergo □AL + □LK. æquantur □AK + □KM + □LK. sed □KM + □LK. æquantur □LM (4 l 20.) Ergo □AL + □LK. æquantur □AK + □LM. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXII.

IN Pentagono regulari perpendiculum ex vertice potest quintuplum perpẽdiculi à cẽtro.

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN ⬠BDGMR. Dico Perpendiculum BK. quintuplvm posse ipsius AK.

DEMONSTRATIO.

DIuiso bifariam radio AB. in O. erit OK. proportionaliter secta in A. quia vt OA. ad AK. ita AK. ad KO. (137. *p.*) Ergo quia toti KO. addita est OB. æqualis minori segmento OA. cõposita BK. poterit quintuplum maioris segmenti AK (107. *p.*) Ergo, &c. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXIII.

IN Pentagono regulari si ducantur diagonia, erit △ minus ad maius △: vt maius segmentum ad rectam proportionaliter sectam; vel vt minus segmentum ad maius, & trapezium erit proportionaliter sectum.

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN ⬠BDGMR sint diagonia BG. BM. Dico △BDG. ad △BGM. esse vt maius segmentũ ad totam proportionaliter sectam: & trapezium BDGM. esse proportionaliter sectum diagonio BG.

DE-

DEMONSTRATIO.

QVia △BDG & △BGM. sunt inter parallelas DG. BM. se habent vt bases, vt DG. ad BM (1.*l*.6.) sed DG. est maius segmentum ipsius BM (122.*p*.) Ergo △BDG. ad △BGM. est vt maius segmentum ad totam proportionalitèr sectam. Quod, &c.

Deindè quia DG+BM. est proportionalitèr secta (104.*p*.) est △BDG. ad △BGM. vt minus segmentum DG. ad maius BM. Tandem ergo sicut DG+BM est proportionalitèr secta ita spatium DGB+BGM. vel trapezium BDGM. erit proportionaliter sectum (1.*l*.5.) Quod erat, &c.

Vndè △BDG. ex diagonio, & duplici latere, est maius segmentum triãguli ex latere, & duplici diagonio GBM.

PROPOSITIO CLXXXIV.

PEntagonum ad triangulum ex latere, & duplici diagonio est, vt perpendiculum à vertice ad perpendiculum à centro.

EXPOSITIO.

DVctis diagonijs. Dico pentagonum BDGMR. ad △BGM. esse vt BK ad AK.

DEMONSTRATIO.

DIuidatur bifariam AB. in O. & erit OK. proportionalitèr secta in A (137. *p.*) sed etiam trapezium BDGM. est proportionalitèr sectum (183. *p.*) Ergo si rectæ OK. addatur minus segmentum OA. vel OB. & trapezio BDGM. addatur minus segmentum BDG. vel BMR. erit vt composita BK. ad AK. ita ⬠ BDGMR. ad △ BGM (4. *l.* 5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXV.

SI ⬠ & △ eidem circulo inscribantur, & ex latere △ fiat aliud ⬠ alteri circulo inscriptum cum decagono, erit □ lateris Pentagoni minoris ad □ decagoni, ut 5 ad 3. & etiā □ diagonij eiusdem ⬠ ad □ radij maioris circuli erit, ut 5 ad 3.

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN circulo BDG. sit BD. latus ⬠ & BG. diagonium: tum CN latus △ & EF, æqualis CN. sit latus ⬠ in circulo EHF. & EH. latus decagoni. Dico □ BD. ad □ EH. esse vt 5 ad 3. & □ BG. ad □ AE. etiam esse vt 5 ad 3.

DEMONSTRATIO.

CVm BD. sit maius segmentum ipsius BG, (122. *p.*) & EH, ipsius EA (125 *p*) erit □ BD ad □ BG. vt □ EH, ad □ EA (4. *l.* 6.) & alternando □ BD. ad □ EH. vt □ BG. ad □ EA. & etiam summa antecedentium ad summā consequētium, nempè □ BD + □ BG. ad □ EH + □ EA.

est

est vt □EH. ad □EA (4 *l.*5.) sed □BD + □BG. est 5 □AB (115.*p.*) & □EH + □EA. est □EF. vel CN (117.*p*) & □CN. est 3 □AB (112.*p*) Ergo □BD. ad □EH. est vt 5 □AB. ad 3 □AB. vel vt 5 ad 3 (1.*l.* 5.) & similiter □BG. ad □EA. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXXVI.

Quinta pars ⬠ ad tertiam △ in eodem circulo est vt diagonium ⬠ ad latus △: vel ⬠ ad △ est vt 5 diagonia ⬠ ad 3 latera △. vel vt $\frac{1}{3}$ diagonij ad $\frac{1}{5}$ lateris △.

EXPOSITIO. *Fig.* 56.

In circulo BDM. sit ⬠BDGMR & △BCN. ductis radijs AG. AM. AC. AN. erit GAM. $\frac{1}{5}$ ⬠ & CAN. erit $\frac{1}{3}$ △. Dico AGM. ad CAN. esse vt BG. ad BC. vel CN. &c.

DEMONSTRATIO.

Cum AI. sit dimidium AB. vel AL (1.*p.*) est AK proportionaliter secta in I. (128.*p.*) Ergo AI. ad AK. est vt GM. ad GM. (122.*p.*) Ergo ▭AI.GB. æquatur ▭AK.GM (1.*l.*6.) sed ▭AI.GB. ad ▭AI.CN. est vt GB. ad CN. (1.*l.*6.) Ergo ▭AK.GM. ad ▭AI.CN. est etiam vt GB. ad CN. (2 *l.*5.) sed △GAM. est $\frac{1}{2}$ ▭AK.GM. & △CAN. est $\frac{1}{2}$ ▭AI.CN (8.*l.*1.) Ergo △GAM. ad △CAN. est vt BG. ad CN (5.*l.*5.) Ergo quia $\frac{1}{5}$ ⬠ ad $\frac{1}{3}$ △ est

vt

vt BG. ad CN. erit $\frac{1}{5}$ ⬠ ad $\frac{1}{3}$ △ vt 5 BG. ad 3 CN. hoc est ⬠ ad △ vt 5 BG. ad 3 CN. vel vt $\frac{1}{3}$ BG. ad $\frac{1}{5}$ CN. quia □ mediarũ æquatur □ extremarum (1. l. 6.) Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXXVII.

Pentagonum ad Hexagonum eiusdem circuli, est vt 5 diagonia ⬠ ad 6 latera △.

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN circulo BDG. inscripta sint ⬠ & ⬡. Dico ⬠ ad ⬡ esse vt 5 BG ad 6 CN.

DEMONSTRATIO.

QVia △ est dimidium ⬡ in eodem circulo (16. M. 1.) sed ⬠ ad △ est vt 5 BG. ad 3 CN. (186. *p.*) Ergo ⬠ ad 2 △ erit vt 5 BG. ad 6 CN. sed 2 △ æquantur Hexagono eiusdem circuli. Ergo ⬠ ad Hexagonum est vt 5 BG. ad 6 CN. (2. *l.* 5.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXVIII.

FIgura regularis ad aliam dimidio laterum numero constantem est vt radius ad minoris perpendiculum ex centro.

Consect. 1. *Decagonum ad Pentagonum est vt recta proportionaliter secta ad compositam, ex maiori segmento, & semisse minoris.*

2. *Octagonum ad □ vt diameter ad latus quadrati.*

3. *Dodecagonũ ad ⬡ vt diameter ad latus △.*

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN circulo BDL. sit ⬠ BDGMR. & decagonum cuius latus GL. Dico esse decagonum ad ⬠ vt Radius AL. ad perpendiculum AK. & sic de reliquis. Vndè si recta quæuis AB. sit proportionalitèr secta in O. & minus segmentum AO. sit bisectum in *x*. erit decagonum ad ⬠ vt BA. ad B*x*. & AL. ad AK. vt BA. ad B*x*. &c.

DEMONSTRATIO.

QVia △ GAK. est $\frac{1}{10}$ ⬠ & △ GLA. est $\frac{1}{10}$ decagoni: sed quia △ GAK. & △ GLA. habent eandem altitudinem in G. se habent vt bases: vt AK. ad AL (1. *l*. 6.) Ergo $\frac{1}{10}$ ⬠ ad $\frac{1}{10}$ decagoni est vt AK. ad AL. Ergo ⬠ ad decagonum est vt perpendiculum ad radium, & conuertẽdo decagonum ad ⬠ vt radius ad perpendiculũ Ci. & sic de reliquis (5. *l*. 5.)

Con-

Confect. In ⬠. est KL, minus segmentum semi radij proportionaliter secti (118 *p.*) Ergo erit KL semissis minoris segmenti totius radij AL. proportionalitèr secti: Ergo AK. composita erit ex maiori segmento, & semisse minoris: qualis etiam est B*x*. respectu BA. ex *hyp.* Ergo AL. ad AK. est vt BA. ad B*x*. & decagonū ad ⬠ vt tota proportionalitèr secta ad compositam ex maiori segmento, & semisse minoris.

Deindè in fig 51. octagonum ad □ est vt radius GL. vel GA. ad perpendiculum GH. sed vt AG. ad GH. ita DF. ad FA. (3. *l.* 6.) Ergo octagonum ad □ est vt diameter ad latus quadrati.

Tandèm cum GE. sit latus ⬠ & BK. perpendiculum est duodecagonū ad ⬠ vt GB. ad BK. Ergo vt AE. ad EC. (5. *l.* 5.) &c.

PROPOSITIO CLXXXIX.

TRiangulum ad decagonum eiusdem circuli est vt triplū lateris △ ad quintuplum diagonij continuati in latus decagoni etiam cōtinuatum, & Hexagonum ad decagonū vt 6 latera △ ad 5 diagonia continuata.

EXPOSITIO.

IN circulo BDI. sint inscripta △. ⬡. & decagogonum: & continuatis diagonio BM. & latere decagoni GL vsque ad eorum intersectionem Q. Dico △BCN. ad decagonum esse vt 3 CN. ad 5 BQ. & Hexagonum ad decagonum vt 6 CN. ad 5 BQ.

DEMONSTRATIO.

QVia angulus centri GAL. duplus est anguli GBL (20.*l*.3.) & GBQ. etiam est duplus ipsius GBL. æquales sunt GAK. GBQ. sed anguli in K sunt recti (3.*l*.3.) & BGL. in semicirculo est rectus (31.*l*.3.) Ergo æquiangula sunt △GAK. & △QBG (32.*l*.1.) Ergo vt AK. ad radium AG. ita BG. ad BQ. (4.*l*.6.) sed ⬠ ad decagonum vt AK. ad AG. (188.*p*.) Ergo ⬠ ad decagonum est vt BG ad BQ. (11.*l*.5.) vel vt 5 BG. ad 5 BQ. (15.*l*.5.) sed △ ad decagonum habet rationem compositam ex ratione △ ad ⬠ nempe 3 CN. ad 5 BG. (186.*p*.) & ⬠ ad decagonum: Ergo △ ad decagonum habet rationem compositam ex ratione 3 CN. ad 5 BG. & 5 BG. ad 5 BQ. Ergo △ ad decagonum est vt 3 CN. ad 5 BQ. Quod, &c. Sed Hexagonum est duplum trianguli (16. M. 1.) Ergo Hexagonum ad decagonum eiusdem circuli erit vt 6 CN. ad 5 BQ. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXC.

Diagonium Pentagoni ad latus △ est vt recta potens totam proportionaliter sectam, & maius segmentum ad rectam, quæ possit totã & minus segmentum.

EXPOSITIO. Fig. 50.

SIt YX. proportionaliter secta in T. & ST. ipsi perpendicularis, & æqualis: & SY. poterit quod tota ST. & minus segmentum YT. tum SX. poterit quod tota ST. & maius segmẽtum TX. Si ergo in eodem circulo sint △ BCN. & ⬠ BDGMR. Dico diagoniũ BG, ad latus CN. esse vt SX ad SY.

DEMONSTRATIO.

QVia □ BG + □ GL *æq.* 4 □ AL. (116. *p.*) & □ CN + □ AL. *æq.* 4 □ AL (112 *p.*) deinde □ ST + □ YT. *æq.* 3 □ TX. (108. *p.*) Ergo □ ST + □ YT + □ TX. *æq.* 4 □ TX sed □ SY *æq.* □ ST + □ YT, & □ SX. *æq.* □ ST + □ TX. (4. *l.* 2.) Ergo □ SY + □ TX *æq.* 4 □ TX. & □ SX + □ TY. *æq.* 4 □ TX Ergo □ BG + □ GL *æq.* □ CN + □ AL. sicut □ SX + □ TY. *æq.* □ SY + □ TX. sed cum GLA, sit proportionaliter secta (124. *p.*) est □ GL ad □ AL. vt □ YT. ad □ TX (4. *l.* 6) Ergo □ BG. ad □ CN. est vt □ SX ad □ SY (1. *l.* 5) & BG. ad CN. vt SX ad SY (6. *l.* 6) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXCI.

IN eodem circulo quarta pars quadrati ad tertiam partem trianguli, est vt diameter ad latus trianguli, vel vt dodecagonum ad Hexagonum: & □ ad △ vt 4 diametri ad 3 latera △.

EXPOSITIO. Fig. 51.

IN circulo ABC est inscriptum △ ABC. cum □ ADEF. & AGF. est quarta pars quadrati. Et BGC est tertia pars △ ABC. Dico AGF. ad GBC. esse vt diameter DF. ad latus △ BC.

DEMONSTRATIO.

QVia G est centrum ... △ ABC. (109. *p.*) est AG. dupla ipsius GK (1. *p.*) sicut BC. dupla ipsius KC (... 3.) sed △ AGF. ad △ BGC. habet rationem compositam ex basibus GF. ad BC. & altitudinibus GA. ad GK. quae est ipsa ratio BC. ad KC (...) Ergo cum ratio GF. ad KC. sit composita ex rationibus GF. ad BC. & BC. ad KC. (... *P.*) erit △ AGF. ad △ BGC. vt GF. ad KC. (... *l*. 5.) sed GF. ad KC. est vt tota DF. ad totam BC (5. *l*. 5.) Ergo △ AGF. ad △ BGC. est vt DF. ad BC. Ergo vt dodecag. ad ⬡ (188. *p.*) Ergo quia $\frac{1}{4}$ □ ad $\frac{1}{3}$ △ est vt DF. ad BC. erunt $\frac{4}{4}$ □ ad $\frac{3}{3}$ △ vel □ ad △ vt 4 DF. ad 3 BC. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXCII.

IN eodem circulo □ ad ⬠ est vt 4 diametri circuli ad 5 diagonia Pentagoni.

DEMONSTRATIO.

QVia □ ad △ est vt 4 diametri ad 3 latera △ (191. *p.*) sed △ ad ⬠ est vt 3 latera △ ad 5 diagonia Pētagoni: Ergo □ ad ⬠ est vt 4 diametri ad 5 diagonia (1 *l*. 5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXCIII.

IN eodem circulo △ ad Octagonum est vt 3 latera △ ad 8 latera □: & Hexagonū ad Octagonum vt 3 latera △ ad 4 latera □.

DEMONSTRATIO.

QVia △ ad □ est vt 3 latera △ ad 4 diametros circuli (191. *p.*) sed □ ad octagonum est vt latus □ ad diametrum (188. *p.*) vel vt radius ad latus (3. *l*. 6.) vel vt diameter ad 2 latera □ vel 4 diametri ad 8 latera □ (5. *l*. 1.) Ergo ex æquo △ ad octagonum est vt 3 latera △ ad 8 latera □: sed ⬡ est duplum △: Ergo ⬡ ad octagonum est vt 6 latera △ ad 8 latera □: vel vt 3 latera △ ad 4 latera □. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXCIV.

OCtagonum ad ⬠ est vt 8 latera □ ad 5 diagonia Pentagoni.

DEMONSTRATIO.

QVia Octagonum ad △ est vt 8 latera □ ad 3 latera △ (193 *p.*) sed △ ad ⬠ est vt 3 latera △ ad 5 diagonia ⬠ (186. *p.*) Ergo ex æquo Octagonum ad ⬠ est vt 8 latera □ ad 5 diagonia ⬠ (1. *l.* 5.)

PROPOSITIO CXCV.

OCtagonum ad decagonum est 8 latera □ ad 5 diagonia continuata in latus decagoni cōtinuatum.

DEMONSTRATIO.

OCtagonum ad △ vt 8 lat. □ ad 3 lat. △ (193. *p.*) sed △ ad decagonum est vt 3 lat. △ ad 5 diag. ⬠ continuata (189. *p.*) Ergo ex æquo Octagonum ad decagonum est vt 8 lat. □ ad 5 diag. continuata ⬠ (1. *l.* 5.)

PROPOSITIO CXCVI.

QVadratum ad decagonum est vt 4 diametri circuli ad 5 diagonia ⬠ continuata.

DEMONSTRATIO.

QVia □ ad △ est vt 4 diametri ad 3 latera △: sed

sed △ ad decagonum est vt 3 lat. △ ad 5 diag. continuata (190. *p.*) Ergo ex æquo □ ad decagonũ est vt 4 diametri ad 5 diagonia ⬠ continuata (1. *l.* 5.)

PROPOSITIO CXCVII.

Dodecagonum ad △ est vt 2 diametri ad latus △.

DEMONSTRATIO.

QVia dodecagonum ad ○ est vt 2 diametri ad 2 latera △ (188. *p.*) & ○ ad △ vt 2 latera △ ad latus △ (198. *p.*) Ergo ex æquo dodecagonũ ad △ vt 2 diametri ad latus △ (1. *l.* 5.)

Similitèr comparari potest dodecagonum quadrato, pẽtagono, octagono, & decagono.

PROPOSITIO CXCVIII.

SI recta sit proportionalitèr secta, & maius segmentum diameter circuli, □ totius + □ ex dimidio minoris segmenti æquatur 3 □ ex diagonio ⬠ circulo inscripti.

EXPOSITIO. Fig. 32.

SIt AB. proportionalitèr secta in C. & AC. bisecta in D. & radio EC. vel EB. fiat circulus cum ⬠. Dico □ BA + □ AD æq. 3 □ diag. ⬠.

DEMONSTRATIO.

VT AC. ad CB. ita DC. ad CE. (5. d. 5.) Ergo DE. secta est proportionalitèr in C. sicut AB. Ergo go si EC. fiat radius, erit CD. latus decagoni (124.*p.*) Si ergo G. diagonium ⬠ in eodem circulo, & □ G + □ CD. vel AD. *aequabuntur* □ CB. (116.*p.*) sed □ BA + □ AC. *aeq.* 3 □ CB. (108.*p.*) Ergo □ BA + □ AC. *aeq.* 3 □ G + 3 □ AB. sed □ BA + □ AC. *aeq* 4 □ BA + 4 □ AD (3. *l.* 2.) Ergo 3 □ G + 3 □ AD. *aeq.* □ BA + 4 □ AD. Ergo ablatis vtrinque 3 □ AD erit □ BA + □ AD. *aeq.* 3 □ G. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXCIX.

SI recta sit proportionaliter secta, qua diametro circulus describatur cum ⬠: *erunt* □ *totius cum* □ *ex dimidio minoris segmenti aequalia* 3 □ *ex latere* ⬠: *& latus huius aequale diagonio praecedentis* ⬠ *prop.* 198.

EXPOSITIO. Fig. 52.

SIt AB. diameter circuli, & X. latus ⬠ reliqua vt antea. Dico □ AB + □ AD. *aeq.* 3 □ X. & aequalia esse latus X. & diagonium G. (*prop.* 198.)

DEMONSTRATIO.

CVm ED. sit ½ AB erit radius circuli, & EC. maius segmentum (198.*p.*) Ergo 3 □ X. *aeq.* 3 □ ED + 3 □ EC. (117.*p.*) sed □ ED + □ DC. vel AB. *aeq.* 3 □ EC (108.*p.*) Ergo 3 □ X. *aeq.* 4 □ ED + □ AD. hoc est □ AB + □ AD. (3. *l.* 2.)

Quod,

Quod, &c. Sed 3 □ G. æq. □ AB + □ AD (198 p). Ergo latus ○ X. æquale est diagonio G. Quod, &c.

PROPOSITIO CC.

SI recta sit proportionaliter secta: □ maioris segmenti cum □ compositæ ex maiori, & ½ minoris, æquantur □ totius + □ ex ½ minoris: tum 3 □ lateris, & diagonij prædictis.

EXPOSITIO. Fig. 52.

SIt AB. secta vt antea. Dico □ BC + □ BD. æqualia esse □ BA + □ AD. &c.

DEMONSTRATIO.

QVia □ BD. æq. □ BC + □ CD + 2 ▭ BCD. vel ▭ BCA (1. l. 2.) sed ▭ BCA + □ AC. æq. ▭ BAC (1 l. 2) vel □ BC. (1. l. 6.) Ergo □ BD + □ AC. æq 2 □ BC + □ CD. vel AD. Ergo □ BD + □ AC + □ BC. æq. 3 □ BC + □ DC.

Deindè □ AB + □ AC. æq. 3 □ CB. (198. p.) Ergo □ AB + □ AC + AD. æq. 3 □ CB + AD. Ergo □ BD + □ AC + □ BC. æq. □ AB + □ AC + □ AD. & ablato vtrinque □ AC. erunt □ BD + □ BC. æq. □ AB + □ AD. Quod erat, &c.

Sed □ AB + □ AD. æq. 3 □ G (198. p.) & etiã 3 □ X (199. p.) Ergo □ BD + □ BC. æq. 3 □ X. & 3 □ G. &c.

FINIS.

GEOMETRIÆ
MAGNAE
IN MINIMIS.
PARS TERTIA,
DE SOLIDIS.

AVTHORE

R. A. P. IOSEPHO ZARAGOZA,
Valentino Societatis Iesv, in Suprema Hispaniarum Inquisitione propositionum Fidei Censore: olim Theologiæ Scholasticæ in Collegijs Balearico, Barcinonensi, & Valentino, nunc in Matritensi Academia Imperialis Collegij Matheseos Professore Regio.

AD EXCELLENTISSIMVM DOMINVM
D. MELCHIOREM DE NAVARRA, ROCAFVLL,
Palatæ Ducem, Massæ Principem, Aragonum Coronæ Vicecancellarium, &c.

PRIMA EDITIO.

TOLETI: Apud Franciscum Calvo, Typog. Reg.
Anno Domini 1674.
Cum Superiorum licentia.

FACVLTAS SVPERIORVM.

Imprimatur.

Lic. D. Ioannes de Zevallos, Vic. Tol.

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS.

Provinciæ Toletanæ Societatis Iesv.

Didacus de Valdès.

EXCELLENTISSIMO DOMINO

D. MELCHIORI DE NAVARRA ET ROCAFVLL, ALCANTARENSI EQVITI,

Palatæ Duci, Massæ Principi, Turricellæ Domino, Catholicæ Maiestatis à Consilijs, eiusdem in Regnis Aragonum Coronæ Vicecancellario, & in Magno Synedrio vel sexviratu summo, vniuersæ Hispaniarum Monarchiæ Gubernationi præfecto sexviro, &c.

QVO Amore (Excellentissimè Princeps) opuscula mea, & literarum studia prosequutus, & amplexus fueris, & quãtum singulari tuæ humanitati debeam, mihi sæpius consideranti, aliquod meæ gratitudinis exemplar inquirẽdum fuit: quod licet accuratius præstiterim, nullum debito suppar diu quæsitum invenire licuit. Ingratitudinis igitur reus non audiam, cum pro acceptis beneficijs grates condignas habere nequeam, sed audirem nõ habens, cum possem, quod mihi solamini erit, quandiu beneficiorum amplitudo gratitudinis metam excedet: interim dum nobilius specimen devincti animi non suppetit, ingenij partus iste, labore conceptus, ac sudore enutritus magno tuo nomini consecratus orbi litterario sistitur, qui me totum tibi adstrictum, & quasi trabali clavo tuis beneficijs defixum testabitur cunctis, dum hæc literarum monumenta supersint, & perennatura spero sub auspicijs tuis, cum immortale nomen tuum nulla possit oblivione deleri. Tertiam igi-

igitur partem Geometriæ Magnæ in Minimis, quæ de ſolidis agit, nomini tuo ſacratam exhibeo, vt in ipſius operis fronte nobilitatis, ſapientiæ, ac virtutis tuæ ſoliditas, & magnitudo appareant inſculptæ.

Quantus ſit tui ſanguinis ſplendor, quanta generis claritudo, teſtantur alta illa cognomina, quæ ex vtroque Parente iure ſucceſsionis hauſiſti: NAVARRA, ſcilicet ROCAFVLL, YXAR, VIQVE, MONCADA, ET MANRIQVE: Horum dignitas Catholico orbi conſpicua veneranda hic potiùs, quam exponenda venit, cùm nec claritas Rethoricæ pigmentis egeat: nec amplitudo immenſa epiſtolæ patiatur anguſtias. Familia de NAVARRA, Regium ſanguinem hauſit ex Carolo Secundo Navarræorum Rege, huius ſoboles, & progenies ampliſsima fuere illius Regni Mariſcales, Marchiones de CORTES, & CABREGA: & horum conſanguinei alti Progenitores tui eandem Regiam promeruère originē, qui ex Vaſconiæ finibus avulſi, apud Aragonas Edetanos fixère ſedem.

Matrem prætereà habuiſti non imparem illuſtriſsimam Dominam D. Magdalenam de ROCAFVLL, quæ propagines æquè nobiles YXAR, VIQVE, MONCADA, ET MANRIQVE, in ſe vnam congeſsit: ipſius Pater D. D. Ludovicus de ROCAFVLL, & de YXAR, Dominus de *Alfarràs*, nepos Comitum de Albatera, quibus Varonia de ROCAFVLL modò ſubiacet, originem traxit ex Principibus, & Dominis Montis Peſſulani. Quorum D. D. Raymundus de ROCAFVLL, Iacobi Primi Aragonum Regis avunculus, & Reginæ matris

tris Mariæ consobrinus familiam hanc ex Volcis Arecomicis in Hispaniam, & Valentiæ Regnum traduxit. Insuper Iacobus Rex primus vnū ex filijs oppidi de YXAR hæredem instituit, vnde clarissimæ illius sobolis cognomen exortum, quæ Regium tibi sanguinem indidit. Valentiæ vivit, & vivet immortalis memoria Illustrissimi Domini D. Hieronymi VIQVE, pro Ferdinando Catholico, & Carolo Quinto, ad Pontificem Summum totos viginti annos legati; huius filius D. D. Ludouicus VIQVE, consortem promeruit D. Menciam MANRIQVE DE LARA, Comitum de Paredes filiam: Ex quibus progenitus D. Hieronymus VIQVE MANRIQVE, sortitus fuit coniugem D. D. Raphaelam de MONCADA, Marchionum Aytonæ propaginē; hoc consortium orbi dedit D. Menciam VIQVE MANRIQVE ET MONCADA, matris tuæ matrem clarissimam.

Accessit his altis nominibus Excellentissima coniux D. D. Francisca de TORALTO ET ARAGON, hæres vnigenita Excellentissimi D. D. Francisci de TORALTO ET ARAGON, Ducis Palatæ, Massæ Principis, Magni Philippi à Consilijs in Supremo belli Senatu. Hic Mavors alter, annis plus triginta armorum pondus sustinuit, & bello iugiter in Germania, Mediolanensi statu, & Cathaloniæ Principatu infatigabilis insudavit: Neapoli tandem à seditiosis, cum oblatum imperium sprevisset, Coronam exosus tyrannide vna firmātam ex altero pede suspensus, evisceratus est semivivus, extremum clamans halitum suo Regi solvendum, quo &

Re-

Regis causam,& animam simul egit: cor vero tanti viri, quod nec quidem exanime sistineret infidos, inter argenteas patinas coniugi D.D. Albinæ FREZAE DE VRSINO, Castrensi Duci delatum est; pretiosius forte donum, quam seditiosa immanitas cogitarat, cum nulla pretiosior hæreditas Toralcæ familiæ potuisset contingere, quam hoc servatæ fidei testimonium, exemplum posteris, ac æternum fidelissimæ fortitudinis monimentum.

Hæc omnia, quæ singulari beneficio nactus es, inter bona castrensia minime veniunt numeranda, sed ea quæ proprio Marte acquisita, & sudore irrigata ad perfectam venere maturitatem, sapientia nempe,& virtus, quæ verè tuæ sunt, quibus Progenitorum gloriam, nisi invenisses clarissimam, efficere potuisses. Modestia tua præpeditus laudibus supersedeo tuis;& quidem ijs non indiges, cum adeo perspicue magna vivas, quæ neminem fugiant. Opus encomiaste non est cum Mariana Austriaca Hispaniarum Regina, & pro Carolo Secundo gubernatrix prudentiæ virtute clarissima tuum meritum orbi exposuerit, te scilicet Aragoniæ Vicecancellarium creans, vt Magni Synedri in summo vniversæ gubernationis Senatu, quem sexviratum, vel coniunctionem magnam dixerim, munus expleres, & in regni centro collocatus, quaquaversum splendidissimos tuæ prudentiæ radios solis instar summo regni bono diffunderes. Occurrētium negotiorum magnitudo, *atribiam* exposcebat tuam, quo nomine diligentia, sedulitas, solertia, exacta discussio, accuratio, syncera expressio, ratio,& integritas summa intelligēdæ veniunt. Omitto apparatum bellicum in Cathalonias, navium cō-

stru-

structionem in Pythusis, Triremium Barcinone, Pyraticam Balearium manum Maioricæ, & alia quæ promoves, animumque tuum immensum, vtpote vbique præsentem insinuant. In tanta rerum occurrētium varietate ea es animi amplitudine, vt nihil aliud te animo versare, nihil acturum esse videaris, licet graviora semper gravioribus supervenianti, nisi quæ agis: aditum præbes omnibus non statis diebus, sed horis singulis, quo Regiam dignitatem, & subditorum simul promoveas commoda. Tibi igitur minime vivis, dum Regi, Regno, & omnibus vivis, salutem prodigis tuam, quam alijs tribuas, fractus sæpe viribus, & quassata valetudine accurando muneri incumbis, ac si vixeris satis; & quidem satis te vixisse æternitati iudicant omnes, quibus immortalitatis meritum vita est: sed ijdem te non satis victurum regni bono autumant, licet in ævum superes. Deum igitur Op. Max. oratum velim, vt plura sæcula peragas integer viribus, firmus iudicio, prudentia vegetus in literatorum patrocinium, bonorum solamen, omnium commodum, & Catholici huiur Imperij decus, & columen immortale.

Excellentissime Domine,

Excellentiæ vestræ,
Obsequentissimus servus

Iosephus Zaragozà.

ERRO-

ERRORES ANTE OMNIA CORRIGENDI.

Pag.	Lin.	Error.	Correct.	Pag.	Lin.	Error.	Correct.
23.	1.	RD.	RL.	191.	15.	OL.	OM.
25.	13.	*sunt.*	*sunt proportionales.*	194.	12.14.	DF.	EF.
43.	12.	pari.	pariter.	194.	13.	FCD.	FCE.
49.	15.	RY.	RS.	197.	17.	BFC.	BFCL.
50.	9.	&.	est.	215.	15.	*xy.*	*Ty.*
56.	4.	FF.	EF.	217.	18.	est.	ex.
73.	4.	*aliqua.*	*reliqua.*	218.	26.	*n*✠.	*Dn*✠.
89.	6.	ap.	ad.	225.	24.	PQI.	PQL.
96.	24.	*f*✠K.	*f*✠*m.*	227.	23.	HS.	XS.
97.	7.	&*g.*	vt *g.*	228.	4.12.	(M.2.)	(198.*M*2.)
118.	23.	2 XO.	2 XE.	232.	18.	EA ✠	EX ✠
127.	10.	secante.	secare.	244.	8.	in H.	in X.
152.	10.	ad KL.	ad KQ.	238.	21.	*n.aeq.*	[illegible] *aeq.*
160.	14.	lorum.	larem.	244.	7.101	post.	[illegible]
162.	11.	CK.	BK.	259.	10.	EC,EC.	[illegible]D.
167.	12.	ABC.	DBC.	262.	18.	OM.	[illegible]
183.	5.	Fig.21.	Fig.26.	266.	21.	lela.	[illegible]
183.	11.13.	AD.	AC.	267.	3.	*edrum.*	[illegible]*am.*
184.	6.	Fig.21.	Fig.26.	269.	21.	[illegible]	[illegible]
185.	5.	BL.	RL.	270.	22.	*c.a.*	*ca* D[illegible]
188.	23.	FB.est.	FD.est.	271.	7.	*edrum.*	*edram.*
				287.	4.	test 16.	test 36.

GEO-

GEOMETRIAE MAGNAE IN MINIMIS.

PARS TERTIA DE SOLIDIS.

Tandem peruenimus ad solidorum expositionem, quæ ingenio acriori, & profundiori egebant meditatione prout in cõfuso rectarum labyrintho densioribus vmbris, tanquam Cymmerijs tenebris inuoluuntur: quibus elucidandis in hac tertia parte, non minus quàm in prima, & secunda Minimorum dignitas elucescet. In quatuor capita opusculum hoc placuit diuidere. Primum, de Pyramidibus agit; secundũ Hexaedra, & Prismata meditatur, solida regularia sinu suo tertium complectitur; quartum verò Problemata soluit, quæ omnia cedant vtinam in Lectoris Geometræ commodum, & Dei gloriam.

CAPVT I.

DE PYRAMIDIBVS.

Omnibus ex solidis poliedris, simpliciores sunt Pyramides, præcipuè Tetraedra quatuor planis simplicioribus, nempè trigonis conclusa; quare ab ipsis exordium sumimus. Polygonarum basium Pyramides, utpotè infinitæ opusculi huiusce terminis non potuere omninò comprehendi. Geometras omnes quibus abtrusiora datum est inquirere, & invenire, rogatos velimus, ut ea quæ nos de sectione anguli solidi tribus, vel quatuor planis contenti demonstramus, felicius promoueant, & ad omnes solidos angulos magno Geometriæ bono, & incremento subtilius extendant.

PROPOSITIO I.

IN qualibet Pyramide basis trigonæ centrum ff. ss. est in quarta parte rectæ à centro ff. ss. basis ad verticem.

Consect. *Recta à vertice per centrum ff. ss. Pyramidis transit per centrum ff. ss. basis, & è converso.*

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis A B C D. & G. *centrum ff. ss.* basis trigonæ ABC. ducta ex G. recta GD. in verticem D. si GO. sumatur quarta pars rectæ GD. Dico O. esse *centr. ff. ss.* ad Pyramidis angulos A. B. C. D.

DEMONSTRATIO.

QVoniam G. est *centr. ff. ss.* ad A. B. C. ex *hyp.* & additum est aliud punctum D. in recta GD, reperitur *cetr. ff. ss.* ad A. B, C. D (61. M. 1.) Ergo cum GO. sit quarta pars totius GD. erit figura DO. minima 3 *ff. ss.* OG. (36. M. 1.) Ergo punctum O. erit *centr. ff. ss.* ad A. B. C. D. (62. M. 1.) Quod erat, &c.

Consect. patet, quia si recta GD. transit per O. recta DO. transit per G. & GO. per D.

PROPOSITIO II.

IN quauis Pyramide Tetraedra si recta à vertice bisecantes basis latera trifariam diuidantur, & ad diuisiones ducantur rectæ ab angulis basis, omnes se in Pyramidis centro quadrifariã diuident, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & recta DI. bisecet latus CB. & sit IH. tertia pars rectæ ID. & ducatur AH. & similiter CF. BE. Dico omnes in *centro ff. ſſ.* O. se mutuo quadrifariam secare, & *econuersò.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam CB. est bifariam secta, & ID. trifariam in H. erit H. *centr. ff. ſſ.* trianguli BCD (1. M. 21.) Ergo ducta HA. transibit per *centr. ff. ſſ.* O. & erit quadrifariam secta in O. (11. p.) Ergo cũ idem de rectis CF. BE. demonstretur, omnes se quadrifariam secant in O. Quod, &c.

Conuersa liquet, cùm enim AH. transeat per O. recta AO. transibit per H. cum sit eadem: Ergo, &c.

PROPOSITIO III.

CViuslibet Pyramidis Tetraedræ centrum ff. ſſ. eſt in dimidio rectæ biſecantis latera oppoſita. Vnde omnes biſecantes ſe in centro bifariã diuidunt.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & eius latera oppoſita, quæ ſcilicet nullum habent punctum commune, ſunt AB. CD. cum AC. BD. &c. Sit ergo AB. diuiſum bifariam in X. & CD. in Z. ſi ducatur recta XZ (quæ hic ommiſſa eſt) Dico *centrum* ff. ſſ. O. eſſe in dimidio ipſius XZ.

DEMONSTRATIO.

QVoniam AB. eſt bifariam ſecta in X. eſt X. *centrum* ff. ſſ. ad A. B. & ſimiliter Z. eſt *centr.* ff. ſſ. ad C. D. (35. M. 1.) Ergo *centrum* ff. ſſ. ad A. B. C D. erit in recta XZ. (63. M. 1.) Ergo XZ. tranſit per *centr.* ff. ſſ. Pyramidis O. Ergo duæ ff. ſſ. OX. minimæ erũt 2 ff. ſſ. OZ (64. M. 1.) Ergo erit XZ. bifariam diuiſa in O. (37. M. 1.) Ergo cum idem oſtendatur de alijs, omnes ſe in *centro* ff. ſſ. O. bifariam ſecant. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI Pyramis Tetraedra basim habeat æquilateram, & latera eleuata inter se æqualia; recta ex vertice per centr. ff. ∫∫. est basi perpendicularis, & èconuersò.

EXPOSITIO. Fig. 2.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & basis ABC. sit △ æquilaterum: & latera AD. BD. CD. sint inter se æqualia, & O. sit *centr. ff. ∫∫.* Pyramidis. Dico ductam rectam DOG. esse perpendicularem plano basis ABC. vel si DG. sit basi perpendicularis. Dico DG. transire per *centr. ff. ∫∫.* O.

DEMONSTRATIO.

QVoniam recta DG. transit per *centrum ff. ∫∫.* Pyramidis, est G. *centrum ff. ∫∫.* basis siue △ ABC. æquilateri (1. *p.*) Ergo ductæ AG. BG. CG. bisecabunt opposita latera in F. H. E. (1. M. 2.) & erunt perpendiculares lateribus BC. CA. AB. (5. *l.* 1.) & cùm sint æqualia latera AB. BC. CA. & eorum dimidia AE. BF. CH. cum □ AB. sit æquale □ AF + □ BF. & □ BC. sit *æq.* □ BH + □ CH. & □ CA. *æq.* □ CE + □ AE (4. *l.* 2.) ablatis æqualibus remanebunt *æq.* AF. BH. CE. Ergo cum *centr. ff. ∫∫.* △ ABC. sit in tertia parte rectarum AF. BH. CE. (1. M. 2.)

æqua-

æquales erunt rectæ AG. BG. CG. vnde triangula AGD. BGD. CGD. cum habeant latus AD. cõmune, & latera AD. BD. CD. sint æqualia ex *hyp.* & etiam AG. BG. CG. omninò erunt æqualia (4. *l.* 1.) Ergo cum anguli DGA. DGB. DGC. sint æquales, erunt recti, & DG. perpendicularis plano ABC. (1. *l.* 11.) Quod erat, &c.

Conuersa liquet, cùm enim recta DO. perpendicularis demonstrata sit plano ABC. cum perpendicularis ex puncto D. sit vnica (1. *l.* 11.) si DG. sit plano ABC. perpendicularis transibit per O. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO V.

IN qualibet Pyramide Tetraedra, recta coniungens centra ff. ss. duplicis plani parallela est lateri, quod in neutro plano est; & tertia ipsius pars.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Pyramide ABCD. sint G. & H. *centra ff. ss.* planorum ABC. BCD. & recta HG. vtrumque coniungat. Dico HG. esse parallelam, & tertiam partem lateris DA. quod neque est in plano ABC. neque in plano BCD.

DEMONSTRATIO.

SI enim ducantur DHI. & AGI. bisecabunt latus BC (1. M. 2.) Ergo concurrent in eodē puncto I. & erit IG. tertia pars ipsius IA. & IH. tertia pars ipsius ID (1. M. 2.) Ergo in △ AID. cum GH. secet proportionalitèr latera DI. AI. erit GH. parallela basi AD (2 *l*. 6.) & vt IH. est tertia pars ipsius ID. ita HG. erit tertia pars ipsius AD. (2. *l*. 6.) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO VI.

In eadem Pyramide rectæ coniungentes omnium planorum centra ff. ff. efficiunt Pyramidem similem inuersam.

2. *Si hoc infinitè continuetur, desinent in cētrum ff. ff. omnibus commune.*

EXPOSITIO. Fig. 1.

Sit Pyramis tetraedra ABCD. & planorum *centra ff. ff.* E.F. G.H. quæ iungantur rectis GE. GF. GH. &c. Dico Pyramidem EFHG. similem esse ipsi ABCD. cum eodem *centro ff. ff.* & ita in infinitum.

DEMONSTRATIO.

Latera enim basis EFH. sunt tertia pars laterum basis ABC (5. 7.) Ergo tria latera trianguli EFH. proportionalia sunt tribus lateribus trianguli ABC (5. *l.* 5.) & triangula similia (2. *l.* 6.) Similitèr △ ECH. simile est △ CDA. & △ EFG. ipsi △ CBD. & △ EAG. ipsi △ ABD. Ergo Pyramis EFHG. cum habeat omnia plana similia planis Pyramidis ABCD. & similitèr disposita, habebit etiam omnes angulos solidos æquales angulis eiusdem (23 *P.*) Ergo cū omnes anguli solidi sint æquales, & latera proportionalia, & plana similia similitèr disposita erunt Pyramides similes (23. *P.*)

2. Si Pyramis EFHG. similitèr diuidatur eadem instaurabitur demōstratio. Deindè EFHO. paritèr demonstrabitur similis Pyramidi ABCO. & esse similes partes solidorum similium: Ergo vt ABCO. ad totam ABCD. ita EFHO. ad totam EFHG (5. *l.* 5.) Ergo sicut O. est *centrum* ff. ss. ad A. B. C. D. ita O. erit *cētrum* ff. ss. ad E. F. H. G.

Si Pyramidum inscriptio continuetur, cōtinuata demonstratione ostendetur O. esse *centrum* ff. ss. Ergo si in infinitum continuetur inscriptio similis desinet tandem in communi *centro* ff. ss. O. Quod erat, &c.

PROPOSITIO VII.

SI Pyramis vt antea inscripta sit.

1. *Plana inscripta sunt parallela planis anguli oppositi similibus.*

2. *Et secant latera anguli oppositi in ratione dupla.*

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Pyramide ABCD. inscripta sit vt in praecedenti Pyramis EFHG. Dico planum EFH. parallelum esse plano simili ABC. & secare in ratione dupla omnia latera AD. BD. CD.

DEMONSTRATIO.

ETenim in △△ EFH. ABC. latus EH est parallelum lateri AB. tum HF. ipsi AC & EF. ipsi CB (5. *p.*) Ergo cùm anguli paralleli sint, & aequales (6. *p.*) erunt plana parallela (3. *l.* 11.) Quod similiter de aliis demonstrabitur.

2 Continuatum planum EFH. ipsi ABC. parallelum faciet sectionem KLM parallelam ipsi ABC. & secabit proportionaliter latera (3. *l.* 11.) sed DH. est dupla ipsius HI (1. M. 2.) Ergo DM. erit dupla ipsius MB. &c. Quod, &c.

PROPOSITIO VIII.

PLana, quæ per angulos basis, verticem, & centrum ff. ss. secat Pyramidem Tetraedram, diuidunt latera basis bifariam, & totam Pyramidem in sex pyramides æquales.

EXPOSITIO. Fig. 2.

SIt Pyramis ABCD. & O. *centrum ff. ss.* & tria plana AFD. BHD. CED. transeant per verticem D. & *centrum* O. Dico latera basis bifariam diuidi, & Pyramidem in sex æquales.

DEMONSTRATIO.

QVoniam dicta plana transeunt per D. & O. erit communis eorũ sectio recta DOG. (1. *l.* 11.) Ergo cum DOG. transeat per *centrum* Pyramidis O. erit G. *centrum* basis (1. *p.*) Ergo sectiones basis AGF. BGH. CGE. diuidunt bifariam latera AB. BC. CA. (1. M. 2.) & totam basim in 6. triangula æqualia (4. M. 2.) Ergo cum Pyramides AEGD. EBGD. &c. habeant æquales bases, & altitudines in D. erunt æquales (5. *l.* 11.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO IX.

SI per omnes angulos Pyramidis Tetraedræ fiat præcedens diuisio Pyramides vnius plani æquantur Pyramidibus alterius plani, & tota Pyramis in 24. æquales pyramides diuiditur.

EXPOSITIO. Fig. 2.

SI per D. transeat plana secantia basim ABC & similitèr per B. secantia basim ACD. &c Dico omnia 24. segmenta esse æqualia.

DEMONSTRATIO.

CVm omnes illæ sex Pyramides AEGD. EB GD. sint æquales (8. *p.*) quælibet illarum erit sexta pars totius ABCD. Idem etiam demõstrabitur, si sumatur vt basis planum ACD. vel CBD. vel ABD. Ergo cum vna sexta pars eiusdem totius sit alteri æqualis, omnes Pyramides erunt inter se æquales: sed plana Pyramidis tetraedræ sunt quatuor, & quodlibet in sex bases diuiditur: Ergo tota Pyramis diuiditur in 24. pyramides æquales. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO X.

IIsdem positis quæ in præcedenti tota Pyramis secatur in 24. pyramides æquales, quarum vertex communis est centrum ff. ss. totius Pyramidis.

EXPOSITIO. Fig. 2.

TRanseat per B. D. O. planum, & sic de reliquis. Dico Pyramidem ABCD. secari in 24. pyramides habentes verticem in O. omnes æquales, nempè AEGO. EBGO. &c.

DEMONSTRATIO.

CVm omnia triangula AEG. EBG. &c. sint æqualia (4 M. 2.) & Pyramis AEGO. ad pyramidem AEGD. sit vt altitudo GO. ad GD. (5 *l*. 11.) quoniam GO. est quarta pars GD. (1. *p*.) erit AEGO. quarta pars AEGD. sed AEGD. est sexta pars totius ABCD. (9. *p*.) Ergo AEGO. erit vigesima quarta pars totius ABCD. quod de singulis etiam demonstrabitur. Ergo cum pars simili parti æqualis sit, tota Pyramis diuiditur in 24. Pyramides æquales. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XI.

IN *qualibet Pyramide Tetraedra summa ff.ſſ. ex omnibus lateribus est quadrupla minimæ summæ ff.ſſ. nempè vt 36. ad 9.*

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis ABCD. & *centrum ff.ſſ.* O. Dico summã *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus quadruplam esse minimæ summæ *ff.ſſ.* OA. OB. OC. OD.

DEMONSTRATIO.

ETenim quia punctum D. est extra *centrum* O. figuræ *ff.* DA. DB. DC. æquantur minimæ summæ + 4DO. (60. M. 1.) Similitèr *ff.ſſ.* AB. AC. AD. *æq.* minimis + 4AO. tum *ff.ſſ.* BA. BC. BD. *æq.* minimis + 4BO. & *ff.ſſ.* CA. CB. CD. *æq.* minimis + 4CO. Ergo quia singula latera bis sumpta sunt; & minima summa quater; & 4 *ff.ſſ.* DO + 4AO + 4BO + 4CO. quadrupla sunt minimæ summæ, erit duplum *ff.ſſ.* ex lateribus *æq.* octuplo minimæ summæ: Ergo *ff.ſſ.* ex lateribus quadruplæ sunt minimarũ, vel vt 36. ad 9. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO X.

Iisdem positis quæ in præcedenti tota Pyramis secatur in 24. pyramides æquales, quarum vertex communis est centrum ff. ss. totius Pyramidis.

EXPOSITIO. Fig. 2.

TRanseat per B. D. O. planum, & sic de reliquis. Dico Pyramidem ABCD. secari in 24. pyramides habentes verticem in O. omnes æquales, nempè AEGO. EBGO. &c.

DEMONSTRATIO.

CVm omnia triangula AEG. EBG. &c. sint æqualia (4 M. 2.) & Pyramis AEGO. ad pyramidem AEGD. sit vt altitudo GO. ad GD. (5 *l.* 11.) quoniam GO. est quarta pars GD. (1. *p.*) erit AEGO. quarta pars AEGD. sed AEGD. est sexta pars totius ABCD. (9. *p.*) Ergo AEGO. erit vigesima quarta pars totius ABCD. quod de singulis etiam demonstrabitur. Ergo cum pars simili parti æqualis sit, tota Pyramis diuiditur in 24. Pyramides æquales. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XI.

IN qualibet Pyramide Tetraedra summa ff. ſſ. ex omnibus lateribus eſt quadrupla minimæ ſummæ ff. ſſ. nempè vt 36. ad 9.

FXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis ABCD. & *centrum ff. ſſ.* O. Dico ſummā *ff. ſſ.* ex omnibus lateribus quadruplam eſſe minimæ ſummæ *ff. ſſ.* OA. OB. OC. OD.

DEMONSTRATIO.

ETenim quia punctum D. eſt extra *centrum* O. figuræ *ff.* DA. DB. DC. æquantur minimæ ſummæ + 4DO. (60. M. 1.) Similitèr *ff. ſſ.* AB. AC. AD. *æq.* minimis + 4AO. tum *ff. ſſ.* BA. BC. BD. *æq.* minimis + 4BO. & *ff. ſſ.* CA. CB. CD. *æq.* minimis + 4CO. Ergo quia ſingula latera bis ſumpta ſunt; & minima ſumma quater; & 4 *ff. ſſ.* DO + 4AO + 4BO + 4CO. quadrupla ſunt minimæ ſummæ, erit duplum *ff. ſſ.* ex lateribus *æq.* octuplo minimæ ſummæ: Ergo *ff. ſſ.* ex lateribus quadruplæ ſunt minimarū, vel vt 36. ad 9. Quod, &c.

PRO

PROPOSITIO XII.

IN eadem Pyramide summa ff.ss. rectarum ab angulis per centrum ad plana opposita est ad minimam summam vt 16. ad 9. & summam ex omnibus lateribus vt 16. ad 36.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Pyramide A B C D. cuius *centrum ff.ss.* O. Dico summam *ff.ss.* DG. BE. AH. CF. ad minimam summam OA. OB. OC. OD. vt 16. ad 9. & ad summam ex omnibus lateribus vt 16. ad 36.

