www.e-rara.ch

Christophori Clavii ... epitome arithmeticae practicae

Clavius, Christoph

Basa.

Romae, 1583

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 2992

Persistent Link: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-16636

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

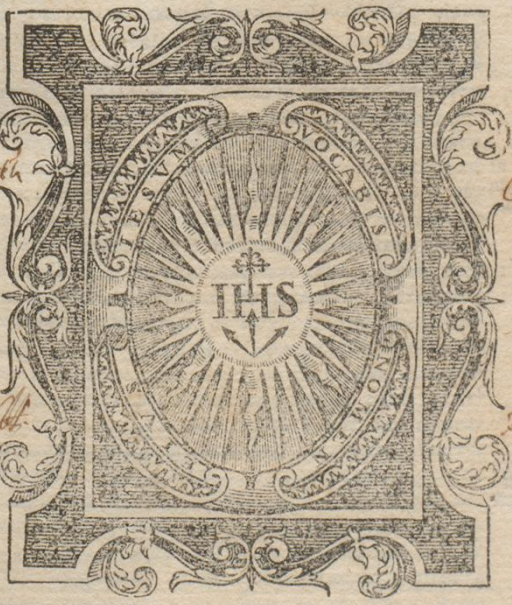
Visual Library

RAR 2992

QA1172

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

EPITOME ARITHMETICÆ Practicæ.



PERMISSV SVPERIORVM.

ROMAE Ex Typographia Dominici Baſæ. 1583.

BIBLIOTECA CENTRAL

CLAVII
BAMBERGENSIS
E SOCIETATE
IESV
CHRISTOPHORI

LECTORI S.

QVM omnis me Mathematicarum rerũ cognitio delectat, tum vero ex Arithmeticæ tractatione incredibilem capio voluptatem; idq; non solum ob eximiã quandam eius dignitatem, sed etiam, quòd sine Arithmetica, vt ego quidem existimo, nulla scientia, vt Plato audet dicere, neque ipsa hominum societas possit consistere. In Epinomide. Plurima enim in mutuis commerciis, conuentisque, quibus fere hæc hominum coniunctio continetur, tempora incidunt, vt rationes accepti, & expensi reddendæ, reposcendæve sint, tabulæ conficiendæ, numerus æqualiter, vel inæqualiter, certa quadam proportione seruata, in plures partes diuidendus, summa subducendas; quibus in rebus circumuenire, & circumueniri, æque turpe, & perniciosum est. Itaq; audacius illud quidem, sed tamen vere dixit Plato, prudentiam, atq; adeo humanitatem omnem è mundo eos tollere, qui Arithmeticam è vita tollant; cum sine ea neq; publicæ, neq; priuatæ res constare possint. In Epinomide, & 7. de Rep. Iam vero cæteræ disciplinæ sic Arithmetica nituntur, vt hæc non videatur concidere posse, quin illæ casu eodem labefactatæ corruant. Neq; enim aut Astrologus, aut Geometra theoremata in vulgus probabit sua, vt nõ solum veritatem, sed etiam voluptatem habeant cum vtilitate coniunctam, qui vniuersam numerorum naturam animo penitus comprehensam non habuerit: quòd si tantillum in rationibus putandis lapsus fuerit, iam cæterarum rerum ingẽtem ruinam videas. Atq; idcirco princeps ingenii Plato hanc vestibulum, & aditum ad reliquas doctrinas voluit esse, non ea solum causa, quòd illæ sine numeris nullæ sint, verum etiam, quòd numerorum tractatione nitescit animus, & præparatur ad reliquos doctrinæ satus recipiendos. In 7. de Rep. Huius ego præstantissimæ scientiæ pulchritudine captus, olim dederam me ad totam numerorum naturam inuestigandam, vt cum illam animo, scientiaq; comprehendissem, tum demum literis eam illustrarem,

atq; Arithmeticæ præcepta, Algebræq; documenta (rem ita non omnibus cognitam) quibus in uita præclarius vix aliquid reperias, ad certa quædam capita, & faciliores demonstrationes reuocarem, vt cuiuis aperta, & prompta essent. Res erat præclara illa quidem, sed multi laboris, atque temporis. Itaque interea dum opus illud à me limatur politius, cœpi, quæ ex multorum libris dispersa collegeram, separatim ad meum vsum in commentariolum referre, vt videlicet ad manus mihi essent, meisque auditoribus explicarem: qui enim hactenus Arithmeticam tractarunt, ij aut multitudine præceptorum rem perturbarunt, aut breuitate obscurarunt, sic, vt (in quo tamen de nullius existimatione detractum velim) quẽ in hac scientia magistrum, & ducem tyrones sequantur, vix inueniant. Is libellus cum imprudenti mihi excidisset, & in manus hominum venisset, summis precibus contenderunt à me viri graues, vt eum cum plurimis communicarẽ, quòd fore dicerent, vt is vtilissimus accideret cum cæteris studiosis, tum vero ijs, qui nostras scholas frequentant: quorum vtilitati nolle consultum, non esse eius, qui se, suaque omnia Dei gloriæ, omniumq; commodis consecrasset. Horum ego precibus, & auctoritate inductus hunc libellum typis mandare constitui, quem tu videlicet, Lector, eo animo suscipias velim, quo damus: atque eo tantisper vtere, dum maius illud Arithmeticæ opus in lucẽ exeat, quod propediem, Deo iuuante, fore speramus. VALE.

NVMERATIO

NVMERATIO INTEGRORVM NVMERORVM

CAP. I.

VMERATIO est cuiusuis numeri propositi per proprios characteres, ac figuras descriptio, atq; expressio. Numeratio quid.

Vtuntur autem Arithmetici decem characteribus, siue figuris ad omnium numerorum descriptionē, videlicet

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Decem figuræ numerorū.

quarum priores nouē dicuntur significatiuæ. Quælibet enim illarū tot vnitates significat, quotū ipsa locum in hac serie occupat. Vt hæc figura 6. significat sex vnitates; quia sexto loco posita est: atq; ita de cæteris. Decima autem figura, & vltima nihil per se significat, diciturq; cifra; auget tamen significationē, ac valorem aliarum figurarum, vt ex sequentibus perspicuum fiet.

In quolibet numero, qui pluribus figuris scribitur, tot dicuntur esse loca, quot sunt figuræ siue significatiuæ, siue non significatiuæ: primusq; locus, seu prima figura est, quæ extrema est versus dextram; secundus vero locus, seu secunda figura est illa, quæ proxime primam consequitur versus sinistrā, atq; ita deinceps: adeo vt ille locus, seu figura dicatur vltima, quæ primam sedem ad sinistram occupat. Vt hic. 4252. prima figura est 2. & vltima 4. Si tamen singulæ figuræ singulos numeros repræsentent, hoc modo. 4. 3. 5. 2. prima figura erit 4. vltima vero 2. Cur autem ordo locorum, figurarumve in quolibet numero progrediatur à dextra versus sinistram, causa hæc est: quoniam

Quot loca sint in quolibet numero. Prima figura, & vltima, i quouis numero quæ sit. Ordo locorum, in quouis numero cur à dextra sinistram versus procedat.

à Phœnicibus inuenta esse dicitur Arithmetica, qui scribere solent à dextra sinistram versus, more Hebræorum, Arabum, & Chaldæorum.

Quid q̃libet figura i dato numero significet.

Quælibet figura in primo loco posita seipsam simpliciter repræsentat, in secundo decies seipsam significat, in tertio centies, in quarto millies, in quinto decies millies, in sexto centies millies, in septimo millies millies, atq; hoc pacto in infinitum: ita vt loca ordine sese superent in decupla proportione, vt secundus primum, tertius secundum, quartus tertium, &c. Vt hic. 3 4 5 6 7. prima figura 7. significat tantum septem vnitates: secunda 6. significat sexaginta, nempe decies 6. tertia 5. quingentas, ideſt, centies 5. quarta 4. quatuor millia vnitatum, hoc est, millies 4. quinta 3. triginta millia vnitatum, siue decies millies 3. Itaq; totus ille numerus ita proferendus erit. Triginta quatuor millia, quingenta, & sexaginta septem. Eodemq; modo quicunq; alius numerus exprimi poterit, si diligenter notetur, quoties quælibet figura seipsam significat in varijs locis posita.

Figuræ in quouis numero se ordine superant in decupla proportione.

Quid obseruandũ sit, vt datus numerus facile exprimatur.

Cæterũ vt facilior reddatur numeratio, distribuendus erit numerus in membra, hoc modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur punctum: Deinde procedendo versus sinistram, & omissis duabus figuris, supra sequentem figuram quarto loco positam aliud punctum statuatur: Et sic deinceps, omissis semper duabus figuris sine punctis, supra sequentem figuram punctum scribatur. Vt hic factum esse vides.

. . . . . .

4 2 3 2 9 0 8 9 5 6 2 8 0 0

Quælibet enim figura sub quocunq; puncto cum duabus antecedentibus versus sinistram constituit vnum membrũ, ita vt singula membra ternis figuris cõstent, vltimo mẽbro versus sinistrã excepto, quod aliquando vnicã figurã habere pôt, illã nimirũ, quę sub puncto collocatur; quemadmodũ in proposito exemplo in quinq; membra distributo contingeret, si vltima hęc figura 4. tolleretur: aliquando vero duas, vt in dato exemplo.

Itaq;

Itaq; vt quicunq; numerus enuncietur, satis est, si quodlibet membrum seorsum exprimatur, cuius prima figura vnitates significat, secunda denas vnitatum, & tertia centenas. Sed post pronunciationem cuiusuis membri apponenda est hæc vox [Mille] toties, quot membra sequũtur illud, quod enunciatur, ita tamen, vt primùm ea vox ponatur in recto pluralis numeri, deinde vero semper dicatur [millies] vt mox audies.

Illud porro membrum, quod vltimũ est versus sinistram, primũ est in enunciatione, & quod primum est ad partem dextrã, in enunciatione est vltimum. Numerus ergo paulo ante propositus ita pronunciabitur. Primum membrum 42. Quadragintaduo millia, millies, millies, millies: ita vt vox [mille] quater audiatur, propter quatuor membra, quæ hoc, quod enunciatur, subsequuntur.

Secundum membrum 329. Trecenta, vigintinouẽ millia, millies, millies.

Tertium membrum 089. Octoginta nouem millia, millies.

Quartum membrũ 562. Quingenta, sexagintaduo millia.

Quintum deniq; membrum 800. Octingenta.

Facilior adhuc reddetur numeratio, si pro primo puncto ponatur 0. & 1. pro secundo puncto, & 2. pro tertio, & 3. pro quarto, & ita deinceps, vt hic in eodem exemplo.

4 3 2 1 0
42329089562800

Hac enim ratione facile intelligitur, quoties vox [mille] apponenda sit in cuiusq; membri enunciatione. Toties enim proferenda est, quot vnitates in figura, quæ supra membrũ pronunciandũ posita est, continentur.

Iam vero si more Italorum millena millia appellare velimus Milliones, paucioribus verbis, & fortasse significãtius, numerũ quẽcunq; propositũ exprimemus, si in maiora eum membra distribuamus, hoc modo.

Supra primã figuram ad manũ dextram ponatur 0. deinde, omissis quinq; figuris intermedijs, collocetur 1. supra sequentẽ figuram, quæ septimũ locum occupat. Post hanc, omissis rursus quinq; figuris, scribatur 2. supra figuram, quæ tertiumdecimum occupat locum. Atq; ita deinceps, omissis semper quinq; figuris, ponatur 3. 4. 5. &c. Vt hic in eodem exemplo factũ est.

2 1 0
423290895 62800

Quodlibet membrum continet sex figuras (vltimo membro excepto, quod vnicam potest habere figurã, vel duas, vel tres, vel quatuor, vel quinque tantum) quæ omnes simul enunciandæ sunt, & post enunciationem cuiusuis membri toties dictio [Millio] adden da, quot vnitates sunt in figura supra membrum posita, primũ quidem in recto, deinde vero semper in obliquo. Vt autem quodlibet membrũ facilius enuncietur, ponendum erit punctum sub quarta eius figura, quod significabit, locũ ibi millenarum esse. Igitur superius exemplum ita proferendum erit. Quadraginta duo milliones millionum; trecenta vigintinouẽ millia millionum, octogintanouem milliones; quingenta sexagintaduo millia, octingenta.

ADDITIO INTEGRORVM NVmerorum. Cap. II.

Additio quid.

ADDITIO est duorum, vel plurium numerorũ in vnam summam collectio.

Numeri addendi quo pacto sint collocandi.

Numeri addendi ita sunt collocandi, vt vno sub altero posito, primæ figuræ inter se respondeant, item secundæ inter se, & tertiæ, & quartæ, &c. adeo vt defectus figurarum, si quis est, cernatur ex parte sinistra. Vt hi numeri addendi, 710654. 8907. 56789. 880. collocandi erunt, vt hic apparet.

710654

710654
8907
56789
880

777230

Quo pacto fiat additio.

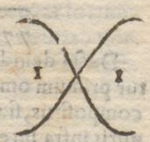
Ducta deinde linea ſub numeris addendis, adduntur primum omnes primæ figuræ inter ſe, & numerus compoſitus, ſi vnica figura ſcribi poteſt, ſub primis figuris infra lineam ponitur; ſi vero duabus figuris ſcribendus eſt, ponitur prima earum, & reliqua ſeruatur, vt ſecundis figuris inter ſe addendis adijciatur. Poſt hæc adduntur ſecundæ figuræ eodem modo, addita prius illa, quæ ſeruata eſt, ſi qua tamen ſeruata ſit, itéq; tertiæ, quartæ, & aliæ. Quòd ſi ex additione vltimarũ figurarum numerus componatur duabus figuris ſcribendus, ponẽdæ ſunt ambæ ſub linea, nulla retenta, eò quòd tunc tota additio peracta ſit. Verbi gratia. In primis figuris ppoſiti exempli o. & 9. faciunt 9 addo 7. fiũt 16. addo 4. fiũt 20. Pono ergo ſub primis figuris o. & ſeruo 2. Deinde in ſecundis figuris, ex 2. (quam figuram ſeruaueram) & 8. fiunt 10. addo 8. fiunt 18. addo o. fiunt 18. addo 5. fiunt 23. Pono ergo 3. ſub ſecundis figuris, & retineo 2. Poſt hæc accedo ad tertias figuras, vbi ex 2. (quam figurã retinueram) & 8. fiunt 10. addo 7. fiunt 17. addo 9. fiunt 26. addo 6. fiunt 32. Pono ergo 2. ſub tertijs figuris, & retineo 3. Rurſus in quartis figuris, ex 3. (quæ figura retenta erat) & 6. fiunt 9. addo 8. fiunt 17. addo o. fiunt 17. Pono ergo 7. ſub quartis figuris, & ſeruo 1. quam addo quintis figuris, efficioq; 7. Pono igitur 7. ſub dictis figuris, & nihil reſeruo. Poſtremo quia in vltimo loco ſola hæc figura 7. reperitur, pono eam ſub linea, abſolutaq; erit additio. Quemadmodum autem figuras numerorũ addendorũ inter ſe addidimus ab inferioribus verſus ſuperiores aſcendendo, ita quoq; colligi poſſunt in vnam ſummam, ſi à ſuperioribus verſus inferiores deſcendatur.

Quòd

Quid faciẽdũ sit, quãdo ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris scribendus.

Quòd si quando ex additione figurarũ vnius loci excreuerit numerus tribus figuris scribendus, ponenda erit prima figura sub illo loco, & reliquæ duæ figuris sequentium locorũ addendæ, prima videlicet earum figuris proximi loci, & secunda figuris alterius loci: aut certe numerus duabus illis figuris retẽtis expressus sequentis loci figuris addendus. Vt in apposito exemplo, quoniam ex primis figuris colligitur numerus hic 102. scribenda erit figura 2. sub primo loco, & figura 0. addenda figuris secundi loci, figura vero 1. figuris tertii loci. Vel totus numerus retentus 10. addẽdus figuris secũdi loci. vt colligatur numerus 15. cuius figura 5. sub secundo loco ponat̃, & figura 1. figuris tertii loci addatur, &c. Vtroq; enim modo idẽ semper numerus colligetur. Examinatũ aũt vides hoc exemplũ per abiectionẽ 9. de quo examine iã dicemus.

	6008
	5009
	4009
	308
	239
	108
	108
	309
	4128
	3009
	209
	308
	23752



Prima probatio additionis.

Post absolutã additionem solent Arithmetici eam examinare, sicut & alias operationes, quæ sequuntur, num recte facta sit, an non. Quod quatuor modis fieri potest in additione. Primum per abiectionem nouenarij, hoc pacto. Reijciantur 9. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri potest, & quod reliquũ est, ponatur seorsum. Deinde ex summa collecta reijciantur quoq; 9. quoties fieri potest, & quod reliquũ est, notetur. Si enim hoc illi priori, quod reliquũ fuit, æquale est, recte instituta fuit additio: Si vero inæquale, nõ recte. Vnde iteranda erit additio, vt error corrigatur. Ita vides in superiori exemplo relictũ fuisse numerũ 8. post abiectionem numeri 9. tam ex omnibus numeris addẽdis, quàm ex summa collecta, qui numerus 8. collocatus est in cruce quadã in hunc finem constructa.

Cæterum

Cæterum, vt facile abijciantur 9. satis est, vt figurę numerorũ, ac si omnes primum occuparent locũ, inter se addantur, & cum primũ summa fuerit 9. aut excesserit 9. ita vt duabus figuris scribatur, reijciantur 9. vel duæ illæ figuræ inter se addantur, & summa hæc cum sequenti figura addatur eodem modo, &c. Est enim mirabilis hæc proprietas nouenarij, vt si figuras cuiuscunq; numeri inter se addas, & ex summa reijcias 9. vel certe, si summa hæc duabus figuris scribitur, duas has figuras in vnam summã colligas, tantundẽ relinquatur, vel componatur, quantũ relinqueretur, si reijceres 9. toties ex toto numero, quoties potes. Vt si ex hoc numero 38. reijciantur 9. quoties id fieri potest, nempe quater, remanẽt 2. quater enim 9. faciunt 36. Quòd si dicas, 3. & 8. (sumendo figuras eiusdem numeri 38. seorsum) faciunt 11. & reijcias 9. Vel certe dicas, 1. & 1. faciunt 2. (sumẽdo etiã figuras huius numeri 11. proxime compositi seorsum) habebis eadem 2. quæ prius reliqua fuerunt. Ita quoq; si ex hoc numero 41. reiiciantur 9. quoties fieri potest, nempe quater, remanent 5. Et si dicas, ex 4. & 1. (sumendo figuras numeri 41. seorsum) fiunt etiam 5. Deniq; ex numero 78 si abijciantur 9. quoties fieri potest, nempe octies, relinquuntur 6. Et si dicas, 7. & 8. faciunt 15. reiiciasq; hinc 9. Vel certe dicas, 1. & 5. faciunt 6. tantundem habebis, quantũ prius reliquũ fuit. Eademq; ratio est de cæteris. Itaq; vt videas, qua ratione examen additionis instituendum sit, examinabimus primum exemplum hoc modo.

Mirabilis ꝓprietas nouenarij.

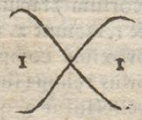
```
710654
  8907
 56789
   880
------
777230
```

7. & 1. faciunt 8. Additis 6. fiunt 14. id est, 5. Nam 1. & 4. faciunt 5. quantum nimirum relinqueretur, si 9.

ex 14. reijcerentur, vt dictum est. Additis 5. ad illa 5. fiunt 10. id est, 1. Additis 4. fiunt 5. Additis 8. fiunt 13. hoc est, 4. Additis 7 fiunt 11. (Nam 9. semper omittuntur, cum sint perpetuo abijcienda.) id est, 2. Additis 5. fiunt 7. Additis 6. fiunt 13. hoc est, 4. Additis 7. fiunt 11. id est, 2. Additis 8. fiunt 10. id est, 1. Additis 8. fiunt 9. id est, 0. Nam 9 reijcienda sunt. Remanent autem 8. quæ in altera parte crucis colloco. Deinde in summa producta, ex 7. & 7. fiunt 14. id est, 5 Additis 7. fiunt 12. id est, 3. Additis 2. fiunt 5. Et tandem additis 3. fiunt 8. vt prius, quæ statuo in oppositā parte crucis, vt appareat æqualitas numerorum, qui post abiectionem 9. reliqui fuerunt.

Quoniā vero hac ratione non reijciuntur 9. quoties fieri potest, sed tantum per dictam proprietatem nouenarij inquiritur residuū, quod remaneret, si omnia 9 reijcerentur, fit, vt hoc examen per abiectionem 9. institutum fallax sit, vt in hoc exemplo apparet. Nā summa collecta falsa est,

25	7
30	3
64	1

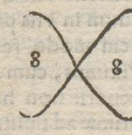


& nihilominus examen per 9. institutum indicat, eam recte collectā esse, cum vtrobiq; vnitas superfit. Quòd si reiiciātur 9. quoties fieri potest, statim apparebit falsitas summæ collectæ. Sæpius enim reiicientur 9. ex summa, quàm ex numeris additis. In summa enim hac 64. continentur 9. septies, superestq. vnitas, cum septies 9. sint 63. At in numero 25. continentur 9. bis, & supersunt 7. quæ ad partem dextram repono. In 30. vero continentur 9. ter, & supersunt 3. quæ etiam ex parte dextra noto. Itaq; ex numeris additis reiiciuntur 9. quinquies, & supersunt 7. & 3. in quibus adhuc semel continentur 9. superestq; vnitas. adeo vt verè sexies tantū reiecta sint 9. ex numeris additis, ex summa vero septies. Vnde mirū non est, summam esse falsam, quāuis semper reliqua fuerit vnitas. Vera autem summa esset hæc 55. in qua continentur 9. sexies, & supercst vnitas, quemadmodum in numeris additis.

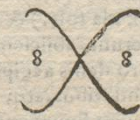
Eodem

Eodem pacto si quis post summã recte collectã permutaret aliquas figuras, vel interponeret figuris siue summę, siue numerorum addendorũ hanc figuram 9. aut 0. quoties voluerit, vel hasce duas 7. 2. aut 6. 3. aut 4. 5. aut 8. 1. semper indicaret examen, summam adhuc recte esse collectã. quod tamen falsum est. Nam postquam hęc additio recte cum suo examine instituta fuerit, si quis per calumniã ita pmutaret summã 1565. adhuc haberet examẽ suam vim, & tamen summa vera non esset. Idem dices, si ordinem figurarum in numeris addendis quis permutaret: Vel certe interponeret hanc figuram 9. aut 0. vt hic apparet.

1425	
230	
1565.	
1655	



14925	
2309	
10655	



Hæc cum ita sint, meritò quis roget, cur ab Arithmethicis hæc probatio per 9. adhibeatur. Cui respondendum est, licet per calumniam hæc probatio ostendatur esse vitiosa, vt in proximis exemplis patuit, non immerito tamen à peritis Arithmeticis eã vsurpari. Nam nemo, (nisi quis dedita opera errare velit) talem errorem committet, vt examen istud locum habeat, sed solum vna, aut altera vnitate à scopo aberrabit; ita vt facile tunc examen hoc errorem ostendat fuisse commissum, indicet; proinde, corrigendam esse additionem. Quis enim ita insanus fuerit, vt hanc vltimam summã ex proximis duobus numeris colligat? Deniq; nisi de industria numeri ita disponantur, vt reiectis 9. semper idem residuum sit, vix aut raro admodum continget, vt examen istud recte succedat, nisi in additione erratum non fuerit.

Alio modo fit examen per abiectionem septenarii, hoc pacto. Reiicianẽ 7. ex omnibus numeris addẽdis, quoties fieri põt, & id, quod supereſt, seorsum ponatur in vna parte crucis. Deinde ex sũma collecta reiician- Secunda probatio additionis.

tur

tur quoq; 7. quoties fieri potest, ac residuũ in altera parte crucis collocetur. Si enim hoc illi priori residuo fuerit æquale, recte facta est additio; si vero inæquale, non recte. Reijcienda autem sunt 7. ex singulis numeris addendis seorsum, residuaq; ad dexteram è regione ipsorum locanda, & ex his residuis in vnam summã collectis etiam abijcienda 7. atq; hoc vltimum residuum in vna parte crucis ponendũ. Cæterum nõ eodem modo reijcienda sunt 7. quo abijcienda esse 9. diximus, cum hic numerus 7. illam proprietatem nouenarii non habeat: sed assumendæ sunt duæ figuræ primæ ad sinistram, ac si prior earum denas, & posterior vnitates significaret, dummodo prior minor sit, quàm 7. (Nam si esset 7. vel maior, reiicienda forent 7. ex illa sola.) & ex eo numero, quẽ duæ illæ figuræ referunt, abiicienda 7. quoties fieri potest, & residuum pro denis accipiendũ, eiq; sequens figura addẽda pro vnitatibus, atq; ex hoc numero, quem residuũ, & sequens figura exprimunt, iterum abijcienda 7. quoties fieri potest, atq; ita deinceps. Vt ex numero 2379. ita reijcientur 7. Ex 23. si ter abijciantur 7. remanent 2. Item si ex 27. (Nam figura 2. relicta, & sequens figura 7. constituunt hunc numerũ 27.) reijciantur ter 7. relinquuntur 6. Si tandem ex 69. (qui numerus constituitur ex residuo 6. & figura 9.) reijciantur 7. quoties fieri potest, remanent 6. qui numerus etiã reliquus fuisset, si omnia 7. ex dato numero fuissent abiecta. Eodem modo ex hoc numero 783. ita abijcientur 7. Si ex 8. (Nam 7. omittuntur, vt dictum est, & ex 8. reiiciuntur 7.) abijciantur 7. remanet 1. Rursus si ex 13. reijciantur 7. remanent 6. atq. ita de cæteris.

Itaq; hac ratione superius exemplũ examinabitur.

710654	0
8907	3
56789	5
880	5
777230	

Omis

Omissa figura 7. si ex 10. abiiciantur 7. remanent 3. Item si ex 36. abijciantur 7. remanet 1. Abiectis vero 7. ex 15. remanet 1. Abiectis tandem 7. ex 14. remanet 0. quam figuram colloco ad dexteram primi numeri, ducta prius linea, quæ numeros addendos distinguat à figuris ad dexteram collocandis. Deinde in secundo numero abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis item 7. ex 19. remanent 5. Abiectis quoq; 7. ex 50. remanet 1. Deniq; abiectis 7. ex 17. remanent 3. quæ ad dexteram repono. Rursus in tertio numero abiectis 7. ex 56. remanet 0. Omissa deinde figura 7. & abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis deniq; 7. ex 19. remanent 5. ad dexteram collocanda. In quarto deniq; numero, abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis autem 7. ex 18. remanent 4. Et abiectis 7. ex 40. remanent 5. ad dexteram ponenda. Quoniam vero 5. 5. 3. & 0. efficiunt 13. ex quibus si abijciantur 7. remanent 6. repono 6. in vna parte crucis. Sed ex hisce residuis facilius reiicientur 7. si dicatur, 5. & 5. efficiunt 10. Abiectis 7. remanent 3. Additis 3. fiunt 6. quemadmodũ supra de abiectione 9. dictum est. Postremo in summa, omissis 7. 7. 7. si ex 23. abijciantur 7. remanent 2. Item si ex 20. abiiciantur 7. remanent 6. in altera parte crucis reponenda.