DEMONSTRATIO.

REcta DO. ad DG. est vt 3. ad 4. vel vt 9. ad 12. (1. *p.*) sed sunt continui 9. 12. 16. & figura DO. ad similem DG. est in duplicata ratione DO. ad DG. vel 9. ad 12. (4. *l.* 6.) Ergo est vt 9. ad 16. sed etiam reliquæ *ff.ss.* sunt in eadem ratione BO. ad BE. tum AO. ad AH. tum CO. ad CF. Ergo componendo, minima summa AO. BO. CO. DO. ad summã AH. BE. CF. DG. est vt 9. ad 16. (4. *l.* 5.) Ergo AH. BE. CF. DG. ad summam *ff.ss.* ex lateribus erit vt 16. ad 36. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

IN eadem Pyramide si alia inscripta sit prout in prop. 6. minima summa circumscriptæ ad minimam inscriptæ erit vt 9. ad 1. & ad summam ex lateribus inscriptæ vt 9. ad 4.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Pyramide ABCD. inscripta sit EFHG. prout in *prop.* 6. & *centrum* vtriusque sit O. Dico minimam summā ipsius ABCD. ad minimam EFHG. esse vt 9. ad 1. &c.

DEMONSTRATIO.

QValium recta OA est 3. erit OH. 1. (1. *p.*) sed & minima figura OA. est in duplicata ratione ad similem OH. (4. *l.* 6.) Ergo cum sint continuæ 9. 3. 1. erit figura OA. ad similem OH. vt 9. ad 1. Eadem est ratio *ff. ff.* DO. ad OG. tum BO. ad OE. tum CO. ad OF. Ergo & componendo minima summa circumscriptæ, scilicet figuræ OA + OB + OC + OD. ad minimam summā inscriptæ OH + OE + OE + OG. erit vt 9. ad 1. (4. *l.* 5.) Præterea minima summa inscriptæ ad summam ex omnibus lateribus eiusdem, est vt 1. ad 4 (11. *p.*) Ergo Minima summa circunscriptæ ad summam *ff. ff.* ex omnibus lateribus inscriptæ erit vt 9. ad 4. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XIV.

SI ex omnibus angulis Pyramidis Tetraedræ rectæ ducantur bisecantes latera opposita, summa ff. ss. sesquialtera erit summæ ff. ss. ex omnibus lateribus vt 3. ad 2.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Pyramide ABCD. ex angulo D. bisecent latera opposita rectæ DH. DE. DF. & sic in alijs AF. BH. &c. Dico summam ff. ss. ex bisecantibus sesquialteram esse summæ ff. ss. ex omnibus lateribus, vt 3. ad 2.

DEMONSTRATIO.

IN quolibet △ ABC. summa ff. ss. ex lateribus est sesquitertia summæ ff. ss. ex bisecantibus AF. BH. CE. nempè vt 4. ad 3. (6. M. 2.) Ergo quia latus quodlibet bis sumitur, cum duobus triangulis sit commune, erit componēdo dupla summa ff. ss. ex omnibus lateribus ad summam ff. ss. ex bisecantibus, vt 4. ad 3 (4. *l.* 5.) Ergo summa ff. ss. ex lateribus ad summam ff. ss. ex bisecantibus est vt 2. ad 3. Quod erat, &c.

PRO-

TABVLA POTENTIARVM
Pyramidis Tetraedræ.

Summa ff. ſſ. ex lateribus.	36.
Summa ff. ſſ. ex rectis per centrum.	16.
Summa ff. ſſ. ex biſecantibus.	54.
Minima ſumma ff. ſſ.	9.
Summa ff. ſſ. ex lateribus inſcrip.	4.
Minima ſumma ff. ſſ. inſcrip.	1.

Continuæ igitur ſunt.	1. 4. 16.
Proportionales ſunt.	1. 4. 9. 36.
Proportionales etiam.	4. 9. 16. 36.

PROPOSITIO XV.

SI duæ Pyramides habeant idem basium centrum, & eandem summam ff. ss. ex lateribus eleuatis, & minima summa vnius basis excedat alterius minimam tot figuris ex recta à vertice in dictum centrum, quot lateribus basis ab alia exceditur, Pyramides habebunt vertices in eadem superficie sphærica ex communi centro descripta, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SIt Pyramis FGHK basis trigonæ, & Pyramis ABCDE. basis quadrilateræ, basis illius exceditur ab ista vno latere: Si ergo commune basium *centrum* sit O. & summa ff. ss. ex lateribus eleuatis eadem, & minima summa ff. ss. OF. OG. OH. excedat minimā summam ff. ss. OA. OB. OC. OD. vna simili figura OK Dico vertices K. & E. esse in eadem superficie sphærica ex O. descripta radio OK. vel OE. & OK. æquales esse, & *è contra*.

DEMONSTRATIO.

SVmma enim ff. ss. EA. EB. EC. ED *æq.* summæ KF. KG. KH. ex *hyp.* sed summa EA. EB. EC. ED. *æq.* minimæ OA. OB. OC. OD + 4 OE. & summa KF. KG. KH. *æq.* minimæ OF. OG. OH. + 3 OK (60. M. 1.) Ergo OA. OB. OC. OD + 4 OE.

OE. *æq*. OF. OG. OH + 3 OK sed ff. ff. OA. OB. OC. OD + OK. *æq*. OF. OG. OH. ex *hyp*. Ergo ablatis æqualibus remanebũt ff. ff. 4 OE — OK. æ quales 3 ff. OK Si ergo vtrique parti addatur OK. erunt 4 ff. OE. æquales 4 ff. OK. Ergo rectæ OE. & OK. æquales erunt: & quia vertices E. & K. æqualiter distant à *centro* O. erunt in eadem superficie sphærica ex O. descripta. Quod, &c.

Conuersa patet, quoniam si summa ff. ff. EA. EB. EC. ED. summæ KF. KG. KH. sit æqualis: & recta OK. ipsi EO. figuræ OF. OG. OH. superabunt ff. ff. OA. OB. OC. OD. tota figura OK. & si ita eas excedant, erunt summæ EA. EB. EC. ED. tum KF. KG. KH. æquales. Quod, &c.

Vnde si bases habeant idem *centrum*, æqualem minimam summam, & æqualem summã ff. ff. ex lateribus eleuatis, vertices erunt in eadem sphærica superficie, & è *conuerso*.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SI Bases Pyramidum æqualem habeant laterum numerum, & minimas summas ff.ss. æquales, differentia ff.ss. ex rectis à vertice in centrum basis est ad differentiam summarum ex lateribus eleuatis, vt 1. ad numerum laterum basis: & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SInt duæ Pyramides basis trilateræ, vel quadrilateræ, &c. ABCDE. LMNPS. & basium *centra* RO. & minimæ summæ OA. OB. OC. OD. tum RL. RM. RP. RN. æquales, ductis EO. SR. Dico differentiam inter *ff.ss.* EO. SR. esse ad differentiam inter *ff.ss.* EA. EB. EC. ED. & SL. SM. SN. SP. vt 1. ad 4. & *econuersò* data hac ratione erunt minimæ summæ basium æquales.

DEMONSTRATIO.

DIfferentia inter *ff.ss.* EO. SR. sit □ X Quoniam EO. superat SR. toto □ X. erunt 4 EO. æquales 4 *ff.ss.* SR + 4 □ X. sed *ff.ss.* EA. EB. EC. ED. *æq.* minimæ summæ OA. OB. OC. OD + 4 EO (60. M. 1.) Ergo *ff.ss.* EA. EB. EC. ED. *æq.* OA. OB. OC. OD + 4 SR + 4 □ X. sed *ff.ss.* SL. SM. SP. SN. æquātur minimæ sūmæ *ff.ss.* RL. RM. RP. RN + 4 SR. (60. M. 1.) sed ex *hyp.* *ff.ss.* OA.

OA.OB.OC.OD.*aq* RM.RD.RP.RN. Ergo EA.EB.EC ED.*aq*.RL.RP.RN+4SR+4 □ X. Ergo *ffff*.EA.EB.EC.ED.superant *ff ff*.SL.SM. SP.SN.in 4 □ X. sed figura EO. superat similem SR. in 1 □ X. Ergo differentia inter figuram EO. & similem SR. est ad differentiam *ff. ff*. EA. EB.EC.ED.& *ff. ff*.SL.SM.SP.SN. vt 1. ad 4. vel vt 1. ad 5. si bases sint Pentagonæ, & ita infinite. Quod, &c.

Conuersa liquet. Si enim EA.EB.&c. superet SL.SM.&c. in 4 □ X. & EO. ipsam SR. in 1 □ X. erunt EA.EB.EC.ED.*aq*.SL.SM.SP.SN+4 □ X. vel ipsis RL.RM RP.RN+4RS+4 □ X. sed etiam *aq*. ipsis OA.OB.OC.OD+4RS+4 □ X. (60.M.1.) Ergo ablatis communibus remanebit minima summa OA.OB.OC.OD.*aq*. RL.RM.RP.RN. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI Pyramides habeant eandem summam ff.ſſ. ex lateribus eleuatis, & bases eiusdem speciei trilateras, quadrilateras, &c. differentia ff.ſſ. ex rectis à vertice in centrum basis ad differentiam minimarum ff.ſſ. est vt 1. ad numerum laterum basis, & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SInt Pyramides basis quadrilateræ A.B.C.D.E. LMPNS. & summa *ff.ſſ.* EA. EB. EC. ED. *æq.* summæ *ff.ſſ.* SN. SL. SM. SP. Dico differentiam *ff.ſſ.* EO. & SR. ad differentiam minimarum OA. OB. OC. OD. & RL. RM. RP. RN. esse vt 1. ad 4. si basis sit quadrilatera, vel vt 1. ad 5. si Pentagona: & *èconuersò* si ratio talis fuerit. Dico summam EA. EB. &c. *æq.* esse SL. SM. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam summa *ff.ſſ.* EA. EB. EC. ED. *æq.* SL. SM. SP. SN. ex *hyp.* & EA. EB. &c. *æq.* OA. OB OC. OD+4EO. tum SL. SM. &c. *æq.* RL. RM. RP. RN+4SR (6o. M. 1.) erunt OA. OB. OC. OD+4OE. *æq.* RL. RM. RP. RN+4 SR. Ergo 4OE tantum superat 4SR. quantum minima summa OA. &c superatur à minima RL. &c. Ergo 1 OE. superabit 1 SR. in quarta parte differentiæ minimarum: vel differentia

in-

inter ff. ff. OE, & SR. erit ad differentiam inter minimas summas RL. RM. RP. RN. & OA. OB. OC. OD. vt 1. ad 4. Quod, &c.

Conuersa clarissima est si enim minimarũ differentia ad differentiam inter *ff. ff.* OE. & RS. sit vt 4. ad 1. differentia inter 4 OE. & 4 RS. erit *aeq.* differentiae minimarum: Ergo minima summa OA. OB. OC. OD + 4 OE. *aeq.* RL. RM. RP. RN + 4 RS. Ergo EA. EB. EC. ED. *aeq.* SL. SM. SP. SN. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XVIII.

IN omnibus Pyramidibus Tetraedris summa ff. ff. ex lateribus omnibus sunt minimis summis, & etiam summis ff. ex rectis ab angulis per centrum Pyramidis; idemque est de summis Fig. ex rectis, quae ab angulis bisecant opposita latera: & de Pyramidibus inscriptis.

DEMONSTRATIO. Fig. F. 2.

SInt duae Pyramides Tetraedrae ABCDE. & summa ff. ff. ex lateribus primae ad suam minimã summã est vt 36. ad 9. sed etiã summa ff. ff. ex lateribus secundae ad suam minimam summam est vt 36. ad 9. Ergo vt summa primae ad summam secundae ita minima primae ad minimam secundae. Idemque est de reliquis, vt

D con-

PROPOSITIO XVII.

SI Pyramides habeant eandem summam ff.ss. ex lateribus eleuatis, & bases eiusdem speciei trilateras, quadrilateras, &c. differentia ff.ss. ex rectis à vertice in centrum basis ad differentiam minimarum ff.ss. est vt 1. ad numerum laterum basis, & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SInt Pyramides basis quadrilateræ ABCDE. LMPNS. & summa ff.ss. EA. EB. EC. ED. *æq.* summæ ff.ss. SN. SL. SM. SP. Dico differentiam ff.ss. EO. & SR. ad differentiam minimarum OA. OB. OC. OD. & RL. RM. RP. RN. esse vt 1. ad 4. si basis sit quadrilatera, vel vt 1. ad 5. si Pentagona: & *èconuersò* si ratio talis fuerit. Dico summam EA. EB. &c. *æq.* esse SL. SM. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam summa ff.ss. EA. EB. EC. ED. *æq.* SL. SM. SP. SN. ex *hyp.* & EA. EB. &c. *æq.* OA. OB OC. OD+4EO. tum SL. SM. &c. *æq.* RL. RM. RP. RN+4SR (60. M. 1.) erunt OA. OB. OC. OD+4OE. *æq.* RL. RM. RP. RN+4 SR. Ergo 4OE tantum superat 4SR. quantum minima summa OA. &c. superatur à minima RL. &c. Ergo 1 OE. superabit 1 SR. in quarta parte differentiæ minimarum: vel differentia

in-

inter ff ff. OE, & SR. erit ad differentiam inter minimas summas RL. RM. RP. RN. & OA. OB. OC. OD. vt 1. ad 4. Quod, &c.

Conuersa clarissima est si enim minimarũ differentia ad differentiam inter ff. ff. OE. & RS. sit vt 4. ad 1. differentia inter 4 OE. & 4 RS. erit *æq.* differentiæ minimarum: Ergo minima summa OA. OB. OC. OD + 4 OE. *æq.* RL. RM. RP. RN + 4 RS. Ergo EA. EB. EC. ED. *æq.* SL. SM. SP. SN. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XVIII.

IN omnibus Pyramidibus Tetraedris summa ff. ff. ex lateribus omnibus sunt minimis summis, & etiam summis ff. ex rectis ab angulis per centrum Pyramidis; idemque est de summis Fig. ex rectis, quæ ab angulis bisecant opposita latera: & de Pyramidibus inscriptis.

DEMONSTRATIO. Fig. F. 2.

SInt duæ Pyramides Tetraedræ ABCDE. & summa ff ff. ex lateribus primæ ad suam minimã summa est vt 36. ad 9. sed etiã summa ff. ff. ex lateribus secundæ ad suam minimam summam est vt 36. ad 9. Ergo vt summa primæ ad summam secundæ ita minima primæ ad minimam secundæ. Idemque est de reliquis, vt constat ex tabella rationum apposita in fine *prop.* 14. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XIX.

PLanum bifariam diuisum per datam intra angulum solidum triangulare rectam secãtem latus, & planum oppositum, secat Pyramidem minimam per talem rectam.

EXPOSITIO. Fig. 4.

SIt angulus solidus tribus planis comprehensus DABC. & sit intra ipsum recta CE. secãs latus DC. in C. & planum ABD. in E. transeat deindè per rectam CE. planum ABC. bifariam à recta diuisum, vt segmenta AEC. EBC. æqualia sint. Dico Planum ABC. secare pyramidem ABCD. omnium minimam earum, quæ per rectam CE. abscindi possunt ab angulo solido DABC.

DEMONSTRATIO.

INtelligatur enim quodlibet aliud planum FGC. trãsiens per rectam CE. & FG. AB. quia se intersecant in E. erunt in eodem communi plano (1. *l.* 11.) Ergo in illo erunt triangula AEF. EGB. & ducta BH. parallela ipsi AE. erunt triangula similia AEF. BEH. (2. *l.* 6.) sed quia triangula AEC. ECB. supponuntur æqualia, & sunt æquè alta, æquales sunt AE. & EB (1. *l.* 6.)

Er-

Ergo in triangulis similibus A E F. B E H. reliqua omnia erunt in eadem ratione æqualitatis (2. *l*. 6.) Ducta igitur C H. Pyramides A E. F C. E H B C æquè alta in C. supra æquales bases A E F. E H B. erunt æquales (5. *l*. 11.) sed Pyramis E G B C. maior est pyramide E H B C totum scilicèt parte: Ergo Pyramis E G B C. maior erit ipsa F A E C. Ergo addito vtrique parti solido communi F E C B D. erit Pyramis E G C D. maior pyramide A B C D. & cum hoc de quolibet plano E G C. demonstretur, semper erit Pyramis A B C D. minor qualibet alia, & omnium minima earũ, quæ per C E. possunt abscindi. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XX.

SI recta secet latus anguli solidi, & planum alteri oppositum, planum per illam, quod ex opposito secat triangulum minimum, secat etiam ex angulo solido Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 4.

IN angulo solido DABC. recta CE. secat latus DC. in C. & planum ABD. in E per CE. transeat planum ABC. secans △ ABD. ex plano, & angulo ADB. omnium minimum per E. Dico Planum ABC. secare Pyramidem ABCD. omnium minimam.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △ ABD. est minimũ eorum, quæ per E. fieri possunt, erit AEB. bifariam diuisa in E. (15. M. 2.) Ergo △△ EAC. EBC. æquè alta erunt æqualia, & planum ABC. erit bifariam diuisum recta CE (1. *l.* 6.) sed planum bisariam diuisum secat pyramidem minimã (19. *p.*) Ergo Pyramis ABCD. est minima. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

SI per centrum ff. ff. Pyramidis Tetraedra ducantur plana basibus parallela, cētrum Pyramidis erit centrum planorum.

EXPOSITIO. *Fig.* 5.

IN Pyramide Tetraedra A B CD. sit *centrum ff. ff.* O. per quod transeat planum EFI. basi ABC. parallelum. Dico O. esse *centrum ff. ff.* plani EFI.

DEMONSTRATIO.

DVcta recta DOG. transibit per G. *centrum* basis (1. *p.*) & quia planū EFI. est basi ABC. parallelum, erunt sectiones ABC. EFI. similes (4. *l.* 11.) & etiam vt AC. ad AG. ita EI. ad EO. & vt CB. ad CG. ita IF. ad IO. & vt AB. ad BG. ita EF. ad FO (2. *l.* 6.) Ergo vt G. est *centrum ff. ff.* basis ABC. erit O. *centrum ff. ff.* plani EFI. Idem ostendetur de plano per O. ducto parallelo ipsi BCD. & sic de reliquis: Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

SI tria plana se mutuo secent, & duæ sectiones sint parallelæ, & tertia ipsis parallela erit.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SInt tria plana CFP. AEB. CFD. & duæ sectiones CF. GH. sint inter se parallelæ. Dico sectionem tertiam AE. etiam ipsis CF. GH. parallelam esse.

DEMONSTRATIO.

DVcatur planum GKL. plano HFE. parallelum, & erunt sectiones HE. GK. parallelæ: tum EF. KL & FH. LG. (3. *l.* 11.) Ergo anguli G. H. æquales erunt: tum L. F. & K. E (3. *l.* 11.) & cum LH. in plano CBF. parallelogrammum sit, sunt LG. FH. æquales (7. *l.* 1.) Ergo cum △△ KLG. EFH. habeant angulos supra æquales bases LG. FH. æquales, erunt omninò æqualia (4. *l.* 1.) GK HE & KL. EF. Ergo cum KG. EH. sint parallelæ *æq.* est KH. parallelogrammum, & KE. GH. sunt *parall.* tũ KE LF. (7. *l.* 1.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXIII.

SI recta intra angulum solidum parallela sit alteri in quouis dicti anguli plano, omnia plana per illam facient sectionem alteri parallelam.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt angulus solidus PABE. & intra ipsum recta GH. parallela cuilibet rectæ CF. plani CPF. Dico quodlibet planum BGH. transiens per GH. facere in plano APE. sectionem AE. parallelam eidem GH.

DEMONSTRATIO.

CVm enim recta CF. parallela sit datæ GH. erunt in eodem plano (2. *l.* 11.) ducto igitur plano CFHGD. erit CF. communis sectio planorum CFD. CFP. Ergo ducto quolibet alio plano BHGAE. cum tria illa plana BAE. DCF. CFP. se interfecent, & sectiones GH. CE. sint parallelæ ex *hypoth.* erit etiam AE. ipsis parallela (22. *p.*) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

SI aliquod planum transiens per datam rectam intra angulum solidum non faciat sectionem datæ rectæ in aliquo plano eiusdem anguli parallelam, nullum planum per illam rectã efficiet sectionem parallelam.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt angulus solidus PABE. & intra ipsum recta GH. per quam transeat planum BGH. faciens in plano APE. sectionem AE. non parallelam ipsi datæ GH. Dico nullum planum per GH. posse efficere in plano BGH. sectionẽ parallelam.

DEMONSTRATIO.

SI enim aliquod planum posset efficere sectionem parallelam, omnia plana illam efficerent (23 *p.*) Ergo cum aliquod illam non efficiat ex *hypoth.* nullum planũ talem sectionem parallelam efficiat. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

EX omnibus planis per rectam intra angulum solidum trigonum efficientibus sectionem ipsi parallelam, illud secat Pyramidem minimam, quod habet in ea centrum ff. ss. ad laterũ sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt angulus solidus trilaterus P C F D. & data recta GH. per quam transeat planum DCF. faciens sectionem CF. parallelam ipsi GH. in qua sit O. *centr. ff. ss.* ad sectiones C. D. F. Dico Pyramidem CDFP. esse omnium per GH. minimam.

DEMONSTRATIO.

TRanseat per GH, quodvis planum BAE. ducantur D I. CS. parallelæ F E. & iungatur SGI. sit insuper planum GLK. parallelum EFH. & ducantur GE. GF. Cum O. sit *centr. ff. ss.* ad C. D. F. & sint GH. CF. parallelæ, erit FH dimidium HD. (1. M. 2) & cum Pyramides EFHG. HDIG. sint æquè altæ in G. erunt in ratione basium EFH. HID. (5. *l.* 11.) sed cum DI. EF. sint parallelæ, & △△ similia EFH. HID (2. *l.* 6.) sunt in duplicata ratione DH. ad HF. (4. *l.* 6.) Ergo cum HD. sit dupla HF. erit HDI. quadruplum HFE. & Pyramis HDIG. quadrupla ipsius

sius HFEG. (5 *l*. 11.) sed HFEG est tertia pars prismatis HEFGLK(5 *l*. 11.)vel dimidium Pyramidis EFLKG(4. *l* 11.) Ergo HDIG. est dupla EFLKG. sed GL. est dimidium LF. vt CG. ipsius GD. ex *parall*. (2. *l*.6.) Ergo parallelogrammum CK. est dimidium KF(1. *l*.6.) & Pyramis CSKLG. dimidium EFKLG(5. *l*. 11.) nēpè æqualis EFGH. Ergo totum solidum EFHGCS. est quadruplū Pyramidis EFHG. & æquale ipsi HDIG. sed HDBG. maior est HDIG. Ergo HDBG. maior est solido EFHGCS. Ergo multo maior erit solido EFHGCA. & addito communi solido AGDHEP. erit Pyramis AB EP. maior quàm CDFP. Quod erat, &c.

Si autem punctum B. sumatur supra D. eadem ratione demonstrabitur Pyramis HDBG. minor solido EFHGCA. & DCFP. minor BE AP. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

IN qualibet Pyramide Tetraedra si per centrum ff. ss. transeat recta cuilibet lateri parallela, ex omnibus planis per illam secat Pyramidem minimam, quod est alicui plano Pyramidis parallelum.

EXPOSITIO. Fig. 5.

IN Pyramide ABCD. sit O. *centrum ff. ss.* & per O. recta K. lateri AC. Dico ex omnibus planis per KL. quod erit parallelū ABC. vel ACD. secare pyramidem minimam ex opposito angulo solido D. vel B.

DEMONSTRATIO.

CVm plana EFI. ABC. sint parallela, *centrum ff. ss.* O. Pyramidis erit etiam *centrum* plani EFI. (21. *p.*) & sectiones EI. AC. erunt parallelæ (3. *l.* 11.) & quia AC. est ipsi KL. parallela erunt EI. KL. parallelæ: Ergo cum planum EFI. faciat sectionem IE. parallelam ipsi KL. & habeat in KL. *centrum ff. ss.* O. secabit Pyramidem minimam ex angulo D. (25. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVII.

EX omnibus planis per datam intra angulum solidum trilaterum rectam, quod habet in illa centrum ff. ss. ad sectiones laterum secat Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 7.

SIt DABC. angulus solidus tribus planis, & lateribus comprehensus, & intra ipsum data sit recta HK. per quam transeat planum BAC. quod habeat in HK. *centrum ff. ss.* ad puncta sectionum A. B. C. Dico planum ABC. secare Pyramidem minimam ABCD. omnium; quæ per rectam HK. abscindi possunt ex angulo D.

DEMONSTRATIO.

TRanseat enim per HK. quodlibet aliud planum EFG. & diuisa AC. bifariam in X. ducatur BX. secans datam HK in O. & quia *centrum ff. ss.* est in recta BX (1. M. 2.) & etiam in recta HK. ex *hypoth.* intersectio O. erit *centr. ff. ss.* ad A. B. C. Ducta ergo per O. recta IL. parallela ipsi AC. erit IL. bifariam secta in O. vt AC. in X. à communi recta BOX (2. *l.* 6.) Ducatur ergo per IL. planum EPR. & erit sectio PR. parallela rectæ IL. (23. *p.*) Ergo ducta EOQ. vt IL. secatur bifariam in O. ita PR. in Q. (2. *l.* 6.) & planum EPR. erit bifariam diuisum recta EQ.

Præ-

Præterea cum plana EPR. EFG. transeant per E. & O. erit communis eorum sectio EOQ. & erit sectio rectarum PR, FG. Ergo cum EQ. secet latus DE. & planum EPR. sit bifariam diuisum à recta EQ. erit Pyramis EPRD. minor Pyramide EFGD. (19. *p.*) sed cum sectiones PR. AC. IL. sint parallelæ, & planum BAC. habeat *centrum ff. ff.* in IL. est Pyramis BACD. adhuc minor pyramide EPRD. (25. *p.*) Ergo Pyramis ABCD. multo minor erit pyramide EFGD. & cum hoc de quolibet alio plano EFG. demonstretur, erit Pyramis ABCD. omnium minima, quæ per HK. abscindi potest. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

EX omnibus planis per datum intra angulũ solidum trilaterum punctum, quod habet in illo centrum ff. ff. secat Pyramidem minimam, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 8.

SIt angulus solidus DABC. tribus planis cõprehensus, & intra ipsum datum sit punctũ O. per quod transeat planum EFI. ita vt O. sit *centrum ff. ff.* ad puncta E. F. I. Dico planum EFI. secare pyramidem minimam EFID. omnium, quæ per O. secari possunt ex angulo solido D. & *è contra* si EFI. secat pyramidem minimam, erit O. *centrum ff. ff.*

DEMONSTRATIO.

TRanseat enim per O. quodlibet aliud planum PRS. secans planum EFI. & communis eorum sectio sit recta HK (1. *l.* 11.) Quoniam vtrumque planum transit per punctum O. ex *hypoth.* erit O. in sectione communi HK. sed O. est *centrum ff. ff.* ad puncta E. F. I. ex *hypoth.* Ergo planum EFI. habet *centrum ff. ff.* in recta HK. Ergo Pyramis EFID. minor est pyramide PRSD. (27. *p.*) & cum idem perpetuo demonstretur de quolibet plano PRS. erit Pyra-

ra-

ramis EFID. omnium minima. Quod erat, &c.

Conuersa facillimè demonstratur. Quoniam si Pyramis PSRD. posset esse minima, & planum PRS. non haberet *centrum* ff. ff. in dato puncto O. concipiatur per O. planum EIF. quod habeat in O *centrum* ff. ff. Ergo ex modo demonstratis planum EIF. secabit pyramidem omnium minimam: Ergo Pyramis EIFD. minor esset quàm pyramis PRSD. vnde hæc non esset minima contra hypothesim: Ergo nulla pyramis non habens *centrum* ff. ff. in O. potest esse minima: Ergo quæ per O. est minima, habet in O. *centrum* ff. ff. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

IN Pyramide tetraedra si in recta ab angulo ad centrum ff.ss. plani oppositi sumatur quodlibet punctum, planum opposito parallelum transiens per assumptum punctum secat ab opposito angulo pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 5.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & G. *centrum ff.ss.* plani ABC. & ducta recta DG. sumatur in ea quodlibet punctum O. per quod transeat planum EFI. plano ABC. parallelum. Dico Pyramidem EFID. esse minimam per O.

DEMONSTRATIO.

CVm enim planum EFI. sit ipsi ABC. parallelum omnes eius sectiones similes sunt sectionibus plani ABC. (4 *l.* 11.) Ergo sicut G. est *centrum* plani ABC. ex *hyp.* ita O. erit *centrum ff.ss.* plani EFI: Ergo Pyramis EFID. erit omniũ minima per punctum O (28 *p.*) Quod, &c.

Consect. Ex planis per *centr ff.ss.* Pyramidis, quod est opposito parallelum secat pyramidem minimam.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

SI per centrum Pyramidis Tetraedra transeant quatuor plana, quatuor planis Pyramidis parallela, secantur quatuor Pyramides minima ex quatuor angulis similes, & æquales.

EXPOSITIO. Fig. 5.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & ipsius *centrũ ff.ff.* O. per quod transeat planum EFI. parallelum basi ABC. & similiter transeant per O. alia plana parallela planis ABD. ACD. CBD. Dico omnia illa secare ex oppositis angulis Pyramides minimas omnium, quæ ex singulis angulis secari possunt per O. & illas omnes esse inter se æquales, & similes. Plana reliqua omissa sunt ne linearum multitudo confusionem pareret.

DEMONSTRATIO.

QVoniam recta DO. transit per *centrum* plani ABC. & planum EFI. est ipsi ABC. parallelum secat EIF. pyramidem minimam anguli D. (29. *p.*) Quod similiter demonstrabitur de alijs angulis.

Præterea cum plana EFI. ABC. sint parallela, sectiones omnes sũt similes △EFI. ipsi ABC. & △EID. ipsi ACD. & △IFD. ipsi CBD. & △EFD. ipsi ABD. & latera proportionalia (4. *l.* 11.

F &

& 2.l.6.) Ergo Pyramides EIFD. ABCD. similes sunt, quia similibus planis similiter dispositis, & lateribus proportionalibus constant. Ergo EFID. ad ABCD. est in triplicata ratione DE. ad DA. vel DO, ad DG (6.l.11.) sed DO. ad DG. est vt 3. ad 4. vel vt 27. ad 36 (1.p.) Ergo cũ sint continui 27. 36. 48. 64. est EFID. ad ABCD. vt 27. ad 64.

Similiter si per O. ducatur planũ ipsi CBD. parallelum secabit pyramidem minimam ex angulo A. similem toti BCDA. & erit ad ipsam vt 27. ad 64. & sic de alijs: Ergo cum omnes sint eidem toti ABCD. similes, erunt inter se similes, & quia eidem ABCD. eandem habent rationem vt 27. ad 64. erunt inter se æquales (2. l.5.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

SI datum in angulo solido trilatero punctum sit centrum ff ss. plani per illud, & aliud planum per sectionem vnius lateris, & dati puncti transeat, data pyramidum ratione, datur ratio reliquorum laterum, & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 4.

SIt angulus D. & punctum O. *centr. ff. ss.* plani ABC. tum per O. & C. vel A. vel B. transeat planum GFC. vt communis sectio sit COE. & data sit ratio pyramidis GFCD. ad ABCD. vt SZ. ad SX. Dico datam esse pari rationem DB. ad DG. & DF. ad DA. & *èconuersò.*

DEMONSTRATIO.

PYramides FGDC. ABDC. æquè altæ in C. se habent vt bases (5. *l.* 11.) Ergo data est ratio △ FGD. ad △ ADB. quæ bases sunt: sed recta COE. per *centr. ff. ss.* O. bisecat latus AB. (1. M. 2.) Ergo in triangulis DAB. DFG. data est ratio laterum DB. ad DG. & DF. ad DA. & *èconuersò* data laterum ratione, datur ratio triangulorum (18. M. 2.) Quod, &c.

PROPOSITIO XXXII.

SI per datum intra angulum solidum trilaterum punctum ducantur plana planis anguli parallela, & planum per idem punctum sectionibus laterum parallelum ducatur, ipsius latera erunt trifariam diuisa, & ipsum intercipiet segmenta laterum anguli in ratione dupla.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SIt datus angulus solidus trilaterus DABC. & intra ipsum quodlibet pūctum O. per quod transeat planum KLG. parallelum ipsi ADB. secans latus DC. in G. & planum PRE. parallelum ipsi BDC. secans latus DA. in E. & planum HIF. parallelum ipsi ADC. secans latus BD. in F. deindè per O. transeat planum ABC. parallelum sectionibus E.F.G. Dico latera AB. BC. CA. plani ABC. esse trifariam diuisa, & segmēta AE. ED. tum BF. FD. tum CG. GD. esse in ratione dupla.

DEMONSTRATIO.

QVoniam plana ABC. EFG. sunt parallela, erunt triangula similia (4. *l.* 11.) & quia ABC secat plana parallela, sectiones AB. KL. erunt parallelæ: tum ACHI. tum BC RP. (3. *l.* 11.) Insuper quia HF. KG. sunt eidem AE. parallelæ, erunt inter se parallelæ: tum quia pla-

na

na sunt parallela ABC. EFG. sunt sectiones EG. AK. parallelæ, tum EF. AH. tum FG HK. (3. l. 11.) idemque est de reliquis.

Præterea in parallelogrammis EK. EG. sunt AK. PC. æquales EG. (7. l. 1.) Ergo & inter se: tum in EH. EB. sunt AH. RB. æquales EF. & inter se: & in parallelogrammis HAKO. HKPO. sunt AK. KP. æquales ipsi HO. (7. l. 1.) Ergo & inter se: Ergo AK. KP. PC. æquales sunt, & similiter AH. HR. RB. tum BL. LM. MC. Ergo ex parallelismo vt AR. est dupla ipsius RB. ita AE. esset dupla ipsius ED. (2. l. 6.) & similiter demonstrabitur BF. esse duplum FD. & CG. ipsius GD. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Iisdem positis, quæ in præcedenti, planum ductum sectionibus parallelum habet centrum ff. ſſ. in puncto aſſumpto, & ſecat per illud Pyramidem minimam, & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SI planum ABC. tranſeat per O. ſectionibus E.F.G. parallelum. Dico habere *centr. ff. ſſ.* in O. & ſecare per O. pyramidem A B C D. minimam.

DEMONSTRATIO.

CVm HI. ſecet trifariam latera AB. BC. & ſit parallela ipſi AC. in eius dimidio erit *centrum ff. ſſ.* trianguli ABC (1. M. 2.) ſimilitèr erit in dimidio RP. & in dimidio KL. Ergo *centrum ff. ſſ.* ad A. B. C. erit in communi ſectione O. in qua rectæ ſe bifariam ſecant: Ergo cum planum ABC. habeat *centrum ff. ſſ.* in O. ſecabit Pyramidem ABCD. omnium minimã. *Contra.* Si ABC. ſecat pyramidem minimam parallelum erit ſectioni EFG. &c. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

SI Pyramis Tetraedra sit, & in ea punctum assumptum cadat intra Pyramidem planorum centris inscriptam, Pyramides minimæ ex quatuor angulis solidis resecabiles cadunt omnes intra Pyramidem datam.

EXPOSITIO. Fig. 10.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD in qua planorum *centra* efficiunt similem inscriptam EF HG. prout in *prop.6.* intra quam sumptum sit quodlibet punctum P. per quod planum SVT. secet ab angulo D. pyramidem minimam SV TD. Dico totam Pyramidem SVTD. vel totum planum SVT. cadere intra Pyramidem ABCD. idemque de minimis angulorum A. B.C.

DEMONSTRATIO.

PLanum enim EFG. inscriptæ continuatum secabit latus AD. in M. & erit AM. dupla ipsius MD (7.*p.*) Ergo cum punctum P. sit inter plana parallela EFG. CBD. (7.*p.*) planum trãsiens per P. vtrique parallelum secabit latus DA. inter M. & D. nempè in K. Similiter planum EGH. continuatum secabit CD. in N. & planum per P. planis EHG. ADB. parallelum secabit latus CD. in I. inter N. & D. Atque eadem

dem ratione planum FHG. continuatum secabit BD. in R. & planum per P. vtrique FHG. ADC. parallelum secabit BD. in L. inter R. & D.

Tandem quia Planum SVT. per punctum P. secat pyramidem minimam anguli D. ex *hyp.* erit sectioni KIL. parallelum (33. *p.*) Ergo segmenta SK. VI. TL. dupla sunt segmentorum KD. ID. LD (32. *p.*) sed KD. ID. LD demonstrata iam sunt minora quã MD. ND. RD. Ergo cũ DS. DV. DT. sint triplæ DK. DI. DL. (32. *p.*) & DA. DC. DB sint triplæ DM. DN. DR. (7. *p.*) erunt DS. DV. DT. minora quàm DA. DC. DB. Ergo puncta S. V. T. cadunt supra A. C. B. & Pyramis minima SVTD. tota intra datã ABCD. idemque erit de minimis reliquorum angulorum. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

SI per datum in Pyramide Tetraedra punctū ducantur plana ipsius planis parallela, ratio segmentorum communis lateris est ratio Pyramidum minimarum, quæ ab angulis habentibus illud latus commune secantur.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & in ea datum punctū O. per quod ducantur plana MΓN. EYX. parallela ipsis ABC. DCB. & per O. planū HLK. secet pyramidem minimam anguli D. & RSQ. anguli A. latus commune angulis D. & A. est DA. segmenta inter angulos, & ducta planis parallela sunt DE. AM. Dico pyramidē minimam HLKD. ad minimam RYQA. esse vt DE. ad AM.

DEMONSTRATIO.

DVctis per O. planis parallelis prout in *prop.* 32. Quoniam planum HLK. secat pyramidem minimam anguli D. erit parallelum sectionibus EGF. (33. *p.*) Ergo Pyramides HLKD. EFGD. sunt similes (4. *l.* 11.) & in triplicata ratione laterum HD. ED. (6. *l.* 11.) tum pyramides RSQA. MTVA. similes erunt, & in triplicata ratione RA. ad MA. ob eandem rationem: sed ratio HD. ad ED. est vt RA. ad MA.

 sci-

ſcilicèt tripla (32.*p.*) Ergo Pyramis HLKD. ad pyramidem EFGD. eſt vt RSQA. ad MTVA (1. *l.*5.) & alternando HLKD. ad RSQA. vt EFGD. ad MTVA (4.*l.*5.) ſed Pyramis DEFG. ad MAVT. eſt vt baſis DEF. ad MAV. quia ſunt æquè altæ, inter plana parallela DAB. GTZ (5. *l.*11.) & △DEF. ad △MAV. eſt vt DE. ad MA. quia ſunt inter parallelas DA. FV (1. *l.*6.) Ergo Pyramis EDFG. ad MAVT. & vt DE. ad MA. (1. *l.*5.) Ergo etiam HLKD. minima anguli D. ad RSQA. minimam anguli A. eſt vt DE. ad MA.

Similitèr pyramis minima anguli B. ad minimam anguli D. erit vt BN. ad DF. & minima anguli C. ad minimam anguli A. vt CY. ad AT. & ſic de reliquis ſi binæ comparentur: Ergo conſtat veritas propoſitionis. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

IN quauis Pyramide Tetraedra si sumatur punctum in recta ab angulo solido in centrum ff. ss. plani oppositi, tres pyramides minimæ à tribus eiusdē plani angulis sectæ, sunt inter se æquales.

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt Pyramis ABCD. & H. *centrum ff. ss.* plani ABC. si in recta DH. ducta ex angulo opposito sumatur quodlibet punctum O. per quod ex tribus angulis A. B. C. secentur tres pyramides minimæ: Dico illas esse inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

DVcantur enim per O. quatuor plana planis ipsius Pyramidis parallela, scilicèt ILK. ERS. GPQ. FMN. Planum ergo ILK. quoniam est parallelum ipsi ABC. habet *centrum ff. ss.* in recta DH. & secat pyramidem minimam anguli D. (29. *p.*) sed idem planum IKL. etiam est parallelum sectioni EFG. factæ à planis ERS. GPQ. FMN. (33. *p.*) Ergo sectiones EG. IL. AC. sunt inter se parallelæ: tum GF. LK. CB. tum EF. IK. AB (4. *l.* 11.) Ergo proportionales sunt ex parallelismo vt DE. ad IA. ita DG. ad LC. & ita DF. ad KB. (2. *l.* 6.) sed Pyramis minima anguli D. ad Pyramidem minimam anguli A.

est vt DE ad IA. & eadem pyramis minima anguli D. ad minimam anguli B. est vt DF. ad BK. & eadem minima anguli D. ad minimam anguli C. est vt DG. ad CL (35. *p.*) Ergo cum eadem sint rationes DE ad AI. & DF. ad BK. & DG. ad CL. ex iam demonstratis, eadem Pyramis minima anguli eandem habet rationem ad tres pyramides minimas angulorum A. B. C. sed si eadem ad diuersas habeat eandem rationem, sunt illæ æquales (2. *l.* 5.) Ergo Pyramides minimæ angulorum A. B. C. sunt inter se æquales. Quod erat, &c.

Plana secantia pyramides minimas omissa sunt, quia ad demonstrationem non conducunt.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

SI in recta ab angulo in centrum plani oppositi punctum assumptum fuerit centrum ff. ss. ipsius Pyramidis, quatuor Pyramides minimæ sunt inter se æquales, & absolutè minimæ. Si verò punctum sit infra centrū tres minimæ sunt æquales, & absolutè minimæ. Si autem supra centrum, minima anguli ex quo recta ducitur est absolutè omnium minima.

DEMONSTRATIO. Fig. 12.

PRima pars demonstrata fuit *prop.* 30. libet tamen hic aliter eam demonstrare. Sit pyramidis *centrū* O. & plana I.L.K. &c. cum plana ABC. ILK. sint parallela, erit DI. ad IA. vt DO. ad OH (4 *l.* 11.) sed DO. est tripla OH (1. *p.*) Ergo & DI. est tripla IA. sed etiam DI. est tripla DE (32. *p.*) Ergo DA. & AI. sunt inter se æquales: sed Pyramis minima anguli D. ad minimā anguli A. est vt DE. ad IA (35. *p.*) Ergo Pyramis minima anguli D. æqualis est minimæ anguli A (1. *l.* 5.) sed minimæ angulorum A.B.C. sunt inter se æquales (36 *p.*) Ergo omnes quatuor sunt inter se æquales, & sic absolutè minimæ.

Secundò sit punctum assumptum T. infra O. planum per T. parallelum ABC & IKL. secabit Pyramidem minimam anguli D. infra I.

(29.

(29.*p.*) nempè in y. Ergo Dy. erit maior quàm DI. Ergo si sumatur DY. tertia pars ipsius Dy. erit DY. maior quàm DE. quæ est tertia pars ipsius DI (32 *p.*) Ergo cum DE. AI. sint æquales, erit DY. maior AI. Ergo Pyramis anguli D. maior erit Pyramide anguli A. (35.*p.*) Ergo cum Pyramides minimæ angulorum A. B. C. sint æquales (36.*p.*) erunt absolutè minimæ.

Tertiò punctum V. sit supra O. planum parallelum ABC. & IKL. secabit DA. in X. supra I. Ergo DZ. tertia pars ipsius DX. minor erit DE. tertia parte DI. Ergo DZ. minor erit quàm AI. & AX. & pyramis anguli D. minor quàm anguli A. (35.*p.*) & cum Pyramides angulorum A. B. C. sint æquales (36.*p.*) erit Pyramis anguli D. absolutè minima. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SI in Pyramide Tetraedra planum transeat per duos angulos, & centrum ff. ss. Pyramidis, & in eo sumatur quodlibet punctum, Pyramides minimæ per illud ex reliquis angulis sectæ æquales sunt inter se.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & illius *cētrum ff. ss.* O. transeat ergo per O. & per angulos D. & C. planum DGH. & in eo sumatur quodlibet punctum Z. Dico Pyramides minimas sectas ab angulis A. & B. esse inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

PLanum KLM. secet Pyramidem minimam anguli D. & erit Z. *centrum ff. ss.* plani KLM. (28. *p.*) Ergo recta LZX. bifariam diuidit KM. (1. M. 2.) sed cum puncta Z. & L. sint in vtroque plano KLM. & DCH. est recta LZX. communis planorum sectio (1. *l.* 11.) Ergo punctum X. est in recta DH. sed etiam DO. continuata cadit in G. *centrum* plani ABC. (1. *p.*) & CGH. bifariam diuidit latus AB (1. M. 2.) Ergo cum in plano ABD. recta DH. proportionalitèr secet AB. & KM. sunt istæ parallelæ (2. *l.* 6.) sed ductis planis EVR. FPS. parallelis DCB. DCA. est EF. parallela KM (32. *p.*) Ergo &

EF.

EF. AB. sunt parallelæ: sed etiam DB. ER. tum DA. FP. sunt parallelæ: Ergo in parallelogrāmo EP. sunt æquales EF. AP. & in parallelogrammo ER. æquales sunt FE. RB (34. l. 1.) Ergo AP. RB. æquales sunt inter se: sed Pyramis minima anguli A. secta per punctum Z. ad minimam anguli B. est vt AP. ad BR. (35. p.) Ergo Pyramides angulorum A. & B. sunt æquales. Quod erat, &c.

Consect. 1. Cum recta DOG. communis sit tribus planis per D. & reliquos A. B. C. demonstratur iterum *prop.* 36.

Consect, 2. Cum *centrum* O. sit commune planis omnibus per quosvis binos angulos demōstratur etiam iterum propositio 30. & prima pars *prop.* 37.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

SI per datum intra Pyramidem Tetraedram punctum secentur à duobus angulis duæ pyramides æquales, illud erit in plano per centrum, & reliquos angulos. Si verò secentur tres æquales, erit in recta per centrum, & angulum reliquũ. Si autem quatuor, illud erit ipsum centrum ff. ss. Pyramidis.

EXPOSITIO. Fig. 13.

IN Pyramide Tetraedra ABCD. sit datũ punctum Z. per quod minimæ Pyramides angulorum A. & B. sint æquales. Dico punctum Z. esse in plano DGH. transeunte per *centrum* O. & per reliquos angulos D. & C. Si verò tres Pyramides angulorum A. B. C. æquales sint. Dico Z. esse in recta DOG. & si quatuor A. B. C. D. æquales sint, punctum Z. erit ipsum *centrum* *ff. ss.* O.

DEMONSTRATIO.

DVctis EVR. FPS. parallelis DBC. ADC. erũt AP. RB. in ratione minimarum (35. *p.*) nẽpè æquales ex *hypoth.* sed AD. PF. sunt parallelæ, tum DB. ER: Ergò vt BR. ad AP. ita BD. ad DF. & vt BA. ad BR. ita DA. ad DE. (2. *l.* 6) Ergo BD. ad DF. est vt AD. ad DE (1 *l* 5.) & AB. EF. sunt parallelæ (2. *l.* 6.) Ducto igitur plano

KLM. parallelo EIF. per Z. erit Z *centr. ff. ſſ.* plani (33. *p.*) & parallelæ erunt EF. AB. tum KM (4. *l.* 11.) Ergo cum planum DCH. biſariam diuidat AB. (1. M. 2.) etiam recta DH. biſecabit KM. in X (2. *l.* 6.) Ergo LX. communis ſectio planorum KLM. DCH. tranſit per Z. *centrum ff. ſſ.* △KLM (1. M 2.) Ergo cum punctum Z ſit in cōmuni ſectione planorum, erit in plano DCH. Quod erat, &c.

Eadem ratione ſi tres pyramides angulorū A. B. C. ſint æquales, quia Pyramides A. & B. ſunt æquales, erit Z. in plano per O. & C. & D. & quia A. & C. ſunt æquales, erit Z. in plano per O. B. & D. Ergo in communi ſectione DOG. ſi verò quatuor ſint æquales, erit in O. puncto omnibus planis communi. Quod, &c.

Eſt *conuerſa prop.* 38. 37. 36. & 30.

PRO-

PROPOSITIO XL.

SI punctum datum in Pyramide Tetraedrâ sit extra plana per centrum Pyramidis, & aliquos duos angulos, omnes Pyramides minimæ sunt inter se inæquales.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Punctum Y. extra plana per *centrum* O. & aliquod latus, vel quoslibet duos angulos, quod idem est. Dico quatuor Pyramides minimas sectas à quatuor angulis solidis A. B. C. D. esse inæquales.

DEMONSTRATIO.

QVoniam si duæ pyramides minimæ essent æquales, esset punctum Z. in plano per *cētrum* O. & reliquos duos angulos, quod est cōtra hypothesim: Vnde si nullæ duæ minimæ possunt esse æquales, multo minus tres, vel quatuor. Ergo omnes Pyramides minimæ sectæ per Y. ex angulis A. B. C. D. erunt inæquales. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLI.

IN Pyramide Tetraedra planum per centrum & latus, vel duos angulos determinat Pyramidem minimam ex reliquis angulis secandam.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & in ea punctum Y. & planum DCH. transeat per centrū O. & latus DC. vel angulos D.C. Quoniam punctum Y. cadit inter planum DCH. & angulum A. Dico ex pyramidibus minimis per Y. sectis ab angulis A. & B. minorem esse minimam anguli A. & ita planum DCH. determinare minimam angulorum A. & B.

DEMONSTRATIO.

DVcatur enim per Y. planum EVR. parallelum ipsi DCB. quod secabit planum DCH. infra Y. cum punctum Y. sit inter plana DCH. ADC. sit ergo communis sectio QT (1. l. 11.) Iam quia plana EVR DCB. sunt parallela, & secantur plano DCH. sectiones DC. QT. erunt parallelæ (3. l. 11.) Ducatur ergo per QT. planum FSP. parallelum ipsi plano DCA. & erit Y. inter plana DAC. & FPS. Sumatur deindè in QT. quodlibet pūctum Z. quod erit in tribus planis EVR. DCH. FPS. Ergo quia est in plano DCH. pyramides minimæ sectæ per Z. ex an-

gu-

gulis A. & B. erunt æquales (38. p.). Ergo rectæ AP. RB. erunt æquales (35 p.) Cum igitur Pūctum Y. sit inter plana DAC FPS. si per Y. ducatur planum vtrique parallelum, hoc secabit latus AB. inter A. & P. secet igitur illud in N. & erit AN minor quàm AP. hoc est minor quàm RB. quæ æqualis est ipsi AP. sed Pyramis minima anguli A. per Y. secta ad minimam anguli B. per idem punctum Y. sectam est vt AN. ad BR (35. p.) Ergo cum AN. sit minor, quàm BR. etiam Pyramis anguli A. minor erit pyramide minima anguli B. (3. l. 5.) Ergo planum DCH. determinat pyramidem minimam angulorum A. & B. Quod, &c.

PROPOSITIO XLII.

IN quatibet Pyramide Tetraedra, si datum sit punctum intra hexaedrum planis anguli, & planis per opposita latera, & centrum Pyramidis ductis, Pyramis illius anguli erit minima omnium, quæ ex quatuor angulis secari possunt.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Pyramide Tetraedra ABCD. per *centrum* ff. ff. O. & latera DB. DC. BC. opposita angulo A. ducantur plana DBH. DCE. BCM. quæ secant ex angulo A. Hexaedrũ EGOPHAMR. comprehensum trapezijs EGHA. HPMA. ERMA. GERO. GHPO. PMRO. intra quod hexaedrum datum sit quodlibet punctum Z. Dico Pyramidum minimarum ex quatuor angulis secabilium, per punctum Z. omnium minimam esse quæ secari potest ex angulo A.

DEMONSTRATIO.

CVm latus DB. opponatur angulis A. & C. & punctum Z. sit extra planum DBH. Pyramis minima anguli A. minor erit pyramide minima anguli C. (41. *p.*) Similitèr quoniã latus DC. opponitur angulis A. & B. & quia punctum Z. est extra planum DCE. per *centrũ* O. ductum, & latus DC. pyramis minima anguli A. minor erit pyramide minima anguli B.

(41.

(41.*p.*) Tandem quoniam latus BC. opponitur angulis A. & D. & quia datum punctum Z. est extra planum CBM. per *centrum* O. ductũ, & latus BC. pyramis minima anguli A. quæ cadit inter angulum A. & planum CBM. minor erit pyramide minima anguli D (41.*p.*) Ergo Pyramis anguli A. est omnium minima. Quod erat demonstrandum.

Similitèr si punctum assumptum, vel datũ sit X. intra Hexaedrum DLQIRMPO. demõstrabitur Pyramidem minimam anguli D. versus quem cadit punctum X. esse omnium minimam, & sic de reliquis.

PRO-

PROPOSITIO XLIII.

IN quolibet Pyramide Tetraedra si ex centris planorum, ad centrum Pyramidis, & dimidia latera ducantur rectæ, fiunt quatuor Hexaedra, quæ determinant angulum ex quo secari debet Pyramis omnium minima.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Pyramide ABCD. sit O. *centrum* ff. Pyramidis, & G. R. P. Q. planorum *centra*. Ducatur RO. PO. GO. QO. & RM. PM. RE. GE. GH. PH. &c. Dico Hexaedrum EGHPORMA. determinare Pyramidem minimam anguli A. & similitèr in reliquis angulis.

DEMONSTRATIO.

QVoniam planum DCE transiens per O. diuidit bifariam latus AB (8.*p*.) sectio DE. transit per plani *centrum* R (1.M.2.) Ergo Planum ROGE. est ipsum planum DCE. idemque est de alijs: sed Hexaedrum comprehensum planis DCE. DBH. &c. determinat pyramidē minimam anguli A. (42.*p*.) Ergo Hexaedrum comprehensum rectis à *centris* planorum ad *centrum* Pyramidis, & ad dimidia latera, determinat Pyramidem omnium angulorum minimam, vel absolutè minimam. Quod erat, &c.

Con-

CONSECTARIA.

P*Rimo.* Si punctum assumptum sit O. *centrum* Pyramidis, quoniam est quatuor Hexaedris commune, erunt quatuor Pyramides absolutè minimæ, vnde, & æquales: Est *prop.* 30.

Secundo. Si punctum assumptum sit in recta O G. à *centro* Pyramidis in *centrum* alicuius plani, quia recta O G est tribus hexaedris communis, erunt tres Pyramides angulorum illius plani absolutæ minimæ: vnde & æquales, & est ipsa *prop.* 37.

Tertio. Si punctum assumptum sit in plano EGOR. erunt duæ Pyramides angulorum A. & B. absolutè minimæ, & æquales: Est *prop.* 38.

Quarto. Si punctum sit extra omnia plana, vnica est pyramis omnium absolutè minima iuxta *prop.* 40.

PROPOSITIO XLIV.

IN qualibet Pyramide Tetraedra si ex duobus angulis solidis ducantur duæ rectæ per quodlibet punctum plani transeuntis per centrum, & reliquos duos angulos, aliæ rectæ quæ ex ijsdem angulis planorum sectiones iungunt, concurrunt in eodem lateris puncto.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Pyramide ABCD. sit *centrum ff. ss.* O & planum BDH. transeat per O. & angulos B. & D. diuidens latus AC. bifariam in H. assumatur ergo in plano BDH. quodlibet punctum O. & ex reliquis angulis A. & C. ducantur rectæ AOQ. COR. secantes plana opposita in Q. & R. tandem ex ijsdem angulis A. & C. ducantur rectæ ARI. CQI. Dico illas concurrere in eodem puncto I. lateris BD. vtrique angulo oppositi.

DEMONSTRATIO.

QVoniam rectæ AOQ. COR. se intersecāt in O. sunt in eodem plano (1. *l.* 11.) Similitèr rectæ CQ. AR. cum ipsas in duobus punctis secet, in eodem cum ipsis plano sunt (1. *l.* 11.) Ergo recta CQI. est communis sectio planorum ARQC. & BCD. & recta ARI. est communis sectio planorum ARQC. & ABD.

Er-

Ergo cum recta BID. sit communis sectio planorum ABD. CBD. & planum ARQC. secet vtrumque planum, & rectam BD. secabit illa in cõmuni puncto I. Ergo rectæ AR. CQ. continuatæ concurrent in puncto I. lateris BD. oppositi; quod scilicèt nullum ex angulis A. C. constituit. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLV.

IN Pyramide Tetraedra si planum per centrum, & duos angulos transeat, recta à reliquis angulis per quodlibet plani punctum secantur in eadem ratione: & etiam, quæ ab ijsdem angulis per planorum sectiones ducuntur; & quæ iungit planorum sectiones est communi angulorum lateri parallela.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN eadem Pyramide ABCD. transeat planum BDH. per *centrum* Q. & angulos B. & D. & in plano BDH. assumptum sit quodlibet punctũ O. per quod à reliquis angulis ducãtur AOQ. COR. tum ARI. CQI. & iungatur recta RQ. Dico rectas AQ. CR. in eadem ratione esse diuisas in O. & Rectas AI. CI. tiam esse proportionalitèr sectas in R. & Q. tãdem rectam RQ. esse communi angulorum lateri AC. parallelam.

DEMONSTRATIO.

QVoniam punctum assumptum O. est in rectis AOQ. COR. etiam erit in plano AIC. sed etiam est in plano EDH. ex *hyp*. Ergo est in communi sectione vtriusque IH. sed quia recta AC. est bifariam diuisa in H (8.*p*.) recta IOH. transibit per *centrum* △ ACI (1.M.2.) Ergo cum punctum O. sit in recta IH. bisecante basim △ AIC rectæ AOQ. COR. secabunt latera, & se ipsas in eadem ratione (31.M.2.) Ergo cum AR. ad RI. sit vt CQ. ad QI & AO. ad OQ. vt CO. ad OR. erit RQ. parallela ipsi AC. (2.*l*.6.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLVI.

IN Pyramide Tetraedra, si planum transeat per centrum, & duos angulos; recta illius plani communi lateri parallela locus est in quo recta à reliquis angulis semper in eadem ratione secantur.

2. Et loca vbi terminantur rectæ prædictæ in oppositis planis rectæ etiam sunt eidem lateri parallelæ.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & planũ BHD. transeat per angulos B. & D. & per *centrum* pyramidis diuidens latus AC. bifariam in H. (8.*p.*) si in plano BHD. ducatur Quæuis PG. parallela lateri DB. quod angulis B. & D. commune est. Dico rectam PG. locum esse in quo quæuis rectæ AOQ. COR. intersecantur in eadem semper ratione AG. ad GF. & parallelas FL. EM. loca esse vbi quæuis AOQ. COR. terminantur secantes plana BCD. ABD.

DEMONSTRATIO.

SVmatur enim in recta PG. quodlibet punctum O. & ducantur AOQ. & COR. tum ducatur AGF. & CGE. & per puncta F. E. ducatur plana FLT. ESM. parallela ipsi BHD. quæ cum planis BCD. ABD. faciunt communes sectiones

nes

nes LF. EM. (1. *l*. 11.) Ductæ igitur A L. AF. erunt in eodem plano cum LF (1. *l*. 11.) sed planum AF L. secans plana parallela BHD. FT L. facit sectiones parallelas F L. GP (3. *l*. 11.) & similitèr planum BDC. facit sectiones parallelas BD. FL. Ergo parallelæ sunt inter se GP. BD. FL. vnde quæ per G. ducitur parallela ipsi BD. est ipsa GP. cum ergo parallelæ sint GP. FL. in eodē plano AFL. ducta quælibet AOQ. secans PG. in O. secabit F L. in Q. Ergo cum OG. sit basi QF. parallela erit AO. ad OQ. vt AG. ad GF. (2. *l*. 6.) sed etiam CO. ad OR. est vt AO. ad OQ. (45. *p*.) Ergo CO. ad OR. est vt AG. ad GF. (1. *l*. 5.) Ergo cum hoc demonstretur de quolibet puncto O. sumpto in recta GP. Constat veritas propositionis. Idem demonstrabitur de recta ME. quod de FL. Vnde etiā CQI. ARI. in eadem ratione secantur, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN Pyramide Tetraedra si recta per angulũ, & centrum ducatur, locus erit in quo tres rectæ à reliquis angulis semper in eadem ratione inter se diuiduntur: & planum per sectiones planorum ductum parallelum est illi quod priori angulo opponitur.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Pyramide ABCD. recta DG transeat per *cetrum ſſ ſſ.* Pyramidis in qua sumatur quodlibet punctum O. & ducantur à reliquis angulis rectæ AOQ. COR. BOP. secantes plana opposita in Q. R. P. Dico AO. ad OQ. esse vt CO. ad OR. & vt BO. ad OP. & planum ductum per sectiones planorũ P. Q. R. parallelum esse plano ABC. cui angulus D. opponitur.

DEMONSTRATIO.

PLanum BDH. transeat per rectam DG. & per angulos D. B. similitèr planum CDE. transeat per rectam D G. & per angulos D. C. & vtrumque transibit per *centrum* Pyramidis, quod est in recta D G. ex *hyp.* & hæc erit in vtroque plano, vt communis eorum sectio. Si ergo in ea sumatur quodlibet punctum O. erit in vtroque plano DBH. DCE. Ergo cum punctum O. sit in plano DBH. per *centrum*, rectæ

AOQ.

AOQ.COR. se in eadem ratione secant (45.*p*) & quia O. est in plano ECD, per *centrum* rectæ AOQ BOP. etiam in eadem ratione secantur (45.*p.*) Ergo etiam CO R. BOP. secantur in eadem ratione (1.*l.*5.)

Præterea cum ABCO. Pyramis sit, & plana ad verticem continuata sint in easdem rationes secta, planum PQR. secans latera AOQ. BOP. COR. in eadẽ ratione erit basi ABC. parallelum (4.*l.*11.) tum quia RQ est parallela AC. & RP. ipsi BC. & PQ ipsi AB (45.*p.*) Ergo planum RPQ. est parallelum ipsi ABC. Quod, &c.

Consect. 1 Idemque est de quolibet puncto rectæ continuatæ extra pyramidem.

2. Quatuor rectæ à 4. angulis in solo *centro* secantur in eadem ratione.

PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

IN Pyramide Tetraedra si recta bifariam diuidat latera opposita, & aliæ quatuor rectæ aliqua latera diuidant in eadem ratione; istæ quatuor rectæ parallelogrammum constituent, quod habebit centrum ff. ff. in priori recta.

EXPOSITIO. Fig. 16.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & recta HN. bifariam diuidat latera opposita AC. BD. quæ scilicèt nullum angulum habent communem: Præterea latera AD. CD. AB. CB. sunt in eadem ratione diuisa in M. L. E. F. Dico EF LM. esse parallelogrammum, & ipsius *centrum ff. ff.* esse in aliquo puncto prioris rectæ HN.

DEMONSTRATIO.

DVcantur enim EF. FL. LM. ME. Quoniam in Triangulo ACD. recta ML. secat proportionaliter latera, sunt AC. ML. parallelæ (2. *l.* 6.) & in triangulo ABC. similiter sunt parallelæ AC. EF. Ergo EF. & ML. parallelæ sunt inter se. Vnde & sunt in eodem plano simul cum ME. & LF. quæ illas secant (2. *l* 11.) Similiter ME. LF. parallelæ sunt ipsi BD. & inter se (2. *l.* 6.) Ergo EFLM. parallelogrammum est.

Præterea ducantur BH, HD. & planũ DBH. secabit planum EFLM. & communis sectio

K erit

erit RP. & quoniam in Triangulo ABC. rectæ AC. EF. sunt parallelæ, vt AH. est æqualis ipsi AC ex *hyp*. erit EP. æqualis ipsi PF. & similitèr in Triangulo BDH. cum sint parallelæ RP. BD. vt BN. est æqualis ipsi ND. ex *hypot*. erit RO æqualis OP (2.*l*.6.) & similitèr in Triangulo ACD vt AH. æqualis est ipsi HC. ita MR. ipsi RL. (2.*l*.6.) Ergo quia recta RP. bifariam diuidit latera opposita parallelogrammi EF LM. in ipsius dimidio erit *centrum ff.ff*. parallelogrammi (68.M.2.) Ergo cum demonstratum sit rectam HN. secare bifariam rectā RP. *centrum ff.ff*. parallelogrammi erit in O. nempè in aliquo puncto rectæ HN. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIX.

IN Pyramide Tetraedra si duæ rectæ subcontrariè similiter diuidant opposita latera, erunt in plano parallelogrammi dicti, & illius diametri; & centri, vel intersectionis locus erit recta similiter diuisa, quæ reliqua latera bisecat.

EXPOSITIO. Fig. 16.

IN Pyramide ABCD. recta MF. subcontrariè diuidit latera AD. BC. in eadem ratione DM. ad MA. vt BF. ad FC. & similitèr LE. Dico ipsas intersecari in recta HN. quæ bisecat latera AC. BD. & HO. ad ON. esse vt AM. ad MD. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam latera sunt similiter diuisa, erit EF. BM. parallelogrammum, & EL. MF. ipsius diametri, & *centrum* illius in O. rectæ HN. (48. *p.*) sed *centrum* est in sectione diametrorũ (55. M. 2.) Ergo earum intersectio est in HN. sed vt HR ad RD. ita AM. ad MD. & HO. ad ON (2. *l.* 6.) Ergo HN. similitèr diuisa est locus *centri*, vel intersectionis. Quod, &c.

PROPOSITIO L.

IN Pyramide Tetraedra si recta bifariam secet duo latera opposita quodlibet illius punctũ est centrum ff.ſſ. parallelogrammi secantis in eadem ratione reliqua latera; & etiam est centr. ff. dd. quarum duæ sint quadrata, & duæ sint rectangula similia illi quod fit partibus rectæ bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN Pyramide ABCD. recta HN. bisecat opposita latera, quæ nullum angulum habent cõmunem AC. DB. in H. & N. Si ergo in HN. sumatur quodlibet punctum O. Dico esse *centrũ ff.ſſ.* alicuius parallelogrammi EFLM. quod secat reliqua latera in ratione rectæ HN. & idem punctum O. esse *centrum ff. dd.* ad angulos solidos A.B.C.D. quarum duæ sint quadrata, & duæ sint rectangula similia rectangulo HON, ex partibus rectæ HN.

DEMONSTRATIO.

PRima pars constat, quia parallelogrammũ quodlibet secans in eadem ratione quatuor latera *centrum ff.ſſ.* habet in recta HN. similiter diuisa (49. *p.*) Ergo quodlibet ipsius rectæ punctũ erit *cẽtr. ff.ſſ.* alicuius parallelogrammi secantis latera in ratione partium ipsius rectæ.

Se-

Secūda pars demonstratur. Quia recta DB. sit bifariam secta in N. est N. *centr.* □ □ ad D. & B. & quia recta AC. est bifariam diuisa in H. & duo rectangula supra AH. & HC. similia ipsi HON. sunt inter se similia, erit H. *centr.* ▭ ▭ similium (35. M. 1.) sed recta HN. ita est diuisa in O. vt duo rectangula HON. minima sint duobus quadratis HO. cum habeant æqualem altitudinem HO (10. M. 1.) Ergo cum recta HN. coniungens duo *centra* H. N. ita sit diuisa vt duo rectāgula HON. minima sint duobus quadratis ON. erit O. *centrum ff. dd.* ad A. C. D. B. quarum duæ ad B. D. sint quadrata, & duæ ad A. C. sint rectāgula similia ipsi HON (64 M. 1.) Quod, &c.

PROPOSITIO LI.

IN qualibet Pyramide Tetraedra si ex vertice ducatur recta per centrum ff. ss. Pyramidis, vel per centrũ basis, quodlibet ipsius punctum est centrum ff. dd. quarum tres similes inter se sunt, & quarta dissimilis.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & recta DG. transeat per *centrum ff. ss.* Pyramidis, vel per G. *centrum* basis quod idem est (1. *p.*) & sumatur in recta DG. quodlibet punctum O. Dico punctum O. esse *centrum ff. dd.* nempe rectangulorum similium inter se ad puncta A. B. C. & quadrati ad punctum D.

DEMONSTRATIO.

TRanseant per verticem D. & per rectã DG. & angulos solidos A. B. C. plana AFD. BHD. CED. quæ diuident bifariam latera basis AB. BC. CA. in punctis E. F. H. (8. *p.*) Deinde per punctum assumptum O. ducantur ex angulis A. B. C. rectæ AOQ. BOP. COR. secantes opposita plana in P. Q. R. per quæ puncta ducantur APZ. & BQZ. quæ concurrent ad idem pũctum Z. (44. *p.*) & in plano ACD. cum P. sit in recta DH bisecante latus AC. erit P. *centrum ff. dd.* nempè rectangulorum ad A. C. similium

re-

rectangulo CZD. (31.M.2.) Ergo si ducatur PB. in ea erit *centrum* ad quartum punctum B. figuræ etiam similis rectãgulo CZD (61.M.1.) Similiter punctum Q. demonstrabitur *centrũ ff. dd.* ad B. C. D. similium ipsi CZD. & quadrati ad D (31.M.2.) & in recta QA. erit *centrum* ad B. C. D. A. ita vt in A. ponenda sit figura similis ▭ CZD. (61.M.1.) Ergo cum *centrum* ad A. B. C. D. nempè trium rectangulorum ad A. B. C. similium ipsi ▭ CZD. & □ ad D. demonstratũ sit in vtraque recta QA. PB. erit in communi earum sectione O. cum nullum aliud punctũ sit vtrique rectæ commune; Ergo cum hoc de quolibet puncto O. rectæ DG. demonstretur, quodlibet erit *centrum ff. dd.* quarum tres similes sint, & quarta dissimilis. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LII.

IN Pyramide Tetraedra si recta à vertice transeat per centrum ff.ss. & in ea sumatur quodlibet punctum, per quod ex angulo basis ducatur alia secans planum oppositum, & ex alio angulo per plani sectionem alia ducatur secans latus: segmenta prioris sunt ut inferius segmentum lateris ad triplum superioris.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis ABCD. & recta DG. per *centrum* basis G. erit etiam per *centrum ff.ss.* Pyramis (1.*p.*) si igitur in recta DG sumatur quodlibet punctum O. per quod ex angulo A. ducatur AOQ: secans planum oppositum in Q. & ex angulo B. recta BQZ. secans latus CD. in Z. Dico GO. ad OD. esse vt CZ. ad 3ZD.

DEMONSTRATIO. Fig. 17.

DVcantur per DG. plana DBH. DAF. DCE. & quia basis sectiones transeunt per *centrũ* basis G. bifariã secabunt ipsius latera in H. E.F. (1.M.2.) & quia recta DG. est per *centrum* Pyramidis, erunt etiam plana DAF. DBH. DCE. per *centrum*, & quia punctũ O. est in recta DG. erit etiam in omnibus planis: Ergo si ex angulis A.B.C. ducãtur rectæ AOQ. BOP. COR. secantes plana in Q. P. R. erunt puncta P. Q. R.

in

in eodem plano IKL. parallelo basi ABC (47. p) Ergo omnes rectæ ex angulo D. in eadem ratione secantur (2. l. 6) nempè FQ. ad QD. vt ER. ad RD. sed in triangulo BDC. quia recta DF. bifariam secat basim BC est FQ. ad QD. vt CZ. ad 2ZD (33. M. 2.) Ergo etiam ER. ad RD. est vt CZ ad 2 ZD. (11. l. 5.) sed in triãgulo CED. quia latus CD. diuisum est vt CZ. ad ZD. & latus ED. diuisum est vt CZ ad 2 ZD. cùm vtraque ratio sectionis laterum habeat idem antecedens, erit recta GD. diuisa vt antecedens ad summam consequentium (39. M. 2.) scilicèt GO. ad OD. vt CZ. ad ZD + 2 ZD. vel vt CZ. ad 3 ZD. Quod erat, &c.

ALITER.

CVm O sit *centrum ff. dd.* quarum tres ad A. B. C. similes sint ▭ CZD (51 p.) & G. sit *centrum ff. ss.* ad A. B. C. (1 p.) erit GD. diuisa in O. vt 3 ▭ GO. simili ipsi CZD. minima sint quadrato OD (61. M. 1.) sed tria ▭ CZD. minima sunt quadrato triplæ ZD cùm hoc sit illis tribus æquè altum (21. M. 1.) Ergo GO. est ad OD. vt CZ. ad 3 ZC (30. M. 1.) Quod, &c.

PROPOSITIO LIII.

Iisdem positis, quæ in præcedenti omnium segmentorum rationes cognitæ sunt.

EXPOSITIO. Fig. 17.

DVcta vt antea DG. & assumpto quolibet puncto O. ductisquè BOP. APZ. EOZ. Dico omnium segmentorum rationes innotescere.

1. GO. ad OD. est vt CZ. ad 3 ZD.
2. EO ad OZ. est vt AP. ad 2 PZ.
3. BO. ad OP. est vt AZ. ad ZP.
4. AP. ad PZ. est vt CD. ad DZ &c.

DEMONSTRATIO.

PRimum constat ex præcedenti (52. *p.*)

2. Quia in △ AZB recta ZE. bifariam diuidit basim AB erit EO. ad OZ. vt AP. ad 2 PZ. (33. M. 2.)

3. In eodem △ AZB. quia ZE. bifariam diuidit basim AB. & quia BOP. secat ZE. in O. erit BO. ad OP. vt AZ. ad ZP. (32. M. 2.)

4. In △ ACD. cum DH. bisecet basim AC. erit AP. ad PZ. vt CD. ad DZ (32. *M.* 2.)

Similitèr alia segmenta examinari possunt, & eorum rationes facilè cognoscentur, quas libens ommitto, nec lectorum ingenio diffidere videar.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

IN Pyramide Tetraedra si planum transeat per duos angulos, & centrum ff ss. quodlibet ipsius punctum extra rectam per centrum, & bisecantem latera est centrum ff. dd. quarum duæ reliquorum angulorum sunt similes: Si punctum sit in bisecante duæ ff. erunt similes, & duæ dissimiles.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & planum DCE. transeat per *centrum ff ss.* & per angulū C. D. si in dicto plano DCE. extra rectam per *centrum*; & bisecantem latera AB. CD sumatur quodlibet punctum O Dico illud esse *centrum ff. dd.* quarum duæ ad A. & B. similes sint, &c.

DEMONSTRATIO.

DVctis AOQ DOG erit Q *centrum ff. dd.* ad □B & □D. & □C. similia ipsis *a. b. c* (35. M. 2.) Ergo si in A ponenda sit figura similis □ *a.* erit *centr ff. dd.* in recta QA (61. M. 1.) Deinde quia planum DCE. per *centrum* bisecat latus AB est G. *centr ff. dd.* quarum duæ similes sint □ *a.* & tertia □ *c.* (31. M. 2.) Ergo si in angulo D. alia ponēda sit similis ipsi □ *b* erit *centr. ff. dd.* in recta GD. (61. M. 1.) Ergo quia *centrum* carunerit RP. & quoniam in Triangulo ABC. rectæ AC. EF. sunt parallelæ, vt AH. est æqualis ipsi AC ex *hyp.* erit EP. æqualis ipsi PF. & similiter in Triangulo BDH. cum sint parallelæ RP. BD. vt BN. est æqualis ipsi ND. ex *hypot.* erit RO æqualis OP (2. *l.* 6.) & similiter in Triangulo ACD vt AH. æqualis est ipsi HC. ita MR. ipsi RL. (2. *l.* 6.) Ergo quia recta RP. bifariam diuidit latera opposita parallelogrammi EF LM. in ipsius dimidio erit *centrum ff. ff.* parallelogrammi (68. M. 2.) Ergo cum demonstratum sit rectam HN. secare bifariam rectã RP. *centrum ff. ff.* parallelogrammi erit in O. nempe in aliquo puncto rectæ HN. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIX.

IN Pyramide Tetraedra si duæ rectæ subcontrariè similiter diuidant opposita latera, erunt in plano parallelogrammi dicti, & illius diametri, & centri, vel intersectionis locus erit recta similiter diuisa, quæ reliqua latera bisecat.

EXPOSITIO. Fig. 16.

IN Pyramide ABCD. recta MF. subcontrariè diuidit latera AD. BC. in eadem ratione DM. ad MA. vt BF. ad FC. & similiter LE. Dico ipsas intersecari in recta HN. quæ bisecat latera AC. BD. & HO. ad ON. esse vt AM. ad MD. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam latera sunt similiter diuisa, erit EF. LM. parallelogrammum, & EL. MF. ipsius diametri, & *centrum* illius in O. rectæ HN. (48. *p.*) sed *centrum* est in sectione diametrorũ (55. M. 2.) Ergo earum intersectio est in HN. sed vt HR ad RD. ita AM. ad MD. & HO. ad ON (2. *l*. 6.) Ergo HN. similiter diuisa est locus *centri*, vel intersectionis. Quod, &c.

PROPOSITIO L.

IN Pyramide Tetraedra si recta bifariam secet duo latera opposita quodlibet illius punctũ est centrum ff.ſſ. parallelogrammi secantis in eadem ratione reliqua latera; & etiam est centr. ff. dd. quarum duæ sint quadrata, & duæ sint rectangula similia illi quod fit partibus rectæ bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 16.

IN Pyramide ABCD. recta HN. bisecat opposita latera, quæ nullum angulum habent cõmunem AC. DB. in H. & N. Si ergo in HN. sumatur quodlibet punctum O. Dico esse *centrũ ff.ſſ.* alicuius parallelogrammi EFLM. quod secat reliqua latera in ratione rectæ HN. & idem punctum O. esse *centrum ff. dd.* ad angulos solidos A. B. C. D. quarum duæ sint quadrata, & duæ sint rectangula similia rectangulo HON, ex partibus rectæ HN.

DEMONSTRATIO.

PRima pars constat, quia parallelogrammũ quodlibet secans in eadem ratione quatuor latera *centrum ff.ſſ.* habet in recta HN. similiter diuisa (49. *p.*) Ergo quodlibet ipsius rectæ punctũ erit *cẽtr. ff.ſſ.* alicuius parallelogrammi secantis latera in ratione partium ipsius rectæ.

Sed

Secũda pars demonstratur. Quia recta DB. sit bifariam secta in N. est N. *centr.* □ □ ad D. & B. & quia recta AC. est bifariam diuisa in H. & duo rectangula supra AH. & HC. similia ipsi HON. sunt inter se similia, erit H. *centr.* ▭ ▭ similium (35. M. 1.) sed recta HN. ita est diuisa in O. vt duo rectangula HON. minima sint duobus quadratis HO. cum habeant æqualem altitudinem HO (10. M. 1.) Ergo cum recta HN. coniungens duo *centra* H. N. ita sit diuisa vt duo rectãgula HON. minima sint duobus quadratis ON. erit O. *centrum ff. dd.* ad A. C. D. B. quarum duæ ad B. D. sint quadrata, & duæ ad A. C. sint rectãgula similia ipsi HON (64. M. 1.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LI.

IN qualibet Pyramide Tetraedra si ex vertice ducatur recta per centrum ff. ss. Pyramidis, vel per centrũ basis, quodlibet ipsius punctum est centrum ff. dd. quarum tres similes inter se sunt, & quarta dissimilis.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & recta DG. transeat per *centrum ff. ss.* Pyramidis, vel per G. *centrum* basis quod idem est (1. *p.*) & sumatur in recta DG. quodlibet punctum O. Dico punctum O. esse *centrum ff. dd.* nempe rectangulorum similium inter se ad puncta A. B. C. & quadrati ad punctum D.

DEMONSTRATIO.

TRanseant per verticem D. & per rectã DG. & angulos solidos A. B. C. plana AFD. BHD. CED. quæ diuident bifariam latera basis AB. BC. CA. in punctis E. F. H. (8. *p.*) Deinde per punctum assumptum O. ducantur ex angulis A. B. C. rectæ AOQ. BOP. COR. secantes opposita plana in P. Q. R. per quæ puncta ducantur APZ. & BQZ. quæ concurrent ad idem pũctum Z. (44. *p.*) & in plano ACD. cum P. sit in recta DH bisecante latus AC. erit P. *centrum ff. dd.* nempè rectangulorum ad A. C. similium re-

rectangulo CZD. (31. M. 2.) Ergo si ducatur PB. in ea erit *centrum* ad quartum punctum B. figuræ etiam similis rectãgulo CZD (61. M. 1.) Similiter punctum Q. demonstrabitur *centrũ ff. dd.* ad B. C. D. similium ipsi CZD. & quadrati ad D (31. M. 2.) & in recta QA. erit *centrum* ad B. C. D. A. ita vt in A. ponenda sit figura similis ▭ CZD. (61. M. 1.) Ergo cum *centrum* ad A. B. C. D. nempè trium rectangulorum ad A. B. C. similium ipsi ▭ CZD & □ ad D. demonstratũ sit in vtraque recta QA. PB. erit in communi earum sectione O. cum nullum aliud punctũ sit vtrique rectæ commune: Ergo cum hoc de quolibet puncto O. rectæ DG. demonstretur, quodlibet erit *centrum ff. dd.* quarum tres similes sint, & quarta dissimilis. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LII.

IN Pyramide Tetraedra si recta à vertice transeat per centrum ff.ss. & in ea sumatur quodlibet punctum, per quod ex angulo basis ducatur alia secans planum oppositum, & ex alio angulo per plani sectionem alia ducatur secans latus: segmenta prioris sunt ut inferius segmentum lateris ad triplum superioris.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis ABCD. & recta DG. per *centrum* basis G. erit etiam per *centrum ff.ss.* Pyramis (1.*p.*) si igitur in recta DG sumatur quodlibet punctum O. per quod ex angulo A. ducatur AOQ: secans planum oppositum in Q. & ex angulo B. recta BQZ. secans latus CD. in Z. Dico GO. ad OD. esse vt CZ. ad 3ZD.

DEMONSTRATIO. Fig. 17.

DVcantur per DG. plana DBH. DAF. DCE. & quia basis sectiones transeunt per *centrũ* basis G. bifariã secabunt ipsius latera in H. E. F. (1.M.2.) & quia recta DG. est per *centrum* Pyramidis, erunt etiam plana DAF. DBH. DCE. per *centrum*, & quia punctũ O. est in recta DG. erit etiam in omnibus planis: Ergo si ex angulis A.B.C. ducãtur rectæ AOQ. BOP. COR. secantes plana in Q. P. R. erunt puncta P, Q. R.

in

in eodem plano IKL. parallelo basi ABC (47. *p*) Ergo omnes rectæ ex angulo D. in eadem ratione secantur (2. *l* 6) nempe FQ. ad QD. vt ER. ad RD. sed in triangulo BDC. quia recta DF. bifariam secat basim BC est FQ. ad QD. vt CZ. ad 2ZD (33. M. 2.) Ergo etiam ER. ad RD. est vt CZ. ad 2 ZD. (11. l. 5.) sed in triãgulo CED. quia latus CD. diuisum est vt CZ. ad ZD. & latus ED. diuisum est vt CZ ad 2 ZD. cùm vtraque ratio sectionis laterum habeat idem antecedens, erit recta GD. diuisa vt antecedens ad summam consequentium (39. M. 2.) scilicet GO. ad OD. vt CZ. ad ZD + 2 ZD. vel vt CZ. ad 3 ZD. Quod erat, &c.

ALITER.

CVm O sit *centrum ff. dd.* quarum tres ad A. B C. similes sint ▭ CZD (51. *p.*) & G. sit *centrum ff. ff.* ad A. B. C. (1. *p.*) erit GD. diuisa in O. vt 3 ▭ GO. similia ipsi CZD. minima sint quadrato OD (61. M. 1.) sed tria ▭ CZD. minima sunt quadrato triplæ ZD. cùm hoc sit illis tribus æquè altum (21. M. 1.) Ergo GO. est ad OD. vt CZ. ad 3 ZC (30. M. 1.) Quod, &c.

PROPOSITIO LIII.

Iisdem positis, quæ in præcedenti omnium segmentorum rationes cognitæ sunt.

EXPOSITIO. Fig. 17.

DVcta vt antea DG. & assumpto quolibet puncto O. ductisquè BOP. APZ. EOZ. Dico omnium segmentorum rationes innotescere.

1. GO. ad OD. est vt CZ. ad 3 ZD.
2. EO ad OZ est vt AP. ad 2 PZ.
3. BO. ad OP. est vt AZ. ad ZP.
4. AP. ad PZ. est vt CD. ad DZ &c.

DEMONSTRATIO.

PRimum constat ex præcedenti (52. *p*.)

2. Quia in △AZB recta ZE. bifariam diuidit basim AB erit EO. ad OZ. vt AP. ad 2 PZ. (33. M. 2.)

3. In eodem △AZB. quia ZE. bifariam diuidit basim AB. & quia BOP. secat ZE. in O. erit BO. ad OP. vt AZ. ad ZP. (32. M. 2.)

4. In △ACD. cum DH. bisecet basim AC. erit AP. ad PZ. vt CD. ad DZ (32. M. 2.)

Similiter alia segmenta examinari possunt, & eorum rationes facilè cognoscentur, quas libens ommitto, nec lectorum ingenio diffidere videar.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

IN Pyramide Tetraedra si planum transeat per duos angulos, & centrum ff ss. quodlibet ipsius punctum extra rectam per centrum, & bisecantem latera est centrum ff. dd. quarum duæ reliquorum angulorum sunt similes: Si punctum sit in bisecante duæ ff. erunt similes, & duæ dissimiles.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & planum DCE. transeat per *centrum ff ss.* & per angulũ C.D. si in dicto plano DCE. extra rectam per *centrum*; & bisecantem latera AB. CD sumatur quodlibet punctum O Dico illud esse *centrum ff. dd.* quarum duæ ad A. & B. similes sint, &c.

DEMONSTRATIO.

DVctis AOQ. DOG erit Q. *centrum ff. dd.* ad □B & □D. & □C. similia ipsis *a. b. c* (35. M. 2.) Ergò si in A. ponenda sit figura similis □ *a.* erit *centr ff. dd.* in recta QA (61. M. 1.) Deinde quia planum DCE. per *centrum* bisecat latus AB est G. *centr ff. dd.* quarum duæ similes sint □ *a.* & tertia □ *c.* (31. M. 2.) Ergò si in angulo D. alia ponẽda sit similis ipsi □ *b* erit *centr. ff. dd.* in recta GD. (61. M. 1.) Ergo quia *centrum* carundem *ff.* demonstratum est in vtraque recta QA. GD. erit in earum sectione O. Quod, &c.

2. Si recta EZ. bisecet latus AB. & oppositum DC. erit E. *centr. ff. ss.* ad A. B. & Z. *centr ff. ss.* ad D. C. (35. M. r.) Ergo si sumatur quodlibet punctum O quia duo rectangula ZOE æquè alta, & minima sunt duobus quadratis OE. (21. M. 1.) erit O *centr. ff.* nempè 2 □ □ ad A. B. & 2 ▭ ▭ *ss.* ad C. D. Quod erat, &c.

Si autem punctum assumptum sit in recta per *centr ff. ss.* erunt 3. *ff.* ad angulos basis similes ex 51. *p.*

PROPOSITIO LV.

QVodlibet punctum Pyramidis Tetraedræ extra plana per centrum ff. ss. & duos angulos, est cētrum ff. dd. ad omnes angulos.

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN Pyramide ABCD datum sit quodlibet punctum O, quod non sit in plano per *centrū ff. ss.* & aliquod latus. Dico O. esse *cētrum ff. dd.* ad angulos A. B. C. D.

DEMONSTRATIO.

DVcantur enim DOG. AOQ. BGH. AGF. CGE. CQL. BQZ. DQF. Tum fiat ▭ *a.* simile ▭ AEB. & ▯ *c.* simile ipsi CFB. & □ *b.* & ▭ *d.* simile ipsi DLB. Punctum ergo G. erit *centrum ff. dd.*

ff.dd. ad A.C.B. quæ similes sint □ *a.* & □ *c.* & □ *b.* (35.M.2.) Ergo si in D. ponenda sit figura similis □ *d. centrum* ad A.C.B.D. erit in GD. (61.M.1.) similitèr Q. est *centrum ff.dd.* ad D.C.B. quæ similes sint □ *d* □ *c.* & □ *b.* (35.M.2.) Ergo si in A. ponenda sit figura similis □ *a.* erit *centrum ff.* ad D.C.B.A. in recta QA (61.M.1.) Ergo cùm in vtroque casu figuræ similes sint datis *a.b.c.d.* erit *centrum ff. dd.* in communi rectarum sectione O. Quod, &c.

PROPOSITIO LVI.

SI intra Pyramidem Tetraedram sumatur quodlibet punctum, per quod ex duobus angulis ducantur rectæ in plana opposita, & ex reliquis angulis aliæ per planorum sectiones in latera, quæ laterum sectiones iungit, transit per assumptum punctum.

EXPOSITIO. Fig. 18.

INtra Pyramidem ABCD. assumptum sit punctum O. ducantur insuper DOG. AOQ. tum BQZ. CGE. & iungatur recta EZ. Dico rectam EZ. transire per dictum punctum O.

DEMONSTRATIO.

Fiant figuræ *a.b.c.d.* vt in præcedenti (55. p.) & erit O. *centrum ff. dd.* quæ similes sint datis *a.b.c.d.* (55. p.) & punctũ E. erit *centrũ ff. dd.*

ad

ad A B. quæ similes sint ☐ *a*. & ☐ *b*. (35. M. 1.) & etiam Z. erit *centrum ff dd*. ad C, D. quæ similes sint rectangulis *d c*. (36. M. 2.) Ergo ducta ZE. erit in illa *centrum ff. dd*. quæ similes sint factis *a. b. c. d* (63 M. 1.) sed punctum O. demonstratum est *centrum ff. dd*. ad A. B. C. D. quæ similes sint *a b. c d*. (55. *p*.) Ergo punctum O. est in recta ZE Quod erat, &c.

PROPOSITIO LVII.

Iisdem positis, quæ in præcedenti, si laterum segmenta datam habeant rationem, cognita erit ratio segmentorum rectæ coniungentis laterum sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 18.

Assumpto (vt in præcedenti) puncto O. ductisque DOG. AOQ. CGE. BQZ. & ZOE. Dico rationem ZO. ad OE. cognitam esse. Si enim assumatur quælibet *f*. & fiat vt DL. ad LB. ita *f* ad *g* & vt CF. ad FB. ita *f* ad *K*. & iterum vt AE. ad EB. ita *f*. ad *m*. & tandem vt *m*+*f*. ad *f*. ita *g*+*K*. ad *l*. erit ZO. ad OE. vt *f*. ad *l*.

DEMONSTRATIO.

Rectangulum *fg* est simile ☐ DLB. vel ☐ *d*. ex *constr*. & ☐ *f K*. est simile ☐ CFB. vel ☐ *c* ex *constr*. Ergo *g*+*K*. est summa altitudinum rectanctangulorum supra basim *f* similium ipsis *d.* & *c.* similitèr □ *fm.* simile est □ AEB. vel □ *a.* & □ *f.* simile □ EB. vel □ *b.* Ergo *m*+*f.* est summa altitudinum rectãgulorum supra *f.* similium ipsis *a.b.* sed ex *constr.* est *m*+*f* ad *f.* vt *g*+*K.* ad *l.* Ergo invertendo vt basis *f* ad summam altitudinum *m*+*f.* ita *l.* ad *g*+*K.* (4. *l.* 5.) Ergo *g*+*K.* est summa altitudinum figurarum similium *a.* & *b.* supra basim *l.* sed etiam *g*+*K.* est summa altitudinum figurarum similium ipsis *c.* & *d.* supra basim *f.* ex *constr.* Ergo cùm figuræ supra *l.* similes *a.* & *b* habeant æqualem, vel eandem altitudinum summam cum figuris supra *f.* similibus *c.* & *d.* illarum summa erit minima istarum summæ (21. M. 1.) sed etiam cum Z. sit *centrum* ad C. D. figurarum similium *c.* & *d.* & paritèr E sit *centrum* ad A. & B. figurarum similium *a.* & *b.* & O. *centrum ff.* ad A. B. C. D. similium ipsis *a b. c. d.* (55. *p*) erit ZE diuisa in O. vt duo rectangula supra ZO similia ipsis *c.* & *d.* minima sint duobus rectangulis supra OE. similibus *a.* & *b.* (64. M 1.) Ergo ZE. diuisa erit in O. in ratione basium figurarum minimarum *f* & *l.* & erit ZO. ad OE. vt *f.* ad *l.* (30. M. 1.) Quod erat, &c.

SCHOLIVM.

Similitèr si ducatur HL. transibit per O (56. *p*)

&

æqualis fiat vt summa $K+m$ ad f. ita $g+f$ ad p. demonstrabitur LQ ad QH. vt f ad p. &c.

PROPOSITIO LVIII.

IN Pyramide Tetraedra si quodlibet punctum sumatur, per quod ducantur rectæ ab omnibus angulis in plana opposita, & per planorum sectiones in latera omnia, rationes omnium segmentorum cognitæ sunt, si tres fuerint datæ.

EXPOSITIO. Fig. 18.

INtra Pyramidem ABCD. assumptũ sit quodlibet punctum O. & ductæ sint rectæ AOQ. BQZ, &c. prout in figura, & datæ sint rationes DL. ad LB. vt f. ad g. & CE. ad EB. vt f. ad K. & AE ad EB. vt f. ad m. Dico omnes alias datas esse.

DEMONSTRATIO.

1. IN △ CBD. quia DL. ad LB. est vt f. ad g. & CF. ad FB. vt f. ad K. erit DZ. ad ZC. vt consequentes, nempè vt K. ad g. (39. M. 2.) & ZQ. ad QB. vt antecedens ad summam consequentium, nempè vt f. ad $g+K$. (39. M. 2.) & similitèr, rationes FQ. ad QD. & LQ. ad QC. invenientur (tum ex 45. M. 2.) &c.

2. In △ ABC. quia CE. ad EB. est vt f. ad K. & AE. ad EB. vt f. ad m: erit AH. ad HC. vt K. ad m. nempè vt consequentes (39. M. 2.) & HG. ad GB. vt f. ad $K+m$: vt antecedens ad summã

con-

consequentium (39. M. 2.) & reliquæ rationes EG. ad GC. & FG. ad GA. invenientur (39. vel 45. M. 2.)

3. In △ ABD. quia AE. ad EB. est vt *f*. ad *m*. & DL. ad LB. vt *f*. ad *g*. erit AS. ad SD. vt *g*. ad *m*. & SR. ad RB. vt *f*. ap *m*+*g*. (36. M. 2.) & data erit ratio ER. ad RD. & LR. ad RA. (39. vel 45. M. 2)

4. In △ ACD. quia DZ. ad ZC. est vt *K*. ad *g*. ex *num*. 1. & AH. ad HC. vt *K*. ad *m*. erit iterũ AS. ad SD. vt *g*. ad *m*. & SX. ad XC. vt *K*. ad *g*+*m*. (39. M. 2.) & data erit ratio HX. ad XD. & ZX. ad XA (39. vel 45. M. 2.)

5. In △ ECD. quia cognitæ iam sunt rationes ER. ad RD. & CZ. ad ZD. cognoscentur etiam rationes GO. ad OD. & RO. ad OC. & ZO. ad OE (39. M. 2.) & similitèr in △ AFD. & in △ HBD. erũtque 22 rationes cognitæ ex tribus datis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

SI fuerint quatuor continuè proportionales, & latera anguli solidi Pyramidis Tetraedræ diuidãtur vt prima ad secundam: vt prima ad tertiam, & vt prima ad quartam, omniũ rectarũ ab angulis planis, & solidis ratio in ipsis quatuor continuis data erit.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SInt quatuor continuæ *f. g. K. m.* & in Pyramide Tetraedra ABCD. latera anguli solidi B. diuidantur DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* & CF. ad FB. vt *f.* ad *K.* & AE ad EB. vt *f.* ad *m.* Ductis DF. GL. CE. AF. AQ. DG. &c. prout in figura: Dico omnium segmentorum rationes in ipsis quatuor continuis *f. g. K. m.* datas, vel determinatas esse.

DEMONSTRATIO.

1. *AH. ad HC. est vt K. ad m.* Quia in △ ABC. est CF. ad FB. vt *f.* ad *K.* & AE. ad EB. vt *f.* ad *m.* ex *hyp.* Ergo AH. ad HC. erit vt consequẽtes, vt *K.* ad *m.* (39. M. 2.)

2. *HG. ad GB. est vt f. ad K + m.* Quia in △ ABC. est CF. ad FB. vt *f.* ad *K.* & AE. ad EB. vt *f.* ad *m.* ex *hyp.* Ergo HG. ad GB. est vt antecedens ad summam consequentium vt *f.* ad *K + m.* (39. M. 2.)

3. *EG.*

3. *EG. ad GC. est vt* K. *ad* $m+f$. Quia in △ ABC. est AH. ad HC. vt K. ad *m*. (ex num. 1.) & BF. ad FC. vt K. ad *f*. ex *hyp*. Ergo EG. ad GC. vt K. ad $m+f$. vt antecedens ad summam consequentium (39. M. 2.)

4. *FG. ad GA. est vt m. ad* K$+f$. Quia in △ ABC. est BE. ad EA. vt *m*. ad *f*. ex *hyp*. & CH. ad HA. vt *m*. ad K. ex *num*. 1. Ergo FG. ad GA. vt antecedens ad summam consequentium: vt *m*. ad K$+f$. (39. M. 2.)

5. *CZ. ad ZD. est vt f. ad g*. Quia in △CBD. est DL. ad LB. vt *f*. ad *g*. & CF. ad FB. vt *f*. ad K: ex *hyp*. Ergo CZ. ad ZD. est vt consequentes: vt *g*. ad K. vel vt *f*. ad *g*. (39. M. 2.)

6. *FQ. ad QD. est vt g. ad* K$+f$. Quia in △ CBD. est CZ. ad ZD. vt *f*. ad *g*. vel vt *g*. ad K. ex *num*. 5. & BL. ad LD. vt *g*. ad *f*. Ergo FQ. ad QD. est vt antecedens ad summam consequentiũ: vt *g*. ad K$+f$. (39. M. 2.)

7. *ZQ. ad QB. est vt f. ad g*$+$K. Quia in △ DCB. est CF. ad FB. vt *f*. ad K. & DL. ad LB. vt *f*. ad *g*. ex *hyp*. Ergo ZQ. ad QB. vt antecedens ad summã consequentiũ vt *f*. ad *g*$+$K. (39. M. 2.)

8. *LQ. ad QC. est vt* K. *ad g*$+f$. Quia in △ DCB. est DZ. ad ZC. vt *g*. ad *f*. vel vt K. ad *g*. ex *num*. 5. & BF. ad FC. vt K. ad *f*. ex *hyp*. Ergo LQ. ad QC. vt K. ad *g*$+f$. 39. M. 2.)

 9. *AS*.

9. *AS. ad SD. est vt f. ad* K. Quia in △ ABD. est AE. ad EB. vt *f.* ad *m.* & DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* ex *hy.* Ergo AS. ad SD. est vt consequentes vt *g.* ad *m.* vel vt *f.* ad K. (39. M. 2.)

10. *ER. ad RD. est vt g. ad m+f.* Quia in △ ABD. est AS. ad SD. vt *f.* ad K. vel vt *g.* ad *m.* ex *num.* 9. & BL. ad LD. vt *g.* ad *f.* ex *hyp.* Ergo ER. ad RD. est vt antecedens ad summam consequentium, vt *g.* ad *m+f.* (39. M. 2.)

11. *SR. ad RB. est vt f. ad g+m.* Quia in △ ABD. AE. ad EB. est vt *f.* ad *m.* & DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* ex *hyp.* Ergo SR. ad RB. vt *f.* ad *g+m.* (39. M. 2)

12. *LR. ad RA. est vt m. ad g+f.* Quia in △ ABD. est BE. ad EA. vt *m.* ad *f.* ex *hyp.* & DS. ad SA. vt K. ad *f.* vel vt *m.* ad *g.* ex *num.* 9. Ergo LR. ad RA. erit vt *m.* ad *g+f.* (39. M. 2.)

13. *HX. ad XD est vt f. ad* K+*g.* Quia in △ ACD. est AS. ad SD. vt *f.* ad K. ex *num.* 9. & CZ. ad ZD. vt *f.* ad *g.* ex *num.* 5. Ergo HX. ad XD. est vt antecedens ad summam consequentium, vt *f.* ad K+*g.* (39. M. 2.)

14. *SX. ad XC est vt g. ad* K+*f.* Quia in △ ACD. est AH. ad HC. vt K. ad *m.* vel vt *g.* ad K. ex *num.* 1. & DZ. ad ZC. vt *g.* ad *f.* ex *num.* 5. Ergo SX. ad XC. erit vt *g.* ad K+*f.* vel vt K. ad *m+g.* (39. M. 2.)