Verum quemadmodũ examen per abiectionem 9. fallax est, vt diximus, ita quoq; hoc per abiectionẽ 7. vitiosum esse deprehenditur: quia non consideramus, an toties reijciantur 7. ex numeris addendis, quoties ex summa, necne; sed solum an idem residuũ vtrobiq; reperiatur, an non. Nihilominus tamen non sine ratione huiusmodi examen ab Arithmeticis adhiberi solet, quemadmodũ & illud prius per abiectionem 9 instituũ, ob rationẽ supra dictã: quia, nisi quis per calumniam numeros peruertat, vix aut raro idem residuũ vtrobiq; reperietur, nisi recte facta sit additio: Et multo quidem rarius in hoc, quàm in illo examine per 9. instituto; propterea quòd non ita simpliciter reiiciuntur 7. vt 9.

In hoc appoſito exẽplo additio vitioſa eſt, & tamẽ examen per abiectionem 7. indicat, eam rite eſſe inſtitutam.

203	0
134	1
344	

Propoſita autem hæc tabella docet, ex quibuſnam numeris abiecta 7. nihil relinquunt, vt facilius examen iſtud per 7. reddatur proijs, qui parum in numeris ſunt exercitati. Cuius vſus hic eſt. Si numerus duabus figuris ſcriptus, ex quo debent reijci 7. in hac tabella reperitur, nihil ſuperet poſt abiectionem 7. vt cifræ è regione numerorum huius tabellæ indicant. Si autem non reperitur in hac tabella, accipiendus erit numerus in ea proxime minor. Nam differentia inter hunc, & numerum propoſitum relinquetur poſt abiectionem 7. Vt ſi numerus propoſitus ſit 69. ſumendus erit numerus 63. in tabella, qui ſex vnitatibus à 69. differt. Reiectis igitur 7. ex 69. remanent 6. Item ſi propoſitus numerus ſit 37. accipiendus erit ex tabella numerus 35. qui duabus vnitatibus ſuperatur à 37. Reiectis igitur 7. ex 37. ſuperſunt 2. Atq; ita de cæteris.

7	0
14	0
21	0
28	0
35	0
42	0
49	0
56	0
63	0

Tertia probatio additionis.

Tertio hac ratione Arithmetici additionem factam examinare ſolent. Si additio facta eſt ab inferioribus figuris verſus ſuperiores, inſtituunt eandem à ſuperioribus figuris verſus inferiores, vel contra: Et ſi poſteriori via eadem prorſus ſumma colligatur, quæ priori inuenta eſt, non dubitant, quin recte ſit facta additio; propterea quòd incredibile quodammodo ſit, ſi priori modo error aliquis eſſet commiſſus, eundem prorſus poſteriori via committi, cum alio modo figuræ numerorũ inter ſe additæ ſint poſteriori via, quàm priori. Nam ſi forte errauero in additione harum figurarũ 5. 2. 9. dicendo, 5. & 2. faciũt 7. additis 9. fiũt 16.

nou

non tam facile in eundem errorem incidero, si è contrario eas inter se addã, dicendo, 9. & 2. efficiunt 11. additis 5. fiũt 16. quia operatio aliquo modo variatur.

Quarta probatio additionis.

Quarto & vltimo examinari solet additio per subtractionẽ, hac ratione. Quando duo numeri sunt additi, subtrahatur vteruis eorũ ex summa, quod quo pacto fiat, capite sequenti docebimus. Si enim numerus ex hac subtractione relictus æqualis fuerit alteri numero addito, argumento est, nullũ peccatũ in additione fuisse cõmissum. Nam si ex 12. & 20. fiunt 32. necesse est, detractis 12. ex 32. relinqui 20. vel detractis 20. ex 32. relinqui 12. Quando vero plures numeri sunt additi, subtrahatur vnus eorum ex summa, & reliqui omnes in vnam summã colligantur. Nam si hæc summa illi residuo fuerit æqualis, recte facta erit additio. vel certe, subtracto primo numerorum addendorũ ex summa, subtrahatur ex residuo secundus, & ex hoc residuo tertius, & ita deinceps, vltimo excepto. Si enim vltimũ residuũ vltimo numerorũ addendorum æquale fuerit, dubiũ nõ est, quin additio recte facta sit. Atque hoc examẽ certissimũ est, licet sit alijs paulo longius.

SVBTRACTIO INTEGRORum numerorum. Cap. III.

Subtractio quid?

SVBTRACTIO est minoris numeri ex maiori, vel æqualis ex æquali subductio.

Vter duorum numerorũ maior sit quo pacto cognoscatur.

Facile aũt cognosces, vter duorũ numeror. maior sit, ex vltimis eorũ figuris. Cuius eñ figura vltima maior est, ille numer⁹ maior etiã erit, vt horũ duorũ numerorũ superior maior est inferiore, quia vltima eius figura 3. maior est, quàm 2. vltima figura inferioris.

3 0 0 1 2 3 4.
2 9 8 6 7 8 9.

Quòd si vltimæ figuræ duorũ numerorũ sint æquales, ille maior erit, cuius penultima figura maior est. Et si penultimæ etiã figuræ sint æquales, ille maior erit numerus, in quo pri⁹ occurret maior figura, vt in his exẽplis sẽper numer⁹ superior inferiore maior est.

45078.	700001000.
44986.	700000999.

Subtrahēdus numerus quo pacto locādus sit.

Numerus subtrahēdus sub eo, à quo fieri debet subtractio, ita collocandus est, vt prima figura primæ, secunda secundæ, tertia tertiæ, &c. respondeat: adeo vt defectus figurarum in numero subtrahendo, si quis est, cernatur ex parte sinistra. Vt si numerus 40236. ex numero 3271589. subducendus sit, collocandus erit ille sub hoc, vt hic apparet.

3271589
40236

3231353

Subtractio quō fiat.

Ducta deinde linea sub duobus illis numeris, subtrahuntur singulæ figuræ inferioris numeri à singulis figuris superioris numeri, initio facto à primis figuris; & residua sub linea collocantur eo ordine, quo facta est subtractio. Quòd si in superiori numero aliquæ figuræ non habeant respondentes figuras in numero inferiori, ita vt ab illis nihil subtrahatur, reponendę illę erunt sub linea. Verbi gratia. Subductis 6. ex 9. remanent 3. sub linea collocanda. Item subductis 3. ex 8. relinquuntur 5. Et demptis 2. ex 5. relinquuntur 3. Subtracta autem figura 0. ex 1. remanet 1. At subductis 4. ex 7. remanēt 3. Quia vero ex figuris 2. & 3. nihil subtrahitur, ponendæ eæ erunt eodem ordine sub linea.

Quid agēdū sit, qñ figura inferior maior est, q̄ superior.

Quando autem figura aliqua inferior maior est superiore sibi respondente, ita vt subtractio fieri non possit, seruanda erit hæc regula. A proxima figura superiori versus sinistram mutuo accipiatur vnitas, quæ decem significabit respectu illus figuræ, à qua subtractio fieri non potest. Deinde huic vnitati apponatur figura illa, vt fiat numerus duabus figuris scribendus, à quo detrahatur illa figura inferior maior: sed tunc illa figura, à qua mutuo accepta est vnitas, reputanda erit vna vnitate minor. Quòd si proxima illa figura superior sit 0. mutuabimur vnitatem ab alia figura versus sinistram, quæ vnitas significabit 100. respectu illius figuræ, à qua subtractio non potest fieri; sed tunc loco figuræ

gurę 0. animo reponenda erit figura 9. & figura, à qua mutuo accepta est vnitas, vna vnitate minor erit. Ita quoq; si plures huiusmodi figuræ 0. antecederent illã, à qua vnitatem mutuamur, cogitandæ essent omnes veluti 9. & illa, quæ mutuo dedit vnitatem, vna vnitate minor. quæ omnia hoc exemplo fient perspicua.

4500026304827
3929034567892

5709917369 35

Primum subductis 2. ex 7. remanent 5. Deinde quia 9. detrahi non possunt ex 2. mutuabimur vnitatem ab 8. & ita detractis 9. ex 12. (quem numerũ exprimunt 1. quam mutuo accepimus, & 2.) relinquuntur 3. Rursus quia 8. ex 7. (superior enim figura 8. cum mutuo dederit vnitatem, valet tantũ 7.) subtrahi nequeunt, mutuabimur vnitatem à 4. & sic subductis 8. ex 17. remanent 9. Post hæc, quia 7. ex 3. (figura enim 4. ob vnitatem mutuo datam valet tantum 3.) non possunt auferri, accipiemus mutuo vnitatem à 3. post 0. Sed quoniam hæc vnitas valet 100. respectu figuræ 3. à qua non potest fieri subtractio, & nos indigemus tantum 10. necesse est, vt si à 100. mutuemur 10. relinquantur 90. Hinc fit, vt figura 3. valeat tantum 2. & supra 0. reponenda sit animo figura 9 quæ significat 90. respectu figuræ, à qua subtractio fieri non poterat. Itaq; subductis 7. ex 13. remanent 6. Et subductis 6. ex 9. (supra 0. namq; diximus cogitari debere 9.) remanent 3. Quoniam vero 5. ex 2. (Nam figura superior 3. valet tantum 2. vt diximus.) auferri nequeunt, accipiemus mutuo 1. à 6. detrahemusq; 5. ex 12. vt supersint 7. Subductis deinde 4 ex 5. (Figura enim 6. valet 5. ob vnitatem mutuo datam) remanet 1. Et quia rursus 3. ex 2. non possunt detrahi, mutuabimur vnitatem à 5. Sed cum hæc vnitas valeat 10000. respectu figuræ 2. à qua subductio fieri nequit, nos vero in-

digeamus tatũ 10. neceſſe eſt, vt ſi à 10000. mutuemur 10. remaneant 9990. Hinc fit, vt figura 5. valeat ſolũ

```
4 5 0 0 0 2 6 3 0 4 8 2 7
3 9 2 9 0 3 4 5 6 7 8 9 2
-----------------------
5 7 0 9 9 1 7 3 6 9 3 5
```

4. & ſupra ſingulas cifras cogitatione reponenda ſit figura 9. hoc modo 999. Hæ namq; figuræ 999. ſignificant 9990. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri nõ poterat. Itaq; ſubductis 3. ex 12. remanent 9. Et ſubducta figura 0. ex 9. (quã figurã 9. ſupra 0. diximus cogitandã eſſe.) remanent 9. Et ſubductis 9. ex 9. (quam etiã figurã 9. ſupra 0. imaginamur) remanet 0. Itẽ ſubtractis 2. ex 9. (ſupra 0. namq; rurſus reponẽda animo eſt figura 9.) ſuperſunt 7. At vero quoniã 9. ſubtrahi non poſſunt ex 4. (Figura enim 5. ob mutuo datã vnitatẽ valet tantũ 4.) mutuabimur 1. à 4. & deducemus 9. ex 14. vt ſuperſint 5. Poſtremo ſubductis 3. ex 3. (Nam figura 4. ob mutuo datã vnitatem valet tantũ 3.) remanet 0. quæ figura 0 quia vltima eſt in hoc exemplo, nihilque propterea ſignificat, omittenda eſt.

Facilior ratio ſubtractionis, quando figura inferior ſuperiore maior eſt

Hac regula plerique Arithmetici vtuntur, quã nos multo facilius ita proponemus. Quando inferior figura maior eſt ſuperiore, accipiatur differentia inter ipſam, & 10. atq; huic differentiæ addatur ſuperior figura, à qua ſubtractio nõ poterat fieri, aggregatumq; ſcribatur ſub linea. Hoc enim aggregatũ relinqueretur, ſi figura illa maior auferretur ex numero compoſito ex 10. & figura illa ſuperiore, à qua non poteſt fieri ſubtractio, nõ ſecus, ac ſi vnitas fuiſſet mutuo accepta; cũ figura illa maior primũ ſubtrahatur à 10. vt habeatur differentia inter 10. & illã figuram, deinde reſiduo, ſiue differentiæ huic ſuperior figura addatur. Poſtea ne cogamur vnitatem cogitatione auferre ex ſuperiore figura, à qua mutuo ſumpta eſt implicite vnitas, addemus proximę figuræ inferiori verſus ſiniſtrã vnitatẽ, &

hoc

hoc aggregatū ex ſuperiori figura (nulla prius dempta vnitate) ſubducemus. Eadem enim ſemper differentia erit inter inferiorem, ac ſuperiorem figurā, ſiue ex ſuperiore auferas vnitatem, & inferiori nihil addas, ſiue ex ſuperiori nihil auferas, & inferiori vnitatē adijcias. Vt propoſitis hiſce duabus figuris 7. 4. ſi ex 7. tollatur vnitas, erit 2. differentia inter reſiduum 6. & 4. Et ſi ex 7. nihil dematur, adijciatur autē vnitas ad 4. eadem differentia 2. erit inter 7. & 5. Atque hoc modo, quotieſcunque facta fuerit mentio differentiæ inter 10. & figuram inferiorem, quæ ex ſuperiori non poteſt ſubtrahi, addenda erit vnitas proximæ inferioris figuræ verſus ſiniſtrā. Sed hæc omnia clariora fient ex eodem exemplo.

Primū ſubductis 2. ex 7. ſuperſunt 5. Quia vero 9. ſubtrahi nō poſſunt ex 2. ſubtrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ differentia eſt inter 10. & 9.) adijciemus 2. vt habeamus 3. pro reſiduo ſub linea ponēdo. Hoc facto, ſtatim inferiori figuræ 8. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. vt fiant 9. Quæ quoniam rurſus ex 8. nō poſſunt ſubduci, detrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ rurſus differentia eſt inter 10. & 9.) addemus 8. vt habeamus 9. collocāda ſub linea. Quo peracto, ſtatim inferiori figuræ 7. addemus 1. ꝓpter illā differentiā inter 10. & 9. efficiemusq; 8. Quæ quoniā ex 4. demi nequeunt, auferemus 8. ex 10. & reſiduo 2. (hoc eſt, differentiæ inter 10. & 8.) adiiciemus 4. vt fiant 6. reponenda infra lineā. Deinde ſtatim inferiori figuræ 6. adiungemus 1. ꝓpter differentiā illam inter 10. & 8. efficiemuſq; 7. quæ, quoniā ex 0. ſubtrahi nequeunt, ſubduco ex 10. & reſiduo 3. (id eſt, differentiæ inter 10. & 7.) addo 0. efficioq; 3. ponenda ſub linea. Rurſus inferiori figuræ 5. addo 1. propter illam differentiam inter 10. & 7. efficioq; 6. quæ, quoniam ſubduci nequeunt ex 3. detraho ex 10. & reſiduo 4. (id eſt, differentiæ inter 10. & 6.) addo 3. efficioque 7. infra lineam ſcribenda. His peractis, ſtatim inferiori figuræ 4. addo 1. pro-

pter dictam differentiam inter 10. & 6. facioque 5. quibus subductis ex 6. supereſt 1. Quia vero in hac

450002630482 7
39290345678 92

570991736935

ſubductione mentio facta non eſt differentiæ inter 10. & 5. cum 5. ſubduci potuerint ex 6. non addo 1. inferiori figuræ 3. ſed eam, quoniam ſubduci non poteſt ex 2. ſubtraho ex 10. & reſiduo 7. (ſiue differentiæ inter 10. & 3.) addo 2. facioq; 9. locanda ſub linea. Poſt hęc ſtatim figuræ inferiori 0. addo 1. propter differentiam dictam inter 10. & 3. efficioq. 1. Et quoniã 1. ſubtrahi non poteſt ex 0. demo 1. ex 10. reſiduoq; 9. (id eſt differentiæ inter 10. & 1.) addo 0. efficioq; 9. infra lineam reponenda. Poſtea iterum ſtatim addo 1. figuræ inferiori 9. propter illam differentiam inter 10. & 1. vt habeam 10. quæ, quoniam ex 0. non poſſunt detrahi, aufero ex 10. reſiduoq; 0. (ſiue differentiæ inter 10. & 10.) addo 0. facioque 0. pro reſiduo ſub linea collocando. Rurſus quamprimum inferiori figuræ 2. addo 1. propter dictam differentiam inter 10. & 10. efficioq; 3. quæ, cum ex 0. ſubduci nequeant, ſubtraho ex 10. reſiduoq; 7.) nempe differentiæ inter 10. & 3.), addo 0. facioq; 7. collocanda ſub linea. Præterea mox addo 1. ad figuram inferiorem 9. propter differentiam illam inter 10 & 3. facioq; 10. quæ quoniam ex 5. non poſſunt detrahi, aufero ex 10. ae reſiduo 0. (differentiæ nimirum inter 10. & 10.) addo 5. efficioq; 5. pro reſiduo ſub linea reponendo. Poſtremo ſtatim figuræ inferiori 3. adijcio 1. propter illam differentiam inter 10. & 10. vt habeam 4. quæ ſubducta ex 4. relinquunt 0. quam figuram 0. quoniam ſuperuacanea eſt in principio numeri ex parte ſiniſtra, omittemus, cum poſita fruſtra locum occuparet.

per

per 7. *Aliud exemplum.* per 9.

5 ✕ 5

4000134	
67823	0
3932311	5

3 ✕ 3

In hoc exemplo, quoniam, ablatis omnibus figuris inferioribus ex superioribus, vnitas adijcienda esset sequenti figuræ inferiori, quæ nulla est, reponemus eam in sequentem locum: quæ, quoniam auferri nequit ex 0. detrahenda erit ex 10. & residuum 9. infra lineam ponendum; Ac rursus vnitas sequenti loco adijcienda, atq; ex 4. auferenda, vt habeatur residuum 3. sub linea collocandum.

Quando numeri sunt plures, quid agendũ.

Quòd si numerus ex pluribus numeris, vel plures numeri ex pluribus, vel ex vno numero sint subducendi, colligendi prius erunt plures numeri illi, à quibus fieri debet subtractio, in vnam summam; Itemq; plures illi, qui subtrahi debent, inter se addendi, priusquam subtractio instituatur.

Prima probatio subtractionis.

Examen subtractionis quadruplex est. Primum fit per abiectionem 9. Si enim ex superiori numero, à quo facta est subtractio, reijciantur 9. quoties fieri potest, eo modo, quo in additione diximus abijcienda esse 9. & residuum collocetur in vna parte crucis, necesse est, vt idem numerus relinquatur, si abijciantur 9. ex numero subtracto, & ex relicto, quoties fieri potest, nisi in subtractione erratum sit. Ita vides in proximo exemplo ad dextram, residuum semper esse 3. siue 9. abijcias, quoties potes, ex numero 4000134. à quo facta est subtractio, siue ex numeris 67823. 3932311. simul, quorum ille subtractus est, hic vero reliquus fuit ex subtractione.

Secunda probatio subtractionis.

Secundum examen fit per abiectionem 7. Nam si ex numero, à quo facta est subtractio, reijciantur 7. quoties fieri potest, eo modo, quo in additione diximus abijcienda esse 7. & residuũ ponatur in vna parte cru-

cis, necesse est, si subtractio recte facta est, vt idem numerus relinquatur, si reijciantur 7. ex numero subtracto, ponendo residuum ad dextram illius, & ex numero relicto, ponendo etiam residuũ ad dextrã illius, ac tandem duo hæc residua ad dextram collocata in vnã summã colligant, & ex ea reijcianť 7. si reijci possunt. Ita in superiori exemplo, reiectis 7. quoties fieri potest, ex numero 4 0 0 0 1 3 4 relinquuntur 5. Reiectis autem 7. ex 6 7 8 2 3. remanet 0. & abiectis 7. ex 3 9 3 2 3 1 1. supersunt 5. quæ addita ad 0. faciunt quoq; 5. vt in cruce ad sinistram superioris exempli posita apparet. Cæterum vtrumq; hoc examen fallax esse potest, si quis per calumniam numeros permutet, aut alios numeros apponat, quemadmodum in additione diximus.

Tertia probatio subtractionis.

Tertiũ examen fit per additionem. Nam si numerũ residuum subtracto numero adijcias, necessario componetur numerus, à quo subtractio facta est. Vt in hoc exemplo vides.

Numerus, a quo fit subtractio.	6 0 1 2 3.
Numerus subtractus.	4 5 6 7 8.
Numerus residuus.	1 4 4 4 5.
Summa ex numero subtracto, & residuo composita.	6 0 1 2 3.

Quarta probatio subtractionis.

Quartum examen fit per subtractionẽ. Facta enim subtractione, si residuũ ab eodẽ numero, a quo facta est subtractio, auferas, supererit necessario numerus subtractus. Vt in proximo exemplo, si numerum residuũ 1 4 4 4 5. ex numero 6 0 1 2 3. detrahas, reliquus erit numerus subtractus 4 5 6 7 8. vt hic apparet.

6 0 1 2 3
1 4 4 4 5
4 5 6 7 8

Hæc posteriora duo examina certissima sunt, nullamq; admittere possunt fallaciam, aut fraudem.

MVL-

MVLTIPLICATIO INTEgrorum numerorum. Cap. IIII.

MVLTIPLICATIO est ductus vnius numeri in alium. Tunc autem numerus quilibet in aliũ duci dicitur, cum alter ipsorũ toties augetur, quoties in altero continetur vnitas. Vt numerus 6. in numerũ 5. vel numerus 5. in numerũ 6. duci dicitur, quando numerus 6. quinquies accipitur, vel numerus 5. sexies. quo pacto semper accipientur 30. atq; huiusmodi ductus Multiplicatio appellatur. Itaq; numerus ex multiplicatione, siue ductu vnius numeri in alterũ procreatus toties vtrumlibet multiplicatorũ continebit, quoties alter vnitatẽ complectitur, vt in dato exemplo manifestum est. Ex quo fit, Multiplicationẽ ita quoq; describi posse. Multiplicatio duorũ numerorũ est inuentio numeri, qui toties vtrumuis eorum contineat, quoties alter vnitatem continet. Multiplicatio qd.

Vt expedite omnis multiplicatio fiat, necesse est nosse, qui numerus producatur ex ductu, siue multiplicatione cuiuslibet figurę numericę in quãuis aliã figurã, vt ex 7. in 8. vel ex 8. in 7. Itẽ ex 7. in 9. vel ex 9. in 7. &c. Hoc em̃ si bene tenueris, nullã in multiplicatione senties difficultatẽ, aut laborẽ. Id qđ assiduo exercitio magis discit, quàm vllo p̃cepto. Interim tñ mirifice tibi inseruiet sequẽs tabula, q̃ Pythagorica dici solet, ea fortassis de causa, q̃ Pythagoras cã prim⁹ excogitauerit.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Constru-

Constructio tabulæ Pythagoricæ.

Constructio huius tabulæ perfacilis est. Prima enim linea ab 1. incipiens progreditur per continuam additionem vnitatis, vsq; ad 9. Vt ex 1. & 1 fiunt 2. Ex 2. & 1. fiunt 3. Ex 3. & 1. fiunt 4. &c. Secunda vero linea à 2. incipit, progrediturq; per continuam additionem 2. Vt ex 2. & 2. fiunt 4. Ex 4. & 2. fiunt 6. Ex 6. & 2. fiunt 8. &c. Ita quoq; tertia linea initium sumit à 3. & per continuam additionem 3. progreditur. Atq; eodē modo reliquæ lineæ compositæ sunt. Quælibet enim per continuam additionem eius numeri, à quo incipit, progreditur.

Vsus tabulæ Pythagoricæ.

Vsus autem eiusdem tabulę, quod ad multiplicationem attinet, (infinitos enim alios vsus habet) hic est. Propositis duabus figuris inter se multiplicandis, si altera in superiori linea, & altera in siniſtro latere sumatur, & in illa linea deorsum, in hoc vero latere dextrorsum quis ꝓgrediatur, reperiet in cōmuni cōcursu numerum ex multiplicatione duarum illarum figurarū inter se productum. Ita vides ex multiplicatione 7. in 8. vel 8. in 7. produci 56. Item ex 8. in 8. produci 64. & sic de cæteris.

Regula multiplicandi figuram in figuram.

Quod si huiusmodi tabula in promptu non sit, vtendum erit hac regula. Scribatur vna figura sub altera, & vtriusq; distantia à 10. ad latus ponatur. Deinde hæ distantiæ inter se multiplicentur. Productus enim numerus, si vnica figura scribitur, dabit primam figuram summæ producendæ ex figurarum multiplicatione; si vero duabus figuris scribitur, seruanda erit figura denarum, & prior ponenda pro prima figura summæ producendæ. Secunda autem figura eiusdem huius summæ habebitur, si alterutra distantia ab altera figura detrahatur, & residuo figura denarū reseruata addatur, si qua seruata est: Vel certe si figuræ propositæ inter se addantur, addita prius figura denarum reseruata, si qua seruata est, dabit prima figura huius aggregati (reiecta secunda figura tanquam superuacanea) secundam figuram summæ producendæ. Exemplis res fiet illustrior.

9. 1.

9.	1.	8.	2.	7.	3.
8.	2.	8.	2.	6.	4.
7	2	6	4	4	2

In primo exemplo figuræ multiplicandæ sunt 9. & 8. earumq; distantiæ à 10. sunt 1. & 2. quæ inter se multiplicatæ, (erit autem multiplicatio distantiarum à 10. facilima, cum minores sint, quàm figuræ multiplicandæ. De his enim regula hæc intelligenda est) dicendo semel 2. vel bis 1. faciunt 2. quæ sub distantijs scribo pro prima figura summæ producendæ. Ablata autē distantia 2. ex 9. vel distantia 1. ex 8. relinquuntur 7. quæ scribo sub figuris pro secunda figura summæ producendæ. Quam secundam figuram etiam dabit prima figura aggregati figurarum 9. & 8. quod est 17. relicta secunda 1. tanquam omnino ad hoc negotium inutili. Itaque multiplicatio figurarum 9. & 8. efficit 72.

In secundo autem exemplo figuræ propositæ sunt 8. & 8. quarum distantiæ à 10. sunt 2. & 2. His inter se multiplicatis, dicendo, bis 2. habebimus 4. pro prima figura summæ producendæ. Dempta autem vtrauis distantia ex 8. supererunt 6. pro secunda figura; quam nobis etiam dabit prima figura aggregati ex 8. & 8. quod est 16. relicta secunda 1. tanquam superuacanea. Figuræ igitur 8. & 8. inter se multiplicatæ faciūt 64.