15. *ZX. ad XA. est vt m. ad* K+*g*. Quia in △ACD. est CH. ad HA. vt *m*. ad K. ex *num*. 1. & DS. ad SA. vt K. ad *f*. vel vt *m*. ad *g*. ex *num*. 9. Ergo ZX. ad XA. erit vt *m*. ad K+*g*. (39. M. 2)

16. *GO. ad OD. est vt g. ad f+m+*K. Quia in △EDC. est CZ. ad ZD. vt *f*. ad *g*. vel vt *g*. ad K. ex *num*. 5. & ER. ad RD. vt *g*. ad *m*+*f*. ex *num*. 10. Ergo GO. ad OD. est vt *g*. ad *f*+*m*+K. vt antecedens ad summam consequentiũ. (39. M. 2.)

17. *XO. ad OB. est vt f. ad g*+K+*m*. Quia in △DBH. est DL. ad LB vt *f*. ad *g*. ex *hyp*. & HG. ad GB. vt *f*. ad K+*m*. ex *num*. 2. Ergo XO. ad OB. vt *f*. ad *g*+K+*m*.

18. *QO. ad OA. est vt f ad g+K+f.* Quia in △DFA. est FG. ad GA. vt *m*. ad *K*+*f*. ex *num*. 4. & DS. ad SA. est vt *m*. ad *g*. ex *num*. 9. Ergo QO ad OA. vt *m*. ad *K*+*f*+*g*.

19. *RO. ad OC. est vt K. ad g+m+f.* Quia in △ECD. est DZ. ad ZC. vt K. ad *g* ex *num*. 5. & EG. ad GC. vt K. ad *m*+*f*. ex *num*. 3. Ergo RO. ad OC. est vt K. ad *g*+*m*+*f*.

20. *EO. ad OZ. est vt g*+K. *ad f+m*. Quia in △AZB. est AX. ad XZ. vt K+*g*. ad *m*. ex *num*. 15. & BQ. ad QZ. vt K+*g* ad *f* ex *num*. 7. Ergo EO. ad OZ. est vt antecedens ad summam consequentium, vel vt K+*g*. ad *m*+*f*. (39. M. 2.)

21. *LO. ad OH. est vt*K+*m. ad f+g. vel*

vt

vt K *ad f.* Quia in △DBH est BG. ad GH. vt K + *m*. ad *f* ex *num*. 2. & DX. ad XH. vt K+*g*. ad *f*. vel vt *m*. + K. ad *g*. ex *num*. 13. Ergo LO. ad OH. est vt antecedens ad summam cõsequentium, vt K+*m*. ad *f*+ *g*. hoc est vt K. ad *f*. (39. M. 2.)

22. *SO. ad OF. est vt f* + K. *ad g*+*m. vel vt f. ad g.* Quia in △ DAF. est AG. ad GF. vt K+*f*. ad *m* ex *num*. 4. & DQ. ad QF. vt K+*f*. ad *g* ex *num*. 6. Ergo SO. ad OF. erit vt K+*f*. ad *m*+*g* vel vt *f*. ad *g*. Ergo rationes omnes determinatæ sunt, &c.

PROPOSITIO LX.

SI fuerint quatuor continuè proportionales, & latera circa angulum solidum Pyramidis Tetraedræ diuidantur vt prima ad secũdam, vt prima ad tertiam, & æqualitèr, ductis rectis vt in prop. 59. sequentes rationes determinatæ erunt in ipsis quatuor continuis.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt quatuor continuæ *f. g.* K. *m.* & in Pyramide ABCD. fiat AH. ad HC. vt *f*. ad *g* & CF. ad FB. vt *f*. ad K & CZ. æqualis ZD. Ducantur prætereà rectæ prout in figura. Dico sequentes rationes determinatas esse.

DEMONSTRATIO.

1. *AE. ad EB. est vt f. ad m.* Quia in △ABC. est

est AH. ad HG. vt *f* ad *g*. vel vt K. ad *m*. & BF. ad FC vt K ad *f* ex *hyp*. erit AE. ad EB. vt conse-quentes vt *f* ad *m*. (39 M. 2.)

2. *EG. ad GC. est vt* K. *ad m+f.* Quia in △ ABC. est AH. ad HG. vt K. ad *m*. & BF. ad FC. vt K. ad *f*. ex *hyp*. Ergo EG. ad GC. erit vt K. ad *m+f*. vt ant. ad summam conseq.

3. *HG. ad GB. est vt f. ad* K+*m* Quia in △ ABC. est CF. ad FB. vt *f*. ad K. ex *hyp*. & AE ad EB. vt *f*. ad *m*. ex *num*. 1. Ergo HG. ad GB. erit vt *f*. ad K+*m*.

4. *FG. ad GA. est vt m. ad* K+*f* Quia in △ ABC. est BE. ad EA. vt *m*. ad *f*. ex *num*. 1. & CH. ad HA. vt *g*. ad *f* vel vt *m*. ad K. ex *hyp*. Ergo FG. ad GA. erit vt antecedens ad summam conse-quentium, hoc est vt *m*. ad *f*+K. (39. M. 2.)

5. *AS. ad SD. est vt f. ad g.* Quia in △ ACD. est AH. ad HG vt *f*. ad *g*. & DZ. ad ZC. vt *f*. ad *f* ex *hyp* Ergo AS. ad SD. erit vt consequentes: vt *f*. ad *g*.

6. *HX. ad XD. est vt f ad f+g.* Quia in △ ACD. est CZ ad ZD. vt *f* ad *f* ex *hyp*. & AS. ad SD. vt *f*. ad *g*. ex *num*. 5. Ergo HX. ad XD. erit vt ante-cedens ad consequentium summam, vel vt *f* ad *f+g*. (39. M. 2.)

7. *ZA. ad XA. est vt g. ad 2f.* Quia in △ ACD. est CH. ad HA. vt *g*. ad *f*. ex *hyp* & DS. ad SA vt *g*. ad

ad *f* ex *num*. 5. Ergo ZX. ad XA. erit vt *g*. ad *f*+*f*. vel ad 2*f*. vt ant. ad conseq. summam (39. M. 2.)

8. *SX. ad XC. est vt f. ad g+f.* Quia in △ ACD. est DZ. ad ZC. vt *f*. ad *f*. ex *hyp*. & AH. ad HC. vt *f*. ad *g*. ex *hyp*. Ergo SX ad XC. erit vt antecedens ad consequentium summam vt *f*. ad *g*+*f*.

9. *BL. ad LD. est vt* K. *ad f*. Quia in △BCD. est BF. ad FC. vt K. ad *f*. & DZ. ad ZC. vt K. ad K. ex *hyp*. Ergo BL ad LD. erit vt K. ad *f*. vt consequentes.

10. *LQ. ad QC. est vt K. ad f+K.* Quia in △BCD. est BF. ad FC. vt *K*. ad *f*. & DZ. ad ZC. vt *K*. ad *K*. ex *hyp*. Ergo LQ. ad QC. erit vt ant. ad summam conseq. vt *K*. ad *f*+*K*.

11. *ZQ. ad QB. est vt f. ad* K+K. Quia in △ BCD. est CF. ad FB. vt *f*. ad K. ex *hyp*. & DL. ad LB. vt *f*. ad K. ex *num*. 9. Ergo ZQ. ad QB. erit vt *f*. ad K+K.

12. *FQ. ad QD. est vt* K. *ad f+K*. Quia in △BDC. est BL. ad LD. vt K. ad *f*. ex *num*. 9. & CZ. ad ZD. vt K. ad K. ex *hyp*. Ergo FQ. ad QD. vt K. ad *f*+K.

13. *ER. ad RD. est vt* K. *ad f*+K. Quia in △ ABD. est BL. ad LD. vt K. ad *f*. ex *num*. 9. & AS. ad SD. vt *f*. ad *g*. vel vt K. ad *m*. ex *num*. 5. Ergo ER. ad RD. vt K. ad *f*+*m*.

14. *SR.*

14. *SR. ad RB. est vt f. ad m* + K. Quia in △ ABD. est DL. ad LB. vt *f.* ad K. ex *num.* 9. & AE. ad EB. vt *f.* ad *m.* ex *num.* 1. Ergo SR. ad RB. erit vt *f.* ad *m* + K.

15. *LR. ad RA. est vt m. ad* K + *f.* Quia in △ ABD. est BE. ad EA. vt *m.* ad *f.* ex *num.* 1. & DS. ad SA. & *g.* ad *f* vel vt *m.* ad K. ex *num.* 5. Ergo LR. ad RA. erit vt *m.* ad *f* + K.

16. *GO. ad OD. est vt* K. *ad f* + K + *m.* Quia in △ ECD. est ER. ad RD. vt K. ad *f* + *m.* ex *num.* 13. & CZ. ad ZD. vt K. ad K. ex *hyp.* Ergo GO. ad OD. est vt K. ad *f* + K + *m.*

17. *RO. ad OC. est vt* K. *ad f* + K + *m.* Quia in △ ECD. est EG. ad GC. vt K. ad *f* + *m.* ex *num.* 2. & DZ. ad ZC. vt K. ad K. ex *hyp.* Ergo RO. ad OC. erit vt K. ad *f* + K + *m.*

18. *ZO. ad OE. est vt m* + *f. ad* K + K. Quia in △ ECD. est CG. ad GE. vt *m* + *f* ad K. ex *num.* 2. & DR. ad RE. vt *m* + *f.* ad K. ex *num.* 13. Ergo ZO. ad OE. vt *m* + *f.* ad K + K.

19. *QO. ad OA. est vt m. ad* 2 K + *f.* Quia in △ CAL. est CH. ad HA. vt *g.* ad *f.* vel vt *m.* ad K. ex *hyp.* & LR. ad RA. vt *m.* ad K + *f.* ex *num.* 15. Ergo QO. ad OA. erit vt *m.* ad 2 K + *f.*

20. *HO. ad OL. est vt f* + K. *ad m* + K. Quia in △ CAL. est AR. ad RL. vt K + *f.* ad *m.* ex *num.* 15. & CQ. ad QL. vt K + *f.* ad K. ex *num.* 10. Ergo

go HO. ad OL. erit vt K+*f*. ad *m*+K.

21. *XO. ad OB. est vt f ad* 2K+*m*. Quia in △SBC. est SR. ad RB. vt *f* ad K+*m* ex *num*. 14. & CF. ad FB. vt *f*. ad K. ex *hyp*. Ergo erit XO. ad OB. vt *f*. ad 2K+*m*.

22. *FO. ad OS. est vt m*+K. *ad f*+K. Quia in △SBC. est BR ad RS. vt *m*+*K*. ad *f* ex *num*. 14. & CX. ad XS. vt *g*+*f*. ad *f* vel vt *m*+*K*. ad *K*. ex *num*. 8. Ergo FO. ad OS. erit vt *m*+*K*. ad *f*+*K*. Omnes ergo rationes determinatæ sunt. Quod, &c.

SCHOLIVM.

De duabus Medijs proportionalibus.

SI tentatis varijs combinationibus sub alia, & alia hypothesi inciderit Geometra in aliquam rationem intra cognitos terminos, scilicèt inter primam, & quartam; vel earũ summam, duplum, triplum, &c. contentam; duæ mediæ facilè invenirentur, quod ingeniosus Lector leui saltèm meditatione clarè percipiet. Sed tamen vix crediderim duas medias inveniendas, nisi aliquæ nouæ proprietates quatuor continuarum, prius inveniatur: Etenim extremæ sufficientem materiam ad Mediarum determinationem meo quidem iudicio non subministrant. Quamobrem Geomemetrarum labor in his continuarum proprietatibus inquirendis minimè pœnitēdus, imò debito cum honore ab omnibus excipiendus foret. Hic maximè notatum velim, aliud esse, dari duas medias, aliud illarum determinationem datis extremis esse possibilem: etenim in data qualibet ratione quatuor continuæ facillimè inveniuntur, sed tamen si ex inventis cōtinuis dētur solùm extremæ, inventio mediarum impossibilis erit dùm sufficiens materia ad earum inventionem non suppetat: an verò duæ extremæ sufficientes, vel insufficientes sint, nemo hactenus demonstrauit. Non me latet non neminem gloriabūdum dictitare, se duas medias immediatè, etiam sine lemmate summa cum facilitate invenisse: hominis tamen à geometræ cogniti trasonica verba non curo, de parallogismo certissimus. Moneo tādem has nostras propositiones quàm plurimis quæstionibus resolvendis vtiles esse, vt ex problematum solutione manifestum fiet *cap*. 4.

PROPOSITIO LXI.

SI fuerint sex continua, & latera circa angulum solidum diuidantur vt prima ad secundam, vt prima ad quintam, & vt prima ad sextam, sequentes segmentorum rationes in ipsis sex continuis determinatæ erunt.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SEx continuæ sint *f. g. K. m. l. p.* & latera circa angulum solidum B. pyramidis Tetraedriæ ABCD. diuidantur DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* & CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* & AE. ad EB. vt *f.* ad *p.* Ductis prætereà rectis CE. AF. DG. &c. prout in figura 18. Dico sequētes segmentorū rationes determinatas esse in ipsis continuis.

DEMONSTRATIO.

1. *AH. ad HC. est vt l. ad p. vel vt f. ad g.* Quia in △ ABC est AE. ad EB. vt *f* ad *p.* & CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* ex *hyp.* Ergo AH. ad HC. vt *l.* ad *p.* vt consequentes.

2. *HG ad GB. est vt f. ad l+p.* Quia in △ ABC. est AE. ad EB. vt *f.* ad *p.* & CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* Ergo HG. ad GB. vt *f.* ad *l+p.* vt ant. ad summam, &c.

3. *EG. ad GC. est vt l. ad p+f.* Quia in △ ABC. est BF. ad FC. vt *l.* ad *f.* ex *hyp.* & AH. ad HC.

HC. vt *l.* ad *p.* ex *num.* 1. Ergo EG. ad GC. erit vt *l.* ad *p+f.*

4. *FG. ad GA. est vt p. ad l+f.* Quia in △ ABC. est CH. ad HA. vt *p.* ad *l.* ex *num.* 1. & BE. ad EA. vt *p.* ad *f.* ex *hyp.* Ergo FG. ad GA. est vt *p.* ad *l+f.*

5. *AS. ad SD. est vt g. ad. p. vel f. ad l.* Quia in △ ABD. est DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* ex *hyp.* & AE. ad EB. vt *f.* ad *p.* Ergo AS. ad SD. erit vt *g.* ad *p.* vel vt *f.* ad *l.*

6. *SR. ad RB est vt f. ad g+p.* Quia in △ ABD. est DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* & AE. ad EB. vt *f.* ad *p.* ex *hypoth.* Ergo SR. ad RB. erit vt *f.* ad *g+p.*

7. *ER. ad RD. est vt g. ad p+f.* Quia in △ ABD. est BL. ad LD. vt *g.* ad *f.* & AS. ad SD. vt *g.* ad *p.* ex *num.* 5. Ergo ER. ad RD. erit vt *g.* ad *p+f.*

8. *LR. ad RA. est vt p. ad g+f.* Quia in △ ABD. est BE. ad EA. vt *p.* ad *f.* & DS. ad SA. vt *p.* ad *g.* ex *num.* 5. Ergo LR. ad RA. erit vt *p.* ad *g+f.*

9. *GZ. ad ZD. est vt g. ad l.* Quia in △ CBD. est DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* & CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* ex *hypoth.* Ergo CZ. ad ZD. erit vt *g* ad *l.*

10. *FQ. ad QD. est vt g. ad l+f.* Quia in △ CBD. est CZ. ad ZD. vt *g.* ad *l.* ex *num.* 9. & BL. ad

ad LD. vt *g*. ad *f*. ex *hyp*. Ergo FQ. ad QD. erit vt *g* ad *l*+*f*.

11. *ZQ. ad QB. est vt f. ad l+g.* Quia in △ DBC. est DL ad LB. vt *f*. ad *g*. ex *hyp* & CF. ad FB. vt *f*. ad *l*. ex *hyp*. Ergo erit ZQ. ad QB. vt *f*. ad *g*+*l*.

12. *LQ. ad QC. est vt l. ad g+f.* Quia in △ DCB. est BF. ad FC. vt *l* ad *f*. ex *hyp*. & DZ. ad ZC. vt *l*. ad *g* ex *num*. 9. Ergo LQ. ad QC. erit vt *l*. ad *g*+*f*.

13. *HX. ad XD. est vt g. ad p+l.* Quia in △ ACD. est AS. ad SD vt *g*. ad *p*. ex *num*. 5. & CZ. ad ZD. vt *g*. ad *l*. ex *num*. 9. Ergo HX. ad XD. erit vt *g*. ad *p*+*l*.

14. *ZX. ad XA. est vt p. ad g+l.* Quia in △ DAC. est CH. ad HA. vt *p*. ad *l*. ex *num*. 1. & DS. ad SA. vt *p* ad *g*. ex *num*. 5. Ergo ZX. ad XA. erit vt *p*. ad *g*+*l*.

15. *SX. ad XC. est vt l. ad p+g.* Quia in △ ACD. est AH. ad HC. vt *l*. ad *p*. ex *num*. 1. & DZ. ad ZC. vt *l*. ad *g*. ex *num*. 9. Ergo SX ad XC. erit vt *l*. ad *p*+*g*.

16. *GO. ad OD. est vt g. ad p+l+f.* Quia in △ EDC. est CZ ad ZD. vt *g*. ad *l*. ex *num*. 9. & ER. ad RD. vt *g*. ad *p*+*f*. ex *num*. 7. Ergo GO. ad OD. erit vt *g*. ad *l*+*p*+*f*.

17. *QO. ad OA. est vt p. ad g+l+f.* Quia in

in △ CAL. est CH. ad HA. vt *p*. ad *l*. ex *num*. 1. & LR. ad RA. vt *p*. ad *g*+*f*. ex *num*. 8. Ergo QO. ad OA. est vt *p*. ad *g*+*l*+*f*.

18. *RO. ad OC. est vt l. ad g+p+f.* Quia in △ ECD. est DZ. ad ZC. vt *l*. ad *g*. ex *num*. 9. & EG. ad GC. vt *l*. ad *p*+*f*. ex *num*. 3. Ergo RO. ad OC. erit vt *l*. ad *g*+*p*+*f*.

19. *XO. ad OB. est vt f. ad g+p+l.* Quia in △ SBC. est CF. ad FB. vt *f*. ad *l*. ex *hyp*. & SR. ad RB. vt *f*. ad *p*+*g*. ex *num*. 6 Ergo XO. ad OB. erit vt *f*. ad *g*+*p*+*l*.

20. *EO. ad OZ. est vt g+l. ad p+f.* Quia in △ AZB. est AX. ad XZ. vt *g*+*l* ad *p*. ex *num*. 14. & BQ. ad QZ. vt *g*+*l*. ad *f*. ex 11. Ergo EO. ad OZ. est vt *g*+*l*. ad *p*+*f*.

21. *SO. ad OF. est vt l+f. ad p+g.* Quia in △ AFD. est AG. ad GF. vt *l*+*f* ad *p*. ex *num*. 4. & DQ. ad QF. vt *l*+*f*. ad *g*. ex *num*. 10: Ergo SO. ad OF. vt *l*+*f*. ad *p*+*g*.

22. *LO. ad OH. est vt p+l. ad g+f.* Quia in △ DHB. est DX. ad XH. vt *p*+*l*. ad *g*. ex *num*. 13. & BG. ad GH. vt *l*+*p*. ad *f*. ex *num*. 2. Ergo LO. ad OH. vt *p*+*l*. ad *g*+*f*.

SCHOLIVM.

VAriata hypothesi plures alias rationes inuenire licebit, quod etiam præstare poterit Geometra in quinque, septem, vel pluribus con-

continuis: & in qualibet hypothesi, & continuarum numero quouis, datis tribus rationibus, quæ ad idem triangulum non pertineant, examinandæ venient 22 rationes in quacumque Pyramide Tetraedra, ex quibus posteà nō pauca, neque vulgaria problemata resolvi poterunt, quorum aliquod specimen inveniet Geometra, & alia quamplurima scientèr ommissa proprio Marte resolvet.

PROPOSITIO LXII.

SI in Pyramide Tetraedra quodlibet punctū sumatur, simile punctum in quauis eius plana repræsentatione datur, in quo recta ab angulis in easdem rationes secantur.

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN Pyramide Tetraedra ABCD. sumatur quodlibet punctum O. & eadem Pyramis repræsentetur in plano vtcumque. Dico in plana repræsentatione dari, & inveniri posse simile punctum O. in quo rectæ ex angulis Pyramidis repræsentatæ, vel in plano descriptæ se intersecant in easdem rationes, in quas secantur rectæ ex angulis Pyramidis veræ, & solidæ.

DEMONSTRATIO.

IN Pyramide vera quodlibet punctum O. est *centrum ff. dd.* ad angulos solidos A. B. C. D.

(55.p) Ergo si ducatur ex D per O recta DOG. secans planum basis in G. erit G. *centrum ff. dd.* ad angulos A. B. C. quia recta per vnum punctum & *centrum* commune transit per aliud *centrum* (61. M. 1.) sed in triangulo ABC. planæ repræsentationis simile punctum G inveniri potest (40. M. 2.). Ergo si invento puncto G. ducatur recta DG & diuidatur in O. prout recta DOG. in Pyramide rectæ ex angulis plani secabuntur in easdem rationes, ac in solido, quia singula triangula erunt similiter secta, vt constat ex 39. & 40. M. 2. & etiam ex præcedentibus, &c. Quod erat, &c.

SCHOLIVM.

Hæc propositio non leuem præ se fert vtilitatem, cũ ex ipsa solo rectarum ductu possint in plana superficie inveniri rationes omnes, quæ in solido Tetraedro hactenus demonstratæ sunt, quarum inventio in ipsa Pyramide impenetrabili omninò practicè impossibilis esset.

PROPOSITIO LXIII.

SI Pyramis basim habeat quadrilateram diametro bifariam diuisam; & quodlibet planum per basis diametrum transeat secans opposita latera, recta, quae laterum sectiones iungit, transit per diametrorum intersectionem.

EXPOSITIO. Fig. [illegible]

SIt Pyramis ABCDE & basis ABCD bifariam diuisa sit diametro AG, deinde per diagonium AC transeat quodlibet planum AFCG secans latera opposita ED, EB in punctis F, & G. Dico rectam FG. transire per punctum H, in quo diagonia, vel diametri mutuo se intersecant.

DEMONSTRATIO.

DVcatur diameter BD. & erunt DB. & FG in eodem plano DBE (ex 1. 11.). Ergo cum recta FG. vnicum punctum habeat in recta DB. quae est communis sectio planorum ABCD DBE vnicum etiam punctum habebit in plano ABCD. sed eadem recta FG. habet vnicum punctum in recta AG, quae est communis sectio planorum ABCD AGCF. Ergo FG secat DB. & AC in eodem puncto plani ABCD. sed solum punctum H, quod est communis sectio diametrorum, est punctum commune vtrique diametro: Ergo FG. secat AC. & DB. in commu-

mu-

mutui diametrorum sectione H. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIV.

Si recta secans duo latera opposita anguli solidi quatuor planis comprehensi, ab omnibus planis per ipsam, quod est bifariam diuisum, similiter et duo latera opposita aequalia, est parallelogrammi, cuius diametri in ea centrum [illegible] & e contra.

EXPOSITIO. Fig. 19.

Sit angulus solidus quatuor planis comprehensus E.ABCD. & recta AC secet duo latera opposita AE. EC. per quam transeat planum ABC bifariam diuisum, vt △ABC sit aequale △ADC, & ABDC sint aequales. Dico planum ABCD esse parallelogrammum, & habere centrum in recta AC. & e conuerso.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta BD, & sint DL. BO. perpendiculares ipsi AC. Cum △ADC. & △ABC. aequalia sint ex hypothesi, & habeant communem basim AC. habebunt altitudines aequales DL. BO. (8. *l.* 1.) Ergo △DHL. & △BHO. cum habeant angulos rectos aequales in L. & O. & verticales DHL. BHO. aequales (1. *l.* 1.) & latera DL. BO. aequalia, reliqua omnia erunt aequalia (4. *l.* 1.) nempe DH. & HB. aequales erunt:

Ergo △ DHC. AHB. cùm habeant latera DH. HB. æqualia: tum DC. & AB. ex *hyp.* & angulos DHC AHB, æquales quia verticales (1. *l.* 1) & HAB. DCH. eiusdem speciei, nempè acutos (3. *l.* 1.) reliqua omnia erunt æqualia (4. *l.* 1.) nempè AH. & HC. Ergo cùm latera DH. HA. æqualia sint ipsis BH. HC. & comprehendant æquales angulos verticales DHA BHC. erunt latera DA BC. æqualia (4 *l.* 1.) Ergo quadrilaterum ABCD. cum habeat bina opposita latera æqualia DA. BC. tum DC. AB. erit parallelogrammum (7. *l.* 1.) & *centrum ff. ff.* erit in H. dimidio diametri AC (55. M. 2.) &c.

Æconuerso. Si ABCD. parallelogrammum sit, erit AC. diameter, & ipsum bifariam diuidet (7. *l.* 1.) Quod, &c.

Si autem solum detur *centrum ff. ff.* in AC. erit DB bifariam diuisa (70. M. 2.) & infertur Quadrilaterum esse bifariam diuisum (7. *l.* 1.) sed non esse parallelogrammum; nisi etiam detur latera DC. AB. æqualia.

PRO-

PROPOSITIO LXV.

SI recta secat secat opposita latera anguli solidi quatuor planis comprehensi, ex omnibus planis per ipsam, quod est ab illa bifariã diuisum, vel habet in illa centrum ff. ff. secat Pyramidem omnium minimam.

EXPOSITIO. Fig. 19.

INtra angulum solidum EABCD. recta A C. secat opposita latera EA. EC. & planum A B CD. bifariam diuiditur recta A C. ita vt △ A BC. sit æquale △ ADC. Dico Pyramidem A B CDE. omnium esse minimam, quæ planis per rectam A C. ductis secari possunt.

DEMONSTRATIO.

TRanseat per A C. quodlibet aliud planum AGCF. & ducatur recta FG. & BI. parallela ipsi DF. & iungantur AI. IC. Quoniam D H. & HB. æquales sunt (71. M. 2.) & DF. BI. parallelæ, æquales etiam sunt FH. HI. tum DF. BI (2. *l.* 6.) Ergo Pyramides ACDE. ACBI. cum habeãt æquales bases ACD. ACB. ex *hyp.* & æquales altitudines in F. & I. erunt æquales (5. *l.* 11.) sed Pyramis ACBG. maior est pyramide AC. BI. toto solido AIBCG. Ergo Pyramis ACBG. maior est pyramide ACDF. Ergo addito communi solido ABCFE. erit Pyramis AGCFE. ma-

maiorem Pyramide ABCDE. erit (omnium) minima. Quod erat, &c.

2. Si planum ABCD. habet ... in recta AC. haec diuidet quadrilaterum bifariam (70.M.2.) Vndè cùm planum ABCD. sit bifariam diuisum à recta AC. secabit illud Pyramidem omnium minimam, vt antea. Quod &c.

PROPOSITIO LXVI.

SI Pyramis habeat basim quadrilateram, & planum per verticem & diametrum basis secat Pyramidem bifariam, per quodlibet punctum illius plani intra, vel extra Pyramidem rectæ à reliquis angulis ductæ se in eadem ratione secant. Quod Pyramidi basis parallelogramma necessariò conuenit.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SIt Pyramis ABCDE. & planum ACE. bifariã secet basim, vel Pyramidem, & in plano ACE. sumatur quodlibet punctum Z. & ducantur ab angulis solidis B. D. rectæ per Z. donec planis oppositis occurrant. Dico rectas ab angulis ductas se in eadem ratione secare.

DEMONSTRATIO.

CVm recta AC. bifariam diuidat basim ABCD. ex hyp. erit recta BD. bifariam diuisa (70.

([illegible]) Ergo in Pyramide ABCDE, cum planum AHE. diuidat bifariam latus BD. per quodlibet punctum Z. in eo plano sumptum rectæ ex angulis B. & D. secantur in eadem ratione ([illegible]).

Eadem est demonstratio si punctum Z. sit in plano CHE. bisecante Pyramidem BCDE: Ergo cũ plana AHE. HCE. sint idem planũ ACE. per quodlibet illius punctum Z. rectæ ex angulis B. & D. secatur in eadem ratione. Quod, &c.

In Pyramide basis parallelogrammæ, quæ bifariam diuiduntur plano per verticem & diametrum basis (41. [illegible]).

PRO-

PROPOSITIO LXVII.

PYramidis cuiuslibet centrum ff. ſſ. eſt in recta à vertice ad centrum baſis in parte denominata à numero angulorum ipſius Pyramidis.

2. *Si baſis fuerit regularis, & latera æqualia recta per centrum eſt baſi perpendicularis, & èconuerſò.*

EXPOSITIO. Fig. 19.

SIt Pyramis ABCDE. & baſis *centrum ff. ſſ.* H. ſi ex vertice E. ducatur recta EH. Dico *centrum ff. ſſ.* Pyramidis eſſe in recta HE. ſcilicèt in quinta eius parte, quia Pyramis habet quinque angulos ſolidos, & ſic de reliquis, &c. Si autem baſis ABCD regularis ſit, & latera EA. EB. EC. ED. æqualia, erit EH. baſi perpendicularis, & *èconuerſò*.

DEMONSTRATIO.

CVm enim punctum H. ſupponatur *centrum ff. ſſ.* ad angulos baſis A.B.C.D. & ducta ſit ex *centro* H. recta HE. ad nouum punctum E. *centrum ff. ſſ.* ad omnia puncta A.B.C.D.E. erit in recta HE. (61. M. 1.) & ſi HE. diuidatur in quinque partes æquales, erit figura ſupra ER. minima quatuor figuris ſimilibus ſupra HR. (36. M. 1.) Ergo punctum R. quod eſt in quinta parte totius rectæ HE. erit *centrum ff. ſſ.* ad

quin-

quinque angulos solidos A. B. C. D. E. (62. M. 1.) &c.

2. Si verò basis sit regularis erit H. *centrum* circuli (109. M. 2.) & HA. HB. HC. HD. æquales radij: & latera EA. EB. EC. ED. æqualia ex *hyp.* & EH. latus commune: Ergo sunt anguli AHE. BHE. CHE. &c. æquales (4. *l.* 1.) Ergo EH. est perpendicularis (1. *l.* 11.) & *è conuerso* prout in (4 *p.*)

PROPOSITIO LXVIII.

IN qualibet Pyramide si à centro cuiusuis trianguli ducatur recta in centrum reliquorum angulorum, omnes se in Pyramidis centro secabunt: in ratione 3 ad 2 si basis sit quadrilatera: vt 3 ad 3. si pentagona: vt 3 ad 4. si Hexagona, & ita infinite.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt Pyramis ABCDE. & *centrũ ff. ss.* Pyramidis sit O. Trianguli verò BCE. *centrum* sit H. & punctum K. *centrum* sit reliquorum angulorũ A. & D. Dico rectam HK. transire per *centrum* Pyramidis O. & esse KO. ad OH. vt 3 ad 2. Similitèr etiam si punctum R. *centrum* sit trianguli ADB. & L. *centrum* reliquorum angulorum C. & E. ducta RL. transibit per O. & LO. ad OR. erit vt 3 ad 2. & sic de reliquis. Antecedens ergo rationis semper est 3. & consequens reliquus angulorum numerus, &c.

DEMONSTRATIO.

CVm enim punctum H. *centrum* sit angulorum B. C. E. & punctum K. sit *centrum* ad reliquos angulos A. & D si ducatur recta HK. in illa erit *centrum* ad omnes angulos A. B. C. D. E. (63. M. 1.) Ergo cùm O. sit *centrum* ad omnes angulos ex hypothesi, transibit HK. per O. Ergo go 3 figuræ ex HO. minimæ erunt totidem figuris ex OK. quot sunt reliqua puncta, quæ in hoc casu sunt 2. nempè A. & D. (64. M. 1.) Ergo HO. ad OK. erit vt 3 ad 2. vel ad reliquum numerum angulorum (37. M. 1.) Similitèr demonstrabitur rectam LR. transire per *centrum* Pyramidis O. & esse LO. ad OR. vt 3 ad 2. &c. Ergo omnes prædictæ rectæ se in *centro* in eadem ratione secant.

Eadem paritèr est demonstratio in omnibus alijs Pyramidibus quodcumque angulorum, &c. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIX.

IN qualibet Pyramide si sumatur quodlibet punctum rectæ per verticem, & centrum basis, erit centrum ff. dd. quarum totidem quot sunt anguli basis quadrata sint, & alia rectangulum ex superiori rectæ segmento, & triplo, quadruplo, vel quintuplo inferioris iuxta numerum angulorum basis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt Pyramis basis quadrilateræ A B C D E. & pũctum G. *centrum* sit basis ad quod ex vertice E. ducatur recta E G. & in hac sumatur quodlibet punctum O. Dico punctum O. *centrum* esse quadratorum ad angulos A. B. C. D. & rectanguli EO. & 4OG. quia sunt quatuor anguli basis. Vndè si basis trigona sit, pro altitudine rectanguli sumetur triplum segmenti OG. si verò quadrilatera, quadruplum; si pentagona quintuplum, & ita infinitè.

DEMONSTRATIO.

CVm enim punctum G. sit *centrum ff. ss.* ad angulos basis A. B. C. D. ex *hypoth.* & ducta sit GE. ad nouum punctum E. erit in recta G E. *centrum ff.* ad omnia puncta A. B. C. D. E. (61. M. 1.) Ergo cùm G. sit *centrum* quadratorum ad A. B. C. D. & quatuor quadrata supra O G. æquè

æquè alta, & minima sint rectāgulo supra EO. cuius altitudo sit 4OG. (21. M. 1.) erit O. *centrum ff.* quarum quatuor similes sint, nempè Quadrata ad A. B. C. D. & vltima rectangulum ex EO & 4OG. (62. M. 1.) Quod erat demonstrandum.

Eadem est demonstratio si anguli basis fuerint quinque, vel plures, & sumatur altitudo noui rectanguli quintuplum, vel sextuplum, &c. segmenti inferioris OG. Vndè si punctum assumptum O. fuerit ipsum *centrum* Pyramidis, erit nouum rectangulum etiam quadratū EO. cùm GO. sit pars OE. denominata à numero angulorum basis (67. *p.*) Ergo, &c.

PROPOSITIO LXX.

SI in Pyramide basis quadrilateræ recta à vertice per basis centrum ducatur, & sumatur in ea quodlibet punctum, rectæ omnes à dimidio laterum basis ductæ per illud se in eadem ratione secant; & quæ sectiones conterminas iungunt, parallelogrammum constituunt, cuius planum est basi parallelum, & secat latera proportionalitèr.

EXPOSITIO. Fig. 20.

IN Pyramide ABCDE. recta EG. cadit in *centrum* basis G. si ergo latera basis sint bifariam diuisa in F. N. P. K. & per quodlibet punctum O. rectæ EG. ducantur KOH. NOI &c. Dico esse KO. ad OH. vt NO. ad OI. &c. & puncta I. X. H. Z. efficere parallelogrammum basi parallelum, &c.

DEMONSTRATIO.

PVncta enim F. N. P. K. parallelogrammum constituunt, & KN. PF. se intersecant in *centro* basis G (73. & 82. M. 2.) Ergo in △KEN. cum EG. bisecet basim, secantur proportionalitèr KH. & NI. tum FX. & PZ. in △ PFE. (31. M. 2.) & KI. ad 2 IE. est vt GO. ad OE. tum PX. ad 2 XO. est vt GO. ad OE. & NH. ad 2 HE. vt GO. ad OE. (33. M. 2.) Ergo omnes in eadem ratione secãtur.

Dein-

Deindè quia in △FNE. est demonstrata FZ. ad ZE. vt NH. ad HE. erit ZH parallela ipsi FN. (2. *l*. 6) & similitèr XH. PN. tum IX. KP. tum IZ. KF. Ergo IZHX. parallelogrammum est ipsi KFNP. vel basi ABCD. parallelum: Ergo si planum parallelogrammi IZHX. continuetur, cũ sit basi parallelum secabit proportionalitèr latera (4. *l*. 11.) Quod, &c.

SCHOLIVM.

Hæc de Pyramidibus demonstranda occurrere, nec me latet plurima superesse, quibus elucidandis Geometræ nobiliores insudare possint. Illud præcipuè determinandum restat, quodnam planum, per datum punctum, vel rectam intra quemvis angulum solidum secet Pyramidem minimam, vt inde sterni via possit ad sectionem cuiusvis Pyramidis in data ratione per datam rectam, vel punctum, intra, vel extra ipsam. Sed hactenùs omnia demonstrare nemini datum est.

CAP.

CAPVT II.

DE HEXAEDRO ET PRISMATE.

SEcundùm hoc caput de Hexaedris Parallelepipedis, & non parallelepipedis, & de Prismatibus agit, vel potiùs aliqua delibat; cum plures grauissimæ difficultates adhuc exatlandæ restent. Non omnia Meditatus sum, neq; omnia, quæ occurrere ad Geometricam legem potui reducere. Nodi enim Gordio fortè implicatiores non tam scindendi, quàm soluendi sunt; Felix sanè, cui Præstantissimum illud diuinæ sapientiæ lumen, particulam hanc suæ mentis concesserit, quam nemo prudens sperare possit. Labore improbo scientiæ ditescunt, & excoluntur, dum singuli diuitias suas ex hoc magno latifundio in lucem edunt, licèt maiores posteris exhauriendas relinquant.

PRO-

PROPOSITIO LXXI.

IN quolibet Parallelepipedo centrum ff. ff. est in dimidio rectæ coniungentis centra duplicis plani oppositi, in quo omnes illæ rectæ se mutuo bifariam secant.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum A.G. & planorum *centra* I.K.Z.X.&c. Dico *centrum* ff.ff. Parallelepipedi esse in dimidio rectæ ZX. vel IK. &c. & omnes in *centro* O. esse bifariam diuisas.

DEMONSTRATIO.

ESt enim K. *centrum* ad angulos D.C.G.H. & I. *centrum* ad A.B.F.E. ex *hyp.* Ergo in recta IK. erit *centrum* ff.ff. ad omnes angulos A.B.C. D.E.F.G.H. (63.M.1.) Ergo si KI. bifariam diuidatur, erunt quatuor figuræ similes supra OI. minimæ 4 ff.ff. OK (37.M.1.) Ergo erit O. *centrum* ff.ff. ad omnia puncta (64. M. 1.) sed hoc etiam demonstratur de recta ZX. & de recta coniungente *centra* planorum ED.FC. Ergo omnes in *centro* ff.ff. O. bifariam se intersecant. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXII.

IN quolibet Parallelepipedo centrum ff.ſſ. eſt in medio communis ſectionis planorum tranſeuntium per oppoſitos angulos.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN eodem Parallelepipedo AG. plana ADGF. EBCH tranſeat per oppoſitos angulos, quorum ſectio communis ſit recta IK. & eius dimidium O. Dico punctum O. eſſe *centrum ff.ſſ.*

DEMONSTRATIO.

COmmunis ſectio planorum EBCH. HDCG. eſt recta HC. & communis ſectio planorum ADGF. DCGH. eſt recta DG. Ergo cum rectæ HC. DG. ſint diametri parallelogrammi DCGH. erit K. *centrum* illius, & ſimiliter I. erit *centrum* parallelogrammi ABFE (55. M. 2.) Ergo recta IK. quæ eſt communis ſectio planorũ ADGF. EBCH. coniungit *centra* duplicis plani oppoſiti: Ergo in dimidio rectæ IK. erit *centrum ff.ſſ.* Parallelepipedi (71. *p.*) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIII.

IN quouis Parallelepipedo centrum ff. ss. est in dimidio cuiuslibet diametri, & hæ omnes cum rectis coniungentibus centra duplicis plani oppositi se mutuo bifariam secant in centro ff. ss.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum AG. & diameter HB. diuisa bifariam in O. Dico punctum O. esse *centr. ff. ss.* & omnes diametros cum dictis rectis se in eo bifariam mutuo secare.

DEMONSTRATIO.

DVcantur EB. HC. & erit EBCH. parallelogrammum. Si ergo EB. HC. bifariam diuidantur in K. & I. erunt I. & K. *centra* parallelogrammorum EABF. DCGH. (55. M. 2.) Ergo cum recta IK bifariã secet opposita latera parallelogrammi EBCH in eius dimidio O. est *centrum* illius, & in dimidio diametri HB (55. M. 2.) sed cum IK. coniungat *centra* opposita in eius dimidio est *centrum* Parallelepipedi (71. *p.*) Ergo etiam in dimidio HB. &c.

PROPOSITIO LXXIV.

QVælibet recta vtcumque transiens per centrum parallelepipedi est in eo bifariam diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum AG. & ipsius *centrum ſſſſ.* O. per quod transeat quæuis recta ZX quacumque inclinatione, & secans vbicumque quælibet duo plana opposita. Dico ZX esse in O. bifariam diuisam.

DEMONSTRATIO.

DVcatur diameter HB. quæ cum transeat per O. (73. *p.*) secabit ZX. in O. & erũt ZX. HB. in eodem plano (1. *l.* 11.) Ergo cum planũ HZOXB. secet plana parallela EFGH. ABCD. sectiones ZH. & BX. erunt inter se parallelæ (3. *l.* 11.) Ergo cum triangula ZOH. XOB. sint in eodem plano, & habeant bases parallelas, & communia latera, erunt hæc proportionalia (2. *l.* 6.) Ergo vt HO. est æqualis OB (73. *p.*) ita ZO. est æqualis OX. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXV.

IN Parallelepipedo si recta transiens per centrum ff.ss. secat vnum latus, & oppositum etiã subcontrarie secat in easdem æquales partes: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 22.

IN Parallelepipedo AG. est *centr. ff.ss.* O. & recta IO. secat latus EH. Dico etiam secare latus BC. & esse MC. æqualem EI. & *contra* si EI. CM. æquales sint, transire IM. per *centrum*.

DEMONSTRATIO.

DVcatur enim diameter H B. quæ transibit per *centrum* O. (73.*p.*) & ibi secabit rectam IOM Ergo erunt in eodem plano (1.*l.*11.) Ergo quia planum IHOBM. secat plana parallela EG. A C. erunt sectiones HI. BM. parallelæ (3.*l.*11.) parallelæ etiam sunt HI. BC. Ergo pũctum M. est in BC. Ergo vt HO. est æqualis OB. (73.*p.*) ita HI. *æq.* BM. (2.*l.*6.)

E conuerso. Si recta IO. transit per M. recta IM. transibit per O. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXVI.

QVodlibet planum transiens per centrum Parallelepipedi, secat latera opposita, & plana subcontrariè in partes æquales, & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 22.

IN Parallelepipedo AG. sit *centrum* O: per quod transeat planum IKLMNP. Dico omnia segmenta opposita laterum, & planorum subcontrariè esse æqualia; si verò duo segmenta sint æqualia, & reliqua erunt æqualia, & planum transibit per *centrum*.

DEMONSTRATIO.

DVcatur recta KON. & quia planum transit per *centrum*, erit recta KON. in illo plano: & NB. *æq.* HK (75. *p*) Similitèr HI. *æq.* BM. Ergò & totū △ IHK. *æq.* △ MBN. (4. *l.* 1.) similiter IEP. MCL. &c.

Econtrà. Si HK & BN. sint æqualia segmēta, erit recta KN. per *centrum* (75. *p.*) Ergo planum per KN transibit per *centrum*, & reliqua omnia segmenta subcontrariè æqualia erunt. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXVII.

QVodlibet planum per centrum parallelepipedi, habet commune centrum cum illo, & quæuis recta plani per centrum, planum ipsum bifariam diuidit.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt Parallelepipedum A G. cuius *centrum* O. per quod transeat planum IKLMNP. Dico punctũ O. esse plani *centrũ ff. ſſ.* & si quæuis recta Plani RS. transeat per O. bisecante planum.

DEMONSTRATIO.

REcta IM. KN. PL. transeunt per O. (76. & 75. *p.*) & sunt in O. bisectæ (74. *p*) Ergo O. est *centrum* ad I. M. tũ ad K. N. tũ ad L. P. (35. M. 1) Ergo & ad omnia simul I. K. L. M. N. P. Deindè æquales sunt IK. NM. tum IN. KM. (76. *p.*) Ergo IKMN. est parallelogrammum (7. *l.* 1.) Ergo recta ROS. ipsum bifariam secat (7. *l.* 1.) Ergo cum △ IPN. æquale sit △ MLK (76. *p.*) erit segmentum SNPIR. æquale ipsi RKLMS. & planum bifariam sectum recta SR. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXVIII.

Omnia plana per centrum ff. ff. parallelepipedi seipsa, & Parallelepipedum bifariam diuidunt.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt Parallelepipedum A G. cuius *centrum* O. per quod transeat planũ IKLMNP. & quodlibet aliud. Dico Plana se mutuo bifariam diuidere: & quodlibet bisecare ipsum parallelepipedum.

DEMONSTRATIO.

QVoniam vtrumque planum transit per *centrum* O. ex *hyp.* quæuis cõmunis sectio RS. transibit per *centrum*: sed quæuis recta plani per *centrum*, bisecat planum (77. *p.*) Ergo, &c.

Deindè cũ omnia plana Pyramidis IHKO. æqualia, & similia sint planis Pyramidis MB NO (76. *p.*) sunt Pyramides æquales in oppositis plani partibus. Similitèr Pyramides KG LO. NAPO. & sic de reliquis. Ergo summa Pyramidum ex vna parte plani æqualis erit sũmæ ex altera parte: & totum parallelepipedũ bisectum. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXIX.

SI planum diuidat Parallelepipedum bifariam, etiam per centrum ipsum secabit.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt Parallelepipedum A G. bifariam sectum plano transeunte per IK. & NM. Dico transire hoc planum per *centrum* ff ff O.

DEMONSTRATIO.

TRanseat enim per IK. & *centrum* ff. ff. O. planum aliquod, & bifariam diuidet parallelepipedum (78. *p.*) si hoc planum transiens per *centrum* faciat sectionem NM. erit ipsum planum IKNM. Ergo iam hoc planum transibit per *centrum*. Si verò planum per *centrum* non faciat sectionem NM. faciat *qp.* parallelam IK. & NM. (3. *l.* 11.) Ergo cum solidum IKNMB. sit dimidium totius, ex *hyp.* æquale erit dimidio IK*qp*B. quod dimidium est ex 78. *p.* Ergo pars toti erit æqualis, quod est impossibile. Ergo, &c.

PROPOSITIO LXXX.

IN quouis Parallelepipedo rectangulo omnes diametri sunt æquales, & omnes anguli solidi sunt in eadem superficie sphærica.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt AG. Parallelepipedum rectangulum, & eius basis AC. Dico omnes diametros BH. CE. DF. AG. esse æquales, & omnes angulos solidos A. B. C. D. E. F. G. H. esse in eadem superficie sphærica ex *centro* ff. ff. descripta.

DEMONSTRATIO.

QVoniam diameter basis BD. æquè potest ac BC. CD (4. *l.* 2.) & diameter AC. æquè potest ac AB. BC. vel BC. & CD (7. *l.* 1.) Ergo AC. & BD. sunt æquales. Deinde diameter BH. æquè potest ac BD. DH. & AG. æquè ac AC. CG. (4. *l.* 2.) Ergo cum AC. CG. sint æquales BD. DH. erunt BH. AG. æquales: & quia se in O. bifariam secant (73. *p.*) omnes anguli A. B. G. H. &c. æqualiter distabunt à *centro* O. & & erunt in eadem superficie sphærica. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXI.

IN Parallelepipedo rectangulo minima figurarum ſſ. ſumma eſt dupla figuræ ſimilis ex diametro.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt A G. Parallelepipedum rectanglum, eiuſque *centrum* ff. ſſ. O. & diameter BH. Dico minimam ſummam ff. ſſ. ex O. ad angulos A. B. C. D. E. F. G. H. eſſe duplam ſimilis figuræ ex B.H.

DEMONSTRATIO.

CVm omnes diametri æquales ſint (80. *p*) & omnes diuidantur bifariam in *cētro* ff. ſſ. O. (73. *p.*) omnes ſemidiametri OA. OB. &c. æquales erunt: Ergo cùm anguli ſolidi ſint octo, erit minima ſumma ff. ſſ. æqualis 8 ff. ſſ. ex OB. ſed cùm quadratum BH. ſit æquale quatuor quadratis OB. (3. *l.* 2.) & omnes figuræ ſimiles ſint vt quadrata, nempè in duplicata ratione laterum (4. *l.* 6.) etiam figura ſimilis ex BH. æqualis erit 4 ff. ſſ. OB. Ergo minima ſumma ff. ſſ. ex *centro* O. dupla eſt ſimilis figuræ ex diametro BH. Quod, &c.

PROPOSITIO LXXXII.

IN Parallelepipedo rectangulo summa ff ss. ex quolibet angulo solido ad reliquos, æqualis est summæ ff ss. ex cunctis lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN Parallelepipedo rectangulo A G. si ex angulo H. ducantur rectæ in reliquos. Dico summam *ff ss.* æqualem esse summæ *ff ss.* cunctorum laterum.

DEMONSTRATIO.

DVcantur HF. HA. HB. HC. & summa quadratorũ ex H. erit □ HE + □ HE + □ HG + □ HC + □ HB + □ HA + □ HD. sed □ HF. æquatur □ HE + □ EE. & □ HA. æquatur □ HE + □ EA. tum □ HC. æquatur □ HG + □ GC & □ HB. æquatur □ HD + □ DB. vel □ HD + □ DC + □ CB. omnia propter angulũ rectum oppositum (4. *l.* 2.) Ergo quadrata ex angulo H. æquantur 4 □ HE + 4 □ HG + 4 □ HD. hoc est quadratis omnium laterum: sed omnes figuræ similes sunt vt quadrata, nempè in duplicata ratione laterum (4. *l.* 6.) Ergo *ff ss.* ex H. *æq. ff ss.* omnium laterum. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIII.

IN quolibet Parallelepipedo, etiam non rectã-gulo, minima figurarum summa ex cētro ff.ſſ. eſt dimidium ſummæ ff.ſſ. ex cunctis lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt quodlibet Parallelepipedum obliquãgulum, vel rectangulum A G. & ipſius *centrum ff.ſſ.* ſit O. Dico minimam ſummam *ff.ſſ.* ex *cē-tro* O. ad omnes angulos eſſe dimidium ſummæ *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus.

DEMONSTRATIO.

SInt puncta I. & K. *centra* duplicis plani oppoſiti, quæ coniungantur recta I K. & erit IK bifariã diuiſa in parallelepipedi *centro ff.ſſ.* O (71. *p.*) Deinde quoniam punctum I. eſt *centrum ff.ſſ.* ad angulos A. B. F. E. minima ſumma *ff.ſſ* ex I. ad dictos angulos parallelogrammi eſt æqualis *ff.ſſ.* A E. & EF. laterum parallelagrammi (58. M 2.) & ſimiliter minima ſumma ex K. ad angulos C. D. H. G. eſt æqualis *ff.ſſ.* DH. HG. (58. M. 2.) ſed ſumma *ff.ſſ.* ex O ad angulos A. B. F. E. æquatur minimæ ex *centro* I + 4 *ff.ſſ.* OI (60. M. 1.) vel + figura IK (3 l. 2.) Ergo *ff.ſſ.* ex O. æquãtur *ff.ſſ.* A E + EF + IK. Similiter *ff.ſſ.* ex O. ad angulos C. D. H. G. æquantur *ff.ſſ.* DH + HG + IK (60. M. 1.) Ergo minima ſumma

ff.ſſ.

ff. ss. ex cetro O. ad omnes angulos solidos A. B. C. D. E. F. G. H. æquatur ff. ss. AE+EF+DH+HG+2 ff. ss. IK. sed in parallelogrammo EC. æquales sunt BI. CK (55. *p.*) Ergo etiam IK. & BC. vel AD (7. *l.* 1.) Ergo minima summa ff. ss. ex O æquatur ff. ss. AE+EF+DH+HG+AD+BC. sed figuræ similes ex reliquis parallelepipedi lateribus, nempè AB+BF+DC+CG+FG+EH. prædictis æquales sunt, quia latera opposita sunt in parallelogrammis æqualia (7. *l.* 1.) Ergo summa ff. ss. ex omnibus parallelepipedi lateribus collecta dupla est minimæ sūmæ ff. ss. ex *centro* O. parallelepipedi ad omnes angulos solidos collectæ. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIV.

IN omni Parallelepipedo summa ff.ss. ex quatuor diagonijs collecta æqualis est summæ ff.ss. ex omnibus lateribus, & dupla minimæ summæ ex centro.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum AG. eiusque diagonia HB. EC. FD. GA. Dico summam *ff.ss.* ex ipsis collectam duplam esse minimæ summæ *ff ss.* ex O. & æqualem summæ *ff ss.* ex omnibus lateribus collectæ.

DEMONSTRATIO.

QVoniam omnia diagonia se bifariam intersecant in *centro* O(73. *p.*) est □ HB. quadruplum □ HO(3. *l.* 2.) vel duplum □ HO + □ OB. idemque de singulis diametris ostenditur. Ergo summa quadratorum ex diagonijs HB + EC + FD + AG. dupla est minimæ summæ quadratorum ex omnibus semidiagonijs OA. OB. &c. idemque est de omnibus *ff.ss.*(4. *l.* 6.) sed summa ex lateribus etiam est dupla minimæ(83. *p.*) Ergo summæ *ff.ss.* ex lateribus, & diagonijs æquales sunt. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXV.

IN quolibet Parallelepipedo minima summa ff.ſſ. eſt dupla ſummæ ff.ſſ ex lateribus eundem angulum ſolidum comprehendentibus collect.a.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum A G. & illius *centrum ff.ſſ.* O. Dico minimam ſummam ex O. ad omnes angulos ſolidos A. B. C. D. E. F. G. H. duplam eſſe ſummæ *ff.ſſ.* ex lateribus BA. BE. BC. angulum B. comprehendentibus.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in Parallelepipedo quælibet bina plana oppoſita parallelogrammia æqualia, & ſimilia ſunt (3. *l.* 11.) quaterna latera parallela æqualia erunt: nempè BC. AD. EH. FG. tum BF. AE. CG. DH. tum BA. CD. FE. GH Ergo figuræ ex omnibus lateribus quadruplæ erunt *ff.ſſ.* ex BA. BF. BC. ſed eadē ſumma *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus eſt dupla minimæ (81. *p.*) Ergo minima ſumma dupla eſt ſummæ *ff.ſſ.* ex BA. BF. BC. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI.

IN quolibet Parallelepipedo summa ff. ss. ex omnibus planorum diagonijs dupla est summæ ff. ss. ex omnibus lateribus, & quadrupla minima, & octupla summæ ff. ss. ex tribus lateribus eiusdem anguli solidi.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN Parallelepipedo AG. sint planorum diametri EB AF. &c. Dico summam *ff. ss.* ex ipsis duplam esse summæ *ff. ss.* ex omnibus lateribus, &c.

DEMONSTRATIO.

IN Parallelogrammo EB diametrorum *ff. ss.* EB. AF. æquantur *ff. ss.* laterũ AB. BF. FE. EA. (47. M. 2.) Idemque est de omnibus planis: Ergo quia latus quodlibet commune est duobus planis, & bis sumitur, erit summa *ff. ss.* ex planorum diametris dupla summæ *ff. ss.* ex omnibus lateribus, sed hæc est dupla minimæ (83. *p.*) Ergo illa est quadrupla minimæ: sed etiam minima summa est dupla summæ *ff. ss.* ex lateribus eiusdem anguli (85. *p.*) Ergo illa est huius octupla. Quod, &c.

PROPOSITIO LXXXVII.

IN quouis Parallelepipedo summa ff. ss. ex centro cuiuslibet plani in solidos angulos superat minimam 2 ff. ss. ex latere opposito, quod planum, & oppositum secat.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN Parallelepipedo AG, sit K. *centrum* plani HC. & O. *centr.* ff. ss. parallelepipedi. Dico ff. ss. ex K. ad angulos A. B. C. D. E F. G. H. superare minimam ex O. in 2 ff. ss. lateris FG. plano oppositi.

DEMONSTRATIO.

DVcta KO. trãsit per I. *centrum* plani EB (71. *p.*) Ergo minima summa ex O. æquatur summæ IA. IE. IF. IB. KC. KD. KG. KH + 4OI + 4OK (60. M. 1.) hoc est + 2KI (3. *l.* 2.) sed figuræ ex K. ad angulos solidos D. C. G. H. æquãtur ff. ss. KC. KD. KG. KH. & figuræ ex K. ad angulos solidos A. B. F. E. æquatur ff. ss. IA. IE. IF. IB + 4 ff. ss. KI (60. M. 1.). Ergo ablatis æqualibus, vel communibus remanet excessus 2 ff. ss. KI. hoc est 2 ff. ss. FG (7. *l.* 1.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVIII.

CVIuslibet Parallelepipedi minima summa ff. ss. æqualis est minimæ summæ ff. ss. cuiuslibet alterius Parallelepipedi æqualibus lateribus cuiuslibet in æqualibus angulis comprehensi.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt parallelepipedum rectangulum AG. lateribus BA. BF. BC. comprehensum, & quodlibet aliud æqualibus lateribus comprehendatur quibuslibet alijs angulis. Dico vtrumque Parallelepipedũ habere eandẽ, vel æqualem minimam summam *ff. ss.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam si tria latera circa vnum angulum in vtroque sunt æqualia summa omnium laterum erit in vtroque æqualis; sed minima summa est dimidium summæ *ff. ss.* ex omnibus lateribus (83. *p.*) Ergo in vtroque erit eadem. Tum quia in vtroque minima summa est dupla *ff. ss.* ex lateribus eiusdem anguli (85. *p.*) Ergo eadem in vtroque. Quod, &c.

PROPOSITIO LXXXIX.

SI infinita Parallelepipeda habeant idem basium centrum, & idem latus eleuatum quacumque diuersa altitudine, & inclinatione, omnium Parallelepipedorum centra ff. ss. erunt in eadem sphærica superficie, cuius centrum erit cētrum basium, & radius dimidium lateris.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum AG. & *centrum* basis X. & alia infinita habeant idem *centrum* basiũ X. & latera eleuata æqualia BF. vel XZ. Dico omnium *centra* esse in sphærica superficie, cuius *centrum* X. & radius XO.

DEMONSTRATIO.

QVoniam si in omnibus ducantur ex X. rectæ in Z. *centrum* plani oppositi in earũ dimidio O. erit *centrum* cuiusvis parallelepipedi (71. *p.*) Ergo cũ in omnibus XZ. sit æqualis BF (7. *l.* 1.) in omnibus punctum O. æqualitèr distabit ab X. & sic erit in sphærica superficie radio XO. descripta, & *centro* X. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XC.

QVodlibet Hexaedrum planis quadrilateris comprehensum, quantumvis irregulare, habet centrum ff.ff. in medio rectæ coniungentis centra duplicis plani oppositi.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum planis quadrilateris comprehensum ABCDEFGH. & *centrum* plani superioris sit Z. & plani inferioris X. quæ iungātur recta ZX. & hæc sit bifariam diuisa in O. Dico punctum O. esse *centrum ff.ff.* ad omnes angulos solidos prædicti Hexaedri.

DEMONSTRATIO.

CVm enim recta XZ. coniungat duo *centra ff.ff.* in ea erit *centrum ff.ff.* ad omnia puncta (63. M. 1.) Ergo cum X. sit *centrum* ad quatuor puncta, & Z *centrum* ad alia quatur, si ZX. bifariam diuidatur in O. quatur *ff.ff.* OZ. minimæ erunt quatuor *ff.ff.* OX (19. M. 1.) Ergo cum æquè tidem sint figuræ similes in vtraque parte quot sua puncta, erit O. *centrum ff.ff.* ad omnia simul (64. M. 1.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XCI.

IN eodem Hexaedro rectæ coniungentes opposita planorum centra omnes se in centro ff. Hexaedri bifariam intersecant: & quatuor centra planorum ad commune planum terminatorum in vno sunt plano parallelogrammo.

EXPOSITIO. Fig. 23.

IN Hexaedro AG. sint Z. Y. X. V. *b. g. centra* planorum, & solidi *centrum* O. Dico ZX. YV. *bg.* se bifariam intersecare in O. & YgV*b*. esse planum parallelogrammum, tum Z*b*X*g*. ZYXV.

DEMONSTRATIO.

C*Entrum* Hexaedri est in dimidio rectæ ZX. (90. *p.*) & in dimidio YV. & in dimidio *bg.* (90. *p.*) Ergo cum *centrum ff.* sit vnicum (60. M. 1.) omnes rectæ se in *centro* O. bifariam secant. Deinde cum rectæ *bg.* & YV. se bifariam diuidant in O. est *b*O. ad OY. vt *g*O. ad OV. (2. *l.* 5.) Ergo Y*b*. & V*g*. sunt parallelæ (2. *l.* 6.) & similitèr Y*g*. & *b*V. Ergo Y*g*V*b*. planum parallelogrammum est. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XCII.

IN Hexaedro planis quadrilateris comprehẽso, si planum in eadem ratione diuidat latera supra idem planum eleuata, in eadem ratione secat bisecantes reliqua latera, sectiones verò sunt bifariam diuisæ, & planum habet centrum ff. ss. in recta coniungente centra reliquorum planorum similitèr diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum irregulare AG. & planum QRST. secet in eadem ratione latera AQ. ad QE. vt BR. ad RF. & CS. ad SG. & DT. ad TH. & *q*I. PK. *d*L. NM. bisecent reliqua latera. Dico IY. ad Y*q*. esse vt AQ. ad QE. & similitèr K*g*. ad *g*P. & LV. ad V*d*. & M*b*. ad *b*N. Tum sectiones QR. RS. ST. TQ. esse bifariam diuisas in Y. *g*. V. *b*. & *centrum* plani QRST. esse in recta XZ. quæ coniungit *centra* planorum EG. AC. & XO. ad OZ. esse vt AQ. ad QE.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in Trapezio EB. recta *q*I. bisecat opposita latera, & QR. secat reliqua in eadem ratione, ex *hyp*. se ipsas in easdem rationes opposite secant (90. M. 2.) Ergo est IY. ad Y*q*. vt AQ. ad QE. & QY. YR. æquales sunt. Similitèr demonstrabitur K*g*. ad *g*P. esse vt BR. ad ad RF. vel vt AQ. ad QE. & RS. esse bifariam diuisam: & sic de reliquis (90. M. 2.)

Deinde si fiat □ x. simile IYq. vel LVd. & □ y erit Y. centr ff. dd. quarum A. & B. similes sint □ x. & E. F. ipsi □ y. & similiter V. centr. ff. dd. ad C. D. H. G (89. M. 2.) Ergo cum in vtraque parte puncta sint paria, & figuræ similes binæ, & binæ: cent. ff. dd. ad A. B. C. D. & EF. GH. erit in dimidio rectæ YV (64. M. 1.) Similiter idem centrum demonstrabitur in dimidio rectæ bg. Ergo YV. & bg se mutuo bifariam diuidunt, & in earum sectione O. est centr ff. dd. similium □ x. & □ y. sed quia X. est cētr ff. ss. ad A. B. C. D. ex hyp erit centrum □ □ similiũ ipsi □ x. & quia X. est centr. ff. ss. ad E. F. G. H. ex hyp erit □ □ similium □ y. Ergo in recta XZ. erit centrum ff. ad A. B. C. D. E. F. G. similium □ x. & □ y. (63. M. 1.) sed idem centrum demonstratum est in puncto O. nempe in concursu rectarum YV. bg. Ergo tres illæ rectæ in eodem puncto O. se intersecat: Ergo quatuor rectangula supra XO. similia □ x. vel □ IYq. minima erunt quatuor quadratis supra OZ. similia □ y. vel □ Yq. (64. M. 1) Ergo □ XO. simile □ x habebit æqualem altitudinem cum □ OZ. simile □ y. (10. M. 1.) Ergo rectangulum XO. simile □ x. erit ipsum □ XOZ. Ergo □ XOZ. simile est □ x. vel IYq.

IY*q*. Ergo XO ad OZ est vt IY. ad Y*q*. vel quia XZ. & I*q*. in similes figuras minimas diuisæ sunt punctis O. & Y. erit XO. ad OZ. vt IY. ad Y*q*. (30. M. 1.) vel vt AQ ad QE. (1. *l*. 5.) Constant ergo omnia in thesi proposita. Quod, &c.

PROPOSITIO XCIIII.

IN prædicto Hexaedro quodlibet punctum rectæ coniungentis centra duplicis plani oppositi est cẽtrum ff. dd. quarum quatuor sint quadrata, & quatuor rectangula similia ei quod fit ex partibus recta.

2. *Si Planum aliquod tria latera, & rectã coniungentem centra duplicis plani oppositi in eadem ratione diuidat, & reliqua omnia diuidet prout in præcedenti, & plani centrum in ea recta erit.*

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum AG. & recta XZ. coniungat *centra* X. & Z. duplicis plani oppositi. Dico quodlibet punctum O. esse *centr. ff. dd.* ad omnes angulos solidos A. B. C. D. E. F. G. H. quarũ sint □. E. F. G. H. & ▭ A. B. C. D. similia ▭ XOZ.

2. Si quodlibet planum RSTO. in eadem ratione diuidat latera BF. CG. DH. & XZ. Dico reliqua omnia esse prout in præcedẽti *Prop.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam Z. est *centr. ff. ss.* ad □ □ E F. G. H. & similitèr X. ad ▭ ▭ A. B. C. D. in recta XZ. erit *centrũ ff. dd.* ad dicta □ □. & ▭ ▭ (63. M. 1) sed quodlibet punctum O. ita diuidit rectam XZ. vt rectangulum X O Z. æquè altum sit □ OZ. & 4 ▭ XOZ. æquè alta 4 □ OZ. Ergo erunt 4 ▭. minima 4 □ (10. M. 1.) Ergo punctum O. erit *centrum* ad ▭ ▭ A. B. C. D. similia ▭ XOZ. & ad □ □. E. F. G. H. similia □ OZ (64. M. 1.) &c.

Deindè si planũ RST. diuidit latera BF. CG. DH. & rectam XZ. in eadem ratione. Quoniam in Trapezio recta PK. bisecat latera opposita, & RS. secat reliqua in eadem ratione, erunt ipsæ similitèr oppositè diuisæ (90. M. 2) nempè RS. bifariam, & K*g* ad *g*P. vt BR. ad RF. idemque demonstrabitur de S T. & L*d*. Cum ergo pũctum *g*. sit *centrum* ad □ F. G. & ▭ ▭ B. C. similia ipsi KGP. vel BRF. vel XOZ. (89. M. 2.) recta *gOh*. quæ est in plano RST. in quo sunt puncta *h*. O. ex *hyp*. transibit per *centrum* plani ADHE (63. M. 1.) & similitèr VOY. transibit per *centrum* plani ABFE. Ergo cum *centrum* plani ADHE. sit in recta bisecante NM (89. M. 2.) erit punctum *h*. in recta N M. & similitèr Y. in recta *q*I. Ergo quia *h*. est *centrum* ad □ E.

□ H.

□H. & ▭A ▭D. similia ▭XOZ. cum N sit *centrum* quadratorum E. H. & M. sit *centrum* rectangulorum similiũ A. D (35. M. 1.) erit MN. diuisa in figuras minimas puncto *b*. sicut XZ. puncto O (64. M. 1.) Ergo M*b*. ad *b*N. est vt XO. ad OZ. (30. M. 1.) vel vt DT. ad TH. ex *hyp.* sed quia in trapezio AEDH. recta NM. bisecat latera, & TQ. secat in eadem ratione DH. & MN. secat etiam in eadem ratione AE (90. M. 2.) Ergo etiam AQ. ad QE. est vt DT. ad TH. vel vt BR. ad RF. Ergo etiam IY. ad Y*q*. vt BR. ad RF. Ergo omnia in eadem ratione secantur. Quod erat, &c.

An verò si quattuor latera in eadem ratione secentur, sint puncta Q. R. S. T. in eodem plano demonstrandum restat.

PROPOSITIO XCIV.

IN quolibet Hexaedro planis quadrilateris comprehenso minima summa ff ∫∫. æqualis est minimæ summæ duplicis plani oppositi cum duabus ff ∫∫ ex recta coniungente vtriusque plani centra.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum AG. & planorum EG. AC. *centra* sint Z. & X. Dico minimam summam ff ∫∫. ex *cetro* O. ad omnes angulos solidos æqualem esse summis ff ∫∫. ex *centris* ZX + 2 ff. ZX.

DEMONSTRATIO.

CVm Z. sit *centrum* ff. ∫∫. ad E. F. G. H. ex *hyp.* & X. ad A. B. C. D. figuræ ex O. ad E. F. G. H. *æq.* minimæ summæ ex Z + 4 ff. ∫∫. OZ (60. M. 1.) & ff. ∫∫. ex O. ad A. B. C. D. *æq.* minimæ ex X + 4 ff. ∫∫. OX. sed quia *centrum* O. est in dimidio rectæ XZ (90. *p.*) 4 ff. OZ. *æq.* figuræ ZX. & 4 OX. *æq.* ZX (4. *l.* 6. & 3. *l.* 2.) Ergo summa ex O. *æq.* minimis ex Z. & X + 2 ZX. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XCV.

IN quolibet Hexaedro planis quadrilateris cõprehenso si quatuor latera opposita bifariam secentur rectis, & hæ similitèr; summa ff. ss. ex lateribus, & prioribus rectis cum 2 ff. ex singulis posterioribus dupla est minima summæ ex cẽtro ad angulos.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum AG. & rectæ *qd*. *d*L. LI. I*q*. bisecẽt opposita latera EF. HG. DC. AB. & XZ. bisecent *qd*. & IL. tum YV. bisecet *q*l. & *d*L. Dico summã *ff. ss.* EF. HG. DC. AB. 2ZX. 2YV. duplam esse minimæ ex *centro* O. ad omnes solidos Hexaedri angulos.

DEMONSTRATIO.

IN quadrilatero EG. dimidium *ff.* EF. HG. cũ simili *qd.* æquatur minimæ summæ ad angulos E. F. G H (83. M. 2.) & similitèr dimidiũ *ff.* AB. DC. cum simili IL. *æq.* minimæ summæ ad angulos A. B. C. D. Ergo additis 2 *ff. ss.* ZX. erit minima summa ex *centro* solidi O. æqualis dimidio *ff. ss.* EF. HG. DC. AB. *qd.* IL + 2ZX. (94 *p.*) Similitèr ostenderetur eandem solidi minimam summam ex *centro* O. æqualem esse dimidio *ff. ss.* HG. DC BA. EF. *d*L. *q*l. + 2YV. Ergo duplum minimæ summæ *ff. ss.* solidi ex *cen*-

tro

tro O. æqualis erit summæ *ff. ss.* EF. HG. DC. AB. *qd. d* L. LI. I*q* + 2ZX + 2YV. Ergo hæc summa dupla est minimæ summæ *ff. ss.* ex *centro* O. Quod, &c.

Pari ratione demonstrari poterit minimã solidi summam esse dimidium *ff. ss.* EH. FG. BC. AD. NP. PK. KM. MN 2ZX. 2*bg*. Et iterum dimidium summæ *ff. ss.* FB. GC. HD. EA. RS. ST. TQ. QR. 2YV. 2*bg*. Vnde tres illæ summæ æquales sunt inter se, quia sunt eiusdem minimæ duplum.

CONSECTARIVM.

Hinc constat summam *ff. ss.* ex omnibus lateribus, & omnibus bisecantibus latera, cũ 4 *ff. ss.* ex singulis rectis, quæ opposita planorũ *centra* coniungunt, sextuplam esse minimæ summæ. Alias speculationes libens ommitto, quæ ex iam demonstratis facilè possunt deduci.

PROPOSITIO XCVI.

IN quolibet Prismate, vel quasi Prismate centrum ff. ss. est in medio rectæ coniungentis duplicis plani oppositi centra: & in Prismate triangulari est in tertia parte rectæ à centro quadrilateri ad dimidium oppositi lateris, quæ omnes in cẽtro se in ea ratione intersecant.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma, vel quasi Prisma ABCDEF. & plana opposita ABC. DEF. *centra* habeant in G. & H. Dico *centrum* solidi esse in medio rectæ GH. siuè Prisma sit triangulare, siuè non. Si autem Prisma, vel quasi Prisma triãgulare sit, & Punctum K. sit *centrum* quadrilateri CBEF. & ducatur KQ. in dimidium oppositi lateris. Dico in tertia parte rectæ KQ. esse solidi *centrum*; & si ducantur similitèr IP. LR. omnes se intersecare in *centro* O. in eadẽ ratione 1 ad 3.

DEMONSTRATIO.

QVoniam H. est *centrum* ff. ss. plani DEF. & G. est *centrum* plani ABC. si GH. sit bifariam diuisa, cùm numerus figurarum vnius, & alterius plani sit æqualis, erunt tot figuræ OH. quot figuræ OG. minimæ inter se (37. M. 1.) Ergo erit O. *centrum* ff. ss. ad vtriusque plani ni angulos, vel ad omnes angulos solidi (64. M. 1.)

In Prismate verò triangulari si K sit *centrum* quadrilateri BCFE. cum DA. sit bifariam diuisa in Q. erit Q. *centrum* ad A. D. (35. M. 1.) Si ergo KQ. diuisa sit in sex partes æquales, & sumantur duæ KO. erunt 4ff. ff. KO. minimæ 2ff. ff. OQ. (37. M. 1.) Ergo erit O. *centrum* ff ff. ad sex puncta A. B. C. D. E. F. (64. M. 1.) Ergo quia KO. ad KL. est vt 2. ad 6. erit KO. tertia pars ipsius KQ. vel vt 1. ad 3. Similitèr ostendetur *centrum* O. esse in tertia parte rectarum LR. & IP. Ergo cum *centrum* solidi vnicum sit (60. M. 1.) tres illæ rectæ KQ. LR. IP. se in eodem puncto O. in eadem ratione secant vt 1. ad 3. Quod, &c.

Quasi Prismata dicuntur, si opposita plana non sint parallela, vel eleuata non sint parallelogramma.

PRO-

PROPOSITIO XCVII.

IN omni Prismate, vel quasi Prismate centrũ ff.ſſ. eſt centrũ plani biſecantis latera quadrangulorum.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Priſma, vel quaſi Priſma ABCDEF. & planum PQR. biſecet omnia eius latera eleuata ſupra plana oppoſita. Dico *centrum ff.ſſ.* plani PQR. eſſe ipſum ſolidi *centrum ff.ſſ.* ad angulos ſolidos.

DEMONSTRATIO.

DIuidantur omnia latera plani biſecãtis bifariam in I.K.L. & quia DA. eſt bifariam diuiſa in Q. erit hoc *centrum* ad A. D. (35. M. 1.) & R. ad E. B. & P. ad FC. &c. Ergo in dimidio rectæ QR. nempè in I. erit *cẽtrum* ad A. D. B. E. (64 M. 1.) & ſimiliter L. erit *centrum* ad A. D. C F & K ad B. E. F. C. Ergo *centrum* ad A. D. B. E. F. C erit in IP. (63. M. 1.) & ſimilitèr in LR. & in KQ. Ergo erit in earum interſectione O. ſed quia RQ. eſt in I. bifariam diuiſa eſt I. *centrum ff.ſſ* ad RQ (35. M. 1.) & ſimilitèr K. eſt *cẽtrum* ad P. R & L. ad Q. P. (35. M. 1.) Ergo in recta IP. erit *centrum* punctorum Q. R. P. & ſimiliter in recta LR. & in recta KQ. (61. M 1.) Ergo erit *centrum* plani PQR in concurſu rectactarum O. Ergo cum solidi *centrum* demonstratum sit in eodem concursu idem erit *centrum ff. ss.* solidi, & plani bisecantis, &c.

Quod si Prisma, vel quasi prisma Polygonū fuerit eadem continuabitur demonstratio, & semper solidi, & plani *centrum* in eodem rectarum concursu demonstrabitur.

SCHOLIVM.

Breuius demōstrari poterit ex hoc vniuersali theoremate. *Si plura fuerint centra ff. ad varia puncta, omnium centrorum centrum ff. est centrum omnium punctorum*: quod demonstrabitur (ex 64. M. 1.) sed ibi ommissū fuit Theorema, quia tunc non occurrerat.

PRO-

PROPOSITIO XCVIII.

IN Prismate, vel quasi Prismate triangulari minima summa ff ss. ex centro est tertia pars summæ ff ss. ex lateribus triangulorum + 6. ff. ss. ex semirecta coniungente ipsorum centra.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma ABCDEF. cuius *centrum ff ss.* O. Dico minimam summam ex O. esse tertiam partem *ff. ss.* AB. BC. CA. DE. EF. FD + 6 *ff ss.* ex dimidio rectæ HG. quæ iungit triangulorum *centra.*

DEMONSTRATIO.

CVm H. & G. sint Triangulorum *centra* ex *hyp.* figuræ ex O. *æq.* minimis summis ex H. & G + 3OH + 3OG (60. M. 1.) Ergo quia *centrum* O. bisecat HG (96. *p.*) 3 *ff.* OH. & 3OG. sunt 6OH, vel 6OG. sed minima summa ex H. est tertia pars *ff.* DE. EF. FD. & minima ex G. est tertia pars *ff.* AB. BC. CA (8. M. 2.) Ergo minima summa æqualis est tertiæ parti DE. EF. FD. AB. BC. CA + 6OH. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XCIX.

IN Prismate Triangulari minima summa ff. ss est tertia pars ff. ss. ex lateribus triangulorũ, cum dimidio ff. ex lateribus parallelogrammorum.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma triangulare ABC. &c. & *centrum* O. Dico minimam summam *ff. ss.* esse tertiã partem *ff. ss.* AB. BC. CA. DE. EF. FD. cum dimidio *ff. ss* DA. FC. EB.

DEMONSTRATIO.

SInt H. & G. triangulorum *centra*, quæ iungantur recta HG. & ducantur FHN. CGM. & NM. cum NM. diuidat bifariam latera DE. AB. (1. M. 2) est NM. parallela lateri DA. ipsique æqualis (7. *l.* 1.) Ergo etiam est Parallela, & æqualis CF. & BE. & MF. erit parallelogrammum (7. *l.* 1.) Ergo cum HG. diuidat in eadem ratione latera FN & CM (1. M. 2.) erit HG parallela, & æqualis lateribus CF. BE. AD. Ergo tres figuræ AD. CF. BE æquales sunt tribus figuris HG. Ergo etiam vna, & dimidia figura HG. erit dimidium figurarum AD. CF. BE sed minima summa ex O. est tertia pars *ff. ss.* AB. BC. CA. DE. EF. FD + 6 *ff. ss.* OH vel + vna cum dimidia HG. (98. *p.*) Ergo minima summa ex

O.

O. ad omnes angulos solidos est tertia pars ff. ff. AB. BC. CA. DE. EF. FD. cum dimidio ff. ff. AD. CF. BE. Quod erat, &c.

PROPOSITIO C.

IN quolibet Prismate si planum vtcumque secet latera parallelogrammorum, habebit cētrum ff ff. in recta coniungente cētra duplicis plani oppositi paralleli.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma Triāgulare ABCDEF. & plana opposita parallela, nempe superius, & inferius DEF. ABC. quorum *centra* H. & G. & quodlibet planum PQR. secat vtcumque latera parallelogrammorum AD. CF. BE. Dico *centrum* plani PQR. esse in recta HG. quæ plani superioris, & inferioris *centra* coniungit.

DEMONSTRATIO.

DVcantur FHN. CGM. & NM. eruntque NM. HG. FC. DA. BE. parallelæ vt in 99. *p.* & QR. erit bifariam diuisa in I. (61. M. 2) & recta PI. erit communis sectio planorū PQR. & NC. Ergo cum sint parallelæ NM. HG. FC. erit IO. ad IP. vt NH ad NF. (2. *l* 6) sed H. est *centrum* △ DEF. & NH. tertia pars ipsius NF. (1. M. 2.) Ergo etiam IO. erit tertia pars ipsius IP.

IP. (1. l. 5.) Ergo cũ PI. bisecet basim △ PQR. erit O. *centrum* ipsius (1. M. 2) quod est in recta HG. Quod erat, &c.

Similitèr ex Parallelismo continuabitur demonstratio si prisma Poligonum fuerit, quod vel leui meditatione Lectori Geometræ perspicuum erit.

CAP.

CAPVT III.

DE SOLIDIS ORDINATIS.

IN decimo tertio Elementorum libro Euclides egit de solidis regularibus, quibus addidere plura scitu dignissima Hypsicles, Cădalla, & Campanus, quæ apud nostrum P. Clauium videri possunt in 14. 15. & 16. Elementorum libris. Eorum nos hic aliqua delibabimus, quæ ad Minimorum doctrinam spectant; & alia non pauca ab Euclide, & prædictis Authoribus intacta, facili, clara, & singulari methodo demonstrabimus. Non dubito quin plura nos lateant, quæ ex minimis elici potuere, utinam Lector Geometra eorum meditationi acriorem mentem adijciat, & Colophonē addat; ut quod nos latuere, discamus ab eo, cui Minimorum diuturna meditatione fessi haud sterile Geometriæ fundum excolendum relinquimus.

PRO-

PROPOSITIO CL.

SI ex angulo Tetraedri regularis ducatur perpendicularis in planum oppositum, cadet in trianguli centrum, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 25.

TEtraedrum regulare, siue ordinatum est Pyramis quatuor triangulis æquilateris comprehensa. Sit ergo Tetraedrum regulare ABCD. & ex quolibet angulo D. perpendicularis ducatur DG. in planum ABC. Dico punctum G. in quo recta planum trianguli secat, esse *centrum ffß*. trianguli ABC. & *econuerso* si DG. cadat in *centrum* trianguli. Dico esse ipsius plano perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

PEr punctum G. ducantur AGF. BGH. CGE. & quia DG. est plano perpendicularis erunt omnes anguli DGH. DGE. &c. recti: Ergo quadratum rectæ DA. oppositæ angulo recto DGA. erit æquale quadratis DG. GA. (4. *l.* 2.) Similiter quadratum DB. erit æquale quadratis DG. GB tum quadratum DC. æquale quadratis DG. GC (4 *l.* 2.) Ergo cum latera Tetraedri DA. DB. DC. sint æqualia, erunt etiam æqualia quadrata DG. GA. ipsis DG. GC. & ipsis DG. GB. Ergo ablato communi DG. æqualia

lia erunt quadrata GA. GB. GC vnde & æquales erunt rectæ GA. GB. GC. Ergo si ex G. radio GA. circulus describatur, erunt puncta A. B. C. in peripheria circuli circunscripti: sed cētrum circuli circunscripti est centrum ff ff. trianguli regularis, vel æquilateri (109. M. 2.) Ergo punctum G. est centrum ff ff. Trianguli A B C. Quod erat, &c.

E conuersò: Si recta DG. cadat in centrum ff. ff. trianguli ABC. erit G. centrum circuli circunscripti (109. M. 2.) Ergo radij GA. GB. GC. erũt æquales: sed etiã latera Tetraedri DA. DB. DC. sunt æqualia: & latus DG. commune: Ergo triangula DGA. DGB. DGC. sunt omninò æqualia (4. l. 1.) Sic omnes anguli in G. recti: & DG perpendicularis. Quod, &c.

PROPOSITIO CII.

SI ex angulis Tetraedri regularis ducãtur perpendiculares in plana opposita, omnes sunt æquales, & se quadrifariam intersecant in centro ff. ss. Tetraedri, & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro regulari ABCD. ducantur perpẽdiculares DG. BK. &c. Dico illas esse æquales, & transire per *centrum ff. ss.* Tetraedri O. & omnes in eo quadrifariam se intersecare, in ratione 1, ad 4. Et *econuerso* si rectæ DG. CK. &c. transeant per *centrum ff. ss.* O. Dico esse perpẽdiculares, & consequentèr incidere in planorum *centra*: vel si omnes se in eadem ratione secent transire per *centrum*, & esse perpendiculares, &c.

DEMONSTRATIO.

CVm triangula æquilatera A B C. A CD. æqualia sint circulorum radij G A. KD. æquales erunt: & quia perpendiculorum anguli sunt æquales recti DKB. DGB. erit quadratum DB. æquale quadratis DK. KB. (4. *l.* 2.) & paritèr quadratum DB. erit æquale quadratis DG. GB (4. *l.* 2.) Ergo quadrata DK. KB. æqualia sunt quadratis DG. GB. Ergo ablatis vtrinque quadratis æqualibus DK. GB. remanenebunt æqualia quadrata DG. BK. Ergo etiam rectæ perpendiculares DG. BK. æquales sunt.

Deinde cùm G. sit *centrum* plani ABC (101. *p.*) erit *centrum* ff. ff. Tetraedri in quarta parte rectæ GD. & similiter in quarta parte KB (1. *p*) Ergo quia *centrum* ff. ff. est vnicum (60. M. 1.) perpendicula BK. DG. &c. se in *centro* ff. ff. O. quadrifariam secant, vel vt 1. ad 4. Quod erat, &c.

E conuersò. Si DG. trāseat per *entrum* ff. ff. O. erit G. *centrum* basis (1. *p.*) Ergo erit DG. perpendicularis plano ABC (101. *p.*) idemque est de reliquis. Si verò tres rectæ ex A. B. C. se in eadem ratione secent in recta DG. erit hæc per *ccentrum* ff. ff. (47. *p.*) similitèr erit BK. per *centrum*, &c. Vnde & perpendiculares æquales erunt. Quod, &c.

PROPOSITIO CIII.

Centrum ff. ſſ. Tetraedri regularis eſt ipſum centrum vtriuſque ſphæræ inſcriptæ, & circunſcriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 25.

Sit Tetraedrum ABCD. cui intelligatur inſcripta, & circunſcripta ſphæra. Dico *centrum ff. ſſ.* Tetraedri eſſe *centrum* vtriuſque ſphæræ.

DEMONSTRATIO.

Quia omnia perpendicula ſunt æqualia, & ſe interſecant in O. vt 1. ad 4. æquales erunt OG. OK. &c. (102. *p.*) Ergo ſi radio OG. deſcribatur ſphæra, cum radius OG. ſit plano ABC. perpendicularis (102. *p.*) ſphæra tanget planum ABC. & ſimiliter alia plana: Ergo erit ſphæra inſcripta.

Rurſus quia DO. BO. &c. æquales ſunt (102. *p.*) ſi radio OB. ſphæra deſcribatur ex *centro* O. tranſibit hæc per omnes Tetraedri angulos ſolidos, & erit circunſcripta: Ergo *centrum ff. ſſ.* O. eſt vtriuſque ſphæræ *centrum*. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO . CIV.

SI in Tetraedro regulari sumatur quodlibet punctum, ex quo ducantur perpendiculares ad quatuor plana, omnium summa æqualis est perpendiculo ab angulo in planum oppositum.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum ABCD. & punctum assumptum O. perpendiculares sint OG. OK. &c. Dico omnium summam æqualem esse perpendiculo DG.

DEMONSTRATIO.

DVcantur ex O. rectæ OA. OB. &c. & Tetraedrum diuisum erit in quatuor Pyramides ABCO. ADCO. DCBO. ADBO. quæ omnes habent æqualem basim cum Tetraedro: & se habent vt altitudines (5 *l.* 11.) Ergo etiā summa Pyramidum ad Tetraedrum erit vt summa perpendiculorū ad Tetraedri perpendiculum (4. *l.* 5.) Ergo cum summa Pyramidum sit Tetraedro æqualis, quia hoc ex illis componitur, summa perpendicularium æqualis erit perpendiculo Tetraedri (2. *l.* 5.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CV.

IN Tetraedro regulari si inter plana eundem angulum comprehendentia, & infra basim cõtinuata sumatur punctum, perpendicularis in planum angulo oppositum, est differentia inter reliquarum summam, & perpendiculum Tetraedri.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum ABCD. & extra ipsum sumatur punctum P. quod sit inter plana continuata, quæ comprehendunt solidum angulũ A. & ex P. ducantur perpendicula in omnia plana Tetraedri. Dico perpendiculum ex P. in planum BCD. oppositum ipsi angulo A. esse excessum, quo summa trium perpendiculorum in plana ABC. ACD. ABD. superant perpendiculum ipsius Tetraedri ex A. in planum oppositum.

DEMONSTRATIO.

PEr punctum P. intelligatur ductum planum NML. parallelum plano BCD. eritque solidum ANML. Tetraedrum regulare simile Tetraedro ABCD. (5. *l.* 11.) Ergo cum perpendiculum ex P. in planum NML. nullum sit, quia punctum P. est in ipso plano, reliqua tria perpendicula æqualia erunt perpendiculo ex

An-

Angulo A. in planum oppositum NML (104. *p.*) sed perpendiculum ex A. in planum NML. superat perpendiculum ex A. in planum BCD. toto perpēdiculo communi inter vtrumque planum parallelum BCD. NML. Ergo quia perpendiculum ex P. in planum BCD. est cōmune perpendiculum inter vtrumque planū parallelum BCD. NML (3. *l.* 11.) erit perpendiculum ex P. differencia, siuè excessus, quo summa perpēdiculorum in plana ADC. ADB. ABC. superat perpendiculum Tetraedri ex angulo A. in planum oppositum ABC. Idemque est de quolibet alio perpendiculo ex quouis angulo in planum sibi oppositū, cum omnia sint æqualia ex *prop.* 102. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CVI.

IN Tetraedro regulari si extra, & inter plana supra verticem alicuius anguli continuata sumatur punctum, perpendiculares ex ipso in plana angulum comprehendentia sunt differentia, vel excessus quo perpendiculum ex eodem puncto in planum angulo oppositum superat perpendiculum ipsius Tetraedri.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN eodem Tetraedro ABCD. assumptum sit quodlibet punctū S. inter plana BAC. BCD. BAD. vltra verticem anguli B continuatā, & ex puncto S. ducta intelligantur quatuor perpendicula in plana Tetraedri cōtinuata BQR. BRN. BQN ACD. Dico tria perpendicula in plana BQR. BRN. BQN. esse differentiam, siue excessum quo perpendiculum ex S. in planum ADC. superat perpendiculum Tetraedri BK. vel DG.

DEMONSTRATIO.

PEr punctum S. intelligatur ductum planum QRN. parallelum plano ADC. quod angulo B. oppositum est, eritque solidum QRNB. Tetraedrum regulare simile ipsi Tetraedro AB CD. (5. *l.* 11.) Ergo quoniam perpendiculum ex S. in planum QRN. nullum est, eo quod pun-

punctum S. reperitur in eodem plano, reliqua perpendicula ex S. in tria plana BQR. BRN. BQN. æqualia erunt perpendiculo ex angulo B in planum QRN. quod est perpendiculum Tetraedri QRNB (104 p.) sed perpendiculũ ex B. in planum QRN. est etiam perpendiculũ ex B. in planum parallelum ACD. quia plana parallela habent commune perpendiculum (7 l. 11.) Ergo perpendiculum ex B. in planum QRN. est differentia inter perpendiculum vtriusque plani, & perpendiculum ex B. in planum ADC. Ergo quia perpendicula ex S. in plana BQR BRN. BNQ. æqualia sunt ipsi perpendiculo ex B. in planum QRN. sunt differẽtia, vel excessus, quo perpendiculum ex S. in ADC. superat perpendiculum BK. Tetraedri. Quod, &c.

PROPOSITIO CCVIII

SI in Tetraedro regulari inscribatur, & circumscribatur sphæra; diameter circumscriptæ potest noncuplum diametri sphæræ inscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum ABCD. & eius *centrum* sit O. quod erit vtriusque sphæræ *cētrum* (103. *p.*) Dico potentiam diametri sphæræ ex O circunscriptæ noncuplam esse potentiæ diametri sphæræ ex O. inscriptæ.

DEMONSTRATIO.

DVcto perpendiculo BK. transibit per *centrum* O (102. *p.*) & erit OK. radius sphæræ inscriptæ, & OB. circumscriptæ, & KO. tertia pars ipsius OB. (103. *p.*) sed diametri sunt vt semidiametri (5. *l.* 5.) Ergo cùm potentiæ, vel quadrata sint in duplicata ratione laterum (4. *l.* 6.) si sumantur continuæ 1. 3. 9. erit quadratũ diametri sphæræ inscriptæ ad quadratum circunscriptæ vt 1. ad 9. Ergo huius potentia est noncupla illius. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CVIII.

Potentia diametri sphæræ Tetraedro regulari circunscriptæ est sesquialtera potentiæ lateris Tetraedri vt 3. ad 2.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN eodem Tetraedro. Dico quadratum diametri sphæræ circunscriptæ sesquialterum esse quadrati lateris AD.

DEMONSTRATIO.

CVm omnes anguli solidi A. B. C. D. sint in superficie sphæræ circunscriptæ, erit summa ∬. ex lateribus AB. AC. AD. æqualis minimæ summæ OA. OB. OC. OD. + 4 ∬. OA. (60. M. 1.) Ergo Quadrata AB. AC. AD. æquantur 8. quadratis OA. Ergo qualium quadratum radij OA. est 9. summa quadratorum AB. AC. AD. erit 72. & quia quadrata AB. AC. AD. sunt æqualia ex æqualibus lateribus, quodlibet erit 24. sed qualium quadratũ radij OA. est 9. quadratum dupli radij, hoc est diametri est 36 (3. *l.* 2.) Ergo quadratum diametri ad quadratum lateris AB. est vt 36. ad 24. vel vt 3. ad 2. nempè sesquialterum. Quod, &c.

PROPOSITIO [illegible]

Potentia diametri circuli ambientis basim Tetraedri est sesquitertia potentiæ lateris ipsius Tetraedri, ut 4. ad 3.

EXPOSITIO. Fig. 21.

Sit ABC. basis Tetraedri, & illius *centrum* G. ex quo intelligatur circulus descriptus radio GA. Dico quadratum diametri, hoc est duplæ AG. esse ad quadratum lateris AB. ut 4. ad 3.

DEMONSTRATIO.

Cum ABC. sit triangulum æquilaterum circulo inscriptum, erit quadratum lateris AB. triplum quadrati radij GA (112. M. 2.) sed quadratum diametri, vel dupli radij est quadruplum quadrati radij (3.12.) Ergo qualium quadratum radij AG. est 1. quadratum lateris AB. erit 3. & quadratum diametri erit 4. Ergo invertendo quadratum diametri circularis ad quadratum lateris Tetraedri est ut 4. ad 3. vel ut 32. ad 24. Est igitur potentia diametri circularis sesquitertia potentiæ lateris Tetraedri. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CX.

IN Tetraedro regulari Potẽtia diametri circuli ambientis basim octupla est potentiæ diametri sphæræ inscriptæ; & potentia lateris sextupla eiusdem.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN eodem Tetraedro. Dico potentiam dupli radij AG. octuplam esse potentiæ dupli radij OG. sphæræ inscriptæ, & potẽtiam lateris AB. esse sextuplam potentiæ eiusdem duplæ OG.

DEMONSTRATIO.

QValium potentia GO. est 1. potentia diametri, vel dupli radij est 4 (3 l. 2.) sed potentia diametri circunscriptæ, vel dupli radij OA. est nonecupla nempè 36 (97 p.) & potentia lateris AB. est 24 (98 p.) & potentia diametri circularis, vel dupli radij GA. est 32 (99 p.) Ergo potẽtia diametri circularis octupla est potentiæ diametri inscriptæ vt 32. ad 4 & Potentia lateris Tetraedri est sextupla eiusdem vt 24. ad 4. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXI.

IN Tetraedro regulari potentia radij sphæræ circumscriptæ ad Potentiam radij circularis est vt 9. ad 8. vel sesquioctaua, idemque est de diametris.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN eodem Tetraedro ABCD. radius sphæræ circumscriptæ est OB. (103. *p.*) radius verò circuli ambientis basim est GB. Dico quadratum OB. esse sesquioctauum quadrati GB. vel □ OB. ad □ GB. esse vt 9. ad 8.

DEMONSTRATIO.

QVoniam Triangulum BGO. est rectangulum (102. *p.*) erit quadratum OB. æquale quadratis OG. GB. (4. *l.* 2.) sed qualium quadratum OG. est 1. quadratum OB. est 9. (97. *p.*) Ergo cum quadratum GB. sit differentia quadratorum OB. & OG. qualium quadratum OB. est 9. erit quadratum GB. 8. &c. Ergo illud est sesquioctauum huius. Quod erat, &c.

Constat etiam ex demonstratione *prop.* 110. □ OB. esse 36. & □ GB. 32. scilicet vt 9. ad 8. &c.

PROPOSITIO CXII.

IN Tetraedro regulari Potentia perpendiculi à vertice ad basim dupla est potentia radij circuli ambientis basim.

Consect. *Perpendiculum à vertice in basim est ad radium circuli ambientis basim Tetraedri, vt diameter quadrati ad suum latus.*

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum regulare ABCD. & recta DG. ex angulo D. sit perpēdicularis plano opposito ABC. & ducatur recta GA. vel GB. vel GC. Dico Potentiam rectæ DG. esse duplam potētiæ rectæ GA, &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam angulus DGB. est rectus ex *hyp*. est quadratum lateris DB. æquale quadratis BG. GD (4. *l*. 2.) sed qualium DB. est potentia 24. quadratum duplæ GB. est 32 (109. *p*.) Ergo quadratum GB. erit 8 (3. *l*. 2.) Ergo quadratum DG. differentia quadratorum DB. & BG. erit 16. dupla scilicet potentiæ GB. Vnde GD. ad GB. est vt diameter quadrati ad latus. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXIII.

IN Tetraedro regulari Potentia perpendiculi à centro basis in latus, dupla est potentia perpendiculi à centro ipsius Tetraedri in basim: eo de recta sunt vt diameter ad latus quadrati: & perpendiculum à centro basis ad perpendiculum à centro Tetraedri est vt perpendiculum à vertice ad radium circularem.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt in Tetraedro ABCD. recta DOG. perpendiculum à vertice: & OG à *centro* Tetraedri: & GH. à *centro* basis: & GB. radius circularis. Dico potentiam GH. esse duplam potentiæ OG. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam G. est *centrum* basis (101. *p.*) BGH. bisecat latus AC. & HG. est dimidium GB. (1. M. 2.) & GH. perpendicularis (5. *k* 1.) Ergo □ HG. est quarta pars □ GB. (3. *l*. 2.) sed qualium □ GO. est 1. quadratum BG. est 8 (111. *p.*) Ergo □ GH. erit 2. duplum scilicet □ GO. vnde GH. ad GO. est vt diameter quadrati ad suum latus; & erunt vt GH. ad GO. ita DG ad GB (112. *p.*) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXIV.

IN Tetraedro regulari Potentia recta à centro in dimidium latus tripla est potentia perpendiculi à centro in basim, unde recta ad perpedicu-lum est ut latus Tetraedri ad radium circuli ambientis basim: vel ut latus △ ad radium.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro regulari ex *centro ff. ss.* O. ducatur perpendicularis GO. & recta OE. in dimidium lateris. Dico quadratum OE triplum esse quadrati OG. & rectam OE. ad OG. esse vt latus Tetraedri DB. ad radium GB. circuli ambientis basim.

DEMONSTRATIO.

QVoniam angulus OGE. rectus est ex *hyp.* quadratum OE. æquale est quadratis OG. GE. (47. l. 2.) sed qualium quadratum OG. est 1. quadratum GE. est 2. (113. *p.*) Ergo quadratum OE. summa quadratorum OG. GE. erit 3. scilicet triplum quadrati OG. sed etiam quadratum lateris AB. triplum est quadrati radij GE. (12. l. M. 2.) Ergo cum quadrata sint in eadem ratione, est recta OE. ad OG. vt AB. ad BG. (4. lib. 1.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXV.

IN Tetraedro regulari recta à centro ff. ſſ. in dimidium latus eſt medio loco proportionalis inter ſegmenta perpendiculi, vel inter radios vtriuſque ſphæræ: & facit cum perpendiculo Triangulum illi ſimile, quod fit ex perpendiculo, & latere.

EXPOSITIO. Fig. 25.

EX *centro ff ſſ.* O. ducta ſit OE. & perpẽdiculum DOG. Dico OE. eſſe mediã inter DO. OG. & Triangulum EOG. eſſe ſimile Triangulo DGC.