In tertio denique exemplo figuræ datæ sunt 7. & 6. quarū distantiæ à 10. sunt 3. & 4. Hæ inter se multiplicatæ, dicendo, ter 4. vel quater 3. faciunt 12. Prima ergo figura summæ producendæ erit 2. secunda vero figura 1. seruanda erit. Deinde ablata distantia 4. ex 7. vel distantia 3. ex 6. supersunt 3. quibus si addatur vnitas, quam seruauimus, fient 4. pro secunda figura summæ producendæ: quam etiā figuram dabit prima figura aggregati ex 7. & 6. addita prius vnitate seruata, quod est 14. omissa prorsus secunda figura 1. Producuntur ergo 42. ex multiplicatione 7. per 6. vel 6.

per

per 7. Eadem ratio in cæteris est, dummodo duæ figuræ propositæ inter se additæ superent 10. Alias distantiæ illarum à 10. maiores essent ipsis figuris, ac proinde facilius multiplicarentur figuræ, quàm distantiæ. Rectius tamen feceris, si vsu, & exercitatione memoriter ediscas huiusmodi multiplicationes figurarũ inter se, quàm vt vel ad tabulam Pythagoricam, vel ad hanc regulam confugias.

Qua ratione collocandi sint numeri inter se multiplicãdi.

Iam vero propositis duobus numeris inter se multiplicandis, scribendus est minor sub maiore, ita vt prima figura respondeat primæ figuræ, & secunda secundæ, &c. vt in additione, & subtractione diximus. Quod tamen necessarium non est, cum etiam, maior sub minore scribi possit, dicto tamen ordine figurarum seruato. Vt si multiplicanda sint 4300678. per 600394. collocandi erunt numeri altero horũ modorum, quamuis primus sit magis vsitatus.

4300678.	Vel.	600394.
600394.		4300678.

Sed doceamus prius, quo pacto numerus aliquis per vnam solam figuram multiplicandus sit. Ita enim facilius intelligetur, qua ratione numerus per numerum debeat multiplicari.

Quando ergo numerns aliquis per vnam tantum figuram multiplicandus est, solet semper figura hæc multiplicans subscribi primę figuræ numeri multiplicandi. Vt si numerus 600394. multiplicandus proponatur per 8. sic stabit exemplum. Multiplicatio autem fiet, si figura 8. multiplicetur per omnes figuras numeri 600394.

Quomodo numerus per vnam figurã multiplicetur.

600394.
8.
4803152.

incipiendo a dextra, & siniſtram versus progrediendo, singulosque numeros productos sub linea, quæ infra numeros multiplicandos ducitur, scribendo;

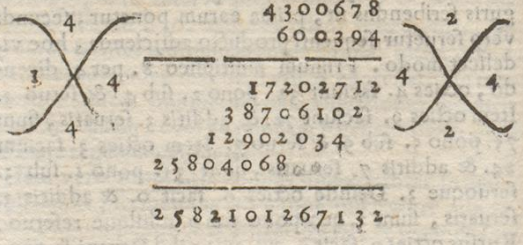
ita

ita tamen, vt si productus aliquis numerus duabus figuris scribendus sit, prima earum ponatur, secunda vero seruetur sequenti producto adijcienda, hoc videlicet modo. Primum multiplico 8. per 4. dicendo, octies 4. faciunt 32. pono 2. sub 4. & seruo 3. Item octies 9. faciunt 72. & additis 3. seruatis, fiunt 75. pono 5. sub 9. & seruo 7. Item octies 3. faciunt 24. & additis 7. seruatis, fiunt 31. pono 1. sub 3. seruoque 3. Deinde octies 0. facit 0. & additis 3. seruatis, fiunt 3. quæ pono sub 0. nihilque reseruo. Rursus octies 0. facit 0. cui, quia nihil seruaui in præcedenti producto, nihil addendum est. Pono ergo 0. sub 0. nihilque reseruo. Denique octies 6. faciunt 48. quibus, quia in proximo producto nihil seruaui, nihil addo. Pono igitur totum hunc numerum sub linea, quia multiplicatio ad finem perducta est, cum nulla alia figura superioris numeri restet multiplicanda per 8. Itaque si totum numerũ 600394. multiplicemus per 8. procreabimus hunc numerũ 4803152. Atque hoc modo quemcunque numerum per quamuis figuram multiplicabis.

Quomodo numerus p numerũ pluribus figuris scriptũ multiplicetur

Si vero numerus per numerum sit multiplicandus, ducatur sub ipsis dispositis, vt dictum est, linea recta. Deinde singulæ figuræ inferioris numeri per singulas figuras numeri superioris multiplicentur, vt proxime docuimus: hoc solum diligenter obseruato, vt numerus productus ex quacunque figura inferioris numeri per primam figuram numeri superioris multiplicata collocetur sub illa figura inferioris numeri, per quam superior numerus multiplicatur, reliqui autem numeri ex multiplicatione eiusdem figuræ numeri inferioris per alias figuras superioris numeri producti statuantur suo ordine deinceps versus sinistram. Vt in hoc exemplo factum esse vides, in quo quatuor ordines numerorum sub linea constituti sunt ex numeris productis.

per



Totus enim numerus productus ex multiplicatione 4. in omnes figuras superioris numeri habet primã suã figuram sub 4. Ita quoq; numerus productus ex multiplicatione 9. in omnes figuras numeri superioris primam suam figuram habet sub 9. Eadem ratione prima figura numeri producti ex multiplicatione 3. in omnes figuras numeri superioris collocata est sub 3. Denique prima figura numeri producti ex multiplicatione 6. in omnes figuras superioris numeri posita est sub 6. Reliquæ autem figuræ ordine suo progrediuntur versus sinistram.

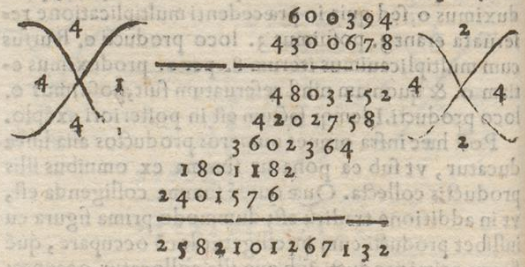
Quoniam vero cifra siue multiplicans, siue multiplicata producit o. propterea omisimus in numero inferiori duas cifras, ita vt eas non multiplicauerimus in numerum superiorem, quia semper produxissent o. Idẽ faciendum est, quotiescunq; in numero inferiori fuerint aliquot cifræ. Eas enim semper omittemus, & ad proxime sequentem figuram significatiuam nos conferemus. Cifræ tamen superioris numeri, si quæ sint, negligendæ non sunt. Nam licet multiplicatæ per figuras inferioris numeri significatiuas producant o. sæpe numero tamen producto illi o. addendum est aliquid, illud nimirum, quod in præcedenti multiplicatione aliquando reseruatum est, idq; loco producti reponendum sub linea. Immo etiamsi nihil reseruatum sit aliquãdo, ponenda tamen est figura o. sub linea loco producti. quæ omnia in superioribus exemplis obseruata sunt.

sunt. In priori enim cũ multiplicauimus 8. per 0. produximus 0. sed quia in præcedenti multiplicatione reseruata erant 3. posuimus 3. loco producti 0. Rursus cum multiplicauimus iterum 8. per 0. produximus etiam 0. & quoniam nihil reseruatum fuit, posuimus 0. loco producti. Idemq; factum est in posteriori exẽplo.

Post hæc infra omnes numeros productos alia linea ducatur, vt sub ea ponatur summa ex omnibus illis productis collecta. Quæ quidẽ summa colligenda est, vt in additione traditũ est; dummodo prima figura cuiuslibet producti eum intelligatur locũ occupare, quẽ figura primi producti, sub qua illa collocatur, occupat: Hoc est, vt figura 2. quæ prima est secundi numeri producti in primo exẽplo, cogitetur esse posita sub secundo loco primi producti; figura autem 4. quæ prima est in tertio producto, intelligatur esse locata sub tertio loco primi producti; Deniq; figura 8. quæ prima etiã est in quarto producto, concipiatur occupare sextũ locum sub primo producto. In his enim locis oẽs has figuras vides esse positas. Itaq; vt exẽplo rẽ monstremus, hac ratione summa colligetur. In numeris productis sola figura 2. occupat primum locum; Ea igitur sola ponenda est in primo loco sub linea. Deinde in secundo loco sunt 1. & 2. quæ faciunt 3. sub linea in secundo loco ponenda. Rursus in tertio loco sunt 7. 0. 4. quæ efficiunt 11. Collocanda ergo erit 1. sub linea in tertio loco, & seruanda 1. vt figuris quarti loci adijciatur, &c. Hac ratione summa collecta erit 2582101267132. atque hic numerus producitur ex multiplicatione 4300678 in 600394.

Vt autem videas eundem numerum gigni, etiamsi maiorem numerum sub minore statuamus, apposuimus hoc alterum exemplũ sequens, in quo ijdem duo numeri 4300678. & 600394. inter se se multiplicantur, sed maior numerus sub minore positus est, factique sunt quinque ordines numerorum productorum, quot nimirũ sunt figuræ significatiuæ in numero inferiori. Idem tamẽ numerus productus est, qui prius.

per



Prima probatio multiplicationis.

Examen multiplicationis triplex est. Primum fit per abiectionem 9. hoc modo. Reijciantur primum 9. ex primo numero multiplicato, quoties fieri potest, vt in additione diximus, residuumq; in sinistra parte crucis ponatur. Deinde reiectis 9. eodē modo ex altero numero multiplicato, locetur residuū in dextra parte crucis. Post hæc, multiplicatis his duobus residuis inter se, & ex producto reiectis 9. statuatur residuū in superiori parte crucis. Postremo ex summa omnium productorum reiectis quoq; 9. scribatur residuū in parte crucis inferiore. Necesse enim est, residuū hoc æquale esse residuo superiori, si erratū in multiplicatione nō est. Exempla posita sunt in superioribus multiplicationibus. Nam in primo exemplo, reiectis 9. ex 600394, residuū est 4. Residuum autem huius numeri 8 est 8. quia 9. abijci nō possunt. Multiplicatis autem his residuis 4. & 8. inter se, fiunt 32. a quibus si reijciantur 9. remanent 5. Ac tantundem relinquitur, si reijciantur 9. ex producto 4803152. In secundo autem exemplo, residuū primi numeri est 1. secundi autē 4. Multiplicatisq; inter se his residuis 1. & 4. fiunt 4. in suprema parte crucis locanda, quia 9. abijci non possunt. Reiectis aūt 9. ex tota summa, supersunt etiā 4.

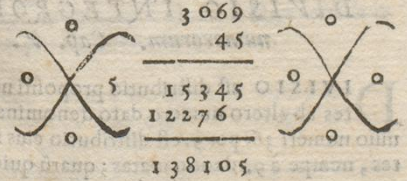
Secunda probatio multiplicationis.

Alterum examen fit per reiectionem 7. si nimirum ex ijsdem numeris abijcianrur 7. vt in additione diximus, ex quibus in superiori examine præcepimus reijcienda

ijcienda esse 9. Exemplum habes in postremis duabus multiplicationibus. Sed duo hæc examina sunt etiam fallacia, propter causas supra adductas.

Tertium examen certissimum est, fitq; per diuisionẽ. Si enim tota summa producta diuidatur per alterutrũ numerorum multiplicatorum, prodibit necessario in Quotiente alter numerus. Quæ quidẽ diuisio facilima erit, cũ opus non sit, Quotientes figuras inquirere, cũ eæ ordine omnes contineantur in altero numero multiplicato. Sed hoc examen planius intelligetur, cum Diuisio explicata fuerit. Tertia probatio, multiplicationis.

Alia duo exempla cum probatione per 9.



In priori horum exemplorum primum residuum est 0. Vnde licet secundum residuũ sit 5. tamen residuorum multiplicatio facit 0. In posteriori autem vtrumq; residuum numerorũ multiplicatorum est 0. Vnde eorũ multiplicatio dabit etiã 0 atq; ita in vtroq; exemplo residuum numeri producti etiam necessario erit 0.

Quòd si vterq; numerus multiplicandus, vel alter tantum, habuerit in principio aliquot cifras, multiplicatio admodũ facilis erit. Abiectis enim omnibus cifris illis, multiplicandi erunt reliqui numeri inter se, & producto numero apponendæ ordine omnes illæ cifræ abiectæ. Vt si multiplicandus sit numerus 3406. per 4000. reiectis cifris 000. multiplicetur datus numerus per 4. & numero producto 13624. apponantur eædẽ cifræ, hoc modo. 136 24000. Sic etiã, si multiplicanda sint 3040000. per 203000. reiectis septem cifris ad dextram horum numerorum positis, Facilitas multiplicationis, cũ numeri in principio habent cifras.

multiplicentur reliqui numeri 304. 203. inter se, & producto numero 61712. apponãtur reiectæ illæ septem cifræ, hoc modo. 6171200000000.

Hinc fit, si numerus aliquis multiplicandus sit per 10. vel 100. vel 1000. vel 10000. &c. addendas esse illi numero ad dextrã tot cifras, quot continentur in numero multiplicante, sine vlla alia multiplicatione: quia, reiectis cifris, supereſt sola vnitas, quæ numerum datũ multiplicans eundẽ numerũ producit. Vt 5067. multiplicata per 10. faciunt 50670. Multiplicata autem per 100000. faciunt 506700000. Ita quoq; 3000. multiplicata per 100. faciunt 300000. &c.

DIVISIO INTEGRORVM numerorum. Cap. V.

Diuiſio quid.

DIVISIO est distributio propositi numeri in partes ab altero numero dato denominatas. Vt diuisio numeri 36. per 9. est distributio eius in nonas partes, nempe à 9. denominatas; quarũ quidem singulæ quaternas vnitates continebunt: ita vt 4. sit numerus ex hac diuisione productus, qui Quotiens dici solet, propterea quòd indicat, quoties numerus 9. qui diuidens, siue diuisor appellatur, in diuidendo numero 36. continetur. Indicat enim contineri quater, toties nimirum, quoties numerus Quotiens 4. vnitatem continet. Ex quo fit, Diuisionem ita quoq; describi posse. Diuisio est inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuisorem continet. Vt in proposito exemplo perspicuum est.

Quo pacto numeri in diuisione sint collocãdi.

In diuisione scribitur diuisor sub numero diuidendo, non quidem ponendo primã figuram sub prima, secundam sub secunda, &c. vt in additione, subtractione, & multiplicatione factũ est, sed contrario ordine. Ponenda enim hic est vltima figura diuisoris sub vltima figura diuidendi numeri, & penultima sub penultima, &c. vt si diuidendus sit numerus 7809. per 47. collocandi erunt

7809
47

numeri,

numeri, vt in apposito exemplo apparet. Quòd si vltima figura diuisoris maior fuerit vltima figura numeri diuidendi, collocanda erit vltima figura diuisoris sub penultima figura numeri diuidendi, & penultima sub antepenultima, &c. vt in hoc exemplo est manifestũ. Idem faciendum est, si vltima figura diuisoris æqualis fuerit vltimæ figuræ numeri diuidendi, sed penultima maior, quàm penultima: Vel si & vltima vltimæ, & penultima penultimæ fuerit æqualis, sed antepenultima diuisoris maior, quàm antepenultima numeri diuidendi: Vel denique, quotiescunq; diuisor maior fuerit eo numero, quem tot figuræ vltimæ numeri diuidendi exprimunt, quot figuris diuisor scribitur. Quæ omnia in his tribus exemplis manifesta sunt.

37800
47

46800. 47 | 476047. 4762 | 4792. 47

Ita autem diuisio fiet. Primũ quæratur, quoties diuisor in numero sibi suprascripto contineatur, & numerum indicans, quoties continetur, ad dexterã numeri diuidendi post hanc lineam curuã (. scribatur: atque hic numerus (qui semper vnica figura scribitur. Nunquam enim maior numerus, quam 9. poni potest in Quotiente; etiamsi diuisor videatur sæpius aliquando contineri in numero suprascripto, quàm nouies.) in diuisorem multiplicetur, productusque numerus (qui seorsum scribendus nõ est, sed memoria retinendus.) ex suprascripto numero subtrahatur, vt in subtractione docuimus, scribendo singulos numeros residuos supra figuras, à quibus facta est subtractio, deletis prius hisce figuris, vnà cum diuisore. Numerus autem totus residuus supra diuisorem notatus minor esse debet diuisore, aliàs erratum esset. Id quod etiam in alijs residuis obseruandum erit.

Diuisio quo modo fiat.

In Quotiente nõ potest poni maior numerus, quàm 9.

Residuus numerus semper debet esse minor diuisore.

Deinde promouendus erit diuisor dextram versus in proximum locum, & iterum quærendum, quoties in

numero sibi suprascripto cõtineat, & reliqua faciẽda, vt prius. Quod si in aliqua promotione diuisor maior fuerit numero suprascripto, ita vt nec semel quidem in eo contineatur, scribenda erit figura o. post illum numerum, quem post lineam curuam scribendum esse diximus, & diuisor delendus, iterumque promouendus ad proximum locum, & quærendum, vt prius, quoties in numero suprascripto contineatur, &c. Atque ita semper promouendus erit diuisor, donec nullus locus in numero diuidendo supersit, in quem diuisor possit promoueri. Verum hæc exemplis fient planiora.

Quomodo numerus per vnicam figuram diuidatur.

Sit primum diuidendus numerus 7 6 0 4 8. per vnicam figuram, vt per 8. Primum inuenio diuisorem 8. contineri in numero suprascripto 76. nouies. Dicitur autem ille numerus supra diuisorem esse scriptus, qui exprimitur figura supra primam figuram diuisoris posita, & omnibus alijs versus siniſtram, si quæ sint. Vt in dato exemplo numerus supra diuisorem positus est 76. Porrò ex tabula Pythagorica, quæ supra posita est, cognosces facile, quoties figura diuisoris in supra posito numero contineatur. Si enim figurã diuisoris sumas in vertice tabulæ, & in eius linea deorsũ descendendo accipias numerũ supraposítum, vel, si is nõ inuenitur, eo proxime minorem, indicabit figura ei respondens in siniſtro latere, quoties figura diuisoris in numero supraposito contineatur. Vt in dato exemplo, sub figura 8. non reperitur numerus 76. supraposítus: si igitur accipiatur 72. proxime minor, reperietur in siniſtro latere figura 9. Nouies ergo continetur figura 8. in 76. atq. ita de cæteris. Pono igitur 9. post lineã curuam, & multiplico 9. per 8. dicendo, octies 9. faciunt 72. quæ subtrahenda sunt ex numero 76. supra diuisorem posito, hoc modo. Subtractis 2. ex 6. remanent 4. Deleta igitur figura 8. in diuisore, & figura 6. in numero diuidendo, pono 4. supra 6. Subtractis

Qui numerus dicatur supra diuisorem positus.

Quo pacto ex tabula Pythagorica cognoscatur, quoties figura diuisoris in supraposito numero cõtineatur.

4
7 6 0 4 8 (9
8

tractis item 7. ex 7. nihil remanet. Deleta igitur figura 7. nihil pono supra 7. quia poni deberet cifra, quæ superuacanea esset, eò quòd illã nulla alia figura sequatur versus sinistram. Atque ita absoluta est vna operatio diuisionis, remanetq; hic numerus 4048. vt in exemplo vides.

8 Deinde promoto diuisore in præcedentem locũ sub 0. vt hic vides, video diuisorem 8. in numero suprascripto 40. cõtineri quinquies. Pono igitur 5. post figuram 9. iam inuentam, vt in sequẽti exẽplo vides, & dico, quinquies 8. (multiplicando nimirum figuram 5. inuentam per diuisorem.) faciunt 40. quæ subtracta ex numero 40. supra diuisorem posito nihil relinquunt. Deleta igit figura 8. in diuisore, & figuris 0. & 4. in numero diuidendo, absoluta erit secunda operatio diuisionis, remanebitq; hic numerus 48. vt hic apparet.

4
76048 (9
88

4
76048 (95
88

Rursus diuisore promoto in præcedentem locum sub 4. vt hic cernis, reperio diuisoré 8. nec semel quidem contineri in suprascripto numero 4. Pono igitur 0. post figuram 5. vltimo inuentam, vt in hoc altero exemplo factum est. Et quoniam figura 0. multiplicata per diuisorem nihil producit, nihil subtrahendũ erit ex numero 4. supra diuisorem posito. Deleto igitur diuisore, absoluta erit tertia operatio diuisionis, remanebitque numerus 48. vt in hoc exemplo manifestum est.

4
76048 (95
888

4
76048 (950
888

Postremo, promoto diuisore in præcedentem locum sub 8. vt hic cernitur, inuenio diuisorem 8. in numero 48. suprascripto contineri sexies. Pono igitur 6. post figuram 0.

4
876048 (950
8888

vltimo repertam, vt hic factum est, & dico; sexies 8. (multiplicando nimirum figuram 6. inuentã in diuisorem) faciunt 48. quæ subtracta ex numero 48. supra diuisorem posito nihil relinquunt. Deleta igitur figura 8 in diuisore, & figuris 8. & 4. in numero diuidendo, absoluta erit tota diuisio, cum nullus alius locus supersit in numero diuidendo, in quem diuisor possit promoueri: nihilq; in diuisione supererit. Itaq; totus Quotiens numerus est 9506.

Posui tot exempla in hac diuisione, vt distinctius appareret, quidnam in qualibet operatione relinquatur, & quid deleatur: quamuis solũ extremum sit instar omniũ, ita vt in operatione necesse non sit alia exempla depingere, sed satis sit, si vltimum describatur.

Quotiens quot figuras habeat.

Vides igitur, Quotientem tot habere figuras, quoties diuisor sub numero diuidẽdo positus est. Id quod in omnibus alijs diuisionibus, etiam per plures figuras institutis, euenit. Semper enim tot figuras habebit Quotiens, quoties totus diuisor sub numero diuidendo ponitur.

Quomodo numerus p plures figuras diuidat.

Sit deinde numerus 1832487. diuidendus per numerũ 469. qui non vna, sed pluribus figuris scribitur. Hic, vt sciat, quoties diuisor in numero suprascripto contineatur, (est autem in hoc exemplo numerus 1832. supra diuisorẽ positus.) non est id de toto diuisore inquirendum, sed satis est, si inuestigetur, quoties vltima eius figura, qualis hic est 4. contineatur in numero supraposito, (Dico autem etiam hic illũ numerum supra vltimã figurã diuisoris, vel supra quamcunq; aliã, esse positum, qui exprimitur figura supra eam scripta, & omnibus alijs versus sinistrã, si quæ sint. Vt in dato exemplo, supra figuram 4. positus est numerus 18. supra 9. autem numerus 1832.) qui hic est 18. hac tamen adhibita cau-

Qui numerus dicatur supra quamcunq; figuram diuisoris esse positus.

tione

tione, vt non semper in Quotiente ponatur figura tot vnitatũ, quoties vltima diuisoris figura in numero supra eam posito continetur, sed diligenter curetur, vt ea figura ponatur, quæ in totum diuisorẽ multiplicata eo ordine, quem iam præscribemus, talẽ numerum producat, qui & ex numero supra diuisorem posito subtrahi possit, & subtractus relinquat numerũ (si quam relinquat) diuisore minorẽ. Itaq; (vt ad exemplũ propositum veniamus) quamuis vltima figura diuisoris, quæ est 4. contineatur in suprapositõ numero 18. quater, tamen quia figura 4 multiplicata in totum diuisorem producit maiorẽ numerum, quàm 1832. qui supra diuisorem positus est, ita vt ex suprapositõ numero subtrahi non possit, non pono 4. in Quotiente, sed 3. Quòd si hæc figura 3. multiplicata in totum diuisorẽ produceret maiorẽ etiam numerũ, quàm 1832. ponerẽ 2. loco 3. Et si figura 2. multiplicata in diuisorẽ adhuc maiorem numerũ procrearet, ponerem 1. atq; ita semper minuam figurã Quotientis vna vnitate, donec figuram inueniã, quæ in diuisorem multiplicata numerũ gignat, qui ex suprascripto numero detrahi possit. Ita autem multiplicanda erit figura Quotientis inuenta in totum diuisorem. Primùm ducenda est in vltimam figuram diuisoris, & hoc productum ex numero supra vltimã figuram illam posito auferendũ, deleta prius illa figura diuisoris, vna cũ numero, ex quo facta est subtractio. Deinde multiplicanda est in figuram penultimam diuisoris, productumq; ex numero supra posito detrahendũ, vt prius. Atq hoc modo in omnes figuras diuisoris multiplicanda est, &c. vt in nostro exemplo. Ex 3. in 4. fiunt 12. quæ ita subtrahenda sunt ex 18. numero supra posito. Demptis 2. ex 8. remanent 6. Deleta ergo figura 4. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, repono 6. supra 8. Dempto item 1. ex 1. nil remanet. Deleo igitur 1. Deinde ex 3. in 6. fiunt 18. quæ ex 63. numero supra posito sic subducenda sunt. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. subtrahi nequeunt.) est 2. additis 3. fiũt 5. quæ pono supra 3. de-

leta prius figura 6. in diuisore, vnà cum figura 3. in numero diuidendo. Addo autem 1. propter distantiam à 10. cuius mentio facta est, ad 1. (nempe ad denam numeri 18. qui subtrahitur.) fiuntq; 2. quæ ex 6. ablata relinquunt 4. quæ pono supra 6. deleta prius dicta figura 6. Tandem ex 3. in 9. fiunt 27. quæ sic ex suprascripto numero 452. detrahuntur. Distantia 7. à 10. (quoniam 7. ex 2. detrahi non possunt) est 3. additis 2. fiunt 5. quæ pono supra 2. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. propter dictam distantiam à 10. ad 2. (nempe ad denas numeri 27. subtrahendi.) facioq; 3. quæ ablata ex 5. (nimirum ex secunda figura numeri 452. à quo subtractio fit.) relinquunt 2. Pono ergo 2. supra 5. deleta prius dicta figura 5. Atq; ita deinceps pergendum esset, si plures figuræ in diuisore reperirentur. Absoluta ergo hac ratione erit diuisionis vna operatio, remanebitq; hic numerus 425487. vt in exemplo suprascripto vides.

Promoto iam diuisore in præcedentem locum, ita vt singulæ figuræ diuisoris locũ vnũ mutent, vt hic vides, intelligo vltimã figurã diuisoris, nempe 4. in suprapositio numero 42. cõtineri nouies. Pono igitur 9. post figuram 3. in priori operatione inuentam, vt in sequenti exemplo patet, & dico. Ex 9. in 4. fiunt 36. quæ ita subtraho ex numero 42. suprascripto. Distantia 6. à 10. (quoniam 6. ex 2. subduci non possunt) est 4. additis 2. fiunt 6. quæ pono supra 2. deleta prius figura 4. in diuisore, vnà cũ figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 3. nimirũ ad denas numeri 36. subtrahendi, propter dictã distantiam à 10. facioq; 4 quæ ex 4. ablata nihil relinquunt. Deleo ergo 4. Rursus ex 9. in

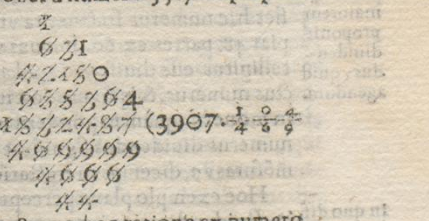
```
    42
   655
 1832487 (3
   4699
    46
```

```
    1
    63
   421
   6553
 1832487 (390
  469999
   4666
    44
```

6. fiunt 54. Detractis igitur 4. ex 5. remanet 1. Demptis quoq; 5. ex 6. remanet etiã 1. Quare deleta figura 6. in diuisore, vnà cũ figuris 5. & 6. in numero diuidendo, pono supra singulas figurã 1. Deniq; ex 9. in 9. fiũt 81. quę ita subduco ex numero 114. suprapoſito. Dempto 1. ex 4. remanent 3. Pono ergo 3. supra 4. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 4. in numero diuidendo. Distantia aũt 8. à 10 (quia 8. ex 1. subduci nequeunt) est 2. si addatur 1. fiunt 3. quæ supra 1. colloco, deleta prius figura 1. Et propter dictã distantiam à 10. subtraho 1. ab 1. nihilque remanet. Deleo ergo 1. absolutaq; erit secunda diuisionis operatio. Numerus autem remanens erit 3387. vt in exemplo patet.