DEMONSTRATIO.

QValium □ OG. eſt 1. quadratum OE. eſt 3. (114.*p.*) & □ DO. eſt 9. (107.*p.*) Ergo cum quadrata 1.3.9. ſint continua, etiam rectæ cõtinuè proportionales erunt (4.*l*.6.) OG. ad OE. vt OE. ad OD. Ergo OE. media eſt inter radios vtriuſque ſphæræ.

Inſuper quia □ GE. eſt 2. & □ OG. 1 (113.*p.*) & □ DG. 16. & □ GB. 8. (112.*p.*) eſt GE. ad OG. vt DG. ad GB. (4.*l*.6.) Ergo cum anguli DGB. OGE. ſint æquales recti, erunt triãgula EGO. DGB. vel DGC. ſimilia (2.*l*.6.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXVI.

SEmilatus Tetraedri regularis medium est inter radium sphæræ circunscriptæ, & diametrum inscriptæ: & etiam inter perpendiculum ab angulo in latus, & minus segmentum ipsius: & etiam inter perpendiculum à centro Tetraedri, & diametrum sphæræ circunscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro ABCD. Dico AE. dimidium lateris esse medium inter OB. & 2OK. & inter BH. HG. & inter OG. & 2OB.

DEMONSTRATIO.

QVoniam □ AB. lateris est 24. qualiũ □ OG. est 1. (108. & 107 *p.*) Ergo □ AE. erit quarta pars, scilicèt 6. (3. *l.* 2.) sed □ OB. est 9. & □ OG. 1 (107 *p.*) vel □ 2OG. est 4 (3. *l.* 2.) Ergo sũt cõtinua quadrata □ OB. 9. □ AE. 6 □ 2OG. 4: Ergo etiam rectæ (4. *l.* 6.) Insuper □ HG. est 2. (113. *p.*) & □ AE. 6. & □ BH. 18. nempè differentia □ AB. & AE. vel AH. Ergo continua sunt □ HG. 2. □ AE. 6. □ BH. 18. Tandem □ OG. est 1. □ AE. 6. □ 2OB. 36. Ergo etiam sunt continua. Quod, &c.

PROPOSITIO CXVII.

LAtus Tetraedri medium est inter perpendiculum à vertice, & diametrum sphæræ circunscriptæ. Similiter inter perpendiculum ab angulo in latus, & diametrum circuli ambientis basim.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro ABCD. Dico latus AB esse medium inter DG. & 2OB. & similiter inter AF. & 2AG.

DEMONSTRATIO.

QVoniam □ DA. est 24. & □ AG. 8 (112. *p.*) erit □ DG. 16 (4 *l.* 2.) & □ GO. 1. & □ diametri, vel 2OB. est 36 (97. *p.*) Ergo sunt continua quadrata □ 2OB 36. □ AB. 24. □ DG. 16. in ratione sesquialtera: Ergo & rectæ proportionales erunt (4 *l.* 6.)

Similiter quia □ BA. est 24 (112 *p.*) & □ AH 6 (3. *l.* 2) & □ AF. differētia □ BA. & □ AH. est □ AF. 18 (4. *l.* 2.) & □ 2BG 32 (112 *p.*) Ergo continua sunt □ 2BG 32. □ BA. 24. □ AF. 18. in ratione sesquitertia: vnde & rectæ proportionales erunt. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXVIII.

SI ex vertice Tetraedri regularis ducatur recta per centrum ff.ſſ. in baſim, & ab angulo baſis recta per ſectionem in latus erunt ſex continua in ratione lateris quadrati ad diametrum, ſcilicet Perpendiculum à centro Tetraedri, perpendiculum à centro baſis, diameter ſphæræ inſcriptæ, radius circularis, perpendiculum à vertice, diameter circuli.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro ABCD ducatur DG per *centrũ ff.ſſ.* O. & BGH. Dico eſſe ſex continuas OG. GH. 2OG. GB. GD. 2AG.

DEMONSTRATIO.

QValium □ OG. eſt 1. eſt □ GH. 2. & □ 2OG. 4. & □ GB. 8. & □ GD. 16. & □ 2AG. 32. quæ omnia conſtant ex præcedentibus: Ergo cùm quadrata ſint vt quadratum lateris ad □ diametri eiuſdem; erunt rectæ vt latus ad diametrum (4. *l.* 6.) Quod erat, &c.

Plures aliæ rationes continuæ, vel non cõtinuæ ex ſequenti tabella elici poſſunt, in qua omnia demonſtrata facilè conſpiciuntur.

TA-

TABVLA TETRAEDRI
continens rectarum potentias, qualium radius sphæræ inscriptæ est 1.

Radius sphæræ inscriptæ GO.	1.
Radius circuli inscripti GH.	2.
Radius sphæræ tangentis latera OE.	3.
Diameter sphæræ inscriptæ 2OG.	4.
Summa □ □ ad planorum centra.	4.
Semilatus Tetraedri AE.	6.
Radius circuli circunscripti GB.	8.
Radius sphæræ circunscriptæ OB.	9.
Perpendiculum ab angulo in basim DG.	16.
Perpendiculum ab ang. in latus BH.	18.
Summa ad dimidia latera ex O.	18.
Latus Tetraedri AB.	24.
Diameter circuli circa basim 2AG.	32.
Diameter sphæræ circunscriptæ.	36.
Minima summa ex centro O.	36.
Summa ex semilateribus cunctis.	36.
Summa ex plani centro ad ang.	40.
Summa ex angulo in reliquos.	72.
Summa ex cunctis lateribus.	144.

Hinc etiam Geometra quænam rectæ inter se rationales, vel irrationales sint leui meditatione percipiet.

PRO-

PROPOSITIO CXIX.

SI solidum quadratis sex comprehendatur Hexaedrum regulare erit, & parallelepipedum rectangulum, qui cubus dicitur.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt solidum A E. sex quadratis cōprehensum. Dico esse regulare, & parallelepipedum rectangulum, nempè cubum.

DEMONSTRATIO.

CVm angulus quadrati BAG. rectus sit, & etiam CAG. est GA. plano AD. perpēdicularis (4. l. 11.) & similitèr plano GE. Ergo plana AD. GE. cum habeant commune perpendiculum AG parallela sunt (3. l. 11.) Idem ostendetur de planis AF. BE. tum CE. AH. Ergo solidum parallelepipedum est: deindè omnia latera sunt æqualia, & omnes anguli plani recti similiter dispositi: Ergo omnes anguli solidi recti æquales sunt: Ergo cum solidum habeat sex hædras, vel superficies, & omnes angulos solidos æquales, & etiam latera, erit Hexaedrū parallelepipedum rectāgulum regulare. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO ICXX.

Plana, quæ secant per angulos cubum, rectangula sunt invicem perpendicularia.

2. Ipsa, & eorum sectio duobus cubi planis sunt perpendicularia.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Sit Cubus AE. sectus planis AGCE. BDFH. Dico illa esse rectangula, & invicem perpẽdicularia: & ipsa, atque sectionem LR. esse perpendicularia planis GE. AC.

DEMONSTRATIO.

CVm BH. sit perpendicularis planis GE. AC. (119. *p.*) erit etiam perpendicularis rectis HF. BD. Ergo cum anguli FHB. HBD. sint recti parallelæ sunt HF. BD. (2. *l.* 1.) Ergo HD. rectangulum est: & etiam HL. Ergo cum in quadrato GE anguli in R. sint recti ex triangulis æqualibus (4. *l.* 1.) est HR. perpendicularis GE. & RL. Ergo & plano GC (1. *l.* 11.) Ergo & planum HD. transiens per ipsam est plano GC. perpendiculare (3. *l.* 11.) Deinde cum plana GC. HD. transeant per GA. FD. quæ sunt planis GE. AC. perpendiculares etiam plana GC. HD. perpendicularia erunt planis GE. AC. & & etiam eorum sectio RL (2. *l.* 11.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXI.

I*N Cubo centrum ff. ff. est ipsum centrum sphæræ circunscriptæ, inscriptæ, & tangentis latera.*

EXPOSITIO. Fig. 26.

SIt Cubus AE. eius diameter BF. & BL. coniungat *centra* duplicis plani oppositi: quia Cubus est parallelepipedum, erit sectio O. *centrum ff. ff.* Cubi (73 *p.*) Dico *centrum ff. ff.* O. esse *centrum* sphæræ inscriptæ, & circunscriptæ.

DEMONSTRATIO.

QVia Cubus est Parallelepipedum rectangulum (119. *p.*) omnes diametri æquales erunt (80. *p.*) Ergo cum O. sit in medio omnium diametrorum (73. *p.*) æqualitèr distabit O. ab omnibus angulis: Ergo erit *centrum* sphæræ circunscriptæ. Similitèr recta LR. æqualis est lateri HB. (7. *l.* 1.) idemque est de qualibet recta coniungente opposita *centra*: Ergo cum *centrum* O sit in earum dimidio (71. *p.*) & ipsæ sint planis perpendiculares (120. *p.*) punctum O. æqualitèr distabit ab illis: Ergo erit *cētrum* sphæræ inscriptæ. Similitèr O. est in medio MN. perpendicularis lateribus (7. *l.* 1.) Ergo est etiam *centrum* sphæræ lateribus inscriptæ. Quod, &c.

PROPOSITIO CXXII.

Minima summa ff.ſſ. ex centro Cubi æqualis est minimæ ad contactus laterum, & vtraque 6 ff.ſſ. ex latere ipſius Cubi, vel dimidium ſummæ ff.ſſ. ex omnibus lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 26.

SIt Cubus AE. illius *centrum* O. Dico minimam ſummam *ff.ſſ.* ex O. in omnes angulos ſolidos A. B. C. D. E. F. G. H. æqualem eſſe OM. ON. &c. & ſex figuris ſimilibus ex latere BC. vel dimidiũ ſummæ *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus.

DEMONSTRATIO.

SInt L. & R. *centra* planorum: erit *centrum* cubi O. in dimidio rectæ LR. (71 *p.*) Minima ſumma *ff.ſſ.* ex R. æquatur *ff.ſſ.* GH HE. (58 M. 2.) Ergo ſumma ex O. æquatur minimæ ex R. + 4 *ff.ſſ.* OR (60 M. 1.) hoc eſt æquatur GH. HB + RL (3. *l.* 2.) Similitèr ſumma ex O in puncta A. B. C. D. æquabitur ſummæ AB + BC + LR. vel BH. Ergo ſumma ex O. æqualis eſt ſex figuris GH. HB. RL. AB. BC. RL. Deinde cùm OM. ON. &c. æquales ſint BL (7. *l.* 1.) & □ BC. æquale 2 □ BL (4. *l.* 2) erunt 12 *ff.* OM. in 12. latera æquales 6 *ff.* BC. Ergo vtraque minima ſumma eſt æqualis, & dimidium *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus cùm latera ſint 12. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CCXXIII.

Summa ff.ſſ. ex omnibus diametris Cubi dupla eſt minimæ ſummæ: & æqualis ſummæ ff.ſſ. ex omnibus lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN Cubo A E. ductæ intelligantur quatuor diametri ex angulis E. F. G. H. in oppoſitos. Dico ſummam *ff.ſſ.* ex omnibus eſſe duplam minimæ, & eſſe æqualem ſummæ *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus.

DEMONSTRATIO.

QVia *centrum ff.ſſ.* O. eſt *centrum* ſphæræ circumſcriptæ (121. *p.*) erunt omnes rectæ ex O. ad angulos æquales ipſi OF. Ergo minima ſumma ad 8. angulos æquatur 8. figuris OF. ſed figura FB. æquatur 4. figuris OF. quia recta BF. eſt dupla ipſius OF (3. *l.* 2.) Ergo figuræ ex quatuor diametris æquantur 16. figuris OF. Ergo ſumma *ff.ſſ.* ex quatuor diametris dupla eſt minimæ ſummæ *ff.ſſ.* ſed etiam ſumma *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus eſt dupla minimæ ſummæ (122. *p.*) Ergo ſumma *ff.* ex omnibus diametris æqualis eſt ſummæ *ff.* ex omnibus lateribus. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXIV.

Diameter Cubi, vel sphæræ circumscriptæ tripla est potentia lateris Cubi, vel diametri sphæræ inscriptæ. 2. Et dupla minimæ summæ ad contactus planorum. 3. Et sesquialtera diametri circuli circa □.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN Cubo AE. ducta sit diameter BF. Dico eius potentiam esse triplam potentiæ lateris BC. vel diametrum sphæræ circumscriptæ BF. triplam esse potentia diametri sphæ ræ inscriptæ LR. & sesquialteram diametri AC.

DEMONSTRATIO.

1. SVmma Quadratorum ex quatuor diametris æqualis est summæ quadratorũ ex duodecim lateribus (123. *p.*) Ergo quadratum cuiuslibet diametri Cubi, vel sphæræ circumscriptæ cùm ones sint æquales, erit æquale tribus quadratis ex tribus lateribus: vel triplũ erit quadrati ex latere BH. vel diametri spheræ inscriptæ LR.

2. Deindè cùm OL. sit dimidium RL. vel FB. est □ FD. æquale 4 □ OL. sed □ BF. æquatur 3 □ FD. Ergo & 12 □ OL. Ergo □ BF. duplum est 6 □ OL. vel minimæ summæ ex *centro* O. in 6. planorum *centra*.

3. Tan-

3. Tandem, quia potentia A C. est dupla A.D.(4 *l.*2.) qualium □ AD. est 2. est □ AC 4. & □ BF 6: Ergo □ BF. ad □ AC. vt 6 ad 4. vel sesquialterum. Quod, &c.

PROPOSITIO CXXV.

SVmma ff. ss. ex quolibet puncto superficiei sphæræ circunscriptæ, vel ex quolibet angulo Cubi dupla est minimæ summæ: & æqualis summæ ff. ss. ex omnibus diametris: & etiam ex omnibus lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN Cubo AE. ex *centro* O. radio OF. intelligatur sphæra circunscripta. Dico summã *ff. ss.* ex quolibet puncto superficiei, vel ex quolibet angulo F. duplã esse minimæ summæ, & æqualem summæ ex diametris, vel lateribus.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex quolibet pũcto superficiei sphæricæ æqualis est minimæ + 8 *ff. ss.* ex radio OF. (60. M. 1.) sed minima summa æqualis est 8 *ff.* OF. Ergo illa æqualis est 16. *ff* OF. Ergo est dupla minimæ: sed etiam summa *ff. ss.* ex omnibus diametris, vel ex omnibus lateribus est dupla minimæ (123. *p.*) Ergo summa ex quolibet superficiei puncto æqualis est summæ ex omnibus diametris, vel ex omnibus lateribus.

Idemilliemque est de angulo, qui est in superficie. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXVI.

SVmma ff. ff. ex quolibet pũcto superficiei sphæræ inscriptæ, vel ex quolibet planorum centro æqualis est 8. ff. ff. ex latere Cubi: & sesquitertia minimæ summæ.

EXPOSITIO: Fig. 26.

SIt Cubus A E. *centrum* O. radius sphæræ inscriptæ OR. Dico summa *ff. ff.* ex quolibet pũcto superficiei spheræ inscriptæ, vel ex quolibet *centro* planorum R. æqualem esse 8. *ff. ff.* ex latere BC. & sesquitertiam minimæ summæ ex O.

DEMONSTRATIO.

EX quolibet puncto superficiei sphæræ inscriptæ est summa *ff. ff.* æqualis minimæ + 8 *ff. ff.* OR (60. M. 1.) hoc est + 2 *ff. ff.* RL. vel BC. (3. *l.* 2.) sed minima summa ex O. æqualis est 6 *ff. ff.* BC (122. *p.*) Ergo summa ex quolibet puncto superficiei sphæræ inscriptæ est æqualis 8 *ff. ff.* BC. Idemque est de *centris* planorum, cùm sint in superficie sphæræ inscriptæ: Ergo cum dicta summa sit 8 *ff. ff.* & minima sit 6 *ff. ff.* (122. *p.*) erit illa ad istam sesquitertia. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXXVII.

SVmma ff.ſſ. ex quolibet pũcto ſuperficiei ſphæræ tangentis latera cubi, vel ex dimidio cuiuſlibet lateris, æqualis eſt 10. ff ſſ. ex latere cubi; & ſubſeſquiquinta ſũmæ ff.ſſ. ex lateribus omnibus.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN Cubo AE. intelligatur per O. planum baſi parallelum biſecans latera, eritq; MO. æqualis BL. ſi radio MO. deſcribatur ſphæra tãgens omnia latera: Dico ſummam ff ſſ. ex quouis ſuperficiei pũcto æqualẽ eſſe 10. ff ſſ. ex latere BC.

DEMONSTRATIO.

SVmma ff. ſſ. ex quouis ſuperficiei puncto æqualis eſt minimæ ex O + 8ff.ſſ. ex radio OL. (60. M. 1.) vel + 2ff.ſſ. ex MN. vel BD. (3. *l.* 2.) vel 4ff.ſſ. BC. cùm quadratum BD. ſit æquale 2 quadratis BC. CD. vel 2. BC (4. *l.* 2.) Ergo cũ minima ſumma ſit 6ff.ſſ. BC (122. *p.*) erit ſumma ex quolibet puncto ſuperficiei æqualis 10. ff.ſſ. ex latere BC. Idemque eſt de puncto medio cuiuslibet lateris cũ illud ſit in ſuperficie ſphæræ tangentis latera: Ergo cùm latera Cubi ſint 12. ſumma ff.ſſ. ex quouis puncto dictæ ſuperficiei ad ſummam ff.ſſ. ex omnibus lateribus erit vt 10. ad 12. vel vt 5. ad 6. hoc eſt ſubſeſquiquinta. Quod erat, &c.

Scho-

SCHOLIVM.

EX iam demonstratis colligitur sequens tabula continens rectarum Cubi potentias.

TABVLA POTENTIARVM CVBI.

Qualium Diameter Cubi potest.	36.
Radius circuli inscripti □.	3.
Radius sphæræ inscriptæ OR. potest.	3.
Perpendiculum à centro in basim.	3.
Perpendiculum à centro □ *in latus.*	3.
Radius sphæræ tangentis latera MO.	6.
Radius circuli quadrato circunscripti.	6.
Radius sphæræ circunscriptæ OF.	9.
Diiameter sphæræ planis inscriptæ.	12.
Latus Cubi.	12.
Distantia planorum oppositorum.	12.
Recta ab angulo in centrum basis EL.	18.
Diameter circuli circunscripti □.	24.
Diameter sphæræ tangentis latera MN.	24.
Diameter sphæræ circunscriptæ BF.	36.
Diameter Cubi BF.	36.
Minima summa ad contactus planorum.	18.
Minima summa ff. ss. ex centro O.	72.
Minima summa ad contactus laterum.	72.
Summa ex superficie inscriptæ sphæræ.	96.
Summa ex superficie tangentis latera.	120.
Summa ex superficie sphæræ circunscriptæ.	144.
Sũma ex omnibus diagoniis, vel lateribus.	144.

PRO-

PROPOSITIO CXXVIII.

SI tria quadrata æqualia se per angulos inuicem secent, eorum latera constituent octaedrum regulare octo triangulis æquilateris comprehensum, 24 angulis planis, & 6 solidis.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SInt ABCD. AFCE. BEDF. quadrata æqualia per angulos inuicem secta. Dico solidum ABCDEF. esse octaedrum regulare octo planis regularibus, nempè triangulis æquilateris comprehensum.

DEMONSTRATIO.

CVm latera AB. BF. FA. sint æqualia, est ABF. triangulum æquilaterum: similitèr FBC. CBE. EBA. ADF. FDC. CDE. EDA. Ergo totum solidum octo planis ordinatis triangularibus, & æqualibus cōprehenditur. Deindè quilibet angulus solidus B. cōprehenditur quatuor angulis planis æqualibus similitèr dispositis ABF. FBC. CBE. EBA. idemque est de alijs: Ergo omnes anguli solidi æquales sunt: Ergo cùm totum solidum æquilaterum, & æquiangulum sit octo planis regularibus comprehensum, erit octaedrum regulare. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXIX.

SI tria quadrata æqualia se per angulos secent, habent commune centrum, & sunt invicem perpendicularia.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SInt tria quadrata per angulos secta AC. BD. EF. Dico illa habere commune *centrum*, & esse invicem perpendicularia.

DEMONSTRATIO.

REcta AC. est communis sectio planorũ AFCE. ABCD. & est in plano AFCE. & Recta DF etiam est in plano AFCE. quia est communi sectio planorum AFCD. BEDF. Ergo cum sint diametri AC. DF. quadrati AFCE. in eorũ dimidio I. erit illius *centrum* (55. M. 2) similiter BD. bifariam secta erit in I. Ergo punctum I. est etiam *centrum* quadratorum ABCD. BE DF. Quod, &c.

2. Cum BI. bifariam diuidat bases AC. EF. in triangulis Isoscelibus ABC. FBF. erit perpẽdicularis AC. & EF (5. *l.* 1.) Ergo & plano AFC. (1. *l.* 11.) Ergo plana ABCD. EBFD. sunt perpendicularia plano AFCE (3. *l.* 11.) Idemque est de planis AFCE. ABCD. respectu plani EBFD. Ergo sunt invicem perpendicularia.

PRO-

PROPOSITIO CXXX.

Diametri omnes Octaedri transeunt per centrum prædictis tribus quadratis commune, in quo se omnes bifariam secant, & sunt æquales.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCDEF. diametri sunt AC. BD. EF. Dico omnes transire per *cētrum* ss. tribus quadratis cōmune: & in eo se bifariam secare.

DEMONSTRATIO.

CVm diameter BD. sit diameter etiam quadrati ABCD. transit per ipsius *centrum* (55 M. 1.) Ergo etiam transit per omnium *centrum* quod est commune (102 *p*.) Idem demonstratur de diametro AC. & EF. Ergo cùm diametri omnes Octaedri sint quadratorum diametri, & AC. BD. se bifariam secent in *centro* I. Quadrati ABCD. Idemque sit de diametris AC. EF. quæ sunt etiam quadrati AFCE. diametri omnes Octaedri se bifariam secabunt in communi quadratorum *centro*: Ergo omnes erunt æquales, quia sunt æqualium quadratorum diametri. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXI.

Centrum ff. ff. Octaedri est ipsum cētrum tribus quadratis commune, & est in dimidio rectæ coniungentis centra duplicis plani oppositi: quæ omnes cum diametris bifariam in centro secantur.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCD. sit I. *centrum* tribus quadratis commune. Dico esse etiam *centrum* ff. ff. Octaedri: & si G. O. sint *centra* planorum *centrum* I. esse in dimidio rectæ G O. & omnes rectas, quæ *centra* opposita iungūt se cum diametris bifariam secare in *centro* ff. ff. I.

DEMONSTRATIO.

Centrum ff. ff. ad A. B. C. D. est in cōcursu diametrorum quadrati AC. BD. (55. M. 2.) & *centrum* ad duo puncta E. F. est in medio diametri EF. (35. M. 1.) in eodem puncto I. Ergo *centrum* ad 6. angulos Octaedri est in eodem puncto I. (62. M. 1.) Deindè cùm O. sit *centrum* ad B. F. C & G. ad A. E. D. *centrum* ad A. B. C. D. E. F. erit in dimidio rectæ GO. (64. M. 1.) Ergo cùm I. sit *centrum* ad A. B. C. D. E. F. recta GO. transit per I. & in eo bifariam diuiditur. Quod de quibuslibet planis oppositis demonstratur:

Er-

Ergo omnes se bifariam cum diametris secant in *centro* I. Quod, &c.

PROPOSITIO CXXXII.

IN Octaedro recta coniungens centra duplicis plani oppositi est vtrique perpendicularis, & plana illa sunt parallela.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCDEF. sint G & O. *centra* duplicis plani oppositi ADE. FCB. Dico GO. esse vtrique plano perpendicularem, & plana ADE. FCB. esse parallela.

DEMONSTRATIO.

CVm enim *centrum* I. sit in diametrorũ concursu, in quo omnes se bifariam secãt (131. *p.*) erunt rectæ IB. IC. IF. æquales: & cùm BF. FC. CB. sint etiam æquales rectæ, Pyramis BFC. habebit basim æquilateram, & latera supra illam æqualia: Ergo recta IO. transiens per *centrum* basis BFC. erit ipsi perpendicularis (3. *p.*) similiter ostendetur IG perpẽdicularis plano ADE. Ergo cùm recta GIO. eadem sit (131. *p.*) est ipsa vtrique plano perpendicularis: Ergo cùm plana opposita habeant cõmune perpendiculum, erunt inter se parallela (3. *l.* 11.) Quod erat demonstrandum, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXXIII.

OMnes rectæ coniungentes opposita centra æquales sunt inter se.

2. *Centrum Octaedri est commune tā sphæræ inscriptæ, quàm circumscriptæ.*

DEMONSTRATIO. Fig. 27.

CVm IO. sit plano BFC. perpendicularis recti sunt anguli in O. Ergo Quadratum IO. est differentia quadratorum semidiametri IB. & rectæ BO. ab angulo in *centrum* plani (4. *l.* 2) Ergo cū omnes diametri Octaedri sint æquales (130. *p.*) & omnes rectæ ab angulis in planorum *centra* sint etiam æquales in triangulis æquilateris (1. *M.* 2.) æquales erunt quadratorum differentiæ: Ergo omnes rectæ à *centro* I, in planorum *centra* erunt æquales: Ergo cùm rectæ quæ *centra* coniungunt sint eorum duplæ, etiam æquales erunt.

2. Cum rectæ IG. IO, &c. sint perpendicula æqualia sphæra radio IO. descripta tanget omnia plana: Ergo erit inscripta. Similitèr cū semidiametri IB. IC. &c. æquales sint sphæra radio IB. descripta transibit per omnes angulos, & erit circumscripta. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXXIV.

IN Octaedro minima summa ex centro ff. ss. aequalis est sex figuris ex radio sphaerae circunscriptae: & sesquialtera similis figurae ex diametro: & tripla similis figurae ex latere, & noncupla radij circuli circa △.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCDEF. sit *centrum ff. ss.* I. Dico minimam summam ex *centro* I. aequalem esse 6 *ff. ss.* ex Radio IB. sphaerae circunscriptae: & sesquialterã figurae ex diametro BD. & triplam figurae AB, &c.

DEMONSTRATIO.

CVm *cẽtrum ff ss.* Octaedri I. est *cẽtrum* sphaerae sex angulis A. B. C. D. E. F. erit minima summa aequalis sex figuris IA. IB. IC. ID. IE. IF. hoc est sex figuris ex radio IB. & cum figura BD. sit aequalis 4 *ff. ss.* IB. (3. l. 2.) erit minima summa ad figuram similem BD. vt 6. ad 4. vel sesquialtera: & cum figurae ex B. sint aequales minimae summae + 6 *ff. ss.* radij IB (60. M. 1.) ablatis quatuor, nempe BD. erũt BA. BE. BF. BC. aequales 8 BI. & quaelibet erit 2 BI. Ergo cum minima summa sit 6 BI. erit tripla figurae lateris BA. sed haec est tripla radij GA (12. M. 2.)

Er-

Ergo minima summa est noncupla similis figuræ ex radio circuli. Quod, &c.

PROPOSITIO CXXXV.

Radius sphæræ Octaedro circumscriptæ ad radium inscriptæ est potentia triplus, nempè vt latus trianguli ad radium circuli, & ad latus est potentia subduplus, & minima summa ex cẽtro ad contactus planorum æqualis est figuræ simili ex diametro circuli.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Octaedri, & sphærarum commune *centrum* I. Dico radium IB. sphæræ circumscriptæ esse potentia triplũ radij IG. sphæræ inscriptæ, vel vt latus DA. ad radium GD. circuli triagulo circumscripti, &c.

DEMONSTRATIO.

QValium minima summa est 6. figuræ ID. figura DA. est 2 DI. (134 p.) Ergo figura DA est dupla DI. vel qualium figura DI. est 9. erit DA. 18. Ergo cum figura DA. sit tripla DG. (8 M. 2.) erit figura DG. 6. sed cum angulus IGD. sit rectus, est figura DI. æqualis DG. GI. (4 l. 6.) Ergo qualium DI. est 9. & DG. 6. erit GI. 3. Ergo figura radij sphæræ circumscriptæ DI. est tripla figuræ radij sphæræ inscriptæ GI. Ergo DI. ad IG. est vt DA. ad DG.

Tan-

Tandem quia ſunt 8 contactus planorum, minima ſumma ad illos erit 8 *ff.* GI: hoc eſt 24: ſed quia GD, poteſt 6: tota diameter circuli poterit 24. (3. *l.* 2) Ergo, &c.

PROPOSITIO CXXXVI.

SVmma ff. ſſ. ex omnibus lateribus Octaedri quadrupla eſt minimæ ſummæ: dupla ſummæ ex quolibet angulo ſolido: vel puncto ſuperficiei ſphæræ circumſcriptæ, & ſextupla ſimilis figuræ ex diametro.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCDEF. ſit *centrum ff. ſſ.* I. & diameter BD. Dico ſummam *ff. ſſ.* ex omnibus 12 lateribus eſſe quadruplã minimæ ſummæ ex *centro* I. & duplam ſummæ ex quolibet angulo B. & ſextuplam ſimilis figuræ factæ ex diametro BD.

DEMONSTRATIO.

QValium minima ſumma ex 6 BI. figura vnius lateris BA. eſt 2 BI (134 *p*) Ergo ſumma *ff. ſſ.* ex 12 lateribus erit 24: ſcilicet quadrupla minimæ: & cum ſumma ex B. æqualis ſit BA. BE. BF. BC + BD. hoc eſt 8. BI + 4 BI. ſcilicet 12 BI erit ſumma ex lateribus quæ eſt 24 BI. dupla ſummæ ex B. Tandem cum figura BD. ſit æqualis 4 *ff ſſ* BI. (3 *l.* 2.) erit ſumma *ff. ſſ.* ex omninibus lateribus sextupla similis figuræ ex diametro. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXVII.

SVmma ff. ss. ex quolibet planorum centro, vel puncto superficiei sphæræ inscriptæ dupla est similis figuræ diametri: quadrupla lateris: Sextupla diametri inscriptæ sphæræ: Octupla radij circumscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro est IG. radius sphæræ inscriptæ. Dico summam ff. ss. ex quolibet puncto superficiei huius sphæræ tangentis plana in eorum *centris* G. O. &c. esse duplam figuræ BD. quadruplam BA. sextuplam GO. & octuplam similis figuræ BI.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex G. æquatur minimæ + 6 GI. (6 o. M. 1.) sed minima est 6 DI. (134. *p.*) & 6 GI. sunt 2 BI (136. *p.*) Ergo summa ex G. æquatur 8 BI. sed figura BD. est 4 BI. (3. *l.* 2.) Ergo summa ex G. dupla est figuræ BD. & octupla BI. Ergo cum BD. sit dupla BA. (4. *l.* 2.) erit summa ex G. quadrupla figuræ BA. & quia summa ex G. est 6 DI + 6 GI. vel 18 GI + 6 GI. hoc est 24 GI. & GO. tantum est 4 GI (3. *l.* 2) erit illa istius sextupla. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXXXVIII.

Eadem summa ff. ſſ. ex quolibet puncto ſuperficiei ſphæræ inſcriptæ ſeſquitertia eſt minimæ ſummæ: ſubſeſquialtera ſummæ ex quolibet puncto ſuperficiei ſphæræ circunſcriptæ: & ſubtripla ſummæ ff. ſſ. ex omnibus lateribus collectæ.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt IG radius ſphæræ inſcriptæ: & IB. circunſcriptæ. Dico ſummam ex quolibet puncto G. ſuperficiei inſcriptæ eſſe ſeſquitertiam minimæ: ſubſeſquialterā ſummæ ex B. ſubtriplā ſummæ ff. ex lateribus.

DEMONSTRATIO.

CVm ſumma ex G. æqualis ſit 8 *ff* IB. (137. *p.*) & minima ſit 6 *ff*. IB (134. *p*) erit illa ſeſquitertia vt 8. ad 6. vel vt 4. ad 3. Deindè cum ſumma ex angulo B. ſit 12 *ff*. IB. (136. *p.*) erit ſumma ex G. ſubſeſquialtera ſummæ ex B. vel vt 8. ad 12. vel vt 2. ad 3. Tandem cum ſumma *ff*. ex lateribus ſit quadrupla minimæ; nempè æqualis 24 *ff*. IB. (136. *p.*) erit ſūma ex G ſubtripla iſtius: nempè vt 8. ad 24. vel vt 1. ad 3. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXIX.

SI ex centro Octaedri describatur sphæra tangens unum latus, tanget etiã reliqua: & summa ff. ex centro ad contactus, æqualis erit minimæ ad angulos.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SI radio IK. describatur sphæra tangens latus BF. Dico illam tangere etiam omnia latera: & summam ff. ex I. in contactus K. H. &c. esse æqualẽ minimæ in angulos solidos A. B &c.

DEMONSTRATIO.

CVm BD. sit bifariam diuisa in I. & BF. in K. erit IK. parallela DF, & ejus dimidium (2. *l.* 6.) Ergo angulus BKI. rectus sicut BFD. (3. *l.* 1.) Quod de omnibus rectis à *centro* in dimidia latera demonstratur: Ergo cùm omnia latera sint æqualia etiam eorum dimidia erunt æqualia: Ergo sphæra tangens vnum latus tãget omnia. Deinde cum potentia IK. sit $\frac{1}{4}$ potentiæ DF. (3. *l.* 2.) & BI. sit $\frac{1}{2}$ DF. (135. *p*) potẽtia IK erit $\frac{1}{2}$ BI. Ergo 12 *ff*. IK. in duodecim latera æquales erunt minimæ sũmæ in angulos, quæ est 6 *ff*. IB. (134. *p*.) Quod erat demonstrandũ.

PRO-

PROPOSITIO CXL.

SVmma ff. ss. ex dimidio laterum, vel ex quouis puncto superficiei sphæræ lateribus inscriptæ, est noncupla figuræ ex radio sesquialtera minimæ summæ: & sesquioctaua summæ ex superficie inscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SI radio IK. & *centro* intelligatur descripta sphæra tangens latera: Dico summam *ff. ss.* ex quolibet puncto K. superficiei sphæricæ esse noncuplam figuræ IB. & sesquialteram minimæ summæ ex I. & sesquioctauam summæ ex G. vel ex quolibet puncto superficiei sphæræ inscriptæ radio IG.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff. ss.* ex quolibet puncto K. superficiei dictæ æquatur minimæ + 6 *ff.* IK. (60. M. 1.) hoc est + 3 *ff.* IB. (139 *p.*) sed minima summa æquatur 6. *ff.* IB. (134. *p.*) Ergo summa ex K. æquatur 9. *ff* IB Ergo est noncupla huius: Ergo etiam cum summa ex K. sit 9. *ff.* IB. & minima summa sit 6. *ff.* IB. erit illa sesquialtera istius. Tandem cum summa ex superficie sphæræ inscriptæ, vt ex G. sit 8. *ff.* IB (137. *p.*) & summa ex K. sit 9. *ff.* IB. erit hæc sesquioctaua illius. Quod erat demonstrandum.

Scho-

SCHOLIVM.

QVæ potentiæ ſint continuæ, & plures aliæ rationes colligi poſſunt ex ſequenti.

TABVLA POTENTIARVM OCTAEDRI.

Qualium Diameter Octaedri poteſt.	36.
Radius circuli triangulo inſcripti GH.	$1\frac{1}{2}$.
Perpendiculum à centro plani in latus.	$1\frac{1}{2}$.
Radius ſphæræ inſcriptæ IG.	3.
Perpendiculum à centro in plano.	3.
Radius ſphæræ tangentis latera IK.	$4\frac{1}{2}$.
Radius circuli triangulo circunſcripti GD.	6.
Semidiameter Quadrati.	9.
Radius ſphæræ circunſcriptæ IB.	9.
Diſtantia planorum opp.	12.
Diameter ſphæræ planis inſcriptæ GO.	12.
Diameter ſphæræ tangentis latera.	18.
Latus Octaedri BA.	18.
Recta ab angulo in centrum plani opp.	18.
Diameter circuli circunſcripti AGD.	24.
Diameter Quadrati.	36.
Diameter Octaedri, & ſphæræ circunſcriptæ.	36.
Minima ad contactus planorum.	24.
Minima ſumma ex centro I.	54.
Minima ſumma ad contactus laterum.	54.
Summa ex ſuperficie inſcriptæ.	72.
Summa ex ſuperficie tangentis latera.	81.
Summa ex ſuperficie circunſcriptæ.	108.
Summa ex omnibus lateribus.	216.

PRO-

PROPOSITIO CXLI.

SI angulis, & cētro decagoni ſint 11. radij perpendiculares, & radio centri addatur vtrinque latus decagoni, quæ alterna puncta coniungunt Icoſaedrum regulare comprehendunt, ex 20 △△. 30 lateribus, & 12 angulis ſolidis.

EXPOSITIO. Fig. 28.

CIrculo HFDA. in 10. partes diuiſo. H. G. F. &c. ſint radij perpendiculares GR. FQ. EP. &c. & in *centro* XZ. cui addantur latera decagoni ZYXy. Ductis ad alterna puncta RH. RF. FP. &c. YR. YP. &c *y*H. *y*F. *y*D. &c. Dico ſolidum eſſe Icoſaedrum regulare ex lateribus, angulis, & planis æqualibus conſtans.

DEMONSTRATIO.

PVncta R. Q. P. O. N. &c. efficiunt decagonū parallelum omninò æquale ipſi HGF. &c. (4 *l.* 11.) & radij GR. FQ. EP. &c. ſunt vtrique perpendiculares (3 *l.* 11.) Ergo ductis radijs ZN. ZP. &c. recti erunt anguli YZP. YZN. &c. (23. *P.*) Ergo quia YN æquè poteſt ac Radius NZ. & latus decagoni ZY. (4. *l.* 2.) erit æqualis lateri Pentagoni RP. (117. M. 2) & ſimilitèr TY. RY. &c. Ergo 5 △△ Pyramidis TRPNLY. ſunt ex latere ⬠ RP. & ſimilitèr alia 5 △△ Pyramidis HFDBK*y*.

Dein-

Deinde quia RGF. angulus est rectus (23. *P.*) & RF. æque potest ac radius RG. & latus decagoni GF. (4 *l.* 2.) erit RF. æqualis lateri ⬠ RP. (117. M. 2) & similiter FP. PD. &c. Ergo 10 △△ HRF. FRP. &c. sunt etiam ex latere ⬠ RP. Ergo totum solidũ constat ex 20 △△ æquilateris, & 60 angulis planis, & 30 lateribus (quodlibet enim est duobus angulis commune) & 12 angulis solidis æquali bus, cum vnusquisque ex 5 angulis planis æqualibus constet (23. *P.*) Ergo quia constat ex planis, angulis, & lateribus æqualibus solidum est Icosaedrum regulare (24 *P.*) quod, &c.

PROPOSITIO CXLII.

Diameter Icosaedri potest quintuplum radij circuli ambientis Pentagonum, & omnes sunt æquales.

EXPOSITIO. Fig. 28.

In prædicto Icosaedro YND. &c. Dico quālibet diametrum Yy. TD. &c. posse quintuplum radij XD. circuli transeuntis per quinque angulos Icosaedri: & omnes diametros esse æquales inter se.

DEMONSTRATIO.

Quia angulus TID. rectus est (*ex constr.*) diameter Icosaedri DT. æque potest ac radius

dius TI. & diameter circuli ID. (4. *l*. 2.) sed □ ID. æquatur 4 □ radij IT. vel IX. (3. *l*. 2.) Ergo □ TD. diametri Icosaedri æquatur 5 □ dadij circularis IT. & similitèr HN. KP. BR. &c. Tu quia YX. constat ex radio XZ. & latere decagoni ZY. est proportionalitèr secta in Z. (127. M. 2.) Ergo addito minori segmento X*y*. vel YZ. composita Y*y*. potest 5 □ maioris segmenti, vel radij XZ (107. M. 2.) Ergo 6 diametri Icosaedri singulæ possunt 5 □ radij circularis: Ergo quadrata diametrorum sunt inter se æqualia: Ergo etiam diametri (4. *l*. 6.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXLIII.

Omnes diametri Icosaedri se bifariam secāt in eodem puncto: 2. & hoc est centrum sphæræ circunscriptæ: 3. latera, & plana opposita sunt parallela.

EXPOSITIO. Fig. 28.

IN Icosaedro sint diametri Y*y*. TD. RB. &c. Dico omnes se bifariā intersecari in *x*. quod est *centrum* sphæræ circunscriptæ, &c.

DEMONSTRATIO.

QVia omnes radij eleuati IT. GR. XZ. &c. sunt plano perpēdiculares ex *hyp*. 141. *p*. sunt inter se paralleli, ac in eodem plano bini

Dd (2.

(2.*l*.11.) Ergo in plano TID. cum IT. X*x*. sint parallelæ, erit vt DX. ad æqualem XI. ita D*x*. ad æqualem *x*T. & vt DX. est dimidium DI. ita X*x*. est dimidium radij IT. vel XZ. (2.*l*.6.) & sic de reliquis: Ergo diametri omnes se bifariam secant in *x*. & cùm sint æquales (142.*p*.) erunt etiam æquales semidiametri *x*Y. *x*N. &c. Ergo si ex *centro x*. radio *x*N. describatur sphæra trãsibit per omnes angulos solidos Icosaedri.

Tandem diametri Y*y*. & TD. se intersecantes sunt in eodem plano (1.*l*.11.) Ergo quia est Y*x*. ad æqualem *x*T. vt *yx*. ad æqualẽ *x*D. sunt TY. *y*D. parallelæ (2.*l*.6) & similiter YR. *y*B. &c. Ergo cũ anguli TYR. D*y*B. sint paralleli, sunt plana TYR. D*y*B. parallela (1.*l*.11.) & sic de reliquis. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXLIV.

IN Icosaedro perpenditulum △ æquè potest ac latus decagoni, & perpendiculum à centro Pẽtagoni. Tum æquè ac radius, & dimidium minoris segmenti proportionalis.

EXPOSITIO. Fig. 28.

IN △THK sit perpendiculum T*z*. & bisecabit basim HK (5.*l*.1.) & similiter *yz*. & etiã X*z*. bisecabit arcum HIK. trãsiens per I (2.*l*.3.) Dico T*z*. æquè posse ac perpendiculũ X*z*. &

la-

latus decagoni IK. tum æquè ac radius XI. & dimidium minoris segmenti eiusdem radij proportionalitèr secti.

DEMONSTRATIO.

QVia angulus zXy. est rectus (141 *p.*) & yX. latus decagoni, & Xz. perpendiculum à *centro* O. recta yz. vel Tz. perpendiculum △ HyK. æquè poterit ac yX. & Xz. (4. *l.* 2.) Ergo, &c. Similitèr quia angulus TIX. rectus est (141 *p.*) recta Tz. perpendiculum △ HTK. æquè potest ac radius TI. & recta Iz. (4. *l* 2) sed Iz. est minus segmentum semiradij, vel semisegmentum minus radij proportionalitèr secti (11 29. M. 2.) Ergo Tz. æquè potest ac radius, & dimidium minoris segmenti eiusdem proportionalitèr secti. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXLV.

IN Icosaedro perpendicularis per centrum in planum △ est per centrum ff. ss. △, & per centrum oppositi △: & vtriusque distantia, quæ, & quælibet recta per centrum Icosaedri est bifariam diuisa. 3. Quæ verò latera opposita subcontrariè æqualiter secat, est per centrum, & contrà.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SI ex x. ducatur perpendicularis △ HKy. Dico esse per *centrum* ff. ss. △ &c.

DEMONSTRATIO.

PYramis TRHx. basim habet æquilateram,& latera Hx. Tx. Rx. æqualia (142. p) Ergo perpendiculum *xp.* in basim HRT. est per illius *centr. ff. ff.* quod est *p.* (4. *p.*) sed △DPN. est ipsi parallelum (143 *p.*) Ergo perpendiculum est commune (3. *l.* 11.)& etiam per *f. centr. ff. ff.* (4. *p.*)& etiam æquale ex Pyramidum congruentia (1 *P.*) Ergo perpendicularis communis est vtrique plani distantia,& in *x* bisecta:& etiam quæuis alia per *centrum x.* quia cum illa efficit △△ similia (2 *l.* 6.) Deindè TH. ND. æquales sunt,& parallelæ (142. *p.*)& parallelogrammũ efficiunt (7 *l.* 1.) cuius *centrum* est in concursu diametrorum *x.* (55. M. 2.) Ergo quæ subcontrariè secat æquales T*b.* D*d.* erit per *centrum x* & *econtrà* (55. M. 2.) Quod,&c.

PROPOSITIO CXLVI.

ICosaedri centrum est etiam centrum sphæræ inscriptæ tangentis plana,& etiam tangentis latera,& pariter centrum ff. ff. ad omnes angulos,& contactus.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SI ex *centro* Icosaedri *x.* describatur sphæra tãgens △TRY, vel latus RY. Dico tangere omnia

nia △△, vel omnia latera, & *x*. esse *cētrum ff. ff.* ad angulos, & contactus.

DEMONSTRATIO.

DVctis diametris TD. RB. &c. fiunt 20 Pyramides, quæ omnes habent idem perpendiculum (145. *p.*) Ergo ſphæra quæ tangit △ TRY, tanget omnia △△: ſimiliter quia △△ Icoſcelia T*x*H. R*x*H. omninò æqualia ſūt, perpendicula habent æqualia ex congruentia (1. *P.*) Ergo ſphæra tangens vnum latus, tangit omnia latera Icoſaedri.

Deinde quia omnes diametri ſunt bifariam ſectæ in *x*. (143. *p.*) eſt *x. centr. ff. ff.* ad R. B. & ad T. D. &c. (35. M. 1.) Ergo & ad omnes angulos T. Y. N. &c. (63. M. 1.) eadem eſt demonſtratio de contactibus planorum, & laterum. Quia communia perpendicula ſint in *x*. bifariam diuiſa (145. *p.*) Ergo, &c.

PROPOSITIO CXLVII.

PLanum transiens per centrum Icosaedri secat latera, & plana opposita subcontrariè in partes æquales 2. & habet commune cētrum ff.ſſ. 3 Et quæuis recta per centrum ipsum planum bifariam diuidit: 4. omnia plana per centrum Icosaedri ipsum, & se ipsa bifariam diuidunt, & econuerso.

DEMONSTRATIO. Fig. 28.

THesis perspicua est, & etiam demonstratio, quia si planũ per *centrum x*. secet latus TH. in *b*. & ducatur recta *bx*. tota erit in plano (1. 6. 11.) & secabit latus oppositum DN. in partes æquales subcōtrariè D*d*. T*b*. tum *d*N. *b*H. (145. *p*.) & sic de reliquis: Ergo, &c.

2. Cum omnes rectæ quæ coniungunt sectiones laterum subcontrariè æquales sint in *centro x*. bifariam diuisæ (145. *p*.) erit *x*. *centr.* *ff.ſſ* ad omnes laterum sectiones binas (35. M. 1.) Ergo & *centrum* plani ad omnes sectiones (63. M 1.)

Tertia, & quarta pars, & illius conuersa eodem modo sunt demonstandæ, quo sectio parallelepipedi in *prop*. 77. 78. & 79 Demonstrationē hic ommitto, quia res per se clara multiplici linearum ductu confundenda non est.

PRO-

PROPOSITIO CXLVIII.

IN Icosaedro minima summa ff. ss. ex centro æqualis est 12 ff. ss. ex radio sphæræ, & 3 ff ss. ex diametro, & 15 ff. ss. ex radio circuli, & □ huius ad □ radij sphæræ est vt 4. ad 5. & summa ff. ss. ex quolibet angulo est dupla minimæ, & æqualis 24 □ radij sphæræ.

DEMONSTRATIO. Fig. 28.

QVia cum anguli solidi sint 12 æqualiter à *centro x.* remoti (143. *p.*) erit minima summa æqualis 12 *ff. ss. x* Y. & quia □ Y*y*. æquale est 4 □ *xy* (3. *l. 2.*) & *ff. ss.* sunt vt quadrata (4. *l. 6.*) erunt 12 *ff ss. x* Y. æquales 3 *ff ss. xy.* & quia □ Y*y*. æquale est 5 □ radij circularis (142. *p.*) erunt 3 □ Y*y*. æqualia 15 □ XD. idemque est de *ff. ss.* & quia 12 □ *x* Y. æqualia sunt 15 □ XD. erunt 4 □ *x* Y. æqualia 5 □ XD. Ergo si □ XD. sit 4. erunt 5 □ XD. 20: & cum 4 □ *x* Y. etiam valeant 20: quodlibet erit 5: Ergo □ XD. ad □ *x* Y. est vt 4. ad 5.

Tandem quia summa *ff. ss.* ex quolibet puncto superficiei sphæricæ, superat minimam totidem □ □ radij: Ergo summa *ff. ss.* ex quouis angulo Y. *æqu.* 24 *ff ss.* ex radio *xy.* & est dupla minimæ, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXLIX.

Diameter Icosaedri ad radiũ circuli ambientis ⬠ ex latere Icosaedri est ut perpendiculum ex vertice ad perpendiculum ex centro ⬠.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SIt ⬠ HFDBK. ex latere Icosaedri F D. & radius circuli circunscripti XD. perpendicula Dz. Xz. Dico diametrum Yy. ad XD. esse vt Dz. ad Xz.

DEMONSTRATIO.

QVia perpendiculum ex vertice Dz. potest quintuplum perpendiculi à *centro* Xz. (182. M. 2.) sed etiam Yy. potest quintuplum ipsius XD. (141. *p.*) Ergo cùm potentiæ sint proportionales, etiam rectæ: Yy. ad XD. vt Dz. ad Xz. (5. *l.* 6,) Quod, &c.

PROPOSITIO CL.

SI in prædicto circulo decagonum inscribatur, diameter Icosaedri æqualis erit composita ex latere decagoni, & secundo diagonio.

EXPOSITIO. Fig. 28.

IN circulo TRPN. sit inscriptum decagonũ, cuius latus NM. & secundum diagonium NV. Dico Yy. æqualem esse MN+NV.

DE-

DEMONSTRATIO.

Etenim diagonium NV. æquale est radio ZN+NM. lateri decagoni (139. M. b.) Ergo NV+NM. æqualis erit ZN+2NM. sed etiã Yy æqualis est ZX. vel radio ZN. & ZY+Xy. hoc est 2NM. lateribus decagoni (141. p.) Ergo Yy. æqualis est VN+NM. Quod, &c.

PROPOSITIO CLI.

Diameter Icosaedri potest triplum diagonij ⬠ inscripti circulo ambienti triangulum Icosaedri.

EXPOSITIO. Fig. 28.

Circulus NDPn. circumscribat △ Icosaedri PND, & in eo circulo cõcipiatur inscriptum ⬠ Dico diametrum Yy. posse triplum diagonij dicti ⬠

DEMONSTRATIO.

Cum enim est latere △ PN. descriptum sit ⬠ TRPNL in circulo radij ZN. erit □ ex diagonio pentagoni in circulo minori NDPn. ad □ radij maioris ZN. vt 5 ad 3 (185. M. 2.) sed □ ZN. ad □ Yy. est vt 3 ad 15 subquintuplum (142. p.) Ergo ex æquo □ diagonij ⬠ ad □ Yy. est vt 5 ad 15 (1. k. 5.) nempè subtriplum. Quod &c.

PROPOSITIO CLII.

IN Icosaedro distantia duplicis plani paralleli oppositi æqualis est composita ex diametro circuli ambientis △, & ex semisegmento maiori eiusdem proportionaliter secti.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SInt △△ opposita THK. & PND. & eorum distantia *pf* (145 *p.*) & circuli NDP*n*. circũscripti △ PND. sit diameter D*n*. proportionaliter secta in *g*. Dico distantiam *pf*. æqualem esse diametro D*n* + $\frac{1}{2}$.*ng*.

DEMONSTRATIO.

PLanũ T*z*D. secãs plana parallela THK. PND. facit sectiones parallelas D*n*. T*z*. (3. *l.* 11.) Ergo cum radij T*p*. *fn*. sint æquales (109. M. 2.) erunt T*n* *pf*. parallelæ æquales (7. *l.* 1.) & cùm angulus T*pf*. sit rectus (145. *p.*) etiam T*n*D. (7. *l.* 1.)

Deindè composita D*n* + *ng*. est proportionaliter secta, & maius segmentum est D*n*. minus verò *ng*. (104 M. 2.) Ergo □ D*n*. maioris segmenti, & □ D*n* + $\frac{1}{2}$ *ng*. compositæ ex maiori, & semisse minoris æquatur 3 □ ex diagonio ⬠ inscripti circulo NDP*n*. (198. M. 2.) sed □ diametri Icosaedri DT. *æq.* 3 □ diagonij ⬠ (151 *p.*) Ergo □ DT *æq.* □ D*n*. & □ *n* + $\frac{1}{2}$ *ng*. sed □

DT.

DT. *aq.* □ D*n* + □ T*n*. vel *pf.* (4 *l.* 2.) Ergo T*n*. vel *pf.* æqualis est compositæ D*n* + ½ *nz*. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLIII.

SI recta sit proportionaliter secta, & ex tota, & maiori segmento circuli describantur in sex partes diuisi, & ad alterna puncta minoris erigatur perpendicula æqualia radiorum summæ, & ad alterna maioris æqualia maiori, & minori radio: quæ puncta coniungunt comprehendent Icosaedrum regulare, &c.

EXPOSITIO. Fig. 29.

RECta GZ proportionaliter secta sit in A. radij sint ZA. ZG. & in minori circulo △ ABG & △ DFE. radij ZDM. ZAG. maiorem circulum in sex æquales partes diuidunt. Perpendicula sint DS. ET. FR. æqualia radiorum summæ GZ + ZF. tum GO. LX. IQ. ipsi ZG. & MN. KP. HV. ipsi ZA. ductis ergo lineis AO. AN. ON. OS. NS. &c. Dico solidum comprehensum esse Icosaedrum regulare, &c. prout in prop. 141.

DEMONSTRATIO.

IN △ ABC. est □ BC. *aq.* 3 □ ZF. & ZF. bifariā secta in *n*. (112. M. 2.) & □ BK *aq.* □ B*n* + □ *n*K. (4. *l.* 2.) sed □ B*n*. æquatur 3 □ Z*n*. (113. M. 2.)

Regula ZK. est proportionaliter secta in F ex hyp. & nF. est dimidium maioris segmenti: erit □ nK. æq. 5 □ Zn. (105. M. 2.) Ergo □ BK æq. 8 □ Zn. sed □ KP. vel ZF. æq. 4 □ Zn. (3. l. 2.) & □ BP. æq. □ PK + □ KB. (4. l. 2.) Ergo □ BP. æq. 12 □ Zn. vel 3 □ ZF. vnde æquales sunt BQ. & BP. & similiter CP. CN. NA. AV. VB. & pariter SO. OT. TQ. QR. RX. XS. Deinde □ AO. æq. □ OG. vel ZG + □ GA (4. l. 2.) & cum ZG. sit proportionaliter secta in A est □ ZG + □ GA. æquale 3 □ ZA (108. M. 2.) Ergo æquales sunt AO. & AB. & similiter BQ. GX. tum SN. RP. TX. Tandem si Gp. sumatur æqualis HV. vel radio ZA. erunt pV. GH. æquales; quia iungunt parallelas æquales Gp. HV (7. l. 1.) sed GH. latus Hexagoni est æqualis radio GZ. vel GO. Ergo etiam pV. & pO. erit æqualis GA. sed cum angulus OpV. rectus sit vt OGH (7. l. 1.) est □ OV æq. □ Op + □ pV. vel □ GA + □ GZ vel 3 □ ZA (108. M. 2.) Ergo OV. æqualis est AB. & similiter VQ. & XN. XP. tum PQ. ON. Ergo omnia triangula sunt æquilatera: & solidum Icosaedrum prout in prop. 141. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLIV.

IN Icosaedro distantia oppositorum laterum potest triplum maioris radij, & aequalis est lateri △ inscripti circulo maiori. 2. & aequalis diagonio ⬠ inscripti circulo per 5 angulos solidos. 3. Et etiam rectae à centro △ ad angulos oppositi △

EXPOSITIO. Fig. 29.

IN Icosaedro OBP. &c. Dico distantiam laterum OV. XP. posse triplum radij ZG. &c.

DEMONSTRATIO.

QVia HV. & KP. sunt plano perpendiculares, sunt parallelae, & in vno plano (2. l. 11.) Ergo cum sint aequales (153. p.) quae ipsas iungunt, erunt aequales VP. HK. (7. l. 1.) sed HK. est latus △ in maiori circulo, & potest triplum radij ZG (112. M. 2.) Ergo VP. potest triplum ipsius ZG. sed si ducatur recta HK. erit angulus GHK. in semicirculo rectus (3. l. 3.) & angulus KHV. rectus est (23. P.) Ergo recta KH. est plano HO. perpendicularis (1. l. 11.) Ergo etiam VP (2. l. 11.) Ergo PV. perpendicularis est lateri VO (23. P.) & XP. (13. P.) & est eorum distantia potens triplum GZ.

2. Deinde VP. est diagonium ⬠ VBPR. Ergo diagonium potest triplum GZ.

3. Quoniam angulus ZYR. rectus est, & du-

ca-

tatur ZR. erit □ZR. æquale □ZY+□YR. (4. l. 2.) hoc est □GF+□FZ. sed quia FG. est proportionaliter secta in Z (153. p.) est □ totius FG+□ minoris segmenti FZ. æquale 3□ZG. maioris segmenti (108. M. 2.) Ergo VP. ZR. & HK. æquales rectæ sunt. Quod, &c.

PROPOSITIO CLV.

IN Icosaedro radius circuli per 3 angulos remotiores ad radiũ circuli per 5 angulos est vt diagonium ⬠ ad latus △: vel vt recta potens totam, & maius segmentum ad rectam, quæ possit totã, & minus segmentum.

EXPOSITIO. Fig. 29.

REcta GZ. est radius circuli per 3 angulos O. Q. X. & *x*. sit radius circuli per 5 angulos V. B. P. R. T. Dico GZ. ad *x*. esse vt diagonium ⬠ ad latus △ in eodem circulo, &c.

DEMONSTRATIO.

SInt inscripta △△, & ⬠⬠ in vtroque circulo: & *l*. latus △ minoris, & L. latus △ maioris: & *d*. diagonium ⬠ minoris, & D. maioris, & erunt vt *l*. ad *L*. ita radius *x*. ad radium GZ. & ita pariter *d*. ad D (5 *l*. 6.) Ergo *l*. ad L. est vt *d*. ad D. (1. *l*. 5.) sed L. & *d*. sunt æquales (154 *p*) Ergo vt *l*. ad L. ita est L. ad D. (2. *l*. 5.) Ergo vt latus △ maioris ad diagonium ⬠ maioris, ita

ra-

radius x. ad radium GZ(1.l.5.) nempè vt recta potens totam & maius segmentum ad rectam, quæ possit totam, & minus segmētum (M.2.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLVI.

Latus Icosaedri est maius segmentum distātia laterum proportionaliter secta.

EXPOSITIO. Fig. 28.

IN Icosaedro OBP. &c. Dico latus AB. esse maius segmentum distantiæ oppositorum laterum VP. proportionaliter sectæ.

DEMONSTRATIO.

QVia latus Icosaedri AB. vel BP. est latus pētagoni per 5 angulos B. P. R. T. V. (141. p.) & distantia PV est diagonium ⬠ in eodem circulo (154. p.) sed latus ⬠ est maius segmentum diagonij ⬠ in eodem circulo (122. M. 2.) Ergo latus Icosaedri est maius segmentum distantiæ oppositorum laterum. Quod erat, &c.

PRO

PROPOSITIO CLVII.

Diameter Isosaedri æquè potest ac latus, & distantia oppositi, vel triplum radiorum maioris, & minoris. 2. & æquè ac diameter circuli maioris, & radiorum differentia: vel distantia vtriusque planitie maximi. 3. tum æquè ac diameter minoris circuli, & radiorum summa, vel distantia

EXPOSITIO. Fig. 29.

IN Isosaedro OBP. Dico □ TC. diametri æquale esse □ OV + VP. vel æquale esse 3 □ ZG + 3 □ ZA. cum □ GK + □ GA. vel □ OP. cũ □ AF + □ FG.

DEMONSTRATIO.

QVoniam distantia VP. laterum oppositorum vtrique lateri est perpendicularis (145. *p.*) Ergo cum angulus OVP. sit rectus, erit □ OP. diametri æquale □ OV. lateris + □ VP. distantiæ laterum (4. *l.* 2.) sed □ OV. vel AB. æquatur 3 □ radij AZ. (112. M. 2.) & □ VP. æquatur 3 □ radij GZ (154. *p.*) Ergo □ diametri OP. *æq.* 3 □ GZ + 3 □ AZ.

2. Ex perpendiculari GO. sumatur G*p.* æqualis KP. vel radio ZA. & cum GO. sit æqualis GZ. (153. *p.*) erit PO. æqualis radiorum differentiæ GA. Ergo cum G*p.* KP. sint parallelæ

æqua-

æquales (3. l. 11.) erunt GK pP. parallelæ æquales, & anguli ad p. recti sicut angulus K. (2 l. 1.) Ergo diameter OP. æquè potest ac p P. quæ est diameter GK. & pO. quæ est radiorum differẽtia GA. (4. l. 2.) & etiam distantia duplicis plani maximi OQX. VNP. &c.

3. Cũ angulus AFR rectus sit, erit □ diametri AR æquale □ diametri AF + □ FR (4. l. 2.) sed FR. est æqualis summæ radiorum FG. (153. p.) Ergo □ diametri AR. æquale est □ AF + □ FG. diametri minoris, & radiorum summæ. Idemque est de reliquis, cum omnes diametri sint æquales (141. p.) Ergo, &c.

PROPOSITIO CLVIII.

SI ex recta proportionaliter secta, & maiori segmento circuli describantur in 10 partes diuisi: & ad alterna puncta minoris erigantur perpendicula æqualia radiorum summæ, & ad puncta maioris alterne æqualia, maiori, & minori radio, quæ alterna puncta coniungunt comprehendent dodecaedrum regulare.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SIt recta XP. secta proportionaliter in E. & circuli in 10 partes diuisi EFA. &c. PQI. &c. & ad F. G. H. I. K. sint perpendicula *æq.* HP. & ad Q. R. S. T. V. *æq* XP. & ad P. L. M. N. O. *æq.* XH.

Ff du-

ductis EA. Al. lq. &c. Dico comprehendi dodecaedrum regulare.

DEMONSTRATIO.

PUncta eleuata efficiũt plana parallela æqualia, & similia inferioribus (4. *l.* 11.) & perpẽdicula parallela, & bina in eodẽ plano (2. *l.* 11.) Iam quia *pl*. PL. iungunt parallelas æquales P*p* L*l* sunt illæ parallelæ (7. *l.* 1.) sed PL. EA. sunt parallelæ (2. *l.* 6.) Ergo & *pl*. EA. & in eodem plano, & Z*q*. communis sectio planorum E*l*. & QZ*q*. deinde quia QF. est æqualis EF. (124. M. 2.) & EFZ æqualis ZX (127. M. 2.) erit QFZ. æqualis XZ. Ergo quia QZ. est semiradius XQ. erit QZ. proportionaliter secta in *y*. (128 M. 2.) Ergo perpendiculum *yz*. parallelum Q*q*. secat proportionaliter Z*q*. in *z* & *zff*. parallela ZQ. secat proportionaliter Q*q*. in *ff*. (2. *l.* 6.) Ergo vt Q*ff*. est æqualis radio P*p*. vel XF. ita Q*q*. est æqualis radio XQ & *qff*. ipsi QF (2. *l.* 5.) Ergo planum E*l*. continuatum secat Q*b*. in eodẽ puncto eleuato *q* & puncta E. A. *l*. *q*. *p*. sunt in eodem plano.

Insuper quia □ E*p* æquatur □ P *p* vel EX + □ PE. vel EF (4. *l.* 2.) & □ EA. *æq*. □ EX + □ EF. (117. M. 2.) est E*p*. æqualis lateri ⬠ EA. & similiter A*l*: tum quia XE. est maius segmentum XP. ita EF. ipsius parallelæ PQ. (2. *l.* 6.) sed EF.

est

est maius segmentum radij EX (125.M.2.) Ergo PQ. & ipsi æqualis *pff*. æquales sunt EX: sed □*pq*. æquatur □*pff* + □*ffq*. vel QF. vel EF (4.*l*.2.) Ergo etiam *pq*. æquatur lateri □ EA. & similiter *ql*.

51 Tandem quia XE ad XP. est vt EA. ad diagonium DB (122.M.2) & vt XE. ad XP ita EA. ad PL (2.*l*.6.) erunt æquales PL. & DB. (9.*l*.5.) Ergo *pl*. æqualis PL. est diagonium pentagoni, & EA*lqp*. pentagonum regulare: & similiter A*km*B. &c. Ergo solidum est regulare dodecaedrum ex 12. planis, & 60. angulis planis: & quia 3 plani vnum solidum efficiunt, cōstat 20. angulis solidis, & 30. lateribus. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLIX.

In dodecaedro □ diametri æquatur 3 □ diagonij ⬠ & omnes sunt æquales.

EXPOSITIO. Fig. 30.

In dodecaedro D*g*. Dico □ diametri E*h*. æquale esse 3 □ EC. diagonij ⬠, &c.

DEMONSTRATIO.

Quia XP. est proportionaliter secta in E. & similiter HS in H. (158.*p*.) erit EH. maius segmentum totius PS. & PE + HS. minus segmentum (1.*l*.5) Ergo PH. composita est ex maiori segmento, & semisse minoris: sed quia H*b*.

est plano perpendicularis, □ E*b.aq.* □ EH+ □ H*b.*(4.*l.*2.) vel + □ HP. compositæ ex maiori segmenti, & semisse minoris (158.*p.*) Ergo □ E*b.* æquatur 3 □ EC. diagonij □ (M.2.) & similiter *g*D *f*C. kB *i*A.

Deinde quia Q*ff*.N*n.* perpendiculares sunt parallelæ, & æquales radio EX. (158.*p.*) erunt *ffn.* QN. æquales, & parallelæ, & angulus *qffn.* rectus (7.*l.*1.) Ergo □ *qn.* æquale □ *ffn.* vel potius QN + □ *ffq.* (4.*l.*2) vel + □ QF. vel semissis minoris segmenti (158.*p.*) Ergo *qn.* etiam potest triplum diagonij EC(M.2.) & similiter *ps.um.or.tl.* Ergo omnes diametri sunt æquales.

PROPOSITIO CLX.

IN *dodecaedro latera, & plana opposita sunt parallela.*

EXPOSITIO. Fig. 30.

SInt latera opposita E*p.hs.* Dico esse parallela: & similiter plana opposita *fghik.* ABCDE.

DEMONSTRATIO.

QVoniam angulus ES*s.* rectus est: & etiam angulus *pah.* & S*s.* æqualis maiori radio XS. tum *ap.* ipsi *ax.* vel XS (158.*p.*) si ducantur *Es.* & *ph.* erit □ E*s.* æquale □ radiorum summæ ES + □ radij maioris S*s.* vel SX. & similiter

□ *ph.*

□*ph*. æquale □*ha*. radiorum summæ + □ *ap*. vel *ax*. radij maioris (4.*l*.2.) Ergo □ E*s*. æquale est □*ph*. & E*s*. ipsi *ph*. Ergo cũ *p*E. *hs*. sint æquales (158.*p*.) erit *p*E*sh*. parallelogrammum (7.*l*.1.) & *p*E *hs*. parallela, &c.

Deinde quia anguli *p*EA. *ihs*. latera habent parallela E*p*. *hs*. tum EA. *hi*. erunt paralleli, & eunt in planis parallelis (3.*l*.11.) & sic de reliquis *g*D. tum *f*C. &c. Ergo plana opposita AB CDE *fghik* sunt parallela: idemque est de reliquis oppositis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXI.

IN dodecaedro omnes diametri se bifariam secant in dimidio rectæ per centrum duplicis plani oppositi, quod punctum est centrum sphæræ circunscriptæ, inscriptæ, & tangentis latera, & centrum ff ss. ad omnes angulos, & contactus.

EXPOSITIO. Fig. 30.

IN dodecaedro D*g*. Dico omnes diametros E*h*. C*f* &c. se bifariam secare in *a*. quod est in medio rectæ X*x*. & *centrum*, &c.

DEMONSTRATIO.

QVia EX *xh* sunt parallelæ (158 *p*.) & in eodem plano (2.*l*.11.) erit vt EX. ad *hx*. ita X*a*. ad *xa*. & ita E*a*. ad *ha*. (2.*l*.6) Ergo cũ XE. *xh*.

xh.

xh. sint radij æquales, æquales erunt *ax*. *a*X. tũ *ah*. *a*E. tum *af*. *a*C. &c.

Deindè quia *qf*. C*n*. latera sũt parallela (160. *p*.) erunt *f*C. *qn*. bisectæ (7. l. 1.) Ergo quia *f*C. est bisecta in *a*. etiam *qn*. & similiter *ps*. &c. Ergo sphæra ex *a*. radio. *af*. transibit per omnes angulos.

Insuper diametri cum planis efficiunt 12 pyramides æquales ex cõgruentia cum æquali perpendiculo: Ergo sphæra tangens vnum planum, tanget omnia, & quæ tanget vnum latus, tanget omnia, & punctum *a*. erit cẽtrum *ff ff*. prout in (146. *p*.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXII.

IN dodecaedro perpendicularis per centrum ⬠ est per centrum ſſ. ſſ. dodecaedri, & per centrum oppoſiti ⬠ perpendicularis.

2. *Quæuis recta per centrum dodecaedri eſt in centro biſariam diuiſa.*

3. *Recta quæ latera, vel plana oppoſita ſubcontrariè, & ſimiliter ſecat eſt per centrum dodecaedri, & è conuerſo.*

4. *Planum tranſiens per centrum dodecaedri ſecat plana, & latera oppoſita in partes æquales ſubcontrariè, & habet commune centrum ſſ. ſſ. cum ſolido.*

5. *In dicto plano quæuis recta per centrum ſecat ipſum biſariam.*

6. *Omnia plana per centrum dodecaedri, ipſum, & ſe ipſa biſariam diuidunt, & è conuerſo.*

DEMONSTRATIO.

PRima, ſecunda, & tertia pars demonſtrantur prout in prop. 145. Quarta verò, quinta, & ſexta prout in prop. 147. licet demonſtratio quintæ, & ſextæ deſumenda ſit ex Parallelepipedi ſectione in *prop.* 77. 78. & 79. ſed quia res per ſe clara eſt demonſtrationē ommiſimus.

PRO-

PROPOSITIO CLXIII.

Diameter sphæræ inscriptæ æqualis est diametro circuli ambientis pētagonum, & lateri decagoni eiusdem circuli: vel radio + diagonio secundo decagoni.

2. *Diameter sphæræ tangentis latera æqualis est diagonio ◻ maioris circuli: vel diogonio ◻, & lateri ◻ dodecaedri.*

EXPOSITIO. Fig. 30.

Dico diametrum sphæræ inscriptæ æqualē esse HE+EF. vel XE+EI. & diametrum sphæræ tangentis latera æqualem esse diagonio PN vel lateri EA+diagonio EC.

DEMONSTRATIO.

Planorum distantia X*x*. est diameter sphæræ inscriptæ (161.*p.*) sed X*x*. æqualis est HE+EP. vel EF (158.*p.*) Ergo, &c. sed diagonium secundum decagoni EI. æquatur compositæ XEF (139.M.2.) vel XEP. (158.*p.*) Ergo EA+EI. *æq.* HX+XP. vel X*x*. (158.*p*) Quod, &c.

2. Distantia oppositorum laterum *pq*. *ns*. est *pn*. & simul diameter sphæræ tangentis latera: sed quia P*p*. N*n*. parallelæ sunt æquales (158.*p.*) erunt *pn* PN. parallelæ æquales (7.*l*.1) Ergo diameter sphæræ dictæ *æq*. diagonio maiori PN. sed quia EA. est maius segmentum

ip-

ipsius EC. (122. M. 2.) & vt XE. est maius segmentum in XP, ita diagonium EC. ipsius PN. (5. l. 6.) Ergo vt EA ad EC. ita est EC. ad PN. (1. l. 5.) sed vt EA ad EC. ita est EC. ad EA + EC. (104. M. 2.) Ergo PN. æquatur EA + EC. (2. l. 5.) Ergo distantia laterum Pn. æqualis est lateri, & diagonio ⬠ dodecaedrum comprehendenti: Quod, &c.

PROPOSITIO CLXIV.

SI ex centro basis dodecaedri rectæ ducantur ad angulos eleuatos, minor erit latus ⬠: media latus □: maxima latus △; in maiori circulo per 5 angulos descriptorum.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SVmatur ⬠ ABCDE vt basis dodecaedri, & ex centro X. ducantur Xp. Xq. Xf. Dico Xp. esse latus ⬠: & Xq. latus □: & Xf. latus △ descriptorum in circulo PQR: &c.

DEMONSTRATIO.

QVia XP. est proportionaliter secta in E, est XE. latus decagoni: nempè æqualis PQ. (125. M. 2.) sed Pp. æqualis est XE (158. p.) Ergo & ipsi PQ. sed latus ⬠ PL. potest quod XP. & PQ. (127. M. 2.) & Xp. potest quod XP. & Pp. quia angulus XPp. rectus est (4. l. 2.) Ergo Xp. est latus ⬠ PL.

2. Quia Qq. QX æquales sunt, & angulus qQX. rectus (158.p.) est □ Xq. æquale 2 □ QX. (4 l. 2.) sed latus □ inscripti circulo potest etiam duplum radij XQ. (114. M. 2.) Ergo Xq. est latus □ inscripti circulo PQR.

3. Cùm angulus fxX. sit rectus, □ Xf. æq. □ fx + □ xX. (4. l. 2.) vel □ XH + □ HP (158. p) sed quia HP. est proportionaliter secta in H. est □ totius HP + □ minoris segmēti æq. 3 □ maioris segmenti XP (108. M. 2.) Ergo □ Xf. æq. 3 □ radij XP. & est latus △ circulo inscripti (112. M. 2.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXV.

IN dodecaedro si per 3 angulos diametro propinquiores transeant bina plana, & per 6 remotiores alia bina: erunt diametro perpendicularia, & inter se parallela.

2. *Duo maiora secabunt diametrum trifariam.*

3. *Duo minora, diuident tertiam partem media, & extrema ratione.*

4. *Diameter erit in 5 continuas diuisa.*

EXPOSITIO. Fig. 31.

SIt dodecaedrum ABCD. diameter AE. per 3 angulos KLB. transeat planum, & aliud per Fd. D. & similiter per sex angulos G. R. M. C. h. &

&

& aliud per QPNOce: efficientes in diametro sectiones Z.V.H.n: Dico, &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam puncta K. L. B. sunt in superficie sphæræ (161 p.) & rectæ AK. AL. AB. sunt æquales lateri dodecaedri: & latera KL. LB. BK. æqualia diagonio ⬠ in pyramide KLBA. recta ex A. in centr. ff ff. basis erit ipsi perpendicularis: & similiter in pyramide KLBX. recta ex X. (4 p.) sed perpendicularis eidem puncto est vnica (1. l. 11.) Ergo AZ. XZ. eadem recta est plano KLB. perpendicularis: & similiter plano FdD. & GRMCba. & QPNOce: Ergo plana sunt parallela (3. l. 11.)

2. Tria puncta AGE. in eodem sunt plano (2. l. 11.) & quia AE. diameter est sphæræ: erit AGEC. circulus maximus (ex lib. 3. §. 1. nostræ Trigonometriæ) Ergo quia angulus AGE. est in semicirculo, erit rectus (3. l. 3.) & cum GV. demonstrata sit perpendicularis ipsi AE. erit AG. media inter AV. & AE (3. l. 6.) & □ AE ad □ AG. erit vt AE. ad AV. scilicet in duplicata ratione AE. ad AG (4 l. 6.) sed □ AE. est triplum □ AG. diagonij pentagoni (159 p.) Ergo AE. tripla est ipsius AV. & similiter ipsius HE. & HV. Ergo plana GRC. QPO. trifariam secant diametrum, &c.

 3. Di-

3. Diuiso latere MC. bifariam, ducta AT. erit proportionaliter secta in S. (123. M 2.) & quia ductæ ZS. VT. faciūt angulos AZS. AVT. rectos æquales (23. *P*.) sunt parallelæ (2. *l*. 1.) Ergo VA. TA. sectæ sunt in eadem ratione (2. *l*. 6.) Ergo etiam AV est proportionaliter secta in Z: & planum KLB. secat proportionaliter tertiam diametri partem.

4. Cū AV. sit proportionaliter secta, continuæ sunt AZ ZV. AV. vel VH (22. *P*.) Ergo quia toti VH. additum est maius segmentum VZ. sunt continuæ ZV. VH. HZ (104. M. 2.) & quia toti HZ. additum est maius segmentum HE. vel VH. continuæ sunt EH. HZ. ZE. Ergo in eadem ratione proportionali sunt 5 continuæ AZ. ZV. VH. HZ. ZE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVI.

Iisdem positis radius minoris circuli est ⅓ diametri sphæræ. 2. Ad radium maioris vt radius ad latus □ inscripti. 3 Ad radium circuli circa ⬠ est vt latus △ ad diagonium ⬠ in eodem circulo. 4. Radius sphæræ ad radium maioris circuli est potentia sesquioctauus.

DEMONSTRATIO. Fig. 31.

1. QVia VA. VY. æquales sunt (165. *p*.) in □

YZ.

YZ. æquales sunt KZ. YV (7.*l*.1.) Ergo radius minoris circuli K. æqualis est AV. vel $\frac{1}{3}$ diametri AE. Quod, &c.

2. Quia □ AE. *æq*. 3 □ AG (159.*p*.) qualium □ AE est 9: ipsum □ AG. erit 3: sed in △ rectang. □ AG. *æq*. □ GV + □ VA (4.*l*.2.) & quia AV. est $\frac{1}{3}$ AE. est □ AV. 1. qualium □ AE. est 9: nempè in duplicata ratione 1. ad 3 (4.*l*.6.) Ergo □ GV. erit 2: Ergo GV. radius maioris circuli ad AV. vel KZ. radium minoris est in potentia vt 2 ad 1. vt latus □ inscripti ad radiũ circuli (114.M.2.)

3. Si ducatur KV. cum VA. sit proportionaliter secta in Z. (165.*p*.) & KZ. sit æqualis ipsi AV (1.*num*.) recta KV æquè poterit ac tota KZ. vel AV. & maius segmentum VZ. ac recta AK æquè poterit ac tota KZ. & minus segmẽtum ZA. (4.*l*.2) Ergo KV. ad AK. erit vt diagonium ⬠ ad latus △ in eodem circulo (190.M. 2.) si Ergo K*o*. sumatur æqualis KA. & fiat *op*. parallela VA. erit vt KV. ad KZ. ita K*o*. ad K*p*. (2.*l*.6) sed quia KV. potest quod tota KZ. & maius segmẽtũ VZ (4.*l*.2) est KV. latus ⬠ in circulo radij KZ. (117. & 125. M. 2.) Ergo K*o*. vel KA. est latus ⬠ in circulo radij K*p*. (1.*l*.5) Ergo KZ. radius circuli per 3 angulos KLB. ad K*p*. radiũ circuli per 5 angulos ⬠ AKGRL. est vt KV. ad K*o*.

Ko, vel KA (2.*l*.6.) hoc est vt diagonium ⬠ ad latus △ eiusdem circuli, &c.

4. Quia diameter A E dupla est radij XA: est □ AE. *æq*. 4 □ XA (3.*l*.2.) Ergo qualium □ AE. est 36. erit □ XA. 9. sed qualiũ □ AE. est 36. est □ AV: 4. nempè vt 9. ad 1. (*ex num*. 2.) Ergo □ GV. quod æquatur 2 □ AV. erit 8. (*num*. 2.) Ergo □ XA. radij sphæræ ad □ GV. radij maioris circuli est vt 9. ad 8. hoc est XA. ad GV. est potentia sesquioctaua. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXII.

Latus dodecaedri potest triplum distãtiæ plani minoris, & maioris proximi: vt diameter sphæræ ad diagonium ⬠ dodecaedri.

2. *Distantia circulorum minorũ potest quintuplum distantiæ maiorum.*

EXPOSITIO. Fig. 31.

Est AK. latus dodecaedri: ZV. distantia circuli minoris à maiori proximo: Z*n*. distantia minorum VH distantia maiorum. Dico □ AK. *æq*: 3 □ ZV: & □ *n*. *æq*. 5 □ VH.

DEMONSTRATIO.

1. Quia AV. est proportionaliter secta in Z. (165.*p*.) & æqualis ipsi KZ (166.*p*.) & □ KA. *æq*. □ KZ + □ AZ. minoris segmenti (4.*l*. 2.) sed □ totius KZ. vel AV + □ AZ. minoris seg-

segmenti *æqu.* 3 □ maioris ZV (108. M. 2.) Ergo □ AK lateris dodecaedri *æqu.* 3 □ ZV. distãtiæ planorum.

2. Quia tota ZH est proportionaliter secta in V: & additum est minus segmentum H*n* (165 *p.*) Ergo □ Z*n*, compositæ ex tota, & minori segmento *æqu.* 5 □ VH. maioris segmenti (107. M. 2.) Ergo distantia Z*n*. potest quintuplum distantiæ VG. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXVIII.

IN dodecaedro Minima summa ff. ss. æqualis est 5 ff. ss. ex diametro sphæræ, vel 15 ex diagonio ⬠.

2. *Summa ff. ss. ex quouis angulo in reliquos est dupla minimæ.*

3. *Summa ex planorum centris in angulos æqualis est 5 ff. ss. ex latere decagoni + 5 ex latere ⬠ + 5 ex latere □ + 5 ex latere △ descriptorum in circulo per quinque angulos remotiores.*

DEMONSTRATIO. Fig. 30.

1. CVm anguli solidi sint 20: & in superficie sphæræ (161. *p.*) erit minima summa æqualis 20 ff. ss. ex radio sphæræ *a*E. hoc est 5 ff. ss ex diametro (3 *l.* 2) sed □ ex diametro *æq.* 3 □ ex diagonio (159. *p.*) Ergo minima summa æquatur 15 ff. ss. ex diagonio ⬠.

2. Cum

2. Cũ anguli ſolidi ſint in ſuperficie ſphæræ, ſumma ex quolibet angulo ſuperat minimam totidem ff. ſſ. ex radio ſphæræ, quot ſunt anguli (60. M. 1.) Ergo ſumma ex angulo ſuperat minimam 20 ff. ſſ. ex radio ſphæræ, vel 5 ex diametro, & eſt dupla minimæ.

3. Quia ſumma ex X. cẽtro plani ABCDE. æqualis eſt 5 ff. ſſ. radij XE + 5 X*p* + 5 X*q* + 5 X*f*: ſed quia X E. eſt maius ſegmentum radij X P. (158. *p*.) eſt latus decagoni (125. M. 2.) & X*p*. eſt latus ⬠: & X*q*. latus □: & X*f*. latus △ deſcriptorum in maiori circulo radij X P. (164. *p*.) Ergo ſumma ex *centro* cuiuslibet ⬠ in omnes angulos ſolidos æqualis eſt 5 ff. ſſ. ex latere Decagoni, Pentagoni, Quadrati, & Trianguli deſcriptorum in maiori circulo. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXIX.

MInima ſummæ ff. ſſ. in ſolidis regularibus ſunt vt angulorum numeri.

2. *Summa perpendiculorũ in plana ex quouis puncto ſolidi, æqualis eſt ſummæ perpendiculorum ex centro, & ſemper eadem.*

DEMONSTRATIO.

QVia in omnibus ſolidis regularibus Minima ſumma æquatur tot ff. ſſ. ex radio ſphæræ, quot anguli: Ergo ſi ſolida ſint in eadẽ

ſphæ-

sphæra, erunt minimæ summæ, vt angulorũ numeri. Qualium in Tetraedro est 4: erit in Octaedro 6: in Cubo 8: in Icosaedro 12: in Dodecaedro 20.

2. Quia ex quolibet puncto in angulos fiunt tot Pyramides, quot plana, & similiter ex *centro*: sed vtraque Pyramidum summa est æqualis toti solido, & inter se: Ergo cùm basium summa sit eadem, nempè omnia plana: eadem erit perpendiculorum summa (5. *l.* 11) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXX.

SVperficies solidi regularis est rectangulum semilateris, & perpendiculi à centro plani toties sumptum, quot sunt anguli plani in solido.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro ABCD. est G. *centrum* plani ABC(1. *p.*) & GE. perpendiculum à *centro* in latus: & EB. semilatus. Dico ▭ GEB. duodecies sumptum, quia sunt 12 anguli plani in Tetraedro esse Tetraedri superficiem; & sic de reliquis.

DEMONSTRATIO.

DVctis GA. GB. GC. & similiter in omnibus planis ex *centro* in angulis fiunt tot triangula, quot anguli, omninò æqualia ex con-

Hh gruen-

gruentia(4.*l*.1.)sed ▭GEB.æquale est △AGB.(8.*l*.1.)Ergo etiam triangulo AGC.CGB.&c. Ergo summa omnium triangulorum, nempè tota superficies solidi, æqualis erit totidem rectangulis GEB.quot sunt triangula, vel anguli plani. Quod,&c.

In Tetraedro sunt anguli plani 12. in octaedro, & Cubo 24: in Icosaedro, & Dodecaedro 60.

PROPOSITIO CLXXI.

Soliditas corporis regularis æqualis est prismati cuius basis sit tota superficies solidi, & altitudo tertia pars perpendiculi à centro solidi in basim: vel radij sphæræ inscriptæ.

EXPOSITIO. Fig.25.

IN Tetraedro ABCD.est O.*centrum* solidi,& OG. perpendiculum, vel radius sphæræ inscriptæ. Dico Prisma cuius basis sit tota superficies, vel 12▭GEB & altitudo $\frac{1}{3}$ GO. esse Tetraedri soliditatem.

DEMONSTRATIO.

SI enim ex *centro* O. ducantur rectæ in planorum *centra*, & angulos OG OK. OA. OB. &c. Fiunt tot Pyramides AGBO. BGCO. CAGO. quot sunt anguli plani: quæ omnes sunt æquales ex congruentia. Sed Pyramis habens ba-

basim □ EGB. & altitudinem OG. est $\frac{1}{2}$ prismatis basim habens □ EGB. & altitudinem OG. & hoc triplum Prismatis habēs basim □ EGB. & altitudinem $\frac{1}{3}$ OG (1. *l* 11.) Ergo Pyramis est huic Prismati æqualis (2. *l* 5.) Ergo 12 Prismata basis □ EGB. & altitudinis $\frac{1}{3}$ OG. erunt tota soliditas Tetraedri: & 24 in octaedro, & Cubo: & 60 in Icosaedro, & dodecaedro: hoc est Prisma ex tota superficie, & $\frac{1}{3}$ perpendiculi. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXII.

IDem circulus comprehendit △ Octaedri, & □ cubi: & opposita plana in Octaedro, & Cubo æqualiter distant.

DEMONSTRATIO. Fig. 27.

QVia □ diametri sphæræ ad □ diametri circa □ cubi est vt 36 ad 24 (124. *p.*) sed etiam □ diametri sphæræ ad □ radij circa △ Octaedri est vt 36 ad 24 (134. *p.*) Ergo æquales sunt circulorum diametri (2. *l.* 5.) & circuli ex congruentia.

Denique □ diametri sphæræ æquatur 3 □ diametri sphæræ inscriptæ Cubo (124. *p*) & etiā Octaedri (135. *p.*) Ergo inscriptarum diametri sunt æquales: quæ sunt oppositorum planorum distantiæ.

PROPOSITIO CLXXIII.

IDem circulus comprehendit ⬠ dodecaedri, & △ Icosaedri: & plana opposita in vtroque solido æqualiter distant, vel eadem est sphæra vtrique inscripta.

DEMONSTRATIO. Fig. 29. 30.

QVia diameter sphæræ post triplum diagonij. Pentagoni inscripti circulo ambienti △ Icosaedri (151. *p.*) sed eadem diameter post triplum diagonij ⬠ dodecaedri (159. *p.*) Ergo idem est circulus comprehēdens △ Icosaedri, & ⬠ dodecaedri.

2. Quia radius circuli circa △ Icosaedri est minus segmentum distantiæ planorum, vel diametri sphæræ inscriptæ (153. *p*) & etiam in dodecaedro (158. *p.*) Ergo cum circulus demonstratus sit idem, eadem erit distantia planorum, vel diameter sphæræ inscriptæ. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXIV.

Circulus circa △ Tetraedri æqualis est circulo per 6 angulos dodecaedri.

2. *Radius vtriusque ad radiũ circuli Octaedri, & Cubi est in potentia vt 4 ad 3.*

3 *Latus Tetraedri æqualis est diametro circuli circa □ Cubi, & △ Octaedri.*

DEMONSTRATIO. Fig. 31.

QVia in Dodecaedro radius sphæræ ad radiũ circuli per 6 angulos G. R. M. C. *b. a.* est vt 9 ad 8 (166. *p.*) & idem radius sphæræ ad radiũ circuli circa △ Tetraedri est vt 9 ad 8 (111. *p.*) Ergo cùm eadem sit sphæra, idẽ erit circulus, vel æqualis. Quod, &c.

2. Quia Radius sphæræ ad radium circuli circa △ Octaedri est in potentia, vt 9 ad 6 (134. *p.*) & etiam ad radium circuli circa □ Cubi (122 *p*) sed radius sphæræ est ad circulum Tetraedri, & Dodecaedri dictum potentia, vt 9 ad 8 (*ex num.* 1.) Ergo *inverse*, & ex *æquo* radius circuli Tetraedri, & dodecaedri ad radium circuli Octaedri & Cubi, erit potentia vt 8 ad 6. vel vt 4 ad 3. &c.

3. Qualium □ diametri sphæræ est 36. est □ lateris Tetraedri 24 (108. *p.*) & etiam □ diametri circuli in Octaedro, & Cubo est 24 (134.

124.

124.*p*) Ergo □ lateris Tetraedri æquale est □ diametri circuli ambiẽtis □ Cubi, & △ Octaedri: Ergo & rectæ sunt æquales. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXV.

IN dodecaedro diagonium ⬠ æquale est lateri cubi in eadem sphæra.

2. *Latus dodecaedri est maius segmentum lateris Cubi proportionaliter secti.*

3. *Latus dodecaedri ad latus Cubi, est ut latus decagoni ad radium, & ut latus Icosaedri ad distantiam laterum oppositorum.*

DEMONSTRATIO. Fig. 30.

1. IN dodecaedro diameter sphæræ potest triplũ diagonij ⬠ (159.*p*) & eadem diameter potest triplum lateris Cubi (124 *p*.) Ergo diagonium ⬠ & latus Cubi æqualia sunt (2.*l*.5.)

2. Latus dodecaedri est latus ⬠ comprehendentis solidum: sed latus ⬠ ED. est maius segmentum diagonij EC (122.M.2.) Ergo latus dodecaedri est maius segmentum diagonij ⬠: vel lateris cubi proportionaliter secti ex *num*.1.

3. Quia latus decagoni est maius segmẽtum radij (125.M.2.) & latus Icosaedri maius seg-

ſegmentum diſtantiæ laterum oppoſitorum (156.*p.*) & latus dodecaedri ipſius lateris Cubi, ex *num.* 2. Omnia erũt in eadem ratione (1. *l.*5.) Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXVI.

Latus Cubi ad latus Icoſaedri eſt vt Diagonium ⬠ ad latus △ in eodem circulo.

2 *Vel vt recta potens quod tota, & maius ſegmentum ad rectam quæ poſsit quod tota, & minus ſegmentum.*

3. *Vel vt radius circuli per 3 angulos remotiores Icoſaedri ad radium circuli per 5 angulos eiuſdem.*

DEMONSTRATIO.

1. QVia idem circulus capit △ Icoſaedri, & ⬠ dodecaedri (173.*p.*) ſed diagonium ⬠ eſt latus Cubi in eadem ſphæra (175. *p.*) Ergo latus Cubi ad latus Icoſaedri eſt vt diagonium ⬠ ad latus △ eiuſdem circuli.

2. Sed diagonium ⬠ ad latus △ eſt vt recta potens quod tota proportionaliter ſecta, & maius ſegmentum ad rectam quæ poſsit quod tota, & minus ſegmentum (190. M. 2.) Ergo etiam latus Cubi ad latus Icoſaedri eſt vt recta potens quod tota, & maius, ad rectam quæ poſsit quod tota, & minus.

3. Quia

3. Quia in Icosaedro radius circuli per tres angulos remotiores, ad radium per 5 angulos est vt diagonium ⬠ ad latus △ (155.*p.*) Ergo vt latus Cubi ad latus Icosaedri. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXVII.

1 *SVperficies Tetraedri ad superficiē Octaedri est vt 2 ad 3. vel vt □ semilateris Tetraedri ad □ radij sphæræ, vel vt □ circulo inscriptum ad □ ex latere △ inscripti.*

2. *Soliditas Tetraedri ad soliditatem Octaedri est vt □ semilateris Tetraedri ad 3 □ radij sphæræ, vel ad □ ex latere △ circulo maximo inscripti.*

DEMONSTRATIO.

1. QVia in Tetraedro, & Octaedro sunt △△ similia, nēpè æquilatera; sunt in duplicata ratione laterum; hoc est vt potētiæ laterum (4.*l.*6.) sed qualiū diameter sphæræ potest 36: latus Tetraedri potest 24 (108.*p.*) & latus Octaedri potest 18 (136.*p.*) Ergo △ Tetraedri ad △ Octaedri est vt 24. ad 18 (1.*l.*5.) Ergo 4 △ Tetraedri ad 8 △ Octaedri, vel superficies ad superficiem erit vt 24. ad 36. vel vt 2 ad 3: vel vt 6 ad 9. hoc est vt □ semilateris Tetraedri ad □ radij sphæræ (118.*p.*) sed quia □ cir-

circulo inscriptum æquatur 2 □ radij (114 M. 2.) & □ lateris △ æquatur 3 □ radij (112. M. 2) est □ circulo inscriptum ad □ lateris △ vt 2 ad 3 (2. *l.* 5.) Ergo superficies Tetraedri ad superficiem Octaedri est vt □ inscriptum circulo ad □ lateris △, &c.

2. Quia Tetraedrum resolvitur in quatuor Pyramides similes factæ in *cētro*, & Octaedrum in octo: est summa ad summam, vel solidum ad solidum in ratione composita superficierum, & perpendiculorum à *centro*, vel altitudinum (5. l. 11.) sed ratio superficierum est vt 2 ad 3: vel vt 6 ad 9 (*ex num.* 1.) vel vt □ semilateris Tetraedri ad □ radij sphæræ inscriptæ (118 *p.*) & perpendiculum Tetraedri potest 1. qualium diameter sphæræ potest 36. (118. *p.*) & perpendiculum Octaedri potest 3 (140. *p.*) Ergo perpendiculum illius ad perpendiculum istius est in potentia vt 1. ad 3: vel vt Radius sphæræ ad latus △ circulo maximo inscripti (1. 12. M. 2.) Ergo ratio composita superficierũ, & perpendiculorum est vt □ semilateris Tetraedri ad □ ex latere △ circulo maximo inscripti (21 *P.*) sed hæc est ratio solidorum: Ergo Tetraedrum ad Octaedrum est vt □ semilateris ad 3 □ radij sphæræ, vel ad □ ex latere △ circulo maximo inscripti. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXVIII.

SVperficies Octaedri ad superficiem Cubi est vt latus △ ad diametrum circuli circunscripti.

2. *Soliditas ad soliditatem est in eadem ratione, quæ est vt Radius circuli circa △ Tetraedri ad radium circuli circa △ Octaedri.*

DEMONSTRATIO.

1. QVia tertia pars △ ad quartam partem quadrati in eodem circulo descripti est latus △ ad diametrum circuli (191. M. 2) sed △ Octaedri, & □ Cubi sunt in eodem, vel æqualibus circulis (172. *p.*) Ergo $\frac{1}{3}$ △ octaedri ad $\frac{1}{4}$ □ Cubi, est vt latus △ ad diametrum sui circuli: sed tota superficies octaedri diuiditur in $\frac{24}{3}$ △: cùm habeat 8 △: & superficies Cubi habens 6 □ diuiditur in $\frac{24}{4}$ □: Ergo superficies octaedri ad superficiē Cubi est latus △ ad diametrum circuli.

2. Quia soliditas Octaedri est prisma cuius basis sit tota superficies, & altitudo $\frac{1}{3}$ perpendiculi à *centro*: & similitèr soliditas Cubi (171 *p.*) sed perpendicula in Octaedro, & Cubo sunt æqualia, nempè æquales radij sphæræ inscriptæ, vel semidistantia planorum (172. *p*) Ergo prismata, vel solida erūt vt bases (5. *l.* 11.) nempè vt latus △ ad diametrum circuli ex

num,

num. 1. hoc est vt Radius circuli circa △ Tetraedri ad radiũ circuli circa △ Octaedri, nẽpè in potentia vt 4. ad 3. (174 *p.*) Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXIX.

1. *SVperficies Cubi ad superficiem Dodecaedri est vt duplum diagonii* ⬠ *ad quintuplum radij.*

2. *Solidum ad solidum est vt duplum diagonium ad quintuplum maius segmentum diagonij factum à radio bisecante latus decagoni proximum.*

EXPOSITIO. Fig. 32.

IN circulo dodecaedri sit ⬠ ABCD. & AC. diagonium: & CH. latus decagoni proximum, & bisectum in I radio GI. secãte diagonium in L. Dico 1. superficiem Cubi ad superficiem dodecaedri esse vt duplũ diagonij AC. ad quintuplum radij GA: Dico 2. solidum ad solidum esse vt 2 AC. ad 5 AL.

DEMONSTRATIO.

1. DIuidantur AC. & GE. bifariam in X. Q. & erit GQ maius segmentum ipsius GR (128 M. 2.) sicut AB. ipsius AC. (122. M. 2.) sed vt GR. ad GQ. ita 2 GR. ad 2 GQ. vel GE (5. *l.* 5.) Ergo 2 GR. ad GE. est vt AC. ad AB (1. *l.* 5.) Ergo vt ½ AC. ad AB. ita GR. ad GE. & alter-

Ii 2 nan-

nando vt $\frac{1}{2}$ AC. ad GR. ita AB. ad GE (4. *l.* 5.) Ergo ratio AC. ad GE. composita est ex ratione AC. ad AB. & AB. ad GE vel $\frac{1}{2}$ AC. ad GR. (21. *P.*) sed quia AB. est latus dodecaedri, & AC. latus Cubi in eadem sphæra (175. *p.*) & AT □ Cubi, & ABCD ⬠ dodecaedri, si ducantur ex *centris* G. Z. ad angulos rectæ, erit △ VZT. ad △ DGC. in ratione cõposita VT. vel AC. ad DC. vel AB. & SZ. vel $\frac{1}{2}$ AC. ad GR. (1. *l.* 6.) Ergo △ VZT. ad △ DGC. est vt AC. ad GE (1. *l.* 5.) sed Cubus cõtinet 24 △ VZT. quia constat ex 6 □, & quodlibet ex 4 △: & dodecaedrum continet 60 △ DGC. nempè 12 ⬠, & quodlibet 5 △: Ergo tota superficies Cubi ad superficiem dodecaedri, est vt 24 AC. ad 60 GE & quia vt 24 ad 60. ita 2 ad 5: erit superficies Cubi ad superficiẽ dodecaedri, vt 2 AC. ad 5 GE. Quod erat, &c.