Rursus ꝓmoto diuisore in proximũ locũ, vt in ꝓximo exẽplo apparet, ita vt figura 9. locet̃ sub 8. at 6. sub 3. & 4. sub 3. qm̃ vltima figura diuisoris, puta 4. nec semel quidẽ in suprapoſito numero continet̃, scribo 0. post figurã 9. ꝓxime inuẽtã, deleoq; diuisorẽ. Absoluta nãq; ita erit tertia operatio diuisoris, remanebitq; idẽ numer⁹ 3387. qui in antecedẽte operatione reliqu⁹ fuit.

Postremo ꝓmoto diuisore in primũ locũ, vt in eodẽ exemplo manifestũ est, reperio vltimã diuisoris figurã 4. in suprascripto numero 33. cõtineri septies tm̃: quia si sumeretur octies, nõ posset à numero 3387. suprapoſito fieri subtractio numerorũ productorũ ex 8. in totũ diuisorem. Itaq; pono in Quotiente figurã 7. post alias figuras inuentas, vt in hoc exemplo apparet, & dico. Ex 7 in 4. fiunt 28. quæ hac ratione ex numero 33. suproposito demo. Distantia 8. à 10 (Nam 8. ex 3. non possunt subtrahi) est 2. si addantur 3. fiunt 5. Deleta ergo figura 4. in diuisore, & figura 3. in numero diuidendo, pono 5. supra 3. Addo aũt 1. propter dictã distantiam à 10. ad 2. nempe ad denas numeri 28. subtrahendi,



trahendi, facioq; 3 quæ ex 3. ablata nihil relinquunt. Quare deleta figura 3. rursus dico; ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ex 58. numero suprapositio ita tollentur. Detractis 2. ex 8. relinquuntur 6. Deleta ergo figura 6. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, pono 6. supra 8. Detractis item 4. ex 5. remanet 1. Deleta ergo figura 5. pono 1. supra eam, & tandem dico. Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ex 167. numero suprapositio sunt deducenda hoc modo. Demptis 3. ex 7. supersunt 4. Deleta igitur figura 9. in diuisore, & figura 7. in numero diuidendo, statuo 4. supra 7. Detractis item 6. ex 6. remanet 0. Deleta ergo figura 6. pono 0. supra eam. Atq; ita tota diuisio absoluta est, remanetq; numerus hic 104. qui post Quotientem 3907. collocandus est supra diuisorem 469. interiecta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus, hoc est, partes 104. ex partibus 469. in quas totum aliquod concipitur esse diuisum. Eodem pacto in alijs diuisionibus ponitur residuum, si quod fuerit, supra diuisorē, linea inter ipsos interiecta, vt fiat fractus numerus. Immo vero, quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, ponendus erit numerus diuidendus supra diuisorē, interiecta dicta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus; Vt si diuidendi sint 48. aurei in 60. milites, fiet hic numerus fractus, ita vt quilibet accipiat 48. partes ex 60. in quas vnus aureus intelligitur esse diuisus. Quid autem sit huiusmodi fractus numerus, & quo modo eius valor exploretur tam in monetis, quàm in ponderibus, aut mensuris, prout numerus diuidendus significat monetā, aut pondera, mēsurasve, dicemus in tractatione fractorū numerorū.

Quid agē dū sit cū numero ex diuisione relicto.

Quando numerus minor p maiorem proponit diuidendus, quid agendum.

$\frac{48}{60}$

Hoc exemplo plane percepto, nulla erit difficultas in diuidendo quouis numero per numerum quotcūq; figurarū. Totus enim labor in eo positus esse videtur, vt cognoscatur, quoties vltima figura diuisoris in numero suprascripto sumi debeat, vt videlicet figura hęc Quotientis in omnes figuras diuisoris multiplicata numerum procreet, qui ex suprapositio numero subduci possit,

In quo difficultas diuisionis cōsistat.

possit, numerusq; post hanc subtractionem relictus sit diuisore minor.

Quando in Quotiéte sumpta est figura nimis parua, vel magna, quid agendum.

Quod si quando contingat, (id quod non raro ijs euenire solet, qui parum in hoc negotio sunt exercitati.) figurã talem in Quotiente poni, vt ea in omnes figuras diuisoris multiplicata, productisq; ex numero supra diuisorem posito subductis, numerus relictus maior sit diuisore, vel certe non omnes producti subtrahi possint; si id quidem accidat in principio diuisionis, facile error corrigetur, si accipiatur in Quotiente figura maior, aut minor, prout res exiget; quia tunc notæ sunt figuræ numeri diuidendi supra diuisorem positæ, etiamsi deletæ sint, ita vt facile ab ijs numeri ex multiplicatione nouæ figuræ Quotientis in figuras diuisoris producti iterum possint subduci, præsertim si figuræ illæ numeri diuidendi deletæ scribantur ordine supra alias figuras deletas, & diuisor etiam sub diuisore deleto reponatur, ne figuræ deletæ negotium nobis facessant. Si vero in media operatione, vel prope finem id contingat, non tam facile errorem quis corriget, cum vix dignoscantur figuræ numeri diuidendi supra diuisorem in illa operatione positæ ab alijs figuris; quippe quæ iam deletæ sint, & cum alijs permixtæ, ac supra numerũ diuidendum positæ. Quare ne tunc cogamur diuisionem totã reiterare. (quod necessario faciendum esse omnes docent. Id quod permolestũ esset, præsertim si iam plures operationes diuisionis forent absolutæ.) excogitauimus huiusmodi remedium: Si figura Quotientis accepta sit nimis parua, hoc est, si numerus relictus post subtractionem numerorũ, qui ex multiplicatione illius figuræ in omnes figuras diuisoris producuntur, maior sit diuisore, subtrahemus diuisorem ex numero relicto toties, quoties possumus, donec numerus relinquatur minor diuisore, & quoties is subtractus erit, tot vnitates illi figuræ Quotientis addemus. Si vero figura Quotientis accepta sit nimis magna, id est, si post subtractionem aliquot numerorum, qui ex multiplicat one illius figuræ in ali-

quot figuras diuisoris producũtur, in aliquem numerũ productum incidamus, qui amplius subduci non possit, multiplicabimus figurã illam Quotientis in figuras diuisoris deletas, quarũ nimirum numeri producti subtracti iam sunt, & productos numeros, additis prius figuris numeri relicti, ordine supra illas figuras diuisoris scribemus, deletis prioribus figuris relictis. Hac enim ratione restituetur numerus, qui supra diuisorem positus erat ante illam operationem. Quocirca eũ iterum per diuisorẽ (renouatũ tamen, quoad figuras deletas, ne confusionem pariant) partiemur, accipiendo aliam figurã in Quotiente, quæ vna vnitate minor sit, quàm prior accepta. Et si hæc figura etiam nimis magna sit, restituemus eodem modo numerũ supra diuisorem collocatũ, & accipiemus aliã figurã minorem. Idq; toties faciemus, donec figuram inueniamus, quæ in omnes figuras diuisoris multiplicata numeros producat, qui & subtrahi possint, numerũq; relinquant diuisore minorem. Sed hæc omnia hoc proposito exemplo fient magis perspicua.

Sit diuidendus numerus 1623149. per 2899. Collocato diuisore sub numero diuidendo, ponamus quempiam parum exercitatum accepisse in Quotiente figuram 4. Vnde si dicamus, ex 4. in 2. fiunt 8. quibus detractis (eo modo, quem in proximo exẽplo explicauimus) ex 16. remanẽt 8. Deinde ex 4. in 8. fiunt 32. quibus subductis ex 82. remanẽt 50. Rursus ex ex 4. in 9. fiunt 36. quibus sublatis ex 503. remanent 467. Deniq; ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ex 4671. ablatis, relinquuntur 4635. qui numerus maior est diuisore. Nimis ergo parua est figura accepta 4. Quare deleto residuo hoc, vnà cum accepta figura 4. ponemus has figuras 16231. numeri diuidendi deletas supra alias figuras deletas,

```
   4
  863
  8075
1623149 (4
  2899

   6
  423
  8951
 18078
1623149 (4
  2899
  2899
```

deletas, & diuisorem deletũ renouatũ sub diuisore collocabimus, vt in proximo exemplo factũ esse vides. Qua ratione restitutus erit totus numerus diuidendus 1 6 2 3 1 4 9. vnà cũ diuisore, ac si nondum inchoata esset diuisio. Ponemus ergo figuram 5. vna vnitate maiorẽ, quàm 4. in Quotiente, vt in hoc altero exẽplo vides, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus detractis ex 16. remanent 6. Deleta igitur figura 2. in diuisore, & figura 1. in numero diuidendo, quæ decem significat respectu figuræ 6. dicemus rursum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus subtractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ex 223. subductis, remanent 178 Deniq; ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 1781. relinquuntur 1736. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

```
    1
    2 3
    678
    4236
    5631
   18078
   1623149 (45
    28999
    2899
     289
```

Sed vt exemplum etiã habeas, quando nimis magna figura accipitur, ponamus in Quotiente positá esse figuram 6. Hæc multiplicata in 2, facit 12. quibus ablatis ex 16. remanẽt 4. Deinde quia ex 6. in 8. fiũt 48. q̃ ex 42. detrahi nequeũt, fit vt figura accepta 6. sit nimis magna.

```
     4
   1623149 (6
    2899
```

Quamobrem deleto residuo hoc 4. vna cum accepta figura 6. scribemus figuras 1. & 6. numeri diuidendi deletas supra easdem, & figurã 2. in diuisore deletã infra eandem, ita vt totus numerus diuidendus ab initio propositus, vnà cũ diuisore restituatur, ac si diuisio nondũ esset inchoata, vt in hoc exẽplo apposito factum esse vides.

```
     6
    14
   1623149 (6
    2899
    2
```

Ponemus ergo, vt in sequenti exemplo apparet, figuram 5. vna vnitate minorem, quàm 6. in Quotiente, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 16. relinquuntur 6. Deleta igitur

tur figura 2. in diuisore, & figura 1. in numero diuidendo, quæ decem significat respectu figuræ 6 dicemus rursum. Ex 5. in 8. fiũt 40. quibus detractis ex 62. remanẽt 22. Item ex 5. in 9. fiũt 45. quibus demptis ex 223. remanent 178. Deniq; ex 5. in 9. fiunt 45. quibus subductis ex 1781. remanent 1736. Potuerunt ergo omnes numeri producti subduci, relictusq; est numerus diuisore minor. Quare recte accepta est in Quotiente figura 5. Ex his facile intelliges, quid agendũ sit, quando in principio diuisionis accepta est figura nimis parua, aut magna. Nunc attende, quo pacto error corrigatur, si in media operatione nimis magna aut parua figura in Quotiente accepta sit.

Promoueatur ergo diuisor in superiori exemplo, in quo nimis parua figura sumpta fuit in principio diuisionis, vt ibidem cernis. Fingamus autem, vltimã diuisoris figuram 2. in suprapositio numero 17. contineri sepies, atq; adeo in Quotiente post figuram 5. inuẽtam scribi 7. Quo posito dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus detractis ex 17. remanent 3. quæ supra 7. scribo, deleta prius figura 2. in diuisore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo. Deinde rursus dicemus. Ex 7. in 8. fiunt 56. quæ ex 33. auferi nequeunt. Est ergo figura 7 accepta nimis magna. Vt igitur restituatur numerus 17. à quo facta est subtractio, si forte is inter tot figuras deletas non internosceretur, multiplicanda est figura 7. accepta in figuram 2. in diuisore deletam, & producto addenda figura 3. supra dictam figurã diuisoris po-

ris posita. Vt quoniam ex 7. in 2. fiunt 14. si addantur 3. fiunt 17. Deleta igitur figura 3. scribemus supra eã numerum 7. & supra figuram 1. deletam ponemus 1. atq; ita restitutus erit numerus 17. à quo facta est subtractio, vt in hoc apposito exemplo apparet. Posita autem figura 2. sub figura 2. in diuisore deleta, vt etiam diuisor restituatur, vt in eodem hoc exemplo manifestũ est, concipiamus vltimam figuram diuisoris 2. contineri in 17. nõ septies, sed sexies, atq; adeo, deleta figura 7. in Quotiente, poni figuram 6. vt in exemplo hoc altero apparet.

1
17
233
678
4236
5631
18078
16231 49 (457
28999
2899
289
2

Quo posito dicemus. Ex 6. in 2. fiunt 12. quibus detractis ex 17. remanẽt 5. Deleta ergo figura 2. in diuisore, vnà cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo, scribemus 5. supra 7. & dicemus. Ex 6. in 8. fiunt 48. quibus demptis ex 53. relinquuntur 5 Deleta igitur figura 8. in diuisore, vnà cum figuris 3. & 5. in numero diuidendo, scribemus 5. supra 3. & rursus dicem⁹. Ex 6. in 9. fiũt 54. quibus subductis ex 56. remanent 2. Deleta ergo figura 9. in diuisore. vnà cum numero 56. in diuidendo numero, ponemus 2. supra 6. ac tandem dicemus. Ex 6. in 9. fiũt 54. quæ ex 24. subtrahi nequeunt. Nimis ergo magna etiam est figura 6. in Quotiente. Quare vt sciamus, quinam

15
175
233
6732
4236
5631
18075
16231 49 (4576
28999
2899
289
2

quinam numerus supra diuisorem collocatus fuerit, antequã hanc operationẽ inciperemus, multiplciabimus figuram dictã 6. in figuras diuisoris deletas, vt dictum est. Vt ex 6. in 9. fiunt 54. Additis 2. quæ supra figuram diuisoris 9. deletam posita sunt, fiunt 56. Deleta ergo figura 2. scribemus supra eam 6. & retinebimus 5. Deinde ex 6. in 8. fiunt 48. Additis 5. quæ seruauimus, fiũt 53. Scribemus ergo 3. supra 5. & retinebimus 5. Postremo ex 6. in 2. fiunt 12. Additis 5. quę reseruauimus, fiunt 17. quæ supra 15. collocabimus: atq; ita restitutus erit numerus, qui ante hanc operationem supra diuisorem positus erat. Restitutis autem tribus quoque figuris 2. 8. 9. in diuisore deletis, atq; deleta figura 6. in Quotiente, ponamus 5. loco illius, vt in hoc exẽplo vides. Quoniam vero ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 17. remanent 7. delebimus figurã 2. in diuisore, vnà cum figura 1. in diuidendo numero, quæ decem significat respectu figuræ 7. & dicemus. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus subductis ex 73. remanent 33. Deleta ergo figura diuisoris 8. vnà cum figura 7. in numero diuidendo, scribemus 3. supra eam, rursusq; dice-

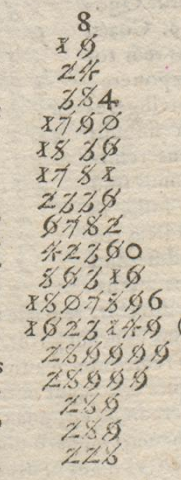
```
      17
      183
      178
      2336
       6782
      4236
      8631
    18078
    1623149  (4576
      28999
      2899
       289
       289
       2
```

```
       2
       38
      179
      1836
     17831
      2336
      9782
      4236
      8931
    180789
    1623149  (45765
     289999
     28999
      289
      289
      228
```

mus,

mus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 336. remanent 291. Deleta igitur figura diuisoris 9. vnà cum numero diuidendo 336. ponemus loco illius 291. & tandem dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus subtractis ex 2914. relinquuntur 2869. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

Promoto autem diuisore in proximũ locum, nimirum in vltimum, vt in præcedenti exemplo vides, cogitemus vltimam diuisoris figuram 2. in supraſcripto numero 28. contineri ſepties. Posita igitur figura 7. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo appoſito vides, dicemus. Ex 7. in 2. fiũt 14. quibus ablatis ex 28. remanẽt 14. Item ex 7. in 8. fiunt 56. quibus detractis ex 146. remanent 90. Item ex 7. in 9. fiũt 63. quibus ſubductis ex 909. relinquuntur 846. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus dẽptis ex 8469. remanent 8406. qui numerus maior eſt diuiſore; & proinde figura accepta 7. nimis parua eſt. Quare ſubtrahemus diuiſorem ex dicto reſiduo, quoties poſſumus, & tot vnitatibus maiorem figurã, quàm 7. ſcribemus in Quotiente, quoties diuiſor detractus fuerit. Ita aũt diuiſorem detrahemus in hoc ſequenti exemplo, reſtituto prius diuiſore. Ablatis 2. ex 8. remanent 6. itẽ demptis 8. ex 64. remanent 56. Item ſubductis 9. ex 560. remanent 551. Tandẽ detractis 9. ex 5516. remanẽt 5507. qui numerus adhuc maior eſt diuiſore. Detractis igiũ rurſus 2. ex 5. remanẽt 3. Dẽptis aũt 8. ex 35. remanẽt 27. Itẽ ſubductis 9. ex 270. remanẽt 261.



Denique ſubtractis 9. ex 2617. relinquuntur 2608. qui numer⁹ minor iã eſt diuiſore. Quia ergo bis detractus eſt diuiſor, ſcribemus in quotiẽte, deleta prius figura 7. numerũ 9. duabus videlicet vnitatibus maiorem, quàm 7. Itaq; totus nùmerus Quotiens eſt 559. Coacti autem ſumus rem tot exemplis exponere, vt clarius intelligeretur, quid in ſingulis operationibus relinquatur, quamuis ſolũ hoc vltimũ inſtar ſit omnium. Et licet tot verbis remediũ iſtud expoſuerimus, vſus tamen facile docebit, rem eſſe breuiorem ac faciliorẽ, quàm vt verbis exprimi poſſit.

2
3
8
66
87
108
246
334
17990
18360
17811
23360
67821
423608
863167
1807896
1623149 (4576579
289999
28999
2899
289
228
28

Hoc ergo remedium, ſi adhibeatur, quotieſcunq; in Quotiẽte figura maior, aut minor, quàm oportet, ſumpta fuerit, incredibile eſt, quàm expedite numer⁹ quilibet per quemcunq; numerũ diuidatur: quia hac ratione non opus eſt, vt ſimus nimis anxij, qualem figurã in quauis operatione ſcribere debeamus in Quotiente, cum illo remedio errorem, ſi quis cõmiſſus erit, ſine vllo fere labore corrigere poſſimus: ita vt hic modus diuidendi, quẽ hactenus præſcripſimus, ſit inter omnes, qui ab alijs auctoribus explicari ſolent, præſtantiſſim⁹, atq; expeditiſſimus, ac propterea ſumma diligentia, & cura adhibenda, vt in eo ſeſe exerceat is, qui in arte ſupputandi cupit eſſe excellens, & præſtans.

Nam

Nam quod alij multiplicent figuram in Quotiente positam in totum diuisorem, productumq; numerum sub diuisore collocent, (prima figura posita sub prima, & secunda sub secunda, &c.) vt eum ex numero supra diuisorem posito detrahant, res est certa illa quidem, ac facilis, sed quæ longiorem efficiat diuisionē, eumque, qui diuidit, non parū remoretur. Vt enim numerum hunc verbi gratia, 40689. per 1298. diuidant, postquam in prima operatione posuerunt in Quotiente figuram 3. multiplicant eam in diuisorem, primū quidem in figuram 8. dicendo. Ex 3. in 8. fiunt 24. scribunt ergo 4. sub 8. & seruant 2. Deinde ex 3. in 9. fiunt 27. Additis 2. quæ seruata sunt, fiunt 29. Positis ergo 9. sub 9. seruāt 2. &c. Post hæc, deleto diuisore, auferunt 4. ex 8. collocantq; residuum 4. supra 8. deletis prius figuris 4. & 8. &c. Promoto deinde diuisore, progrediuntur eodem modo. Quod tamen nos breuius absoluimus, cum numerum productum non scribamus sub diuisore. Habet tamen modus iste hanc cōmoditatem, quòd ex ipsa operatione facile intelligatur, num figura accepta in Quotiēte sit nimis magna, nec ne. Nam si productus numerus ex multiplicatione figuræ illius in diuisorem subtrahi possit ex numero supra diuisorem posito, numerumq; relinquat diuisore minorem, figura illa recte accepta est; sin minus, erratum esse, dubitandum non est.

Quo modo alij diuisionem absoluāt.

45
~~1~~~~7~~~~4~~1
~~4~~~~0~~~~6~~~~8~~~~9~~ (31
~~1~~~~2~~~~9~~~~8~~~~8~~
~~3~~~~8~~~~9~~~~4~~
~~1~~~~2~~~~9~~

Quòd etiam alij diuisorem prius per singulas figuras significatiuas multiplicent, quemlibet productum numerum prope figuram multiplicantem scribendo, vt inter hos productos quærant numerum positum supra diuisorem, eoq: inuento, vel certe, si nō inuenitur, proxime minore accepto, figuram multiplicantem illi ascriptam in Quotiente ponant, atq; numerū acceptū ex numero supra diuisorem posito subducant; res etiā facilis est, & cōmoda, sed nimis longa, ac molesta.

Alius modus absoluendi diuisionē.

Nam vt v.g. diuidăt hunc numerũ 97086. per 37. collocant diuiſorem iuxta 1. Eundem deinde duplicatũ iuxta 2. triplicatum vero iuxta 3. &c. Poſtea inter hos numeros inquirũt numerum 97. ſupra diuiſorem poſitum, quem quoniã non inueniunt, accipiunt 74. proxime minorẽ, & figurã 2. è regione eius collocatam ponunt in Quotiente, auferuntq; 74. ex 97. Promoto deinde diuiſore, quærunt inter eoſdem numeros hunc numerũ 230. poſitum ſupra diuiſorem; quo nõ inuento, accipiunt proxime minorẽ 222. collocantq; figuram 6. è regione eius poſitam in Quotiente, & deniq; numerũ eundem 222. ex 230. ſubducunt. Atq. hoc modo progredientes totã diuiſionem perficiunt. Sed quis non videt, diuiſionem hac ratione longius, quàm par eſt, produci, præſertim, ſi diuiſor quatuor, aut quinque, vel etiam pluribus figuris ſcribatur?

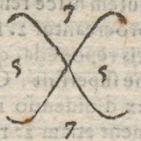
```
 23
97086 (26
377
 3
```

37	1
74	2
111	3
148	4
185	5
222	6
259	7
296	8
333	9

Prima probatio diuiſionis.

Reſtat, vt examen diuiſionis tradamus, quod triplex eſt. Primũ fit per abiectionem 9. hoc pacto. Reiectis 9. ex diuiſore, quoties fieri poteſt, vt in additione docuimus, ponatur reſiduũ in ſiniſtra parte crucis. Reiectis item 9. ex Quotiente, quoties fieri poteſt, ponatur reſiduũ in dextra parte crucis. Multiplicatis deinde hiſce duobus reſiduis inter ſe, & ex producto abiectis 9. quoties fieri poteſt, ponatur reſiduum hoc, ſi in diuiſione nihil remanſit, in ſuperiore parte crucis. Si autem in diuiſione reſiduum aliquod fuit, coniungendum eſt vltimũ illud reſiduum cum figuris huius reſidui diuiſionis, & ſemper abijcienda 9. iſtudq; reſiduum in ſuperiori parte crucis reponendũ. Poſtremo reiectis 9. ex numero diuidendo, quoties fieri poteſt, ponatur reſiduum in parte inferiore crucis. Si enim reſiduum hoc æquale fuerit illi reſiduo in ſuperiori parte crucis collocato, recte peracta eſt diuiſio, ſin minus, non recte. Itaque hæc diuiſio ita examinabitur. Reiectis 9.

ctis 9. ex diuiſore 23. remanent 5. Abiectis item 9. ex Quotiente 176. remanẽt quoque 5. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 5. & 5. inter ſe, gignuntur 25. ex quibus ſi abijciantur 9. remanent 7. quæ (quoniá nihil ex diuiſione relictum eſt) in ſuperiore parte crucis collocanda ſunt. Et quia reiectis 9. ex numero diuidendo 4048. relinquuntur etiam 7. recte peracta eſt diuiſio. Hæc autem alia diuiſio hac ratione examinabitur. Reiectis 9. ex diuiſore 236. remanẽt 2. Reiectis item 9 ex Quotiente 193. remanent 4. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 2. & 4. inter ſe, fiunt 8. ex quibus non poſſunt reijci 9. Hæc ergo 8. ſi nihil remanſiſſet in diuiſione, collocanda eſſent in ſuperiori parte crucis, ſed quoniá ſuperſunt 130. dicemus 8. & 3. faciunt 11. Reiectis 9 remanent 2. Addita 1. fiunt 3. in ſuperiori parte crucis collocanda. Et quoniá, reiectis 9. ex numero diuidendo 45678. remanent quoq; 3. recte facta eſt diuiſio.



Secunda probatio diuiſionis.

Secundum examen fit per abiectionem 7. vt in additione docuimus, dummodo ex reſiduo diuiſionis, ſi quod fuerit, eodem modo reijciantur 7. & reſiduum adijciatur ad illud reſiduum, quod in examine per abiectionem 9. addendum eſſe diximus reſiduo diuiſionis, atque ex aggregato reijciantur 7. Vt prior proximarum duarum diuiſionum ita examinabitur. Reiectis 7 ex diuiſore 23. remanent 2. Item abiectis 7. ex Quotiente 176. remanet 1. Multiplicatis

autem hisce residuis 2. & 1. inter se, procreantur 2. in superiori parte crucis reponēda, quia nihil ex diuisione superfuit. Quia vero reiectis 7. ex diuidendo numero 4048. remanent etiam 2. recte facta est diuisio.

Posterior vero diuisio hoc modo examinabitur. Reiectis 7. ex diuisore 236. remanent 5. Itē abiectis 7. ex Quotiente 193. supersunt 4. Multiplicatis aūt duobus hisce residuis 5. & 4. inter se, & ex producto 20. reiectis 7. relinquūtur 6. quæ, si nihil remansisset in diuisione, collocanda essent in parte crucis superiore: sed quoniam reliquus fuit numerus 130. ex quo si abijciantur 7. supersunt 4. quæ addita ad vltimum residuū seruatum 6. faciunt 10. à quibus si reijciantur 7. remanent 3. in superiori parte crucis collocanda. Tantundem autem remanet, si ex diuidendo numero 45678. abijciantur 7. Recte ergo diuisio facta est. Verum vtrumq; hoc examen fallax esse potest, ob rationem dictam in superioribus.

Tertia probatio diuisionis.

Tertiū examen, quod certum est, & cui nulla fallacia subesse potest, fit per multiplicationē. Si namq; diuisor, & Quotiens inter se multiplicentur, & numero producto addatur residuū diuisionis, si quod fuerit, procreabitur numerus diuidendus, si erratum in diuisione nō est. Vt posterior duarum proximarū diuisionum ita examinabitur. Multiplicato diuisore 236.

per Quotientem 193. antequā producti numeri addantur inter se, scribatur sub ipsis	236
numerus residuus diuisionis 130. prima nimirū figura sub primo loco, & secunda sub	193
secūdo, &c. Si enim numeros productos, &	708
hoc residuū in vnā summā colligamus, vt in	2124
Multiplicatione docuimus, producetur numerus 45678. qui diuisus fuit.	236
	130
	45678

Expedit interdū, cum, facta operatione

aliqui

aliqua in diuiſione, dubitas, num in re aliqua peccaueris, nec ne, vt diuiſionem vſq; ad eum locū perductam examines, ne fruſtra vlterius progrediaris, ſi forte iam error aliquis cōmiſſus ſit. Examinabis autē partem illam diuiſionis non aliter, ac alias diuiſiones, ſi omittas figuras numeri diuidendi, ſub quibus nondum diuiſor poſitus eſt. Vt in hac diuiſione, facta prima operatione, eā ita examinabis p abiectionē 9.

Expedit interdū, vt diuiſio nondum abſoluta examinetur.

	191
	2123
	6709456 (2
	2898

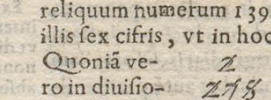
Reiectis 9. ex diuiſore 2898. remanet 0. Itē reiectis 9. ex Quotiente 2. remanēt 2. Multiplicatis aūt inter ſe hiſce reſiduis 0. & 2. pducitur 0. quæ cifra in ſuperiori parte crucis collocanda eſſet, niſi aliquid ex diuiſione ſupereſſet. Quare reiectis 9. ex reſiduo 913. remanent 4 in ſuprema crucis parte collocanda. Ac tantundem remanet, ſi reijciantur 9. ex numero 6709. hactenus diuiſo, omiſſis figuris 456. ſub quibus nondum poſitus eſt diuiſor.

Quòd ſi diuiſor in principio habuerit aliquot cifras, facilis erit diuiſio, ſi à numero diuidēdo remoueantur tot figuræ in principio, quot cifras habet diuiſor, & reliquus numerus per diuiſorem, demptis prius illis cifris, diuidatur: Sed reſiduū huius diuiſionis ſi quod erit, præponendū eſt verſus ſiniſtram figuris ablatis, vt fiat numerator fractionis; Denominator autem erit diuiſor totus vnà cum cifris. Et ſi in diuiſione nihil remanſit, erunt figuræ ablatæ pro numeratore fractionis ponēdę. Vt ſi numerus 1 3 9 4 6 0 0 7 6 9 3 diuidēdus ſit per 3 8 0 0 0 0 0 0. auferemus ex eo priores ſex figuras 007693. ad dexterā, quot nimirū cifrę sūt in principio diuiſoris; &

Facilitas diuiſionis, quando diuiſor habet in principio aliquot cifras.

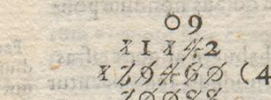
	2
	275
	4 8 6
	1 3 9 4 6 (367 $\frac{7693}{38000000}$
	3 8 8 8
	3 3

reliquum numerum 13946. per 38. diuidemus, omissis illis sex cifris, vt in hoc apposito exemplo factum est.



duæ enim illæ cifræ ad sinistrã nihil significant, ac propterea omittendæ sunt.

Rursus si idem numerus 13946007693. dividendus sit per 30080000. auferemus ex eo priores quinq; figuras 07693. quot videlicet cifræ sunt in principio diuisoris; & reliquũ numerum 13946. per 3008. partiemur, omissis quinq; illis cifris, vt factum est in hoc altero exemplo. Quia vero in diuisione reliquus est hic numerus 1092. si eũ versus sinistrã præponamus hisce figuris ablatis 07693. collocabimus supra diuisorem totũ hunc numerũ 1092076931



Hinc fit, si vltima figura diuisoris fuerit 1. & reliquę oẽs cifræ, Quotientẽ esse numerũ diuidendũ, sublatis prius ab eo tot figuris versus dexterã, quot cifræ sunt in diuisore; Numerator autem fractionis erit numerus sublatus. Vt si numerus 4780920345 diuidendus sit per 100000. erit Quotiens $47809\frac{20345}{100000}$. Sic etiam si numerus 9700203. diuidendus sit per 10000. Quotiens erit $9702\frac{03}{10000}$. atque ita de cæteris.

Facilis alia quãdo fit diuisio, quãdo diuidendus numerus habet alia quot cifras i principio.

Neq; vero hoc prętereundũ est, si numerus diuidendus habuerit aliquot cifras in principio, & antequã tota diuisio absoluatur, nulla figura significatiua in diuisione relicta fuerit, ponendas tunc esse post Quotientem

tem omnes cifras numeri diuidendi nondũ deletas. Vt si diuidẽdus ꝓponat numerus 1863000000. ꝓ 345. quoniam post secundam operationem nihil in diuisione remansit, si post inuentũ Quotientem 54. ponantur quinq; cifræ numeri diuidendi nondum deletæ, fiet totus Quotiens 5400000. absolutaq; erit diuisio.

112
338
1863000000 (5400000
3455
34

Ex his, quæ de additione, subtractione, multiplicatione, diuisioneq; numerorũ integrorum dicta sunt, omnia, quæ in vniuersa Arithmetica traduntur, tanquam ex elementis pendent: adeo vt omnia per ea conficiantur, nihilq; aliud in quæstionibus Arithmeticis soluendis præcipiendũ sit, quàm vt numeri vel addãtur, subtrahanturve, aut multiplicentur, diuidanturve. Itaque nisi quis in quatuor illis operationibus Arithmeticis probe sit exercitatus, frustra sese ad alia, quæ tradituri sumus, conferet.

Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuisio fundamẽta sũt omniũ, quæ in Arithmetica tradunt.

NVMERATIO FRACTORVM NVMERORVM

CAP. VI.

QVEMADMODVM in superioribus numeros integros numerauimus, pluresq; propositos in vnã summam collegimus, atq; vnum ab altero subduximus, duos item quoscũq; inter se multiplicauimus, & deniq; vnum per alterũ sumus partiti; ita in his, quæ sequuntur, eadem præstare oportet in numeris fractis, qui alio nomine Minutiæ, fractionesve dici solent.

Numerus fractus quid.

Est autē Fractio, Minutiave, siue numerus fractus, vna pars, vel plures partes alicuius totius in plures æquales partes diuisi. Vt si totum aliquod sectū sit in quinq; partes æquales, & quispiam ex illis sumpserit vnā, dicetur illa quinta pars numerus fractus. Sic etiā, si quis duas, tres, aut quatuor acceperit, dicentur duæ illæ, tres, vel quatuor quintæ partes numerus fractus.

Numerator, & Denominator fractionis quid.

Constat quælibet Minutia duobus numeris, qui in ea proferenda exprimuntur. Primus dicitur Numerator, quia numerat, quot partes cōtineat fractio proposita ex illis, in quas totum, cuius est fractio, diuisum est. Alter appellatur Denominator, quia denominat illas partes fractionis, hoc est, indicat, in quotnam partes totū intelligitur esse diuisum. Vt cum proponitur fractio continens tres quintas partes, Numerator est 3. quia significat, in illa fractione contineri tres partes totius; Denominator vero est 5. quia indicat, tres illas partes nō esse qualescunque: sed quintas. Scribitur aūt quælibet fractio hoc modo Denominator directō sub Numeratore, interiecta lineola quadā inter vtrumque numerū, collocatur. Vt tres quintę partes hoc modo scribuntur $\frac{3}{5}$. pronuntiaturq; vterq; numerus in recto, primo tamen loco Numerator. Vt dicta Minutia ita proferenda est; Tres quintæ. Hęc vero $\frac{2}{4}\ \frac{5}{8}$. ita; Vigintiquinq; quadragesimæoctauæ, significatque, totum aliquod diuisum esse in quadragintaocto partes æquales, & vigintiquinq; ex illis acceptas esse.

Fractio quis, quo pacto scribatur, & pronuntietur.

Fractiones vnde oriantur.

Oriuntur plerunq; numeri fracti ex residuo diuisionis integrorū numerorum. Quando enim aliquid in diuisione remanst, fit ex illo Numerator fractionis, cuius Denominator est diuisor, vt supra diximus. Vt cum diuiduntur 46. per 7. Quotiens est 6. supersunt autē 4. Fit ergo huiusmodi fractio $\frac{4}{7}$. ita vt totus Quotiens sit $6\frac{4}{7}$. Item quando minor numerus per maiorē proponit diuidēdus, gignitur fractio, cuius numerator est numerus diuidēdus, Denominator autē diuisor. Vt si diuidenda sint 4. per 7. fit fractio $\frac{4}{7}$ significatq. 4. diuisa esse per 7. ita vt Minutia hæc $\frac{4}{7}$. sit septima pars

huius

huius numeri 4. pars, inquâ, denominata à diuisore 7. Quemadmodû enim diuisis 12. per 3. inuenitur numerus 4. qui tertia pars est numeri diuisi 12. pars, inquâ, à diuisore denominata; ita etiam cum diuidimus 4 per 7. fit Quotiés $\frac{4}{7}$. qui septima pars est numeri diuisi 4. denominata a diuisore. Eadem ratione quælibet alia Minutia pars est Numeratoris a Denominatore denominata. Vt hæc Minutia $\frac{3}{4}$. est quarta pars ternarij. Nam si diuidantur 3. per 4. fit Quotiens $\frac{3}{4}$. Quare si sumatur Minutia $\frac{3}{4}$. quater, efficientur $\frac{12}{4}$. quæ ternario æquiualent, vt ex ijs, quæ paulo infra scribemus, manifestum erit. atque ita de alijs.

Fractio quis é pars Numeratoris à Denominatore denominata.

AESTIMATIO, SIVE VALOR *fractorum numerorum.* Cap. VII.

MINVTIAE cuiusuis æstimatio, siue valor augetur, cum, Numeratore manente eodem, denominator minuitur: Vel cum, Denominatore manente eodem, numerator augetur. Vt in his fractionibus $\frac{1}{6}.\frac{1}{5}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.$ vel in his $\frac{1}{7}.\frac{2}{7}.\frac{3}{7}.\frac{4}{7}.\frac{5}{7}.\frac{6}{7}.$ quælibet posterior priore maior est, vt patet; quia in prioribus, manente semper eodem numeratore, denominator minuitur; in posterioribus vero, eodem semper manente denominatore, numerator augetur.

Minutiarũ valor quo pacto augeatur.

Minutiæ vero cuiusuis æstimatio, siue valor minuitur, cum, Numeratore manente eodem, denominator augetur: vel cum, Denominatore manẽte eodẽ, Numerator minuit. Vt in his fractionibus $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{6}.$ vel in his $\frac{7}{8}.\frac{6}{8}.\frac{5}{8}.\frac{4}{8}.\frac{3}{8}.$ quælibet posterior priore minor est, vt constat; quoniam in prioribus, eodem semper numeratore manente, denominator augetur; in posterioribus vero, eodem semper manente denominatore, numerator minuitur.

Minutiarũ valor quo pacto minuatur.

Minutiæ deinde quæcunque, quarũ vnius numerator ad suum denominatorem eandem habet proportionem, quam reliquarũ numeratores habent ad suos denominatores, inter se æquales sunt. Vt hæ minutiæ $\frac{1}{2}.\frac{8}{16}.\frac{50}{100}.\frac{100}{200}.\frac{500}{1000}.$ omnes inter

Minutiæ, quarũ numeratores, ac denominatores eandẽ habẽt proportionẽ, æquales sunt

se æquales sunt; quia cuiusuis numerator ad suum denominatorem proportionē habet subduplam, id est, dimidia pars est ipsius. Sic etiā hæ $\frac{3}{4}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$. $\frac{9}{12}$ $\frac{0}{0}$. Nam cuiuslibet numerator ad suum denominatorē habet proportionē subsesquitertiā, hoc est, tres quartas partes ipsius continet. Quoniam vero, si duo numeri per eundē numerū multiplicentur, siue diuidantur, numeri producti eandem habent proportionē; quā duo illi numeri, fit, vt multiplicatis, aut diuisis Numeratore, & Denominatore per quemcunq; numerū, procreetur alia minutia eiusdem valoris, quamuis maiores, minoresve numeros habeat. Vt propositā hac minutia $\frac{6}{9}$. si vterq; eius numerus multiplicetur per 3. producetur minutia $\frac{18}{27}$. eiusdem valoris. Sic etiam, si vterq; numerus per 3. diuidatur, fiet minutia $\frac{2}{3}$. eiusdem valoris. Et licet hæc omnia demonstrari possint ex lib. 7. Eucl. contenti tamen erimus vno exemplo ex his duabus minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{9}$. desumpto, in quo veritas huius rei perspicue apparebit. Nam si accipiatur numerus 9. qui habet partem tertiam, ac nonā, erunt duæ eius tertiæ partes æquales. sex nonis partibus eiusdem. Cum enim tertia eius pars sit 3. erunt duæ tertiæ partes 6. Item cum nona eius pars sit 1. erunt quoq; sex nonæ partes 6. Aequales igitur sunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{9}$. & sic de alijs.

Quæ minutia vni integro æquiualeat.

Quando numerator alicuius minutiæ denominatori est æqualis, æquiualet minutia illa vni integro. Vt quælibet harū minutiarum $\frac{2}{2}$. $\frac{6}{6}$. $\frac{20}{20}$ $\frac{100}{100}$ $\frac{000}{000}$. constituit vnum integrū, hoc est, totū illud, quod in partes à denominatoribus denominatas diuisum est; propterea quòd in numeratore cōtinentur omnes partes, in quas integrum, seu totum diuisum est.

Quæ minutia minor sit vno integro.

Quando vero numerator minutiæ minor est denominatore, minor est illa minutia vno integro. quales sunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{90}{100}$. quia cuilibet tot partes à suo denominatore denominatæ desunt ad integrum constituendum, quot vnitatibus numerator à denominatore abest. Vt huic minutiæ $\frac{2}{3}$. deest $\frac{1}{3}$.

huic

huic vero $\frac{4}{7}$. desunt $\frac{3}{7}$. & huic $\frac{9}{10}$. deest $\frac{1}{10}$.

Quando deniq; numerator minutiæ denominatore maior est, maior est illa minutia vno integro. quales sunt hæ minutiæ $\frac{4}{3}$. $\frac{24}{7}$. $\frac{100}{4}$. quia in cuiuslibet numeratore plures partes continentur, quàm sint illæ, in quas totum, siue integrum diuisum est.

Quæ minutia maior sit vno integro.

Iam vero ꝓpositis duabus minutijs, vt cognoscas, vtra illarum maior sit, seruabis hanc regulam. Positis minutijs ordine, multiplica earum numeros in crucem, id est, numeratorem prioris in posterioris denominatorem, & posterioris numeratorem in denominatorem prioris, ponendo numeros productos supra numeratores. Nam cuius numerator maiorem numerum produxerit, ea minutia maior erit. Quòd si duo numeri producti fuerint æquales, æquales quoq; erunt

Vtra duarum minutiarũ maior sit quo pacto cognoscatur.

$$\frac{16.}{\frac{2}{3}} \times \frac{18.}{\frac{6}{8}} \qquad \frac{41.}{\frac{1}{2}} \times \frac{40.}{\frac{20}{41}} \qquad \frac{48.}{\frac{3}{4}} \times \frac{48.}{\frac{12}{16}}$$

minutiæ propositæ. Vt in primo horum trium exemplorum maior est minutia $\frac{6}{8}$. quàm $\frac{2}{3}$. quoniam numerus 18. productus ex 6. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris maior est, quàm numerus 16. ex 2. numeratore prioris minutiæ in 8. denominatorem posterioris productus. In secundo vero exemplo maior est minutia $\frac{1}{2}$. quàm $\frac{20}{41}$. In tertio deniq; æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}$. & $\frac{12}{16}$. vt ex multiplicationibus in crucem factis patet. Ratio huius regulæ est, quòd, cũ numeratores in crucẽ per denominatores multiplicati producunt æquales numeros, eadẽ proportio sit numeratorũ ad denominatores, vt constat ex prop. 19. lib. 7. Eucl. Quare vt supra diximus, æquales erunt minutiæ. Hinc fit, numeratorem illum, qui maiorem gignit numerũ, ad suum deuominatorem habere maiorẽ proportionẽ, ac proinde illam minutiã esse maiorem, vt supra dictum est. Sed vt exemplo etiã discas, maiorem esse minutiam $\frac{6}{8}$. quàm $\frac{2}{3}$. sumamus numerum 48. qui habet octauam partem, & tertiam.

Itaq;

Itaq; cum vna octaua pars huius numeri sit 6. erunt sex octauæ 36. Itē cū vna tertia pars eiusdē numeri sit 16. erunt duæ tertiæ 32. qui numerus maior est, quàm 36.

Valor minutiæ dati quo pacto in minore moneta, ponderè, vel mensura exploretur.

Quod si data sit minutia cuiuspiā monetæ, vel ponderis, aut mensuræ maioris, cupiasq; valorem eius explorare in minori moneta, vel pondere, aut mensura, hoc est, reducere eam ad minorē monetam, &c. facies id in hunc modū. Multiplica numeratorem per numerum, qui indicat, quoties moneta minor, ad quam reducenda est fractio, in maiori continetur, productūq; numerum per denominatorē diuide. Quotiens enim numerus valorem datæ minutiæ in minore illa moneta indicabit. Quod etiā de ponderibus, & mensuris intelige. Vt si data sit hæc minutia aureorū $\frac{4}{7}$. quæ significat, vt supra cap. 6. diximus, quatuor aureos in septē partes distributos, redigēdaq; sit ad Iulios, Baiochos, & Quatrinos, (vtemur enim in hac nostra Arithmetica exemplis monetæ Romanæ, in qua quatuor quatrini efficiunt vnum baiochū, & 10. baiochi vnū Iulium, ac 10. Iulij vnum aureū nummum.) multiplicabimus numeratorē 4. per 10. quoniā 10. Iulij vnum aureum conficiunt, vt 4 illos aureos in 7. partes diuisos redigamus ad 40. Iulios; numerūq; productum 40. per denominatorem 7. partiemur. Quotiens enim numerus dabit Iulios $5\frac{5}{7}$. Quod si hác minutiā Iuliorū $\frac{5}{7}$. quæ significat 5 Iulios in 7. partes diuisos, ad baiochos velimus redigere, multiplicabimus rursus numeratorē 5. per 10. quia 10 baiochi vnū etiam Iulium conficiunt, vt 5. illos Iulios in 7. partes distributos redigamus ad 50. baiochos; productūq; numerū 50 per denominatorē eundē 7. diuidemus. Dabit enim Quotiens numerus baiochos $7\frac{1}{7}$. Si tandē minutiā hanc baiochorū $\frac{1}{7}$. quæ significat vnū baiochū diuisū in 7. partes, ad quatrinos velimus reducere, multiplicabimus numeratorē 1. p 4. quòd 4. quatrini efficiant vnū baiochū, vt illū baiochū in 7. partes diuisum ad 4 quatrinos reducamus; numerumq; productū 4 per denominatorē 7. partiemur, & habebimus $\frac{4}{7}$. vnius quatrini, hoc est, paulo plus, quàm

Iulius, Baiochus, & Quatrinus apud Romanos quid significet.

quàm dimidium vnius quatrini. Itaq; $\frac{4}{7}$. vnius aurei continent Iulios 5. Baiochos 7. & Quatrinos $\frac{4}{7}$. Si vero $\frac{4}{7}$. vnius aurei redigere ſtatim velimus ad baiochos, multiplicabimus numeratorem 4. per 100. quoniam 100. baiochi vnum aureum conſtituunt, vt 4. illos aureos in 7. partes diſtributos redigamus ad 400. baiochos, numerumq; productum 400. per denominatorem 7. partiemur, efficiemusq; baiochos $57\frac{1}{7}$. Rurſus explorandum ſit, quot paſſus, pedes, palmos, digitosve contineant $\frac{5}{8}$. vnius milliarij Italici, quod conſtat 1000. paſſibus Geometricis, paſſus vero 5. pedibus, & pes 4. palmis, palmus autem 4. digitis, & digitus 4. granis hordei; multiplicabimus numeratorẽ 5. per 1000. vt 5. milliaria in 8. partes diſtributa redigãtur ad paſſus; productumq; numerum 5000. partiemur per denominatorem 8. efficiemuſque 750. paſſus. Sic etiã ſi $\frac{1}{1}\frac{0}{3}$. vnius paſſus reducere velimus ad pedes, multiplicabimus numeratorem 10. per 5. productumq; numerum 50. per denominatorem 13 partiemur, efficiemuſq; pedes $3\frac{1}{1}\frac{1}{3}$. Si rurſus hunc numeratorem 11. per 4. multiplicemus, numerumq; productum 44. per denominatorem 13. diuidamus, efficiemus palmos $3\frac{5}{1}\frac{}{3}$. Item ſi hunc numeratorẽ 5. per 4. multiplicemus, productumq; numerũ 20. per denominatorem 13. partiamur, inueniemus digitos $1\frac{7}{1}\frac{}{3}$. Tandem ſi numeratorem hunc 7. multiplicemus per 4. & numerum productum diuidamus per denominatorẽ 13 reperiemus grana hordei $2\frac{2}{1}\frac{}{3}$. taq; $\frac{1}{1}\frac{0}{3}$. vnius paſſus continent pedes 3. palmos 3. digitũ 1 & grana $2\frac{2}{1}\frac{}{3}$. Item reducenda ſit minutia hæc $\frac{3}{4}$. vnius libræ ad vncias. Quoniam 12 vnciæ vnam libram conſtituunt, multiplicabimus numeratorem 3. per 12. & productum numerum 36. per denominatorem 4. diuidemus, efficiemuſq; 9 vncias. Poſtremo inquirendũ ſit, quot Minuta cõtineãt $\frac{5}{6}$. vnius Gradus. Quia 60. Minuta efficiunt 1. Gradũ, multiplicabimus numeratore 5. per 60 & productũ numerum 300. per denominatorem 6. diuidemus, efficiemusq; Minuta 50

REDV-

REDVCTIO FRACTORVM numerorum ad minimos numeros, siue terminos. Cap. VIII.

ACCIDIT nonnũquã, vt minutia aliqua ita magnis numeris scribatur, vt commode minoribus possit exprimi, nõ mutato eius valore, ac pretio. Vt hæc minutia $\frac{3}{7}\frac{6}{2}$. æquialet huic $\frac{1}{2}$. minimis, vt videres, numeris expressæ. Operæ pretium est autem minutiam maioribus numeris scriptã ad minimos numeros, terminosve reuocare, multas ob causas. Primum quia facilius minutia quæuis minoribus numeris expressa intelligitur, quàm maioribus numeris scripta. Quis enim non facilius percipit $\frac{1}{2}$. quàm $\frac{3}{7}\frac{6}{2}$. aut $\frac{500}{1000}$. aut $\frac{8256}{1652}$. cũ tamẽ omnes idẽ prorsus significẽt? Deinde, qm facilior reddit operatio fractionũ, si ad minimos terminos sint reductæ, vt ex sequẽtibus fiet perspicuũ. Tertio, vt Mathematicorũ libri, qui minutias plerunq; minimis solent numeris notare, intelligantur. Si enim v. g. quis inueniat à quopiam scriptum, numerum hunc 2528. per 48. diuisum facere Quotientem $52\frac{2}{3}$. ipse vero hoc velit examinare, reperiet Quotientem $52\frac{3}{4}\frac{2}{8}$. qui ab illo differre videtur, cum tamen idem sit. Minutia enim hæc $\frac{3}{4}\frac{2}{8}$. ad minimos terminos reducta facit $\frac{2}{3}$. Quare antequam iudicet, se, aut scriptorem illũ errasse, quòd videat eius minutiam à sua differre, reducenda prius erit minutia à se inuenta, & maioribus terminis expressa, ad minimos numeros.

Cur minutiæ ad minimos terminos reducantur.

Hac autem arte Minutia quæuis maioribus scripta numeris ad minimos terminos reuocabitur. Diuidatur tam numerator, quàm denominator per maximam cõmunem vtriusq; mensuram, id est, per maximũ numerum, qui vtrumq; metiatur. Quotientes enim numeri dabunt minutiam illi æquialentem, & minimis numeris expressam. Nam cum, diuisis duobus numeris per vnum & eundẽ numerũ, Quotientes eandem habeant propor-

Minutiæ qua arte ad minimos numeros reducãtur.

proportionem, quam illi numeri, sint autem Quotientes numeri hoc modo inuenti omniũ minimi, quòd numeri minutiæ propositæ diuisi sint per maximũ numerum eos numerantẽ, ita vt per maiorẽ diuidi nequeãt, quin aliquid in diuisione relinquatur; perspicuũ est, minutiam inuentam minimis numeris esse expressam, ita vt minoribus exprimi nequeat. Exemplum sit in hac minutia proposita $\frac{3}{4}\frac{2}{8}$. cuius numeratorem, ac denominatorem metiuntur, & numerant omnes hi numeri 2. 4. 8. 16. & praterea nullus. Nam licet numerus 24. qui maior illis est, numeret denominatorem 48. tamen numeratorem 32. non metitur. Sic etiam quamuis numerus 32. qui maior adhuc est, metiatur numeratorẽ 32. nullo tamen modo denominatorem 48. numerat. Nos autem hoc loco intelligimus numerum maximũ numerantem, qui vtrumq; numerum minutiæ propositæ, tam numeratorem, quàm denominatorem, numeret. Si igitur tam numerator 32. quàm denominator 48. diuidatur per maximũ illorum numerorũ, nimirum per 16. reperiẽtur Quotientes 2. & 3. Quare minutia proposita $\frac{3}{4}\frac{2}{8}$. reducetur ad hanc æquiualentẽ $\frac{2}{3}$. & minimis numeris expressam. Si eosdẽ numeros propositæ minutiæ diuideres per aliũ numerũ eos numerantẽ, qui nõ sit maximus, redigeres quidẽ minutiã ad aliam æqualẽ minoribus terminis expressam, sed nõ minimis. Vt si ijdẽ numeri 32. & 48 diuidant per 8. inuenietur hæc minutia $\frac{4}{6}$. quæ minoribus adhuc numeris scribi põt hoc modo $\frac{2}{3}$. Eadẽ ratione hæc minutia $\frac{4}{6}\frac{5}{0}$. cuius numeratorẽ, & denominatorẽ metiuntur omnes hi numeri 3. 5. 15. redigetur ad hanc $\frac{3}{4}$. si nimirũ tam numerator, quàm denominator per 15. qui maximus numerus est illos numeras, diuidatur. atq; ita de reliquis.