2. Cõtinuato latere decagoni in F. est angulus F. dimidium arcus AH. minus dimidio EC. vel HB. (3. *l.* 3.) Ergo est dimidium arcus AB. sed angulus AEC. est dimidium arcus AC. vel æqualis arcui AB (3. *l.* 3) Ergo angulus AEC *æqu.* 2 EFC. sed externus AEC *æqu.* CFE ECF. (3 *l.* 1) Ergo æquales sunt CFE. ECF & EF. *æqu.* lateri decagoni EC (5. *l.* 1.) Deindè FCP æqualis verticali ACH (1. *l.* 1.) & dimidium arcus AH. vel BE (3. *l.* 3.) & quia GK. bisecat chordã

ex

ex hyp. etiam arcum (2.*l*.3.) & est EK. dimidiũ arcus EB. & angulus EGK. *æqu.* FCP (3.*l*.3.) Ergo etiam FGA. AGK. æquales sunt (1.*l*.1.) & assumpto communi GAC. erunt æquiangula △ AGL. & △ ACF. (3.*l*.1.) & latera proportionalia vt AP. ad AF. ita AG. ad AL. (2.*l*.6) & ita $\frac{1}{3}$ AP. ad $\frac{1}{6}$ AF. & ita 5 AG. ad 5 AL (5 *l*.5.) sed solida regularia æqualia sunt prismati cuius basis sit tota superficies, & altitudo $\frac{1}{3}$ radij, vel $\frac{1}{6}$ diametri sphæræ inscriptæ (171.*p*) Ergo rationem habent compositam ex superficiebus, & diametris sphæræ inscriptæ (5.*l*.11.) sed cùm AF. composita sit ex diametro circuli, & latere decagoni est distantia planorũ, vel diameter sphæræ inscriptæ (168.*p*.) & cum AC. sit latus Cubi (175.*p*.) est AC. diameter sphæræ Cubo inscriptæ (114.*p*.) Ergo Cubus ad dodecaedrũ est in ratione composita superficierum 2 AC. ad 5 AG. (ex *num*. 1.) & diametrorum inscriptarum AC. ad AF. vel 5 AG. ad 5 AL sed ratio 2 AC. ad 5 AL. composita est ex ratione 2 AC. ad 5 AG. & 5 AG. ad 5. AL (21.*P*.) Ergo Cubus ad dodecaedrum est vt 2 AC. ad 5 AL. (1.*l*.5.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXX.

1. *SVperficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, est vt diagonium ⬠ ad latus △ vel vt latus Cubi ad latus Icosaedri eiusdem sphæræ, vel vt recta potens quod tota proportionaliter secta, & maius segmentum ad rectam, quæ possit quod tota, & minus.*

2. *Solida sunt in eadem ratione.*

EXPOSITIO. Fig. 32.

SIt AG. diagonium ⬠ dodecaedri, & AN. latus △. Dico superficiem dodecaedri ad superficiem Icosaedri esse vt AG. ad AN: & ita solidum ad solidum, &c.

DEMONSTRATIO.

QVia $\frac{1}{5}$ ⬠ ad $\frac{1}{3}$ △ eiusdem circuli est vt diagonium AG. ad latus △ AN. (186. M. 2.) sed idē circulus capit ⬠ dodecaedri, & △ Icosaedri (173. *p.*) Ergo $\frac{1}{5}$ ⬠ dodecaedri ad $\frac{1}{3}$ △ Icosaedri est vt AG. ad AN (1. *l.* 5.) sed dodecaedrū habet $\frac{60}{5}$ ⬠: vel 12 ⬠: & Icosaedrū $\frac{60}{3}$ △ vel 20 △: Ergo $\frac{60}{5}$ ⬠ ad $\frac{60}{3}$ △ vel superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, est vt AG. ad AN (5. *l.* 5.)

2. Quia dodecaedrum, & Icosaedrum æqualem habent altitudinem, nempè distantiam planorum, vel sphæram inscriptam; prismata ipsis æqualia æqualem habent altitudi-

nem

nem (171.*p*.) Ergo se habebūt vt bases (5.*l*.11.) vel superficies, nempè vt diagonium AC. ad latus △ AN. *ex num*. 1. vel vt potens totam, & maius segmentum rectæ proportionaliter sectæ ad potētem quod tota, & minus (190. M.2) & quia diagonium AC. est latus Cubi in eadē sphæra (175.*p*.) & latus △ est latus Icosaedri in eadem sphæra (173.*p*.) erit superficies, & soliditas dodecaedri ad superficiem, & soliditatem Icosaedri vt latus Cubi ad latus Icosaedri. Quod, &c.

SCHOLIVM.

CVm notæ iam sint rationes Tetraedri ad Octaedrum; Octaedri ad Cubum, Cubi ad Dodecaedrum, & Dodecaedri ad Icosaedrū, omnium inter se rationes cognitæ erunt Tetraedri ad Cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum. Octaedri ad Icosaedrum, & Dodecaedrum, & Cubi ad Icosaedrum per compositionem rationis factam prout in figuris planis in fine secundæ partis.

Plures aliæ partium cōparationes fieri possunt ex iam demōstratis, quod vt facilius præstet Geometra, Tabellas præcedētes inspiciat.

In fine animadvertendum est non posse dari aliud corpus regulare præter quinque exposita, quod facile demonstrari poterit.

Quoniam ad angulū solidum comprehenden-

den-

dendum, requirũtur saltem tres anguli plani, minores quatuor rectis (3.*l.* 11) Ergo cũ angulus Hexagoni contineat 120.*gr.* tres anguli efficient 360. nempè integrũ circulum, vel quatuor rectos, & sic angulũ solidũ nequeunt cõprehẽdere; & multò minus tres anguli Heptagoni, Octagoni, &c. Remanent ergo ex figũris regularibus △ □ & ⬠ ad solida regularia.

Tres igitur anguli Trianguli regularis cõprehẽdunt angulum Tetraedri: & quatuor angulũ Octaedri; & quinque angulũ Icosaedri, vndè resultant Tetraedrum, Octaedrum, & Icosaedrum. Sex verò anguli trianguli faciũt quatuor rectos, vt patet si ex *centro* Hexagoni ducantur sex rectæ in angulos.

Quatuor anguli Quadrati cùm sint recti efficiunt 4 rectos, & angulum solidũ nequeunt comprehendere (3.*l.* 11.) & multò minus 4 anguli ⬠.

Tribus igitur angulis rectis comprehenditur solidus angulus Cubi, & tribus angulis ⬠ comprehenditur solidus angulus dodecaedri: vndè Cubus, & dodecaedrum resultant.

Cũ ergo reliqui anguli figurarũ regulariũ inutiles sint, & harum trium anguli nullã aliã patiantur combinationem aptam, quinque tantum esse possunt corpora, vel solida ordinata, vel regularia. Quod, &c.

CAP.

CAPVT IV.

DE RESOLVTIONE PROBLEMATVM.

Nimis arduum, & operosum esset Problemata omnia, quæ ex præmissis theorematibus elici possunt, adducere: more nostro aliqua prælibabimus, quam plurimis omissis, quæ à studioso Lectore, si theoremata ritè perceperit, facilè excogitari poterunt, & resolvi.

Non ideò tamen praxes omnes debuerunt ommitti, imò operæ pretium fuit aliquas adducere, quæ Tyrones Geometras manu ducant, & alliciant ad similes proponendas, & demonstrandas, licet qui Geometriæ adyta penetrauerint, & diuitias scrutati fuerint, prototypis his non indigeant; cum pro ingenij fælicitate orbi literario nobiliora communicare possint, quod vtinam præstarent omnes, quibus tantæ Regiæ data est clauis.

PROPOSITIO CLXXXI.
Problema 1.

1. *CVjusvis Pyramidis centrum ff. ff. invenire, & minimam summam ff. ff.*

2. *Pyramidis Tetraedra minimam summã invenire etiam sine centro.*

I. CONSTRVCT. ET DEMONST. Fig. 33.

SIt Pyramis ABCD. inveniatur primò *centrũ* basis E(80, M. 1.) & ex DE. sumatur EF. pars denominata à numero angulorum Pyramidis, eritque F. *centrum* ipsius (67. *p.*) Tandem ex F. inveniatur minima summa ad omnes angulos (81. M. 1.) eritque factum.

II. CONSTRVCTIO.

SIt Pyramis Tetraedra A B C D. inveniatur summa *ff. ff.* ex omnibus lateribus AB. BC. CA. A D. BD. CD & sit □ GH (6 *p* 2.) diuidatur GH. bifariam in K. Dico □ GK. esse minimam summam □ □ Pyramidis.

DEMONSTRATIO.

QVia □ GH. est summa □ □ ex omnibus lateribus ex *construct.* & quadruplum □ GK (3. *l.* 2) sed summa □ □ ex lateribus est etiã quadrupla minimæ in Pyramide Terraedra (11. *p.*) Ergo □ GK. est minima summa □ □ Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXIII.
Problema 2.

1. *CVius vis Pyramidis invenire rectam à vertice in centrum basis.*

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt Pyramis ABCDE. quæritur recta EF. à vertice in *centrum* basis.

CONSTRVCTIO.

1. INveniatur summa □ □ ex lateribus eleuatis EA. EB EC. EC (6. *p.* 2.) quæ sit □ H. Inveniatur præterea *centrum* basis F (80. M. 1.) & minima summa *ff ff*. FA. FB. FC. FD. (6. *p.* 2.) quæ sit □ I. & □ K. sit differentia inter □ H. & □ I. tandem sit □ K. æquale totidem □ □ L. quot sunt anguli basis: nempè in nostro casu sit □ K. *æqu.* 4 □ L. Dico L. æqualem esse rectæ quæsitæ EF.

DEMONSTRATIO.

QVoniam F. est *centrum* basis: sunt □ □ EA. EB. EC. ED. *æqu.* □ L. vel minimæ summæ + 4 □ EF (60. M. 1.) & □ H. æquale est □ I + □ K. ex *constr.* erit □ K æquale 4 □ EF. sed etiam □ K. æquale est 4 □ L. ex *constr.* Ergò □ L æquale est □ EF. vndè, & recta L. æqualis est rectæ EF. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXIIII.
Problema 3.

CVius vis Pyramidis minimam summam ff.ſſ. invenire etiam ſine centro

EXPOSITIO. Fig. 34.

SIt Pyramis ABCDE. Quæritur minima m ſummam *ff.ſſ.* ex *centro* G. in angulos A.B.C. D.E. licet ob corporis impenetrabilitatem *cētrum* G. inveniri non poſsit.

CONSTRVCTIO.

INveniatur prius □H æquale □ □ EA. EB. EC. ED. & recta L*q*. æqualis rectæ à vertice in *centrum* baſis EF. (182.*p*.) Diuidatur prætcrea L*q*. in tot partes, quot ſunt anguli Pyramidis, vt hic in 5: & ſit *p*. primum punctum diuiſionis, & erit *pq*. æqualis rectæ GE (47.*p*.) Tandem fiat □ M. æquale 5 □ *pq*. quot ſcilicet ſunt anguli Pyramidis, & ſit □ N. differentia inter □ H. & □ M (2.*p*.2.) Dico □ N eſſe minimam ſummam □ □ ex *centro* G. in angulos A. B. C. D.E.

DEMONSTRATIO.

QVia □H. æquale eſt □ □. EA. EB. EC. ED. & etiam □ M + □ N. ex *conſtr*. Ergo □M + □N. æquantur □ □ EA. EB. EC. ED. ſed □ □ EA. EB. EC. ED. *æqu*. minimæ ſummæ

ex

ex G+5 □ GE (60. M.1.) Ergo cùm GE. *pq.* sint æquales; erunt □ M + □ N. æqualia Minimæ summæ ex G+5 □ GE. vel *pq.* Ergo cùm □ M. sit æquale 5 □ *pq.* ex *constr.* erit □ N. æquale minimæ summæ ex G. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXIV.
Problema 4.

D*Ata basi, & Minima summa, invenire summam ff. ss. laterum eleuatorum.*

EXPOSITIO. Fig. 34.

IN Pyramide ABCDE. sit data basis ABCD. quadrilatera, vel Pentagona, &c. & minima summa ex G. sit □ N. Quæritur summa *ff. ss.* EA. EB. EC. ED.

CONSTRVCTIO.

INveniatur prius *centrum* basis F. (80. M.1.) & Minima summa FA. FB. FC. FD. quæ sit □ I. & □ K. sit differētia inter □ N & □ I. (6. *p* 2.) deinde quadrato numeri angulorum basis addatur ipse numerus: vt hic anguli basis sunt 4: eius quadratum 16: summa 20: Sit ergo □ K æquale 20 □ L*p.* (6 *p.* 1.) & recta *pq.* sit tripla, quadrupla, vel quintupla ipsius L*p.* iuxta numerum angulorum basis: & nunc est quadrupla. Insuper □ M. fiat quintuplum □ *pq.* iuxta numerum angulorum pyramidis (6. *p.* 1.) &

□ H.

□H. æquale □M+□N. & erit □H. summa □□EA. EB. EC. ED.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex G. in A. B. C. D. *æqu.* summæ ex F +4□FG. (60. M. 1.) & quia FG. est quinta pars ipsius FE. vel quarta GE. (67. *p.*) vel vt 1. ad 4. cùm quadrata sint in duplicata ratione est □FG. ad □GE. vt 1. ad 16. (4. *l.* 6.) Ergo cũ □GE. sit æquale 16 □FG. erunt □□ ex G. in A. B. C. D. E. *æqu.* □□FA. FB. FC. FD +20□ FG. (4. *P.*) sed □□ex G. vel □N. *æqu.* □□ex F. vel □I+□K. vel +20□L*p.* ex *constr.* Ergo æquales sunt L*p.* FG. & quia EG. quadrupla est FG. & *pq.* ipsius L*p.* ex *constr.* æquales etiã sunt GE *pq.* sed □□ex E. *æqu.* □□ex G+5□GE. (60. M. 1.) Ergo □□EA. EB. EC. ED *æqu.* □N. minimæ summæ+5□*pq.* vel ex *constr.* + OM. sed □H *æqu.* □N+□M. ex *constr.* Ergo □H. *æqu.* □□ex E. in A. B. C. D. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXV.
Problema 5.

Data basi, Minima summa, & ratione laterum eleuatorum, determinare singula latera, & Pyramidem.

EXPOSITIO. Fig. 34.

Pyramidis ABCDE. sit data basis ABCD. & minima summa ex *centro* G. sit □ N. ratio verò laterum EA. ad EB. vt *a* ad *b*. & EA. ad EC. vt *a*. ad *c*. & EA. ad ED. vt *a*. ad *d*. vel si rationes hoc ordine datæ non sint, reducātur ad hunc ordinem claritatis gratia. Quæruntur determinata latera EA. EB. EC. ED. & indè Pyramis ABCDE.

CONSTRVCTIO.

Inveniatur prius □ H. summa □ □ EA. EB. EC. ED (184 *p*) deinde sit *b*. media inter *a*. *m*. & *c*. inter *a*. *n* & *d*. inter *a*. *o*. (2. *p*. 6.) & diuidatur H. sicut tota composita $a+m+n+o$. & sint partes *f*. *g*. *h*. k. (2. *p*. 3.) Tandem inveniantur mediæ inter Hf. Hg. Hh. Hk. (2 *p*. 5.) Dico primam mediam esse EA secundam EB. tertiā EC. quartam ED. & ita infinitè.

DEMONSTRATIO.

Quia rectæ EA. EB. EC ED. sunt vt *a*. *b*. *c*. *d*. & rationes *a*. ad *m*. *n*. *o*. duplicatæ sunt ratio-

num

num *a* ad *b.c.d.* ex *constr.* erunt □ □ EA. EB. EC. ED. vt rectæ *a.m.n.o.* (4. *l.* 6.) Ergo summa □ □ vel □ H. ad singula Quadrata EA. EB. EC. ED. est vt tota $a+m+n+o$. ad singulas *a. m. n. o.* (4. *l.* 5.) vel vt H. ad singulas partes *f. g. h. K.* ex *constr.* sed □ H. est ad ▭ H*f*. H*g*. H*h*. H k. vt H. ad *f. g. h.* k. (1 *l.* 6.) Ergo quia □ H. eandem rationem habet ad □ EA. EB. EC. ED. & ad ▭ H*f*. H*g*. H*h*. H k. est □ EA. æquale ▭ H*f*. & □ EB ▭ H*g*. & □ EC. ▭ H*h*. & □ ED. ▭ H k. (2. *l.* 5.) Ergo EA. media est inter H. *f*. & EB. inter H*g*. &c. (1. *l.* 6.) Ergo prima media est EA. secunda EB. &c. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXVI.
Problema 6.

PEr duam rectam secantem latus, & planũ anguli solidi tribus planis comprehensi planum ducere secans Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 34.

SIt angulus solidus ABCD. tribus planis cõprehensus, & recta BE secet latus DB. in B. & planum ADC. in E. quæritur planum ABC. transiens per rectam BE. & secans Pyramidem minimam ABCD.

CONSTRVCTIO.

DVcatur per punctum E. recta AEC. bifariã diuisa in E (160. M. 2.) & iungantur CB. AB. Dico planum ABC. secare Pyramidem minimam per rectam BE.

DEMONSTRATIO.

CVm in △ ABC. basis AC. sit bifariam diuisa, erunt △△ AEB. ECB. æqualia (1. *l.* 6.) Ergo cum planum ABC. sit bifariam diuisum recta BE. secabit per illam Pyramidem minimam (19. *p.*)

△ *Aliter*. Quia planum ABC. facit sectionem AC. bifariam diuisam in E secat △ ACD. minimam (160. M. 2.) Ergo secat Pyramidem minimam ABCD (20. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXVII.
Problema 7.

Per datum punctum intra angulum solidum tribus planis comprehensum, ducere planũ secans Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 34.

INtra angulum solidum D A B C datum sit punctum F. quæritur planum A B C, quod secet Pyramidem ABCD. omnium minimã per punctum F.

CONSTRVCTIO.

SVmatur in quouis latere quodlibet punctũ H. per quod, & per datum F. ducatur HFG. secans oppositum planum in G. & ducatur DG. fiat deindè FI. dimidium FH. & IE parallela ipsi BD. secans DG. in E. & ducatur EFB. per quam ducatur planum ABC. secans Pyramidem minimam per EB. (186 p.) Dico esse ABCD. minimam per punctum F.

DEMONSTRATIO.

QVia EI. HB. sunt parallela, vt IF. est dimidiũ FH. ita EF. ipsius FB (2. l. 6.) & quia AC. est bisecta in E. erit F. *centrum* minimum △ ABC (1. M. 2.) Ergo quia planum ABC. habet *centrum ff.* in F. secat per F. Pyramidem minimam (28 p.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXVIII.
Problema 81.

DAto puncto intra Pyramidem Tetraedrũ determinare angulum solidum, ex quo Pyramis omnium minima secari potest.

EXPOSITIO. Fig. 35.

IN data Pyramide ABCD, datum sit punctum o, & petitur determinatio anguli D. ex quo secanda sit Pyramis minima.

CONSTRVCTIO.

DVcantur ex angulis A. B. C. D. per *o.* rectæ secantes opposita plana in *v. r. e. y.* & conuehtis planorum centris (1. M. 2.) *z. d. b. x.* ductis tandem rectis ad dimidiata latera *a. b. c. d. f.* &c. Si omnia puncta *v. e. r.* cadunt intra trapezia alicuius anguli solidi; ex illo abscinderetur Pyramis minima: vt in hoc casu ex angulo D.

DEMONSTRATIO.

QVia rectæ *d f. dn. nt. nd. xd. xf. df. ud.* sunt sectiones planorum hexaedri determinantis Pyramidem minimam (43. *p.*) Ergo cum punctum *o.* sit intra hexaedrum anguli D. ex angulo D. secabitur Pyramis omnium minima (43. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXIX.
Problema 9.

PYramidem tetraedram per datum angulum, vel punctum in latere in data ratione diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 16.

SIt data Pyramis Tetraedra, & angulus C. vel quodlibet pũctum *b*. in latere, quæritur planum *a*BC. vel *ab*C. secãs Pyramidem in ratione data *x*. ad *z*.

CONSTRVCTIO.

1. SI punctum datum sit angulus C. eligatur quodlibet latus illius anguli nempè CB. & latus oppositum AD. diuidatur in data ratione, vt *x*. ad *z*. ita AD. ad A*a*. & ductis AB. AC. erit planum ABC. quæsitum.

2. Si punctum datum sit *b*. in aliquo latere DB ducatur ex *b*. in angulum oppositum A. vel C recta, nempè *b* C. & ex *b*. ducatur recta *ba*. diuidens △ ABD. oppositum angulo assumpto C. in data ratione *x*. ad *z*. (156. M. 2.) & ductis *a*C. *b*C erit planum *ab*C. quæsitum.

DEMONSTRATIO.

QVia △ABD. & △AB*a*. habent eandem altitudinem in B. se habent vt bases AD. ad A*a*. (1. *l*. 6.) vel *x*. ad *z*. ex constructione.

Si-

Similiter, quia Pyramides ABDC. ABaC. habent eandem altitudinem in C. se habent vt bases ABD. ad ABa (5. *l.* 11.) nempè vt *x*. ad *z*. Ergo secta est Pyramis ABCD. in data ratione plano *a*BC.

Similiter Pyramis ABDC ad æquè altam *ab*. DC. est vt basis ABD. ad *ab*D. (5. l. 11.) nempè vt *x*. ad *z*. ex *constr*. Ergo, &c.

Omnis ratio quæstioni apta est, vndè problema nullam determinationem requirit.

PROPOSITIO CXC.

Problema 10.

PEr datum punctum in superficie Pyramidis tetraedra, illam secare in quacumque data ratione.

EXPOSITIO. Fig. 37.

SIt Pyramis ABCD. & punctum datū *o*. quæritur planum secans Pyramidem ABCD. in qualibet data ratione *x*. ad *z*.

CONSTRVCTIO.

1. DVcantur per *o*. recta *coa*. secans △*ca*D. minimum & diuidens △ABD. in maxima ratione (160. M 2.) si verò ratio △ABD. ad △*ca*D. sit vt *x* ad *z*. ductis rectis *a*C. *c*C. in angulum plano oppositum, erit planum C*ac*. quæsitum.

2. Si

2. Si autem ratio data x. ad z. maior sit ratione $\triangle$ ABD. ad $\triangle$ *ca* D. inveniatur hæc ratio, & sit vt x. ad y. fiat deinde vt y. ad z. ita DC. (latus eleuatum supra planum anguli ex quo sectum est $\triangle$ minimum) ad D*b*. & ductis *ab*. *ab*. erit planum *cab*. quæsitum.

3. Si data ratio x. ad z. minor sit ratione $\triangle$ ABD. ad *ca* D. ducatur per *o*. recta *dq*. secans $\triangle$ ABD. in data ratione x. ad z. (163. M. 1.) & ductis rectis *d* C. *q* C. in angulum plano oppositum C. erit planum *dq* C. quæsitum.

DEMONSTRATIO.

In *casu* 1. Pyramis ABDC. ad æquè altam *ca* DC. est vt basis ABD. ad basim *ca* D. (5. *l*. 11.) sed ex *hyp*. ABD. ad *ca* D. est vt x. ad z. Ergo Pyramis ABCD ad *ca* DC. est vt x. ad z.

2. In *casu* 2. Quia Pyramides ABDC. *ca* D*b*. habent angulum D. communem: altitudines in C. & *b*. sunt vt DC. ad D*b*. (2. *l*. 6.) hoc est ex hypothesi vt y. ad z. sed Pyramis ABDC. ad *ca* D*b*. est in ratione composita basis ABD. ad *ca*. vel x. ad y. & altitudinis DC. ad D*b*. vel y. ad z. (5. *l*. 11.) Ergo cùm ratio x. ad z. composita sit ex rationibus x. ad y. & y. ad z. erit Pyramis ABDC. ad *ca* D*b*. vt x. ad z. (v *li*. 5.)

3. In *casu* 3. Pyramis ABDC. ad Pyramidem *dq* DC. æquè altam in C. est vt basis ABD.

ad

ad *dq*D. (5.*l.*11.) hoc est *constr.* vt *x*. ad *z*. Quod erat, &c.

Ex ipsa constructione liquet Problema omnem rationem admittere.

PROPOSITIO CXCI.

Problema 11.

PEr datum intra Pyramidem tetraedrum punctum secare ipsam in data ratione, quæ maior non sit maxima Pyramidis datæ ad Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 58.

INtra Pyramidem ABCD. datum sit punctum *o*, per quod ducendum est planum secans Pyramidem in data ratione *x*. ad *z*.

CONSTRVCTIO.

PRimò inveniatur angulus D. ex quo Pyramis minima resecanda est (188. *p.*) Secundò ducatur planum *adb*. secans Pyramidem *abd*D (187. *p.*) Tertiò inveniatur ratio Pyramidis ABCD. ad Pyramidem *abd*D. quæ si est vt *x*. ad *z*. planum *abd*. secabit Pyramidem in data ratione.

Si autem ratio Pyramidis ABCD. ad *abd*D. sit vt *x*. ad *y*. & maior quàm ratio *x*. ad *z*. ex puncto I. quod bisecat *ad*. ducatur *cie*. vt △ *ad*D. ad *ce*D.

*ce*D. sit vt *y*. ad *z*. (161. M. 2.) & ductis *cb*. *eb*. erit planum *ceb*. quæsitum.

DEMONSTRATIO.

PYramis ABCD. ad Pyramidem *adb*D. est vt *x*. ad *y*. ex *hyp*. vel *constr*. sed Pyramis *ad*D*b*. ad æquè altam *ce*D*b*. est vt basis *ad*D. ad *ce*D. (5. *l*. 11.) hoc est vt *y*. ad *z*. ex *constr*. Ergo ex æquo Pyramis ABDC ad Pyramidem *ce*D*b*. est vt *x*. ad *z*. Quod erat, &c.

Determinatio Problematis in hypothesi cõtenta perspicua est, eadem enim quantitas ad maiorem minorem habet rationem: & maiorem ad minorẽ (2. *l*. 5.) Ergo Pyramis ABCD. ad minimam *adb*D. maximam habet rationẽ: vndè si ratio data maior fuerit hac maxima, erit problema impossibile cùm Pyramis minor minima secari non possit, alitèr non esset illa minima.

PRO-

PROPOSITIO CXCII.

Problema 12.

DAtam Pyramidem Tetraedram per datã in superficie rectam angularem in data ratione diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 39.

SIt Pyramis ABCD. & in eius superficie quælibet recta angularis, scilicet transiens per aliquem angulorum, quæ sit CB vel Ca. per quã diuidenda sit Pyramis in ratione xz. ad xo.

CONSTRVCTIO.

SI data recta sit latus BC. diuidatur latus oppositum AD. in b. vt xz. in o. & ductis Bb. Cb. erit factum.

Si recta fuerit Ca. diuidatur xz. in i. vt AB in a. Si xi. sit æqualis xo. ducta aD. erit factum. Si verò xi. sit maior quam xo. diuidatur latus conterminum angulo A. nempè AD in b. vt xi in o. Si verò xi. minor sit xo. diuidatur latus conterminum B. nempè BD in d. vt xz in o. & ductis ab. Cb. vel ad. Cd erit factum.

DEMONSTRATIO.

1. Primum cõstat, quia Pyramides ABCD. ABCb supra eandem basim sunt vt altitudines AD. ad Ab. (1. l. 6.) nempè vt xz. ad xo. ex constr Ergo, &c.

2. Pyramis ABCD. ad $AaCD$. est vt basis ABC. ad AaC (5. *l*. 11.) sed $\triangle ABC$. ad $\triangle AaC$. æquè altum est vt AB. ad Aa. (1. *l*. 6) hoc est vt *xz*. ad *xo*. ex *hyp*. Ergo Pyramis ABCD. ad Aa CD. est vt *xz*. ad *xo*. (1. *l*. 5.)

Si verò *xi*. fuerit maior quàm *xo*. Pyramis ABCD. ad $AaCb$. est in ratione composita basium, & altitudinum (5. *l*. 11.) sed basis ABC. ad AaC. est vt AB. ad Aa. (1. *l*. 6.) vel vt *xz*. ad *xi*. ex *Constr*. & altitudo AD. ad Ab. vt *xi*. ad *xo*. ex *constr*. Ergo Pyramis ABCD. ad $AaCb$. est vt *xz*. ad *xo*. (1. *l*. 5.)

Tandem si *xi*. fuerit minor *xo*. cum ABC. ad aBC. sit vt AB. ad aB. (1. *l*. 6.) hoc est vt *xz*. ad *zi*. ex *constr*. sed altitudo BD. ad altitudinem Bd. est vt *zi*. ad *zo*. ex *constr*. Ergo Pyramis ABCD. ad $aBCd$. est vt *xz*. ad *zo*. (1. *l*. 5.) Ergo Pyramis ABCD. ad residuum $AaCdD$. erit vt *xz*. ad residuum *xo*. (5. *l*. 5.). Quod erat, &c.

Ex ipsa demonstratione constat problema omnem rationem admittere, & nulla indigere determinatione.

PRO-

PROPOSITIO CXCIII.
Problema 13.

Datam Pyramidem Tetraedram per datā in superficie rectam secantem duo latera in data ratione diuidere, quæ maior sit ratione plani ad triangulum sectum, vel minor ratione plani ad trapezium sectum.

EXPOSITIO. Fig. 40.

Sit data Pyramis ABCD. & data recta in superficie *ab*. quæritur planum *abc*. secans pyramidem in ratione *xz*. ad *xo*. quæ maior sit ratione ABC ad Δ *ab*A. vel minor ratione ABC ad *ab*CB.

CONSTRVCTIO.

Primò. Ratio ABC. ad A*ab*. sit vt *xz*. ad *xi*. minor quàm ratio data *xz*. ad *xo*. eritque *xi*. maior quàm *xo*. (2. *l*. 5.) diuidatur igitur latus AD. in *c*. vt *xi*. in *o*. & ductis *ac*. *bc*. erit factum.

Secundo. Sit ratio ABC ad *abCB*. vt *xz*. ad *xe*. & maior quam ratio *xz*. ad *xo*. eritque *xe*. minor quàm *xo*. (2. *l*. 5.) Diuidatur ergo AD. in *c*. vt *ze*. in *o*. & ductis *ac*. *bc*. erit factum.

DEMONSTRATIO.

Pyramis ABCD. ad Pyramidem A*ab*. D. est in ratione composita basium ABC. ad *ab*A.

& altitudinum AD. ad Ac. (5. l. 11.) sed ratio ABC. ad A*ab.* est vt *xz.* ad *xi.* ex *hyp.* & ratio AD. ad A*c.* vt *xi.* ad *xo.* ex *constr.* Ergo ex æquo Pyramis ABCD. ad pyramidem A*abc.* erit vt *xz.* ad *xo.* in ratione data (1. l. 5.)

Secundo. Quia basis ABC. ad *ab*CB. est vt *xz.* ad *xe.* ex *hyp.* erit ABC. ad residuum *ab*A. vt *xz.* ad residuum *ze.* (5. l. 5.) sed Pyramis ABCD. ad pyramidē *ab*A*c.* est in ratione composita ABC. ad *ab*A. quæ est *xz.* ad *ze.* & altitudinum AD. ad A*c.* quæ ex *constr.* est vt *ze.* ad *zo.* (5. l. 11.) Ergo ex æquo ratio ABCD. ad *ab*A*c.* est vt *xz.* ad *zo.* (11. l. 5.) Ergo ABCD. ad residuū *ab*CBD. erit vt *xz.* ad residuū *xo.* vel in ratione data (5. l. 5.) Quod &c.

Ex quibus constat problema omnem rationē admittere quando △ A*ab.* maius, vel æquale est trapezio *ab*BC. Si autem trapezium fuerit maius, hæc constructio non admittit rationes medias inter ABC. ad *ab*CB. & ABC. ad *ab*A.

PRO-

PROPOSITIO CXCIV.

Problema 14.

PEr datam rectam intra Pyramidem tetraedram secantem unum latus, & planum oppositum: vel per punctum extra Pyramidem secare ipsam in data ratione apta.

EXPOSITIO. Fig. 41.

SIt data recta *co* secans latus DC. in *c*. & planũ ABD. in *o*. vel sit datum extra Pyramidem punctum *i*. & secanda sit Pyramis in ratione *xz*. ad *xo*.

CONSTRVCTIO.

SIt ratio DC. ad D*c*. vt *xz*. ad *xi*. & per punctũ *o*. ducatur *boa*. (161. M. 2.) secans planum ABD. vt *xi*. ad *xo*. ductis *bc*. *ac*. erit factum.

Secundò. In quouis latere DC. assumatur quodlibet punctum *c*. vt ducta *ci*. secet planũ oppositum in *o*. Ergo per rectam *co*. secabitur Pyramis vt antea.

DEMONSTRATIO.

IN vtroque casu Pyramis ABCD. ad Pyramidem *ab*D*c*. est in ratione composita altitudinum DC. ad D*c*. & basium ABD. ad *ab*D. (5. *l*. 11.) hoc est ex *constr*. in ratione cõposita *xz*. ad *xi*. & *xi*. ad *xo*. Ergo vt *xz*. ad *xo*. Quod, &c.

Ex ipsa constructione apparet differentiam

ra-

rationum DC ad Dc. & xz. ad xo. nempè rationem xi. ad xo. si fuerit maioris inæqualitatis, posse esse minorem quàm ratio △ABD. ad △ minimum quod per o. secari potest ex angulo ADB. & maiorem ratione △ABD. ad △ maximum per o A. vel o B. sectum ex angulo ABD. vel si differentia dicta sit minoris inæqualitatis vt xe. ad xo. poterit ratio residui ze. ad residuū zo. esse minor ratione △ABD, ad maximum ▭ ABab. prout in constructione 2. *prop.* 193. In secundo casu quia punctum c. liberè sumi potest in latere DC. maiorem extensionem habet problema.

SCHOLIVM.

DEterminandum restat quomodò Pyramis tetraedra per datam quamlibet rectam in in data ratione secanda sit: licet enim in *prop.* 27. determinatum sit planum, quod habet *cētrum* in recta, secare ex angulo Pyramidē minimam: nobilioribus Geometris reseruatum est, quomodò per illam sit Pyramis in data ratione secanda.

PRO-

PROPOSITIO CXCV.
Problema 15.

D*Atis extremis, & summa mediarum in quatuor continuis, invenire medias.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

SIt data minor extrema HX. maior XZ. summa mediarum XD. quæruntur determinatæ mediæ XV. VD.

CONSTRVCTIO.

EFficiant quemlibet angulū DXH, & ZXA; & XA. sit æqualis XD. ducantur præterea DA. DZC. AHC. CXS. & ex Z recta ZV. (quæ ommissa est) parallela ipsi CX. secans XD. in V. & erunt XV. VD. quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

QVia si sumantur *f.* ad *m.* vt HX. ad XZ. & supponantur *g.* & k. mediæ inter *f.* & *m.* in △ ADC. erit HX. ad XD. vt *f* ad *g*+k. vt minor ad summam mediarum ex *hyp.* Ergo CZ. ad ZD. erit vt *f.* ad *g.* (59. *p num.* 5) vel quia HX. ad XD. est vt antecedens *f.* ad summam consequentiū *g*+k. (39. M. 2.) Ergo CZ. ad ZD. erit vt *f.* ad *g.* & AS. ad SD. vt *f* ad k. Ergo cùm sint parallelæ CX. ZV. est XV. ad VD. vt CZ. ad ZD. vel vt *f* ad *g.* (2. *l.* 6.) vel vt *g.* ad k. & XV. ad XD. vt *g.* ad *g*+k. Ergo determinatæ sunt mediæ XV. VD. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CCXCVI.

Problema 16.

EX quatuor continuis data summa primæ, & tertiæ, tum quartæ, & tertiæ, tum ratione tertiæ ad summam primæ, & quartæ: distinguere omnes.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SIt HO. summa primæ, & tertiæ: OL. summa tertiæ, & quartæ: & ratio tertiæ ad summã primæ, & quartæ sit, vt EG. ad GC. quæruntur singulæ proportionales.

CONSTRVCTIO.

SIt HOL. eadem recta, & SOF. efficiat quemlibet angulũ, & æquales SO. HO. tum OL. OF. per O. ducatur DOG. & sumpta quæuis OG. fit GO. ad OD. vt GE. ad EC. nempe vt antecedens datum ad summam antecedentis, & consequentis. Ducantur prætereà DLB. HGB. se intersecantes in B: Si ergo fiat vt BG. ad GH. ita LO. ad *l*. erit prima *l*. qua ablata ex HO. remanebit tertia, hac ablata ex OL. remanebit quarta, & vt tertia ad quartam ita erit prima ad secundam.

DEMONSTRATIO.

QVia BG. ad GH. est vt tertia + quarta ad primã ex 60. *huius*. 3. Ergo *l*. erit prima, &c.

PROPOSITIO CXCVII.
Problema 17.

EX quatuor continuis data summa primæ, & tertiæ, tum quartæ, & tertiæ, & ratione summa extremarum ad tertiam, invenire omnes.

EXPOSITIO. Fig. 18.

DAtæ sint HO. summa primæ, & tertiæ: tum OL. summa tertiæ, & quartæ; & ratio summæ extremarum ad tertiam sit vt *l.* ad *r.* quæruntur singuli termini.

CONSTRVCTIO.

SInt HOL. eadem recta, & SOF. secet ipsam, & SO. HO. sint æquales: tū OF. OH. & quæuis alia ROC. secet ipsas in O. sitque RO. ad OC. vt *r.* ad *l*+*r.* & ducantur CFB. SRB. se intersecantes in B. Si ergo HO. diuidatur vt CB. in F. pars minor erit prima: reliquum tertia, qua ablata ex OL. remanebit quarta: & vt tertia ad quartam, ita prima ad secundam: omnes igitur notæ erunt.

DEMONSTRATIO.

QVia si in eadem ratione continuæ sunt *f. g. k. m.* in △BSC. quia FO. ad OC. est vt *m*+*k.* ad *f*+*k.* ex *constr.* erit CF. ad FB. vt *f.* ad *k.* (60. *p* *num.* 22.) nempè vt prima ad tertiam: constat ergo constructio.

PROPOSITIO CCXCVIII
Problema 18.

EX 6 continuis data prima, vel vltima, & ratione secundæ ad summam primæ, & quintæ: tum ratione quintæ ad summam primæ, & secundæ invenire omnes.

EXPOSITIO.

SInt cōtinuæ *f.g* k.*m.l.p.* & data sit *f.* vel *p.* tum ratio *g.* ad *f*+*l.* vt FQ. ad QD. & ratio *l.* ad *f*+*g.* vt LQ. ad QC. quæruntur omnes.

CONSTRVCTIO.

SInt FQD. eadem recta, & LQC. similiter se intersecantes in Q ducātur DLB. CFB. QD. BQZ. & fiat vt CF. ad FB. ita *f.* ad *l.* & erit *l.* quinta: vel vt FB. ad BC. ita *p.* ad *g.* & erit secunda: vt DL. ad LB. ita *f.* ad *g.* & erit secunda, vel vt BL. ad LD. ita *p.* ad *l.* & erit quinta, vndè reliquæ innotescent.

DEMONSTRATIO.

COnstat ex *prop.* 61. *num.* 10. & 12. Quia cùm FQ ad QD. sit vt *g.* ad *f*+*l.* est CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* & DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* Ergo, &c.

Plura inquiret Geometra in 4. 5. vel 6. continuis, &c. variata si opus fuerit hypothesi propositionum 59. 60. & 61.

PRO-

PROPOSITIO CXCIX.
Problema 19.

1. *Datam rectam proportionaliter secare.*
2. *Maiori segmento addere minus:*
3. *Minori segmento addere maius.*
4. *Compositam ex tota, & minori, vel*
5. *Compositam ex tota, & maiori diuidere in partes.*

CONSTRVCTIO. Fig. 42.

1. THesis perspicua est, constructio autem sic perficietur. Sit A V. proportionaliter secanda: & ipsi æqualis V H. & H *m*. eidem æqualis, & perpendicularis, & *m* K. parallela AH. diuisa VH. bifariam in X. radio X A. describatur circulus secans *m* K. in K. & KZ. perpendicularis A V. eritque A V. proportionaliter secta in Z.

2. Dato maiori segmento VH. addendum sit minus VZ sumatur V A. æqualis VH. & hæc bisecta in X. radio X A. describatur circulus, sit H *m* perpendicularis æqualis V H & *m* K. parallela, & KZ. perpendicularis: eritque V Z. minus segmentum.

3. Dato minori segmento HE addendum sit maius H Z. sint HE. HV. æquales; & H *m*. æqualis, & perpendicularis, *m* K. parallela bise-

 cta

ctâ HV. radio XE. describatur circulus, & KZ. sit perpendicularis, & erit HZ. maius segmentum.

4. Data AE. summa totius, & minoris segmenti distinguenda sunt singula: diuidatur AE bifariam in X. & trifariam in V. H. & H*m*. VY. perpendiculares æquales HV. & *m* K. parallela: ducatur KXD. & erit D*g*. tota proportionaliter secta, K*g*. minus segmentum, & *gh*. maius.

5. Data AV. composita ex tota, & maiori segmento singula sunt distinguēda. Sit VH. æqualis AV. reliqua vt in num. 1. & erit ZV. tota, & AZ. maius segmentum.

DEMONSTRATIO.

1. QVia AV. est proportionaliter secta in Z. 2. Similiter ZH. in V: 3. Similiter ZE. in H. 4. Quia cùm ZH. sit perdendiculariter secta in V. & additum sit minus segmentum H*n*. est tota Z*n*. composita ex tota ZH. & minori segmento: sed cum KZ. YV. *m* H. *n* D. sint parallelæ, erit KD. in *g*. *h*. vt Z*n*. in V. H. (2. *l*. 6.) Ergo K*g* est minus segmētum totius *g*D. proportionaliter sectæ: vt ZV. totius V*n*. 5. Quia AV. est proportionaliter secta in Z. minus segmentum AZ. erit maius totius ZV (104. M. 2.) Ergo AV. composita est ex tota VZ. & maiori

seg-

ſegmento ipſius AZ. Quæ omnia conſtant ex (165.p.) Quod,&c.

PROPOSITIO CC.

Corpora regularia invenire in data ſphara, & eorum rectas determinare, vel è converſo.

EXPOSITIO. Fig. 42.

Sit datæ ſphæræ diameter AE. quæruntur latera ſolidorum regularium, circulorũ radij, & ſphærarum tangentium, &c.

CONSTRVCTIO.

Deſcripto circulo ſphæræ maximo ACEL. diameter AE. ſit trifariam ſecta in V.H. & ducantur perpendiculares GVC. QHO. ſint VY. H*m*. æquales VH. & ducatur KY*m*F. tum KZB. E*n*D. Præterea ducantur AK. KV. KXD. AG. GE. E*n*L. & ſumatur K*a*. æqualis AK. & ſit *op*. parallela AE. & *pq*. *po*. æquales, & *qr*. parallela EA. & continuetur KA*r*. eruntque omnia parata.

TETRAEDRVM.

1. *LAtus Tetraedri est EG. 2. GV. radius circuli circa △: & GC. diameter. 3. mL. radius circuli inscripti triangulo. 4. EV. perpendiculum Tetraedri. 5. EL. perpendiculum △. 6. XV. radius sphæræ inscriptæ: & VH. diameter. 7. AG. diameter sphæræ tangentis latera.*

Demonstratio sumitur ex tabula *prop.* 118.

1. Quia EV. EG. EA. sunt continuæ (3. *l.* 6.) & □ EV. ad □ EG. vt EV. ad EA (4 *l.* 6.) sed EV. ad EA. est vt 2. ad 3. vel vt 4. ad 6. ex *constr.* Ergo qualium □ EV. est 16: □ EG. erit 24: & □ EA 36. Ergo EG. est latus Tetraedri ex 118. *p.*

2. Quia □ GE. *æqu.* □ EV + □ VG (4. *l.* 2.) si ex 24. auferantur 16. remanet □ GV. 8. Ergo GV. est radius circuli circa △: & illius dupla GC. erit diameter (118. *p.*)

3. Quia △△ EH*m*. *md*L. sunt similia (2. *l.* 6.) & EH H*m*. æqualia: erunt L*d*. *dm*. æqualia, & ipsi XH (7. *l.* 1.) sed qualium □ HE. est 4. est □ XH. 1. (3. *l.* 2.) & □ L*m*. æquale □ L*d*. + □ *md*. (4. *l.* 2.) Ergo □ L*m*. est 2. qualium □ EH. est 4. & □ EA. est 16. Ergo L*m*. est radius circuli inscripti triangulo (118. *p.*)

4. Quia □ EV. est 16. & □ EA. 36. est EV. perpendiculum Tetraedri (118 *p.*)

5. Quia

5. Quia EX. potest 9. & EL. duplum vel 18. erit EL. perpendiculum △ (118. *p.*)

6. Quia XH. potest 1. qualium AE. potest 16. erit XH. radius sphæræ inscriptæ, & VH. diameter eiusdem (118. *p.*)

7. Si □ EG. 24. auferatur ex □ EA 36. erit □ GA. 12. & dimidium GA. poterit 3: Ergo dimidium GA. est radius sphæræ tangentis latera: & GA. diameter (118. *p.*)

CVBVS.

1. *Latus Cubi est AG: & diameter sphæræ inscriptæ. 2. GE. diameter circuli circa □ & diameter sphæræ tangentis latera. 3. EL. recta ab angulo in centrum basis: & ipsius □ erit minima summa ab centro, vel contactus planorum.*

Demonstratio sumitur ex tabula *prop.* 127.

1. Quia sunt continuæ AE. AG. AV. sicut AE. tripla est AV. erit □ AE. 36. triplum □ AG. 12. (4 *l.* 6.) Ergo AG. erit latus Cubi, & diameter sphæræ inscriptæ (127. *p.*)

2. Quia □ GE est 24 qualiũ □ AE. est 36. erit GE. diameter circuli circa □, & diameter sphæræ tangentis latera (127. *p.*)

3. Quia □ EX. est 9. erit □ EL 18. illius duplum (4. *l.* 2.) Ergo est EL. recta ab angulo in cen-

centrum basis: & □ EL. minima summa ad cõtactus (127 *p.*)

OCTAEDRVM.

1. L*Atus Octaedri est EL. & diameter sphæræ tangentis latera.* 2. *AG. diameter sphæræ inscriptæ.* 3. *EG. diameter circuli circa* △ *& GR. radius eiusdem.* 4. *GR. diameter circuli inscripti* △. 5. *AG. distantia duplicis plani oppositi, & diameter sphæræ inscriptæ.* 6. □ *EG. minima summa ad contactus.*

Demonstratio ex tabula *prop.* 140.

1. Quia □ EL. est 18. duplum □ EX. 9: erit EL. latus Octaedri, & diameter sphæræ tangentis latera (140. *p.*)

2. Quia □ AG. est 12. qualium □ AE. 36: ex Cubo *num.* 1. erit AG. diameter sphæræ inscriptæ (140 *p.*)

3. Quia □ EG. est 24. ex Tetraedro *num.* 1. erit EG. diameter circuli circa △ (140. *p.*)

4. Quia GR. est dimidium GE. & □ GE. 24. erit □ GR. 6. (3. *l.* 2.) Ergo GR. est diameter circuli triangulo inscripti (140. *p.*)

5. Quia eadem est distantia planorum in Cubo, & Octaedro (172. *p.*) & AG. est distantia planorum in Cubo, nempè ipsum latus Cubi, erit AG. distantia planorum in Octaedro:

dro: tũ quia AG. est diameter sphæræ inscriptæ ex *num*. 2. Ergo, &c.

6. Quia □ EG. est 24. erit minima summa ad contactus planorum (140. *p*.)

DODECAEDRUM.

1. *Latus Dodecaedri est AK*. 2. *AG. est diagonium* ⬠. 3. *Kp. est radius circuli circa* ⬠. 4. *Kq radius maioris circuli per* 5 *angulos*. 5. *GV. radius circuli per* 6 *angulos*. 6. *KZ. radius circuli per* 3 *angulos*. 7. *qKp. distantia planorum oppositorum, & diameter sphæræ inscriptæ*. 8. *GAK. distantia laterum, & diameter sphæræ tangentis latera*.

Demonstratio. Primum, & secundum constant ex *prop*. 165. Tertium ex *prop*. 166. Quartum demonstratur: quia VZ. est maius segmētum VA. vel KZ. (165. *p*.) sed *op*. ad *p*K. est vt VZ. ad ZK (2. *l*. 6.) Ergo *po*. vel *pq*. est maius segmentum ipsius *p*K: Ergo K*q* est proportionaliter secta in *p* (104 M. 2) Ergo cùm maius segmentum K*p*. sit radius circuli circa ⬠, erit K*q*. radius maioris circuli per 5 angulos (158. *p*.)

Quintum, & sextum constant ex *prop*. 166. Septimum ex *prop*. 167. Octauum ex *prop*. 163. cùm AK. sit latus dodecaedri, & GA. diagoniũ Pentagoni: Ergo, &c.

ICO-

ICOSAEDRVM.

1. R*Adius circuli circa △ est* Kp. 2. *Radius maioris circuli per 3 angulos* Kq. 3. *Radius circuli per 5 angulos* gh. 4. *Latus Icosaedri* Kr. 5. *Distantia planorum* qKp. *& diameter sphæræ inscriptæ.* 6. *Recta potens triplum* Kq. *est diameter sphæræ tangentis latera.*

Demonstratio. 1. Quia K*p*. est radius circuli circa ⬠ dodecaedri: ex dodecaedro; Ergo est radius circuli circa △ Icosaedri (173.*p*.)

2. Quia K*q*. est radius maioris circuli in dodecaedro: Ergo & in Icosaedro (153. & 158.*p*.)

3. Quia DK. est composita ex tota, & minori segmento, & *gh*. est maius segmentum (199.*p*.) Ergo KD. potest quintuplum *gh* (107. M.2.) sed diameter sphæræ KD. potest quintuplum radij circuli per 5 angulos Icosaedri (142.*p*.) Ergo *gh*. est radius dicti circuli.

4. Quia *pq*. est minus segmentum K*q*. & AZ. ipsius AV. vel KZ. (ex dodecaedro *num*. 4): sed vt KZ. ad ZA. ita K*q*. ad *qr*. (2.*l*.6.) Ergo *rq*. est etiam minus segmentum ipsius K*q*. & sunt æquales *pq*. *qr*. sed R*r*. æquè potest ac K*q*. & *qr*. (4.*l*.2.) Ergo R*r*. potest triplum maioris segmenti K*p*. (108 *p*.) sed K*p*. est radius circuli

cir-

circa △ Icosaedri ex *num.* 1. & latus △, vel Icosaedri potest triplum radij (112. *M.* 2) Ergo K*r.* est latus Icosaedri.

5. Quia *q*K*p.* est distantia planorum dodecaedri, & diameter sphæræ inscriptæ ex *num.* 7. *dodecaedri*: Ergo etiam Icosaedri ex (173. *p.*)

6. Constat ex 154 *p.* Quod erat, &c.

FINIS

totius Operis.