Quando minutia non põt redigi ad minimos terminos.

Quod si alicuius minutiæ numeratorẽ, ac denominatorẽ nullus numerus, præter vnitatẽ, numeret, nõ poterit ad minores terminos redigi minutia illa, sed iam minimis numeris expressa erit. Vt hæ minutiæ $\frac{2}{3}\frac{0}{9}$. $\frac{2}{6}\frac{0}{3}$. $\frac{4}{5}\frac{7}{9}$. ad minores terminos reuocari nõ possunt. Quamuis enim hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem

primæ minutiæ numerent, nullus tamen eorũ denominatorem metitur. Item licet hi numeri 3. 13. metiantur denominatorẽ eiusdem minutiæ, neuter tamen eorum numeratorem metitur. Rursus quamuis hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem secundæ minutiæ, hi vero 3. 7. 9. 21. denominatorem metiantur, nullus tamẽ illorum vtrumq; numerat. Postremæ autem minutiæ numeros nullus numerus, præter vnitatem, numerat, cum sint (vt cum Arithmeticis loquamur) primi, quẽadmodum & illarum duarum numeri sunt inter se primi, quamuis nullus eorum primus sit. Dicitur enim numerus primus, quem vnitas sola metitur: Primi vero inter se numeri vocantur, quos sola vnitas, communis mensura, metitur.

Primus numerus & Primi inter se numeri quid.

Quoniã vero, vt minutia proposita ad minimos terminos reuocetur, necesse est, vt maxima mensura cõmunis numeratoris, ac denominatoris inueniat, (Per hanc enim maximam cõem mensurã vterq; numerus, tam numerator, quàm denominator diuidendus est, vt diximus.) tradi solet ad eam inueniendam hæc regula. Diuidatur denominator per numeratorem; Et si aliquid in diuisione relictum fuerit, diuidatur diuisor, id est, numerator per residuum diuisionis: Et si rursus aliquid remanserit, diuidatur vltimus hic diuisor, id est, residuum illud, per residuum huius vltimæ diuisionis, & sic semper vltimus diuisor per vltimũ residuum diuidatur, donec diuisor occurrat, qui nihil in diuisione relinquat. Hic namq; diuisor erit maxima communis mensura numeratoris, ac denominatoris minutiæ propositæ. Quòd si diuisor aliquis in huiusmodi diuisionibus relinquat vnitatem, nõ habebunt numerator & denominator minutiæ propositæ cõmunem mensuram, præter vnitatem, sed erunt numeri inter se primi. Vt si proposita sit minutia $\frac{3}{7}\frac{6}{2}$. inueniemus maximã mensuram cõmunem numeratoris, & denominatoris hoc modo. Diuidatur denominator 72. per numeratorem 36. qui diuisione peracta, nihil remanet. Est ergo maxima cõmunis mensura 36. per quam si diuidamus

Qua ratione maxima mẽsura communis numeratoris, ac denominatoris cuiusuis minutiæ reperiatur.

Quando numerator, & denominator datæ minutiæ non habeant cõmunem mensurã, præter vnitatem.

mus numeratorem, denominatoremq; datæ minutiæ $\frac{3}{7}\frac{6}{2}$. reducemus eam ad $\frac{1}{2}$. minimis terminis expressam. Rursus si data sit minutia $\frac{6}{9}\frac{0}{6}$. reperiemus maximam cõmunem mensuram numeratoris, & denominatoris hac ratione. Diuiso denominatore 96. per numeratorem 60. supersunt in diuisione 36. Diuiso rursus diuisore 60. per residuum 36. remanent in diuisione 24. Item diuiso hoc vltimo diuisore 36. per vltimum residuũ 24. relinquuntur 12. Diuiso deniq; vltimo diuisore 24. per vltimũ residuum 12. nihil supereſt. Est igitur maxima mensura cõmunis 12. per quam si diuidatur tam numerator, quàm denominator datæ minutiæ $\frac{6}{9}\frac{0}{6}$. constituetur hęc minutia $\frac{5}{8}$. minimis numeris expressa. Sed si proponatur hæc minutia $\frac{4}{1}\frac{8}{0}\frac{8}{3}$. non inuenietur vlla cõmunis mensura numeratoris, & denominatoris maior, quàm vnitas. Nam denominatore 103. diuiso per numeratorẽ 48. supersunt 7. Diuiso item diuisore 48. per residuũ 7. relinquuntur 6. Deniq; diuiso vltimo hoc diuisore 7. per vltimũ residuum 6. supereſt 1. Quare, vt supra dictũ est, numerator, & denominator minutiæ huius $\frac{4}{1}\frac{8}{0}\frac{8}{3}$. sunt numeri inter se primi. Eadem ratione quorumlibet duorum numerorũ maximam cõmunem mensurã inuenicmus, si maiorem per minorem diuidamus, & hunc diuisorẽ per residuũ diuisionis, si quod erit, & rursus hunc vltimum diuisorẽ per residuũ vltimę diuisionis, & sic deinceps, &c. Nam vltimus diuisor nihil relinquens in diuisione erit maxima cõmunis mensura datorũ numerorum: Si vero in diuisione aliqua relicta fuerit vnitas, erunt numeri dati inter se primi, nullamque habebunt mensuram communem, præter vnitatem.

Inuentio maximæ mensuræ quorumlibet duorum numerorũ.

Colligitur hæc regula inueniendi maximã mensuram cõmunem duorum numerorũ ex propos. 2. lib. 7. Eucl. Nam licet Euclides iubeat semper minorẽ numerũ de maiore subtrahere, tamen idẽ efficitur, & quidẽ multo breuius, per diuisionẽ maioris numeri per minorẽ, cũ diuisio sit compẽdiosa quædã subtractio, quẽadmodũ & multiplicatio est cõpendiosa quædã additio.

Vnde colligatur regula inueniẽdi maximã mẽsurã duorum numerorũ.

Alia ratio redigendarũ minutiarum ad minimos terminos

Alio modo reducetur minutia proposita ad minimos terminos, si tam numerator, quàm denominator per communem aliquam eorum mensuram notã, etiam si maxima non sit, diuidatur, vt inueniatur minutia sub minoribus numeris: Et rursus huius inuentæ minutiæ tam numerator, quàm denominator per aliam cõmunem eorum mensuram diuidatur; & sic deinceps, donec minutia inueniatur, cuius numerator, & denominator sint numeri inter se primi. Vt proposita minutia hac $\frac{3}{4}\frac{6}{8}$. si vterq; eius numerus diuidatur per 2. inuenietur hæc minutia $\frac{1}{2}\frac{3}{4}$. cuius vterque numerus si diuidatur per 3. reperietur hæc minutia $\frac{2}{3}$. cuius tandem numeri diuisi per 2. offerent hanc minutiam $\frac{1}{2}$. sub minimis terminis.

FRACTIONES FRACTORVM numerorum. Cap. IX.

Minutię minutiarum vnde oriantur.

NON solum res integra in quotuis partes æquales diuiditur, vt fractiones simplices, de quibus hic agimus, procreentur, verum etiam interdum ipsi fracti numeri intelliguntur in plures æquales partes distribui, ac si essent integra quædam res. Vnde fractiones fractionũ, fractorumve numerorum, siue Minutiæ minutiarum oriuntur. Vt quemadmodũ cum accipio quatuor partes alicuius totius in septem partes distributi, efficio hanc minutiã simplicem $\frac{4}{7}$. quæ significat quatuor septimas partes ipsius integri: ita etiam cum intelligo hanc fractionem simplicẽ $\frac{4}{7}$. diuisam esse in quinque partes æquales, accipioq; tres partes, facio minutiam minutiæ illius, nempe tres quintas partes quatuor septimarum alicuius integri: ita vt prior in recto efferatur, scribaturq; sicut minutię simplices, posterior vero pronũcietur in obliquo, noteturq; sine interiectione lineæ, vt ab alijs distinguatur. Vt prædicta minutia minutiæ ita scribenda est $\frac{3}{5}\frac{4}{7}$. pronuntiaturque sic. Tres quintæ quatuor septimarũ vnius integri. Hæc autem minutia minutiarũ $\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{6}\frac{1}{2}$. ita proferetur. Duę tertiæ triũ quartarum ex vna sextą parte vnius di

Minutia Minutiæ quid.

Minutiæ minutiarum quo modo pronũcientur, & scribãtur.

midij

midij alicuius integri: significat autem ex dimidio alicuius integri sumptam esse vnã sextam partem illius dimidij in sex æquales partes distributi; & ex hac sexta parte in quatuor partes æquales diuisa acceptas esse tres quartas; ac demum ex his tribus quartis diuisis in tres æquales partes sumptas esse duas tertias.

Minutiæ minutiarum quo pacto ad simplices minutias reuocentur.

Quando autẽ huiusmodi minutiæ minutiarũ occurrunt, reducendæ erunt ad simplicem minutiam, hoc artificio. Multiplica numeratores inter se, hoc est, primum in secundum, & hoc productum in tertium, atq; iterũ hoc productum in quartũ, & sic deinceps, si plures numeratores fuerint. Vltimus enim numerus productus dabit numeratorẽ simplicis minutiæ, quæ illi minutiæ minutiarũ æqualis erit. Denominator aũt erit numerus productus ex multiplicatione denominatorũ inter se, si multiplicentur, vt de numeratoribus dictũ est. Vt hæc minutia minutiæ $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. reducetur ad hãc simplicem fractionẽ $\frac{12}{35}$. quia multiplicatio numeratorũ facit 12. denominatorum aũt 35. ita vt tres quintæ quatuor septimarũ partium vnius integri contineãt $\frac{12}{35}$. eiusdem integri. Sic etiã hæc minutia minutiarũ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{2}$. reducetur ad hãc simplicẽ $\frac{6}{144}$. quæ ad minimos numeros reducta faciet $\frac{1}{24}$. vt ex antecedenti cap. constat. Deniq; hæc minutia minutiarũ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. ad hanc simplicẽ reuocabitur $\frac{18}{60}$. quæ reducta ad minimos numeros faciet $\frac{3}{10}$. Hoc autẽ ita esse, explicabimus hoc modo. Ponamus hanc vltimam minutiã minutiarũ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. esse desumptã ex vno aureo. Necesse est igitur, si regula præscripta vera est, eam cõtinere tres Iulios, qui sunt $\frac{3}{10}$. vnius aurei; cũ quilibet Iulius sit $\frac{1}{10}$. aurei vnius. Id quod quilibet facile perspiciet. Nam $\frac{3}{5}$. vnius aurei continent 6. Iulios, quòd duo Iulij sint $\frac{1}{5}$. aurei vnius: At $\frac{2}{3}$. sex Iuliorũ sunt 4. Iulij; & $\frac{3}{4}$. quatuor Iuliorum sunt 3. Iulij. Eadem ratione hanc minutiam minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{3}$. recte ad hanc $\frac{2}{45}$. esse reuocatam, in hoc numero 45. ostendemus. Nam $\frac{1}{3}$. huius numeri 45. continet 15. vnitates; ex quibus si sumantur $\frac{2}{5}$.

accipientur 6. vnitates; ex quibus deniq; si accipiat $\frac{1}{3}$. sumẽtur 2. vnitates, quæ faciũt $\frac{2}{4\ 5}$. dicti numeri 45. Non secus alia exempla explicari poterũt, & probari.

REDVCTIO FRACTORVM numerorum ad eandem denominationem, & ad integra, necnon integrorum ad fractionem quamcunque. Cap. X.

SAEPENVMERO reducendæ sunt fractiones diuersorum denominatorum ad alias, quæ illis æquales sint, singulæ singulis, habeantq; eundem denominatorem. Quod qua ratione fieri debeat, hoc cap. exponemus, primùm quidẽ, quando propositæ minutiæ non sunt plures, quàm duę, deinde vero, quãdo plures sunt.

Quo pacto duæ minutiæ ad eandẽ denominationẽ reducantur.

Propositis igitur duabus minutijs diuersos denominatores habentibus, si denominatores inter se multiplicentur, procreabitur cõmunis denominator, ad quẽ datæ minutiæ sunt reuocandæ: numerator vero cuiuslibet in crucẽ per denominatorẽ alterius multiplicatus producet numeratorẽ. Vt in appositio exẽplo. Ex denominatore 3. in denominatorẽ 4. fit denominator cõis 12. Itẽ ex 2. numeratore prioris minutię in 4. denominatorẽ posterioris fit numerator 8. At ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorẽ prioris fit numerator 9. Duæ ergo minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ad has duas $\frac{8}{1\ 2}$. $\frac{9}{1\ 2}$. reducuntur, quæ illis æquales sunt. Quòd enim $\frac{8}{1\ 2}$. æquiualeant $\frac{2}{3}$. constat ex propos. 17. & 18. lib. 7. Eucl. propterea quòd vterq; numerus huius multiplicatus per eundem numerũ 4. vel multiplicans eũdem numerum 4. nimirũ denominatorem posterioris minutiæ propositæ, produxit vtrumq; numerum illius. Hinc enim fit, numeratorẽ & denominatorem minutiæ $\frac{8}{1\ 2}$. eandem habere proportionem, quam habent numerator, & denominator minutiæ $\frac{2}{3}$. Quare æquales erunt minutiæ ipsæ, vt supra diximus. Eadem

ratione

ratione æquales erũt minutiæ $\frac{2}{1}$. $\frac{2}{2}$. & $\frac{3}{4}$. quia vterq; numerus huius multiplicatus per eundem numerũ 3. vel multiplicãs eundẽ numerũ 3. denominatorẽ videlicet prioris minutiæ datæ, produxit vtrũq; numerũ illius.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, ad eandem denominationẽ proponantur reducendæ, quærendus est primum numerus ab omnibus denominatoribus datarũ minutiarũ numeratus, ita vt omnes partes ab ipsis denominatas contineat. Ita autem numerũ à denominatoribus propositis, vel à quibuscunq; numeris datis numeratum inueniemus. Multiplicentur omnes denominatores inter se, ducendo primum in secundũ, & hunc numerũ productum in tertium, productumq; hunc numerum in quartum, & sic deinceps, donec omnes sint multiplicati. Productus enim vltimus numerus erit is, qui quæritur. Vt propositis hisce minutijs $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. si primus denominator 2. in secundum 3. multiplicetur, & productus numerus 6. in tertium 4. ducatur, productusque numerus 24. in quartum 5. multiplicetur, procreabitur numerus 120. quem dati denominatores, nempe numeri 2. 3. 4. 5. numerant.

Inuentio numeri à quotcũq; datis numeris numerati.

Quoniam vero numerus hac ratione inuentus interdum ita magnus est, vt eo minor dari posset, qui ab eisdem propositis denominatoribus numeretur, reperiemus minimum numerũ à quotcunq; numeris numeratum hoc modo. Primum inueniemus minimum numerum à prioribus duobus numeris propositis numeratum, hac ratione. Aut priores duo numeri habent cõmunem aliquã mensuram, præter vnitatẽ, aut non: (Quod quidem cognosces, si maior, per minorem diuidatur, & hic diuisor per residuum diuisionis, & sic deinceps, alterna quadam diuisione. Si enim diuisor occurrat, qui nihil relinquat, habebunt duo illi numeri cõmunem mensuram, ipseq; diuisor vltimus erit maxima eorum mensura: si vero occurrat diuisor, qui relinquat vnitatẽ, carebunt cõmuni mensura, eruntque primi inter se, vt supra cap. 8. docuimus.) Si duo illi numeri priores non habent cõmunem mensuram, erit

Inuentio minimi numeri à quotcũq; numeris numerati

numerus ex multiplicatione vnius in alterũ productus, minimus ab illis numeratus, ita vt minor dari nõ possit: Si vero habent mensurã cõmunem, inuenta maxima earũ mensura cõmuni, per ea, quæ cap. 8. scripsimus, diuidatur vterq; per eam, ponanturq; Quotientes sub ipsis numeris. Nam si Quotientem prioris numeri per posteriorem numerũ multiplices, vel Quotientem posterioris numeri per priorem numerũ, procreabis minimũ numerum à duobus illis numeratũ. Deinde eodem modo indagabimus minimum numerum numeratũ ab eo, quẽ hactenus inuenimus, & à tertio numero proposito, inquirendo videlicet, num tertius numerus propositus, & minimus ille à prioribus duobus numeratus, habeant mensurã cõmunem, necne, &c. Hic enim minimus inuentus, erit minimus à primis tribus numeris propositis numeratus. Rursus inuentũ hunc numerum cum quarto numero proposito conferemus, eodemq; modo minimũ numerum ab illis numeratũ inuestigabimus. Hic enim inuentus, erit minimus à quatuor datis numeris numeratus: atq; ita progrediar, donec nullus numerus supersit, cum quo inuentus vltimo loco comparari possit. Demonstratio huius regulæ colligitur ex propos. 36. & 38. lib. 7. Eucl. Sed explicemus negotium hoc in proximis quatuor minutijs datis, quarum denominatores sunt 2. 3. 4. 5. Primũ itaq; quia duo priores numeri 2. & 3. nõ habent aliã mensuram cõmunem, præter vnitatẽ, erit numerus 6. ex corũ multiplicatione productus, minimus à 2. & 3. numeratus. Deinde, quoniã inuentus hic numerus 6. & tertius numerus datus 4. habent maximam mensurã 2. diuidemus per eã tam 6. quàm 4. quotientesq; 6. 4. 3. & 2. sub ipsis statuemus, vt hic vides. Si 3. 2. namque multiplicemus 6. per 2. aut 4. per 3. procreabimus numerũ 12. qui minimus est, à tribus primis datis numeris 2. 3. 4. numeratũ. Tandẽ, quia hic numerus 12. inuentus, & quartus numerus datus 5. nõ habent cõem mensurã, præter vnitatẽ multiplicabimus 12. per 5. producemusq; numerũ 60. minimũ à quatuor deno-

denominatoribus 2. 3. 4. 5. numeratū. Sit rursū inuenie dus minimus numerus à 4. 6. 8. 12. 7. numeratus. Primū, quia primi duo 4. & 6. habent cōem maximā mensurā 2. partiemur per eā tā 4. quàm 6. quotientesque 2. & 3. sub ipsis statuemus; vt hic vides. Nā si multiplicemus 4 per 3. vel 6. per 2. efficiemus numerū 12. minimū ab illis duobus 4. & 6. numeratū. Deinde, quia numerus hic 12. inuētus, & tertius numerus datus 8. habēt maximā mensurā cōem 4. diuidemus per eā tam 12. quàm 8. & quotientes 3. & 2. sub ipsis collocabim⁹. Si enim multiplicemus 12 per 2. vel 8. per 3. gignemus numerū 24. minimū à primis tribus datis numeris 4. 6. 8. numeratū. Rursus, qm̄ hic numerus inuentus 24. & quartus ꝓpositus 12. habēt cōem maximā mensurā 12. diuidemus per eā tam 24. quàm 12. & quotientes 2. & 1. ponemus sub ipsis. Nā si multiplicemus 24 per 1. vel 12. per 2. ꝓducemus numerū 24. minimū à quatuor numeris datis 4. 6. 8. 12. numeratū. Postremo, quia hic numerus 24. inuentus, & vltimus numerus datus 7. nō habēt vllā mensuram cōem, præter vnitatē; multiplicabimus illos inter se, ꝓcreabimusq; numerū 168. minimū à datis numeris 4. 6. 8. 12. 7. numeratū. Quòd si quis per priorē regulā numerū inquireret ab eisdē datis numeris 4. 6. 8. 12. 7 numeratū, multiplicando nimirū ipsos inter se, reperiret hunc numerū 1512 8. qui multo maior est, quàm hic numerus minimus 168. à nobis inuentus.

4.	6.	
2.	3.	
12.	8.	
3.	2.	
24.	12.	
2.	1.	

Iam vero, inuēto numero ab omnibus denominatoribus minutiarū reducendarum numerato, siue is minimus sit, siue nō, reducemus minutias datas ad eandem denominationē hoc modo Denominator cōis est numerus ille inuētus: quē si per cuiuslibet minutiæ denominatorē diuidamus, & quotientē per numeratorē multiplicemus, ꝓducemus numeratorē, qui supra cōem denominatorem scribendus est. Vt in postremis quatuor minutijs $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. numerus a denominatoribus numeratus est 120. Hic ergo erit denominator cōis.

Quò pacto plures minutiæ, quàm duæ, ad eandē denominationē reducantur.

Quem

Quem si diuidamus per 2. denominatorem primæ minutiæ, efficiemus 60. Hunc numerum si multiplicemus per 1. numeratorem eiusdē minutiæ, producemus 60. numeratorem pro prima minutia. Rursus si eūdem numerum 120. partiamur per 3. denominatorem secundæ minutiæ, prodibit hic numerus 40. quem si multiplicemus per 2. numeratorem eiusdem minutiæ, efficiemus 80. numeratorē pro secunda minutia. atq; ita de cęteris. Itaq; datæ quatuor minutiæ reducentur ad has quatuor eiusdē denominationis $\frac{60}{120}\cdot\frac{80}{120}\cdot\frac{90}{120}\cdot\frac{24}{120}$. Quòd si accipiamus numerum 60. qui minimus est ab eisdem denominatoribus numeratus, pro denominatore, reducemus easdem minutias ad has $\frac{30}{60}\cdot\frac{40}{60}\cdot\frac{45}{60}\cdot\frac{12}{60}$.

Alia ratio reducēdi duas minutias ad eandē denominationē.

Eadem ratione redigi poterunt duæ etiam minutiæ ad eandem denominationem, licet eas non in crucem multiplicemus. Si enim quæratur numerus siue minimus, siue nō minimus, à denominatoribus numeratus, erit is cōmunis denominator: ex quo inuenientur numeratores, vt proxime docuimus. Vt propositis duabus minutijs $\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{12}$. Minimus numerus à denominatoribus numeratus est 12. quem si partiamur per 6. denominatorem prioris minutiæ, quotientemq; 2. per 5. numeratorem eiusdem minutiæ multiplicemus, efficiemus 10. pro numeratore prioris minutiæ. Et si rursum eundem numerum 12. diuidamus per 12. denominatorem posterioris minutiæ, & quotientem 1. multiplicemus per 7. numeratorem eiusdem minutiæ, reperiemus 7. pro numeratore posterioris minutiæ. Itaque datæ duæ minutiæ reducent ad has $\frac{10}{12}\cdot\frac{7}{12}$. Quòd si quis easdem velit reducere per primam regulam, inueniet has minutias $\frac{60}{72}\cdot\frac{42}{72}$. Ex quibus omnibus perspicuum est, quantum interfit inter minimum numerum a denominatoribus datarum minutiarum numeratum, & non minimum. Per minimum enim datæ minutiæ ad minimas minutias eiusdem denominationis reducuntur: quod per alias regulas non fit.

Vtilitas minimi numeri à denominatorib. datarum minutiarum numerati.

Contingit etiam aliquando, numeratorem minutiæ ex ad-

ex additione, multiplicatione, diuisioneque productæ maiorem esse denominatore, atq; adeo minutiam illam totum ipsum, atq; integrum superare. Quare ea ad integra erit reducenda hac ratione: Diuidatur numerator per denominatorem. Quotiens enim dabit integra, quibus minutia data æquiualet: Et si quid in diuisione superfuerit, illud erit numerator, cui idem denominator subscribendus est. Vt hæc minutia $\frac{6}{1}\frac{1}{0}\frac{0}{2}$. si numerator diuidatur per denominatorem, reducetur ad 5. integra. Hæc autem $\frac{1}{0}\frac{0}{7}\frac{0}{}$. redigetur ad $14\frac{2}{7}$: quia in diuisione numeratoris per denominatorem remanserunt 2. atq; ita minutia illa continet 14. integra, & insuper duas septimas partes vnius integri.

Quo modo minutia, cuius numerator maior est denominatore, ad integra redigatur.

Postremo non raro vsu venit, vt integra ad fractionem aliquã reducenda sint. quod hoc modo fiet. Multiplicentur integra proposita per denominatorem minutiæ, ad quã integra reducenda sunt. Productus enim numerus erit numerator, cui denominator datæ minutiæ est subscribendus. Vt si 7. integra ad quintas partes sint redigenda. Multiplicabimus 7. integra per 5. denominatorem propositæ minutiæ, productoq; numero 35. supponemus eundem denominatorẽ, vt fiat minutia $\frac{3}{5}\frac{5}{}$. æquialens 7. integris. Quòd si integris adhæreat minutia aliqua, addendus est numerator illius minutiæ ad numerũ productũ ex integris per denominatorẽ minutiæ multiplicatis, vt efficiat numerator. Vt si numerus hic $8\frac{2}{5}$. reducẽdus sit ad quintas, vt fiat vnica minutia; Multiplicabimus 8. per 5. denominatorem adhærentis minutiæ, ac numero producto 40. addemus 2. numeratorem eiusdem minutiæ, vt habeamus numeratorem 42. huius minutiæ $\frac{4}{5}\frac{2}{}$. quæ numero proposito $8\frac{2}{5}$. æquiualet.

Quo pacto integra ad minutiã reducãtur:

ADDITIO FRACTORVM numerorum. Cap. XI.

Additio minutiarum quo modo fiat.

Si minutiæ addendæ habeant eundem denominatorem, addendi sunt numeratores, & aggregato idem de-

denominator ſupponendus: Si vero diuerſos habeant denominatores, reducendæ ſunt prius ad eũdem denominatorem, & tunc eodem modo additio inſtituenda. Vt ſũma collecta ex hiſce tribus minutijs $\frac{2}{1\ 3}$. $\frac{4}{1\ 3}$. $\frac{6}{1\ 3}$. eſt hæc $\frac{1}{1}\ \frac{2}{3}$. quia habent eundem denominatorem, ſummaque ex numeratoribus collecta eſt 12. quemadmodũ ex 2. aureis. 4. aureis, & 6. aureis fiunt 12. aurei. Sic etiã ex hiſce minutijs $\frac{3}{1\ 0}$. $\frac{7}{1\ 0}$. colligitur hæc ſumma $\frac{1}{1}\ \frac{0}{0}$. quæ vni integro æquialet. Ita quoq; ex his minutijs $\frac{4}{7}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{5}{7}$. $\frac{6}{7}$. colligitur hæc ſumma $\frac{1}{7}\ \frac{8}{7}$. quæ reducta ad integra $2\frac{4}{7}$. At vero, vt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. in vnam ſummã colligantur, reducendæ prius ſunt ad eundẽ denominatorem, nimirũ ad has minutias $\frac{8}{1\ 2}$. $\frac{9}{1\ 2}$. ex quibus in vnam ſummam collectis fiunt $\frac{1}{1}\ \frac{7}{2}$. hoc eſt, $1\frac{5}{12}$. atq; hæc eſt ſumma duarũ minutiarũ propoſitarũ, quemadmodũ ex 2. aureis, & 3. Julijs. ſi 2 aurei reducantur ad 20. Julios, fiunt 23. Julij. Sic etiã minutiæ hæ $\frac{6}{7}$. $\frac{1}{1}\ \frac{2}{3}$. $\frac{1}{1}\ \frac{0}{1}$. $\frac{4}{5}$. vt in vnam ſummam colligantur, reducendæ prius ſunt ad has eiuſdem denominationis $\frac{4\ 2\ 9\ 0}{5\ 0\ 0\ 5}$. $\frac{4\ 6\ 2\ 0}{5\ 0\ 0\ 5}$. $\frac{4\ 5\ 5\ 0}{5\ 0\ 0\ 5}$. $\frac{4\ 0\ 0\ 4}{5\ 0\ 0\ 5}$. ex quibus fit hæc ſumma $\frac{1\ 7\ 4\ 6\ 4\ 5}{5\ 0\ 0\ 5}$. id eſt $3\frac{2\ 4\ 4\ 9}{5\ 0\ 0\ 5}$.

Quando integra adſunt, quid faciendum ſit.

Si integra adſint, addenda ſunt ea ſeorſum, & minutiæ etiã ſeorſum. Vt ex 8. & $\frac{3}{5}$. fiunt $8\frac{3}{5}$. Itẽ ex 8. & $4\frac{2}{3}$. fiunt $12\frac{2}{3}$. Itẽ ex $8\frac{2}{7}$. & $4\frac{6}{7}$. fiũt $12\frac{8}{7}$. hoc eſt, $13\frac{1}{7}$. Itẽ ex $8\frac{2}{3}$. & $4\frac{3}{4}$. fiunt $12\frac{1}{1}\ \frac{7}{2}$. id eſt, $13\frac{5}{12}$.

Praxis addendi minutias diuerſarũ denominationũ inter ſe.

Itaq; vt duæ minutiæ diuerſarum denominationũ in vnam colligantur ſummã, multiplicandæ eæ ſunt in crucem, & producti numeri addendi, vt fiat numerator minutiæ producendæ: Deinde denominatores inter ſe multiplicandi, vt eiuſdem minutiæ denominator habeatur: quia hac ratione reducuntur duæ illæ minutiæ ad eandẽ denominationẽ, vt ex præcedenti cap. patet, addunturq; numeratores inter ſe. Vt ſi hæ duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ſint addendæ, multiplicabimus tam 2. numeratorem prioris per 4. denominatorẽ poſterioris, quàm 3. numeratorem poſterioris per 3. denominatorem prioris, productoſq; numeros 8. & 9. in vnã ſummam

mam colligemus, vt fiat numerator 17. Deinde productum numerũ ex multiplicatione denominatorum inter se, nempe 12. faciemus denominatorẽ. Erit igitur minutia collecta $\frac{17}{12}$. Quod si sint plures minutiæ addendæ, quàm duæ, addemus primũ priores duas, vt diximus. Deinde minutiam collectam cum tertia minutia eodem modo: Et hanc productam cum quarta, & ita deinceps. Vt si addendæ sint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{7}$. colligemus primum ex prioribus duabus hanc $\frac{17}{12}$. Deinde ex hac, & tertia efficiemus eodem modo $\frac{137}{60}$. Denique ex hac, & quarta procreabimus $\frac{1237}{420}$. hoc est $2\frac{397}{420}$. summam omnium.

Probatio autem additionis fit per subtractionem. Subtracta enim altera minutiarũ addendarũ ex summa collecta, remanebit altera, si in additione erratũ nõ est. Quòd si plures sint addendæ minutiæ, subtracta vna earum ex summa, relinquetur minutia alijs simul sumptis æqualis. Vt quoniã hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{12}$. additæ faciunt $\frac{56}{48}$. id est, $1\frac{8}{48}$. si ex hac summa subtrahatur prior minutia, nempe $\frac{36}{48}$. vt in sequenti cap. docebimus, remanebit hæc minutia $\frac{20}{48}$. quæ æqualis est alteri minutiæ $\frac{5}{12}$. vt patet, si ad minimos terminos reuocetur, vel numeratores per denominatores in crucem multiplicentur. Producetur enim idem numerus tam ex 80. in 12. quàm ex 5. in 192.

Probatio additionis minutiarum.

SVBTRACTIO FRACTORVM numerorum. Cap. XII.

SI duæ minutiæ, quarũ minor ex maiore subducenda est, habeant eundẽ denominatorẽ, subtrahendus est numerator minutiæ subtrahendæ ex numeratore alterius, & residuo idẽ denominator subscribendus. Si vero diuersos habeant denominatores, reducendæ sunt prius ad eundẽ denominatorem, & tunc eodem modo instituenda subtractio. Vt si subtrahenda sit hæc minutia $\frac{5}{17}$. ex ista $\frac{8}{17}$. subtrahemus numeratorem 5. ex numeratore 8. & residuo 3. eundem denominatorem 17. supponemus, vt fiat minutia residua $\frac{3}{17}$. quem-

Subtractionis minutiarũ quo modo fiat.

quemadmodum si 5. aurei ex 8. aureis tollantur, tres manent 3. aurei. At vero si deducenda sit hæc minutia $\frac{2}{3}$. ex ista $\frac{8}{9}$. reducendæ erunt prius ambæ ad has $\frac{1}{2}\frac{8}{7}$. $\frac{2}{2}\frac{4}{7}$. eiusdem denominationis: Deinde numerator 18. ex numeratore 24. deducendus, residuoque 6. cõmunis denominator 27. supponendus, vt fiat minutia residua $\frac{6}{2}\frac{}{7}$. quemadmodũ, si 2. Iulij auferendi sint ex 8. aureis, reducendi sunt prius 8. aurei ad 80. Iulios, vt relinquantur 78. Iulij.

Quando integra adsunt, quid faciendum sit.

Si ab integris detrahenda est aliqua fractio, reducẽda est vna vnitas integrorum ad fractionem eiusdem denominatoris, ita vt fiat minutia, cuius numerator æqualis sit denominatori, à qua deducenda est minutia proposita. Vt si ex 10. auferẽda sit minutia $\frac{6}{1}\frac{}{1}$. faciemus ex vna vnitate $\frac{1}{1}\frac{}{1}$. ex quibus si auferam^{9} $\frac{6}{1}\frac{}{1}$. remanebũt $9\frac{5}{1}\frac{}{1}$. Integra enim carebunt illa vnitate, quæ ad minutiam reducta est.

Si vero ab integris detrahenda sint integra, & præterea fractio aliqua, reducenda quoq; est vna vnitas illorum integrorũ ad minutiam eiusdem denominationis: Deinde integra à reliquis integris, & fractio à fractione detrahenda. Vt si hic numerus $4\frac{3}{5}$. subducendus sit ex 10. faciemus ex vna vnitate huius numeri minutiã hanc $\frac{5}{5}$. à qua si demantur $\frac{3}{5}$. relinquentur $\frac{2}{5}$. & si 4. auferantur ex reliquis 9. supererunt 5. Itaque totus numerus residuus erit $5\frac{2}{5}$.

Deniq; si ab integris vnà cum fractis detrahẽda sint integra cum fractis, vel fractiones solæ; si quidem fractio detrahenda minor est, quàm illa, à qua fit subtractio, vel illi æqualis, detrahenda est fractio à fractione, & integra ab integris: si vero fractio subtrahenda maior est, quàm illa, à qua fit subtractio, reducenda est vna vnitas integrorũ, à quibus subtractio fieri debet, ad fractionem, quæ illis adhærent, &c. Vt si hic numerus $6\frac{3}{4}$. subducendus sit ex hoc $10\frac{1}{2}$. quoniã minutia $\frac{3}{4}$. maior est, quàm $\frac{1}{2}$. faciemus ex vna vnitate horum integrorũ 10. hanc minutiam $\frac{2}{2}$. quę cum $\frac{1}{2}$. faciet $\frac{3}{2}$. à qua si auferatur minutia $\frac{3}{4}$. relinquetur minutia

nutia $\frac{6}{8}$. Ablatis quoq; 6. ex 9. supersunt 3. Totus ergo numerus residuus est $3\frac{6}{8}$.

Quando plures sũt minutiæ, quid agẽdum.

Quòd si quando vna minutia a pluribus fuerit subtrahenda, vel plures ab vna, vel plures a pluribus, danda erit opera, vt prius plures illæ tã subtrahendę, quàm illæ, a quibus fieri debet subtractio, in vnam summam colligantur.

Praxis subtrahẽdi minutiã à minutia.

Itaq; vt fiat subtractio vnius minutiæ ab alia, cum denominatores sunt diuersi, multiplicandi sunt numeratores in crucem per denominatores, & vnum productum ab altero subducendum, residuoq; supponendus numerus ex multiplicatione denominatorum inter se productus: quia hac ratione duę minutiæ ꝓpositæ reducuntur ad eandem denominationem, &c. Vt si minutia $\frac{3}{4}$. ex minutia $\frac{7}{9}$. subtrahenda sit, multiplicabimus 3. numeratorem minutiæ subtrahendæ per 9. denominatorem alterius, & productum 27. detrahemus ex numero 28. producto ex multiplicatione 7. numeratoris minutiæ, à qua fit subtractio, per 4. denominatorem alterius, & reliquæ vnitati supponemus numerum 36. productum ex multiplicatione denominatorum inter se, vt fiat minutia relicta $\frac{1}{36}$.

Probatio subtra-- ctionismi nutiarũ.

Probatio autem subtractionis fit per additionem. Si namq; minutia relicta ad subtractam minutiam adjiciatur, componetur minutia illa, à qua subtractio facta est, si nõ est erratum. Vt qm̃ subtracta minutia hac $\frac{3}{4}$. ex ista $\frac{7}{9}$. relinquitur hæc minutia $\frac{1}{36}$. vt in proximo exemplo patuit; si addatur $\frac{1}{36}$. ad $\frac{3}{4}$. componetur hæc minutia $\frac{1}{1}\frac{1}{4}\frac{2}{4}$. quæ ad minimos terminos reducta erit hæc $\frac{7}{9}$. a qua nimirũ facta est subtractio. Sic etiam, quia subtracta hac minutia $\frac{2}{3}$. ex ista $\frac{6}{8}$. reliqua est minutia hæc $\frac{2}{24}$. si ea addatur ad $\frac{2}{3}$. fiet minutia $\frac{5}{7}\frac{4}{2}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{6}{8}$. a qua subtractio facta est, vt patet, si vtraque ad minimos terminos reuocetur. Semper enim reperietur minutia hæc $\frac{3}{4}$. Vel certe, quia numeratores earum in crucem per denominatores multiplicati producunt eundem numerum, nimirum 432.

MVLTI-

MVLTIPLICATIO FRACTORUM numerorum. Cap. XIII.

Multiplicatio minutiarum quo pacto fiat

SI numeratores inter se multiplicentur, producetur numerator summæ multiplicationis, ex denominatorum autem multiplicatione denominator eiusdem gignetur. Vt ex multiplicatione $\frac{2}{3}$. per $\frac{3}{4}$. fient $\frac{6}{12}$. hoc est $\frac{1}{2}$. Numeratores enim inter se multiplicati faciunt 6. denominatores vero 12.

Quando adsint integra, qd agendū.

Quando minutia per numerum integrum multiplicanda est, supponenda est numero integro vnitas, vt fiat ex ipso quasi fractio quædam denominata ab vnitate integra. Deinde regula, quam proxime præscripsimus, seruanda. Vt si multiplicanda sint 8. per $\frac{4}{5}$. scribemus 1. sub 8. vt in appositio exemplo vides. Igitur si multiplicentur inter se tam numeratores, quàm denominatores, producetur hæc minutia $\frac{32}{5}$. quæ æquiualet huic numero $6\frac{2}{5}$.

Quando autem numero integro adhæret minutia, reducendus erit numerus integer ad illam minutiā, vt fiat vna fractio ex ipso, & minutia adiuncta. Vt si multiplicāda sint 8. per $3\frac{5}{6}$. faciemus ex $3\frac{5}{6}$. minutiā $\frac{23}{6}$. & numero 8. supponemus 1. vt hic factū esse vides. Si igit tā numeratores inter se, quàm denominatores multiplicentur, procreabitur hæc minutia $\frac{184}{6}$. huic numero $30\frac{4}{6}$. equiualens. Item si multiplicanda sint $4\frac{2}{3}$. per $\frac{1}{2}$. reducemus $4\frac{2}{3}$. ad $\frac{14}{3}$. & $\frac{1}{2}$. $\frac{14}{3}$. vt hic vides. Producetur autem ex multiplicatione minutia hæc $\frac{14}{6}$. id est, $2\frac{2}{6}$. Eodem pacto si multiplicanda sint $4\frac{1}{2}$. per $3\frac{1}{5}$. reducemus priorem numerum ad $\frac{9}{2}$. posteriorem vero ad $\frac{16}{5}$. vt in appositio exemplo vides. Multiplicatis autem tam numeratoribus inter se, quàm denominatoribus, producetur hæc minutia $\frac{144}{10}$. hoc est $14\frac{4}{10}$.

Probatio multiplicationis minutiarum.

Examinatur autem multiplicatio per diuisionē. Si enim

enim minutia producta diuidatur per alteram minutiarum multiplicantiũ, prodibit necessario in Quotiente altera minutia multiplicans. Vt si ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. fiunt $\frac{4}{1\ 4}$. necesse est, vt diuisis $\frac{4}{1\ 4}$. per $\frac{1}{2}$. producatur $\frac{4}{7}$. diuisis aũt eisdẽ $\frac{4}{1\ 4}$. per $\frac{4}{7}$. gignatur $\frac{1}{2}$. Perspicuũ aũt erit ex sequẽti cap. diuisis $\frac{4}{1\ 4}$. per $\frac{1}{2}$. produci $\frac{8}{1\ 4}$. quæ minutia huic $\frac{4}{7}$. æquiualet; diuisis aũt eisdẽ $\frac{4}{1\ 4}$. per $\frac{4}{7}$. produci $\frac{28}{56}$. hoc est, $\frac{1}{2}$.

Cur in multiplicatione minutiarum producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicãte.

Nemini autem mirũ videri debet, multiplicationẽ minutiarum producere semper minutiã minorẽ vtraq; minutia multiplicante, vt in vltimo exemplo, quod in examine tradidimus, patet, vbi ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. producta est minutia $\frac{4}{1\ 4}$. id est, $\frac{2}{7}$. quæ minor est vtraq; minutia multiplicante. Si enim natura multiplicationis recte consideretur, facile quiuis perspiciet, hoc necessario ita debere fieri. Cum enim vnus numerus per alium multiplicari, seu duci dicatur, cum alter ipsorũ toties augetur, quoties in altero continetur vnitas, vt cap. 4. diximus, perspicuũ est, neutrã minutiarũ multiplicantiũ posse totam sumi in producto, sed fragmenta duntaxat ipsius, qualia nimirũ fragmenta vnitatis altera minutia multiplicans refert, quandoquidẽ hæc minutia minor est vnitate. Hinc enim fit, vt quemadmodũ minutia multiplicans non continet integrã vnitatem, ita quoq; numerus productus non contineat totam alterã minutiã multiplicantem. Vt in proximo exemplo, quemadmodũ $\frac{1}{2}$. est dimidiata pars vnitatis, ita etiã numerus productus $\frac{4}{1\ 4}$. id est, $\frac{2}{7}$. est pars dimidiata huius minutiæ $\frac{4}{7}$. vt definitio multiplicationis postulat. Recte ergo ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. producitur minutia hæc $\frac{4}{7}$. Sic etiam ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$. producitur minutia hæc $\frac{9}{3}$. id est, numerus hic 3. Nã quemadmodũ $\frac{1}{3}$. est tertia pars vnitatis, ita numerus 3. tertia pars est numeri 9. Vel quemadmodum numerus productus 3. continet $\frac{1}{3}$. nouies, ita numerus 9. continet nouem vnitates. Non est igitur mirum, quòd minor numerus producatur vtraq; minutia multiplicante. Si tamen integra per integra

cum fractione, vel integra cũ fractione per integra cũ fractione multiplicentur, semper producetur maior numerus vtroq; numero multiplicante, propter numerũ integrum multiplicantem integra. Vt ex multiplicatione 4. per $3\frac{1}{4}$. fit numerus $\frac{5}{4}\frac{2}{}$. hoc est, 13. quia numerus 4 ter sumptus facit 12. & quarta eius pars est 1. Vel quia numerus 3. sumptus quater facit 12. & minutia $\frac{1}{4}$. sumpta quater facit $\frac{4}{4}$. id est, 1.

DIVISIO FRACTORVM numerorum. Cap. XIIII.

Diuisio minutiarum quo modo fiat

FACILITATIS gratia Diuisionis regula ad regulam multiplicationis reduci poterit hoc modo. Cõmutentur termini diuisoris, id est, numerator scribatur infra lineolam, & denominator supra eandem. Hoc enim facto, si regula multiplicationis cap. præcedente tradita seruetur, id est, si tã numeratores, quàm denominatores inter se multiplicentur, producetur numerus Quotiens. Vt si diuidenda sit minutia $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{6}$. stabit exemplum, vt hic vides. Multiplicatis igitur tam numeratoribus, quàm $\frac{1}{2}$. $\frac{6}{1}$. denominatoribus inter se, producetur minutia hæc $\frac{6}{2}$. hoc est, numerus 3. pro Quotiente. Sic etiam si diuidenda sit minutia $\frac{2}{5}$. per $\frac{3}{7}$. stabit exemplum, vt hic apparet. Quotiens erit $\frac{1}{1}\frac{4}{5}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{7}{3}$.

Quando adsunt integra, qd agendũ.

Quando numerus integer per minutiam, vel per numerum integrum cum fractione diuidendus est; Vel minutia per numerum integrũ, vel per numerum integrum cum fractione; Vel deniq; numerus integer cum fractione per minutiam, aut per numerum integrũ, aut per numerum integrũ cum fractione, supponenda est vnitas numero integro, si ei non adhæreat minutia, si vero minutia ei adiuncta sit, reducendus est numerus integer ad minutiam adiunctam, vt fiat vna minutia, quemadmodũ cap. præcedente diximus. Deinde regula præscripta seruanda. Vt in sequentibus diuisionibus stabunt exempla, vnà cum Quotientibus, vt hic vides.

6. per

	ita ſtabunt exempla.	Quotientes.
6 per $\frac{2}{3}$.	$\frac{6}{1}$. $\frac{3}{2}$.	$\frac{18}{2}$. vel 9.
6. per $4\frac{2}{3}$.	$\frac{6}{1}$. $\frac{3}{14}$.	$\frac{18}{14}$. vel $1\frac{2}{7}$
$\frac{2}{3}$. per 6.	$\frac{2}{3}$. $\frac{1}{6}$.	$\frac{2}{18}$. vel $\frac{1}{9}$.
$\frac{2}{3}$. per $6\frac{1}{2}$.	$\frac{2}{3}$. $\frac{2}{13}$.	$\frac{4}{39}$.
$6\frac{1}{2}$. per $\frac{3}{4}$.	$\frac{13}{2}$. $\frac{4}{3}$.	$\frac{52}{6}$. vel $8\frac{2}{3}$.
$6\frac{1}{2}$. per $3\frac{2}{5}$.	$\frac{13}{2}$. $\frac{5}{17}$.	$\frac{65}{34}$. vel $1\frac{31}{34}$.
$6\frac{1}{2}$. per $3\frac{4}{5}$.	$\frac{13}{2}$. $\frac{5}{19}$.	$\frac{65}{38}$. vel $1\frac{27}{38}$.

Alij tradunt hanc regulã diuiſionis minutiarũ. Numerator minutiæ diuidendæ (poſita vnitate ſub integris, ſi adſint, & reductis integris ad minutiã adhærentem, ſi qua adhæreat) multiplicetur per denominatorẽ minutiæ diuidentis; procreabitur enim hac ratione numerator Quotientis minutiæ. Denominator aũt producetur ex multiplicatione denominatoris minutiæ diuidendæ per numeratorem diuidentis minutiæ. Quod quidem idem eſt, ac ſi termini diuiſoris cõmutentur, & regula multiplicationis ſeruetur, vt perſpicuũ eſt. Quoniã vero ambigere quiſpiã poſſet aliquãdo, an numerator minutiæ diuidendæ, an vero diuidentis producat numeratorem minutiæ Quotientis, (facile enim hæc res ex animo excidere põt,) magis mihi placet prior regula à nobis tradita, qua diuiſionis regula ad regulam multiplicationis reuocatur. Qua ratione alij diuiſionẽ minutiarum doceant.

Examen aũt diuiſionis fit per multiplicationẽ. Nam ſi Quotiens minutia multiplicetur per minutiã diuidentem, producetur minutia diuiſa neceſſario. Vt quia ex diuiſione $\frac{4}{5}$. per $\frac{1}{2}$. producitur minutia $\frac{8}{5}$. hoc eſt, $1\frac{3}{5}$. fit, vt ex multiplicatione $1\frac{3}{5}$. per $\frac{1}{2}$. pducatur minutia diuiſa $\frac{4}{5}$. Producitur autem ex hac multiplicatione minutia $\frac{8}{10}$. quæ huic $\frac{4}{5}$. æqualis eſt, vt patet. Probatio diuiſionis minutiarum.

Cur aliquãdo in diuisione minutiarũ Quotiens maior sit minutia diuisa.

Quod autem in diuisione minutiarum plerunq; producatur Quotiens maior minutia diuisa, vt in diuisione $\frac{6}{7}$. per $\frac{2}{7}$. patet, in qua Quotiens est $\frac{4}{1}\frac{2}{4}$. hoc est, 3. mirari nemo debet. Nam cũ numerus Quotiens indicet, quoties diuisor in diuidendo numero cõtineatur, manifestum est, quando minutia diuidens minor est minutia diuidenda, illã in hac sæpius quàm semel contineri, atq; adeo Quotientem maiorem esse, quàm 1. etiamsi minutia diuidenda minor sit, quàm 1. Veluti in proximo exemplo, quoniã minutia diuidens $\frac{3}{7}$. in minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. continetur ter, fit, vt Quotiens sit 3. indicans illam in hac ter contineri. Idem etiã ex definitione Diuisionis perspicue apparet. Cum enim Diuisio sit inuentio numeri, qui toties vnitatẽ contineat, quoties numerus diuidendus diuisorem continet, vt cap. 5. diximus; perspicuum est, in proxima diuisione Quotientem debere esse 3. qui vnitatẽ ter contineat, quoties nimirũ minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. minutiã diuidentem $\frac{2}{7}$. continet. Mirũ ergo non est, in diuisione minutiarum semper produci Quotientem maiorem numero diuidendo, cũ diuisor minor est, quàm 1. vt in dato exemplo patuit, idemq; in diuisione 6. per $\frac{1}{2}$. apparet, vbi Quotiens est 12. Nam minutia diuidẽs $\frac{1}{2}$. duodecies in numero diuidendo 6. continetur. Quando tamen diuisor maior est, quàm 1. Quotiens semper minor erit numero diuidendo, propterea quòd tunc diuisor non toties possit contineri in numero diuidendo, quoties vnitas continetur. Vt diuisis $\frac{3}{4}$. per $\frac{8}{9}$. Quotiens est $\frac{2}{3}\frac{7}{2}$. Item diuisis $6\frac{1}{2}$. per $1\frac{2}{3}$. Quotiens est $\frac{3}{1}\frac{9}{0}$. id est, $3\frac{9}{10}$. vbi vides, Quotientem semper minorem esse numero diuiso.

INSITIO FRACTORVM numerorum. Cap. XV.

Insitio minutiarũ quid.

SOLENT Arithmetici nõnulli vti operatione quadam minutiarũ, quam insitionem vocant. Est autem Insitio minutiarũ nihil aliud, quàm propositis duabus,

aut

aut pluribus minutijs, quarum quælibet sit fractio vel vnius duntaxat particulæ omniũ sequentiũ, vel fractio integrarũ omniũ fractionũ sequentium, additio huiusmodi fractionum ad vltimam minutiam, respectu cuius omnes illæ fractiones fractionũ sumuntur. Vt propositis hisce duabus minutijs, $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior sit fractio vel vnius tantum particulæ posterioris, vel fractio totius posterioris, hoc est, ita vt prior cõtineat vel duas partes tertias vnius quartæ partis, vel duas tertias triũ quartarum: operatio, qua $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. triũ quartarum, ad $\frac{3}{4}$. adduntur, appellatur Insitio. Eodẽ modo, propositis quatuor hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita vt quælibet sit fractio vel vnius particulæ omnium sequentium, vel fractio totarũ omnium sequentium, hoc est, ita vt vel prima contineat duas tertias vnius quartæ vnius quintæ vnius septimæ, & secunda significet tres quartas vnius quintæ vnius septimæ, & tertia comprehendat duas quintas vnius septimæ; vel prima contineat duas tertias trium quartarũ duarum quintarũ quatuor septimarũ, & secunda comprehẽdat tres quartas duarum quintarũ quatuor septimarum, & tertia significet duas quintas quatuor septimarũ: operatio, qua omnes hæ fractiones fractionũ, nimirum $\frac{2}{3}$. vnius quartæ vnius quintę vnius septimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ vnius septimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius septimæ; vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor septimarum, & $\frac{3}{4}$. duarum quintarum quatuor septimarũ, & $\frac{2}{5}$. quatuor septimarum, ad $\frac{4}{7}$. adduntur, Insitio dicitur. & sic de alijs.

Est ergo Insitio duplex: vna, quando quælibet minutia est fractio vnius duntaxat particulæ omnium sequentiũ minutiarũ; altera, qñ quælibet minutia est fractio integrarũ omniũ minutiarũ sequentiũ, vt in exemplis patuit. Arithmetici omnes de prima solum insitione locuti sunt, nulla prorsus facta mentione insitionis secundæ, eam fortassis ob causam quòd prima vtilis sit ad diuidendũ quemcunq; numerum integrũ vnà cum fractione aliqua per numerũ integrum, vt paulo post

Insitio duplex est.

Insitio Propter quid excogitata sit.

dicemus. Quoniam vero secunda insitio egregiũ quoque vsum habet in progressionibus Geometricis, vt, Deo iuuante, in maiore nostro Arithmetices opere declarabimus; vtriusq; Insitionis regulam trademus. Magnum autem discrimen est inter insitionem, & operationem illam, qua cap. 9. minutias minutiarum ad simplicem minutiam reducere docuimus. Ibi enim propositis v. g. duabus hisce minutijs, $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior sit fractio posterioris, solum inquirebamus, quamnam minutiam simplicem constituerent duæ tertiæ trium quartarum, inueniebamusq; constituere $\frac{6}{1\ 2}$. id est, $\frac{1}{2}$. vnius integri; hic vero indagabimus, quænam minutia efficiatur, si addãtur $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. triũ quartarum ad $\frac{3}{4}$. efficieturque priori modo minutia hæc $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}$. posteriori vero hæc $\frac{1}{1}\ \frac{5}{2}$. hoc est, $1\frac{1}{4}$. quarũ vtraq; longe abest à $\frac{1}{2}$. Eodem modo discrimen apparebit, si fuerint plures minutiæ, quàm duæ.

Differentia inter insitionẽ, & reductionẽ minutiarũ minutiarum.

Itaq; si proponantur duæ minutiæ, quarum prior sit fractio vnius tantum particulæ posterioris, ita fiet insitio. Posterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris multiplicetur, productoq; numero numerator eiusdem prioris adijciatur. Hoc enim aggregatum erit numerator minutiæ producendæ; denominator vero gignetur ex multiplicatione denominatorũ inter se. Vt datis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorẽ prioris fiũt 9. Addito numeratore 2. eiusdẽ prioris minutiæ, fiunt 11. pro numeratore minutiæ producendæ: Denominator autem erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorũ inter se productus: ita vt hæc minutia $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}$. cõponatur ex additione $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Quod facile probari potest ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, secundum reductionem minutiarum minutiarum, faciunt $\frac{2}{1}\ \frac{2}{2}$. si addantur $\frac{2}{1}\ \frac{2}{2}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{4}{4}\ \frac{4}{8}$. hoc est, $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}$. vt prius.

Prima regula insitionis duarũ minutiarũ.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, dentur, ita vt quælibet sit fractio vnius tantum particulæ omniũ sequentium,

Quo mõdo plures minutiæ, q̃ duæ, inferantur per primã regulam.

quentium, insitio hoc modo fiet. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoq; numero addatur numerator eiusdē penultimæ; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoq; numero addatur eiusdē numerator; Post hæc aggregatū hoc multiplicetur per denominatorem proxime antecedentis minutiæ, productoq; numero eiusdem numerator adijciatur; & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimū semper multiplicandū erit per denominatorē præcedentis minutiæ, eiusdemq; numerator producto adijciendum, donec nulla minutia supersit. Postremum enim aggregatū erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatorum inter se. Vt datis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet insitio, hoc est, additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ vnius quintæ vnius septimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ vnius septimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius septimæ, ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numeratore 2. eiusdem penultimæ minutiæ, fiunt 22. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ, faciunt 88. Addito numeratore 3. eiusdem minutiæ antepenultimę, fiunt 91. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ, & primæ, faciunt 273. Addito numeratore 2. eiusdem primæ minutiæ, quæ proxime antecedit, fiunt 275. pro numeratore minutiæ producendæ: Denominator autem erit numerus 420. productus ex multiplicatione denominatorum inter se, si nimirum primus per secundū multiplicetur, & hic numerus productus per tertium, &c. Itaque ex hac insitione orietur minutia hæc $\frac{2\ 7\ 5}{4\ 2\ 0}$. quæ ad minimos terminos reducta faciet $\frac{5}{8}\frac{5}{4}$. Quod ex regula additionis probabitur hac ratione. Quoniā $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. per regulam reductionis minutiarum minutiarū faciūt $\frac{2}{4\ 2\ 0}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciūt $\frac{3}{1\ 4\ 0}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{2}{3\ 5}$. si tres istæ minutiæ $\frac{2}{4\ 2\ 0}$. $\frac{3}{1\ 4\ 0}$. $\frac{2}{3\ 5}$. addant ad $\frac{4}{7}$. fiēt $\frac{9\ 4\ 3\ 2\ 5\ 0\ 0}{1\ 4\ 4\ 0\ 6\ 0\ 0\ 0}$.

hoc est, in minimis terminis $\frac{5}{8}\ \frac{5}{4}$. vt prius. sed multò facilius, & citius hęc summa inuenta est per insitionem.

Minutiæ inserendæ iuxta primā regulam non sunt reducendæ ad minimos terminos ante finē operationis.

Cęterum in hac regula insitionis nulla minutia reducenda est ad minimos terminos, antequā tota operatio absoluatur, quia sensus variaretur, & magnus fieret error: absoluta tamen operatione, reduci potest summa producta ad minimos terminos. Nam si inserendæ sint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{12}$. id est, addendæ $\frac{2}{3}$. vnius duodecimæ ad $\frac{8}{12}$. fient $\frac{2}{3}\ \frac{6}{6}$. At si posterior minutia $\frac{8}{12}$. reuocaretur ad minimos terminos, nempe ad hāc minutiam $\frac{2}{3}$. deberent inseri $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$. id est, $\frac{2}{3}$. vnius tertiæ ad $\frac{2}{3}$. qui sensus lōge alius est, quàm prior. Fiēt enim ex hac insitione $\frac{8}{9}$. Prior tñ minutia producta $\frac{2}{3}\ \frac{6}{6}$. reduci potest ad hāc in minimis terminis $\frac{1}{1}\ \frac{3}{8}$.

Summa insitionis secundū primam regulam sēper minor est, q̄ vnitas, & quare.

Prætereundum etiā nō est, summam ex insitione hactenus expositā collectam, si vltima minutia minor est, quàm vnitas, semper minorem esse vnitate, etiamsi infinitæ minutiæ inserantur. Vt si hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{4}{5}$. inserantur, fiet minutia $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{6}{6}$. hoc est, $\frac{2}{3}\ \frac{9}{6}$. quę minor est, quàm vnitas. Quod ita debere esse, hac ratione declarari poterit. Quoniā vt $\frac{4}{5}$. efficiant vnitatē, deest $\frac{1}{5}$. & præcedens minutia $\frac{1}{2}$. quæ additur ad $\frac{4}{5}$. non est $\frac{1}{5}$. sed $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, fit, vt ad complendā vnitatē desit adhuc $\frac{1}{2}$. vnius quintæ: at quia antecedēs minutia $\frac{2}{3}$. quæ addit, nō est $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, sed $\frac{2}{3}$. vnius dimidij vnius quintę, fit, vt ad explendā vnitatē desit adhuc $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ. Rursus qm̄ p̄cedēs minutia $\frac{3}{4}$. nō est $\frac{1}{3}$. vni⁹ dimidij vnius quintę, sed $\frac{3}{4}$. vnius tertię vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad cōficiendā vnitatē desit adhuc $\frac{1}{4}$. vnius tertię vni⁹ dimidij vnius quintæ; & sic deinceps, si plures fuerint minutię, sēper aliquid deerit ad vnitatē cōplendā.

Vsus primæ regulę insitionis in diuidendo numero integro vnà cū minutia per numerū integrū.

Vt autem videas, quàm præclarū vsum habeat prima hæc regula insitionis in diuidēdo numero integro vnà cū minutia per numerū integrū, adducā vnum, vel alterū exemplū. Sint diuidēda $20\frac{1}{4}$. per 12. Diuisis integris 20. per 12. fit Quotiēs $1\frac{8}{12}$. Et quia minutia $\frac{1}{4}$. diuidi etiā debet per 12. & quotiens addi priori quotienti;

tienti; est aũt Quotiens (si diuidatur $\frac{1}{4}$. per 12.) $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, quemadmodũ si 1. diuidatur per 12. Quotiens est $\frac{1}{12}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. id est, si addat $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{1}{4}$. per 12.) ad $\frac{8}{12}$. componat minutia, quæ addita Quotienti integro 1. efficiat totũ Quotientẽ: Fit aũt ex insitione harũ minutiarum $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. minutia $\frac{3}{4}\frac{3}{8}$. hoc est, $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. Igitur totus Quotiens erit $1\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. Idẽ efficies, si diuisorẽ 12. numero integro diuidẽdo 20. supponas, vt fiat minutia $\frac{2}{1}\frac{0}{2}$. & huic minutiæ inseras minutiã $\frac{1}{4}$. diuidendã, hoc modo $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{1}\frac{0}{2}$. quia minutia $\frac{2}{1}\frac{0}{2}$. est Quotiens diuisionis 20. per 12. cui p insitionẽ addit $\frac{1}{4}$. vnius duodecimę, nempe Quotiens diuisionis $\frac{1}{4}$ per 12. Vtroq; aũt modo recte fieri diuisionẽ, facile experieris per regulã diuisionis. Si eñ diuidas 20 $\frac{1}{4}$. per 12 reperies Quotientẽ $\frac{8}{4}\frac{1}{8}$ id est, $1\frac{3}{4}\frac{3}{8}$ siue $1\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. vt prius. Sint rursus diuidenda 100. $\frac{5}{6}$ per 8. Diuisis integris 100. per 8 fit Quotiens $12\frac{4}{8}$. Et quia minutia $\frac{5}{6}$. diuidi etiã debet per 8. & quotiens addi priori Quotienti; est aũt (si diuidant $\frac{5}{6}$. per 8.) Quotiens $\frac{5}{6}$. vnius octauæ, quemadmodũ si 1. diuidat per 8. Quotiens est $\frac{1}{8}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{8}$. id est, si addantur $\frac{5}{6}$. vnius octauæ; (nimirũ Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$ per 8.) ad $\frac{4}{8}$. cõficiatur minutia, quæ addita Quotienti integro 12. componat totũ Quotientẽ: Fit aũt ex insitione harũ minutiarũ $\frac{5}{6}$. $\frac{4}{8}$. minutia $\frac{2}{4}\frac{9}{8}$. Totus igitur Quotiẽs erit $12\frac{2}{4}\frac{9}{8}$. Idẽ efficies, si diuisorẽ 8. numero integro diuidendo 100. supponas, vt fiat minutia $\frac{1}{8}\frac{0}{0}$. & huic minutiæ inseras minutiã $\frac{5}{6}$. diuidendã, hoc modo $\frac{5}{6}$. $\frac{1}{8}\frac{0}{0}$. quia minutia $\frac{1}{8}\frac{0}{0}$. est Quotiens diuisionis 100. per 8. cui per insitionem adduntur $\frac{5}{6}$: vnius octauæ, nempe Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 8. Eundẽ prorsus Quotientẽ $12\frac{2}{4}\frac{9}{8}$ inuenies, si diuidas per regulã diuisionis 100 $\frac{5}{6}$. per 8. Facies eñ quotientẽ $\frac{6}{5}\frac{0}{4}\frac{5}{8}$. hoc est, $12\frac{2}{4}\frac{9}{8}$. Postremo sint diuidẽda 100. $\frac{5}{6}$ p 10. Diuisis integris 100. p 10. fit Quotiẽs 10. nihilq; remanet. Et quia minutia $\frac{5}{6}$. diuidi ẽt debet p 10.

& Quo-

& Quotiens addi priori quotienti; est autem (diuisis $\frac{5}{6}$. per 10) Quotiens $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, quemadmodum si 1 diuidatur per 10. Quotiens est $\frac{1}{1\,0}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{5}{6}\cdot\frac{0}{1\,0}$. id est, si addantur $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 10.) ad $\frac{0}{1\,0}$. (quia enim nulla fractio superfuit in diuisione 100. per 10. ponēda est figura 0. supra diuisorē 10. vt fiat minutia $\frac{0}{1\,0}$. continens nullam decimam.) conflatur minutia, quæ addita Quotienti integro 10. componat totum Quotientē: Fit autem ex insitione harum minutiarū $\frac{5}{6}\cdot\frac{0}{1\,0}$. minutia $\frac{5}{6\,0}$. Totus ergo Quotiens erit $10\frac{5}{6\,0}$. hoc est, $10\frac{1}{1\,2}$. Idem efficies, si diuisorem 10. numero integro diuidendo 100. supponas, vt fiat minutia $\frac{1\,0\,0}{1\,0}$. & huic minutiæ inseras minutiam $\frac{5}{6}$. diuidendā, hoc modo $\frac{5}{6}\cdot\frac{1\,0\,0}{1\,0}$. quia minutia $\frac{1\,0}{1}\frac{0}{0}$. est Quotiens diuisionis 100. per 10. cui per insitionē adduntur $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, nempe Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 10. Eundem omnino Quotientem habebis, si $100\frac{5}{6}$. diuidas per 10. secundū diuisionis regulam. Fiet enim Quotiens $\frac{0\,0\,5}{6\,0}$. hoc est, $10\frac{5}{6\,0}$. siue $10\frac{1}{1}\frac{}{2}$.

Secunda regula in sitionis duarūmi nutiarū.

Iam vero, si proponātur duæ minutiæ, quarum prior sit fractio totius posterioris, fiet insitio hac ratione. Multiplicetur posterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris, productoq; numero addatur numerus ex multiplicatione numeratorum productus. Fiet enim hac ratione numerator minutiæ producēdæ: Denominator vero prodibit ex multiplicatione denominatorū inter se. Vt hisce minutijs $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$. datis, ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. triū quartarum ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorē prioris fiunt 9. Addito numero 6. ex multiplicatione numeratorum producto, fiunt 15. pro numeratore minutiæ producēdæ. Denominator autem erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorum productus. Itaq; ex additione $\frac{2}{3}$. triū quartarum ad $\frac{3}{4}$. conflatur minutia $\frac{1}{1}\frac{5}{2}$. hoc est, $1\frac{1}{4}$. Quod facile probari potest ex regula additionis. Quoniam $\frac{2}{3}$. trium quartarum

faciunt

faciunt $\frac{6}{1}\frac{}{2}$. vt patet ex reductione, quam de minutijs minutiarum tradidimus; si addantur, $\frac{6}{1}\frac{}{2}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{6}{4}\frac{}{8}$. hoc est, $1\frac{1}{4}$. vt prius.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, sint propositæ, ita vt quælibet sit fractio integrarum minutiarũ omniũ sequentium, faciendæ erit insitio hoc modo. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoq; numero addatur numerus ex multiplicatione duorum numeratorũ postremorũ pro ductus; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoq; numero addatur numerus ex tribus postremis numeratoribus inter se multiplicatis productus; Rursus aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proximè antecedentis minutiæ, productoq; numero adijciatur numerus ex quatuor vltimis numeratoribus inter se multiplicatis productus; & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ; aggregatum vltimum semper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, productoque numero adijciatur numerus productus ex omnibus numeratoribus illarũ minutiarum, quę vsque ad eum locum assumptę fuerunt, donec nulla minutia supersit: Denominator autem procreabitur ex multiplicatione denominatorũ inter se. Vt propositis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. triũ quartarum duarũ quintarum quatuor septimarũ, & $\frac{3}{4}$. duarũ quintarũ quatuor septimarũ, & $\frac{2}{5}$. quatuor septimarũ, ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorẽ penultimæ fiunt 20. Addito numero 8. producto ex postremis duobus numeratoribus 4. & 2. inter se multiplicatis, fiunt 28. quæ multiplicata per 4. denominatorẽ antepenultimæ minutiæ, faciunt 112. Addito numero 24. producto ex postremis tribus numeratoribus 4. 2. & 3. inter se multiplicatis, fiunt 136. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ, quæ prima est, faciunt 408. Addito numero 48. producto ex omnibus quatuor numeratoribus 4. 2. 3. & 2. inter se multiplicatis, fiũt 456.

Quo pacto plures minutię, quàm duæ, insérantur p secundã regulam.

pro

pro numeratore minutiæ producendæ: Denominator vero erit numerus 420. productus ex denominatoribus omnibus inter se multiplicatis. Itaq; ex insitione hac generabiť hęc minutia $\frac{4}{4}\frac{5}{2}\frac{6}{0}$. hoc est, $1\frac{3}{4}\frac{6}{2}\frac{}{0}$. siue in minimis terminis $1\frac{3}{3}\frac{}{5}$. Quod ex regula additionis confirmabitur hoc modo. Quoniam $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. per regulam, qua minutiæ minutiarum reducuntur, faciũt $\frac{4}{4}\frac{8}{2}\frac{}{0}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. faciũt $\frac{2}{1}\frac{4}{4}\frac{}{0}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. faciunt $\frac{8}{3}\frac{}{5}$. si tres hæ minutiæ $\frac{4}{4}\frac{8}{2}\frac{}{0}$. $\frac{2}{1}\frac{4}{4}\frac{}{0}$. $\frac{8}{3}\frac{}{5}$. addant ad $\frac{4}{7}$. fiẽt $\frac{1}{1}\frac{5}{4}\frac{6}{4}\frac{4}{0}\frac{0}{8}\frac{}{6}\frac{8}{0}\frac{0}{0}\frac{}{0}$. hoc est, $1\frac{1}{1}\frac{2}{4}\frac{3}{4}\frac{4}{0}\frac{8}{6}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{}{0}$. siue $1\frac{3}{3}\frac{}{5}$. in minimis terminis, vt prius. sed multo facilius, & expeditius eandem summam per insitionem collegimus.

In hac porro secunda regula insitionis possunt minutiæ inserendæ reduci ad minimos terminos ante operationem. Nam si inserantur hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. id est, si addantur $\frac{2}{3}$. quatuor octauarum ad $\frac{4}{8}$. fient $\frac{2}{2}\frac{0}{4}$. hoc est, $\frac{5}{6}$. Tantundem faciemus, si prius $\frac{4}{8}$. reducamus ad $\frac{1}{2}$. & inseramus postea $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. hoc est, addamus $\frac{2}{3}$. vnius dimidij ad $\frac{1}{2}$. Eodem modo si inserantur $\frac{6}{1}\frac{}{0}$. $\frac{4}{8}$. fient $\frac{6}{8}\frac{4}{0}$. id est, $\frac{4}{5}$. eademque minutia producetur, si prius $\frac{6}{1}\frac{}{0}$. reducatur ad $\frac{3}{5}$. & $\frac{4}{5}$. ad $\frac{1}{2}$. inseranturq; $\frac{3}{5}$. $\frac{1}{2}$. Producentur enim ex hac insitione $\frac{8}{1}\frac{}{0}$. hoc est, $\frac{4}{5}$. vt prius. Ratio huius rei est, quia cum præcedens minutia sit fractio totius sequentis, idẽ erit omnino valor $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. & $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. Si enim hæ minutiæ minutiarum reducantur ad simplices minutias, reducetur prior ad $\frac{8}{2}\frac{}{4}$. hoc est, ad $\frac{1}{3}$. posterior vero ad $\frac{2}{6}$. id est, ad $\frac{1}{3}$. quoque. Quod in priori regula non contingit. Cum enim ibi prior minutia sit fractio vnius tantum particulæ posterioris, perspicuum est in eodem exemplo aliud esse $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{8}$, & $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. Prior enim minutia minutiarum facit $\frac{2}{2}\frac{2}{4}$. hoc est, $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$. posterior vero $\frac{2}{6}$. id est, $\frac{1}{3}$.

QVAE-

QVAESTIVNCVLAE NONNVLLAE numerorum integrorum, ac minutiarum. Cap. XVI.

OPERAE PRETIVM me facturum arbitror, si priusquã ad alia pergam, subnectam hoc loco varias quæstiunculas numerorũ integrorum, ac minutiarum, quæ per additionẽ, subtractionem, multiplicationem, diuisionemq; soluuntur; tum quia in ijs soluendis studiosi sese exercere possunt in operationibus integrorum, & minutiarum, tum etiam, quia sæpenumero similes quæstiones præclarũ vsum habent in alijs rebus Arithmeticis. Hinc ergo exordiemur.

Quæstio 1.

1. A QVO numero subducta sunt, vel subduci debent 23. vt remaneant 47? Item à quo numero subducta sunt, vel subduci debent $\frac{4}{1}\frac{}{1}$. vt relinquantur $8\frac{2}{3}$? Huiusmodi quæstiones soluuntur per additionẽ. Si enim numerum subtractum, subtrahendumve adijcias numero, qui relinqui debet, cõficies numerum, à quo datus numerus subtractus relinquet datum numerum. Vt in priori quæstione, ex 23. & 47. fit numerus 70. Ab hoc ergo subducenda sunt 23. vt 47. relinquantur. In posteriori autem quæstione, ex $\frac{4}{1}\frac{}{1}$. & $8\frac{2}{3}$. fit numerus $9\frac{1}{3}$. à quo si deducas $\frac{4}{1}\frac{}{1}$. relinquentur $8\frac{2}{3}$. vt patet, si reducas minutias productas ad integra, & ad minimos terminos. Id quod in sequẽtibus quæstionibus obseruandũ etiã erit, hoc est, post absolutã operationẽ reducẽdæ erunt minutiæ productę ad minimos terminos, vt in hac qstione factũ est.

Quæstio 2.

2. QVIS numerus subtractus est, aut subtrahi debet ex 87. vt relinquantur 26? Item qui numerus ablatus est, vel auferri debet ex $\frac{}{1}\frac{8}{3}$. vt relinquantur $\frac{2}{7}$? Huius generis quæstiones expediet subtractio. Nam si numerus, qui relinqui debet, subducatur ex numero, à quo fieri debet subtractio, remanebit numerus, qui ex eodem numero detractus relinquet residuum propositum. Vt in priori quæstione, subductis 26.

ex

ex 87. remanent 61. Si igitur tollantur 61. ex 87. remanebunt 26. In posteriori autē quæstione, si auferantur $\frac{2}{7}$. ex $\frac{8}{13}$. restabunt $\frac{30}{91}$. quæ si subtrahantur ex $\frac{8}{13}$. relinquentur $\frac{2}{7}$.

Quæstio 3. CVI numero adijcienda sunt 38. aut quis numerus adijciendus est ad 38. vt numerus compositus sit 83? Item cui numero addenda sunt $4\frac{8}{9}$. aut quis numerus adijciendus est ad $4\frac{8}{9}$. vt cōponatur numerus $20\frac{1}{2}$? Quæstiones eiusmodi per subtractionē etiá soluuntur. Nam si ex numero, qui componi debet, demas numerum addendum propositum, relinquetur numerus, cui si adijciatur datus numerus addendus, fiet numerus datus. Vt in priori quæstione, subductis 38. ex 83. remanent 45. Huic ergo adijcienda sunt 38. vt fiat numerus 83. In posteriori autem quæstione, subtractis $4\frac{8}{9}$. ex $20\frac{1}{2}$. relinquitur numerus $15\frac{1}{18}$. cui si addas $4\frac{8}{9}$. fiet numerus $20\frac{1}{2}$.

Quæstio 4. QVAE differentia, siue excessus est inter 100. & 349? Item inter $6\frac{1}{2}$. & $20\frac{3}{4}$? Hæ etiam quæstiones per subtractionem explicantur. Si namq; minor numerus ex maiore tollatur, relinquetur differentia, siue excessus quęsitus. Vt in priori quęstione, sublatis 100. ex 349. relinquuntur 249. pro excessu, differentiave inter 100. & 349. In posteriori autem quæstione, demptis $6\frac{1}{2}$. ex $20\frac{3}{4}$. restant $14\frac{1}{4}$. Hoc ergo numero superat numerus $20\frac{3}{4}$. numerum $6\frac{1}{2}$.

Quæstio 5. QVIS numerus diuisus, vel diuidendus est per 9. vt quotiens sit 34? Item quis numerus diuisus, vel diuidēdus est per $4\frac{1}{3}$. vt Quotiens sit $\frac{1}{2}$? Tales quęstiones per multiplicationem expediuntur. Si enim diuisor datus per datum Quotientē multiplicetur, procreabitur numerus diuisus, diuidendusve, qui quæritur. Vt in priori quæstione, multiplicatis 9. per 34. fit numerus 306. quo diuiso per 9. Quotiens erit 34. In quæstione vero posteriori, si multiplicentur $4\frac{1}{3}$. per $\frac{1}{2}$. producetur numerus $2\frac{1}{6}$. qui diuisus per $4\frac{1}{3}$. dabit Quotientem $\frac{1}{2}$.

Quæstio 6. QVIS numerus cōtinet $\frac{3}{5}$. huius numeri 30?

Item

Item quis numerus dat $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$? Multiplicatio etiam huiusmodi quæstiones absoluit. Si enim dati duo numeri inter se multiplicentur, gignetur numerus quæsitus. Vt quoniam in priori quæstione, ex multiplicatione $\frac{3}{5}$. per 30. producuntur 18. fit, vt numerus 18. contineat $\frac{3}{5}$. numeri 30. In posteriori autem quæstione, ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $4\frac{5}{7}$. fit numerus $2\frac{5}{14}$. qui facit $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$.

Quæstio 7.

7. PER quem numerũ diuisa, aut diuidenda sunt 48. vt Quotiens sit 10? Item per quem numerum diuidentur $\frac{3}{7}$. vt Quotiens sit $\frac{2}{3}$? Diuisione similibus quęstionibus satisfiet. Nam si numerus diuisus, diuidendusve propositus diuidatur per datum Quotientem, prodibit ex hac diuisione diuisor quæsitus. Vt in priori quæstione, diuisis 48. per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. per quem si diuidatur numerus datus 48. fiet Quotiens 10. In posteriori autẽ quæstione, diuisis $\frac{3}{7}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{14}$. per quem si diuidãtur $\frac{3}{7}$. producetur Quotiens $\frac{2}{3}$.

Quæstio 8.

8. PER quem numerũ multiplicanda sunt 17. aut quis numerus multiplicandus est per 17. vt productus numerus sit 100? Item per quem numerum multiplicari debent $3\frac{1}{2}$. aut quis numerus per $3\frac{1}{2}$. multiplicari debet, vt numerus productus sit $\frac{1}{4}$. Diuisio quoq; similibus quæstionibus satisfaciet. Nam si numerũ, qui produci debet, partiamur per numerum, qui multiplicandus proponitur, efficiemus numerum quæsitũ. Vt in quæstione priori, diuisis 100. per 17. fit Quotiens $5\frac{15}{17}$. per quem si multiplicetur datus numerus 17. procreabitur datus numerus 100. In posteriori vero quæstione, si diuidat $\frac{1}{4}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1}{14}$. per quem si multiplicetur datus numerus $3\frac{1}{2}$. gignetur datus numerus $\frac{1}{4}$.

Quæstio 9.

9. QVI duo numeri inter se multiplicati producunt 48. vel $\frac{3}{2}$. vel $6\frac{3}{4}$? Diuisio quoque huiusmodi quæstionibus satisfaciet. Nam si numerum producendum diuidamus per quemuis numerum, erit hic numerus, & Quotiens duo illi, qui quærebãtur. Vt si 48. diuidantur

uidantur per quemcunq; numerum, vt per 6. fiet Quotiens 8. Duo ergo numeri 6. & 8. inter se multiplicati producent 48. Sic etiam si eadem 48. diuidantur per aliũ numerũ quẽcunque, vt per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. Duo ergo numeri 10. & $4\frac{4}{5}$. inter se multiplicati gignent 48. Item si partiamur $\frac{1}{2}$. per quemcunq; numerum, vt per $\frac{2}{3}$. inueniemus Quotientem $\frac{3}{4}$. Duo ergo numeri quæsiti, qui inter se multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. Eadem ratione si partiamur $\frac{1}{2}$. per quemuis alium numerum, vt per 8. reperiemus Quotientem $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. Duo igitur numeri quæsiti, qui inter se multiplicati faciunt $\frac{1}{2}$. erunt 8. & $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. Deniq; diuisis $6\frac{3}{4}$. per quemlibet numerum, vt per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $1\frac{1}{1}\frac{3}{4}$. Duo ergo numeri, qui inter se multiplicati producant $6\frac{3}{4}$. erunt $3\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{1}\frac{3}{4}$.

Quæstio 10.

10. QVI sunt duo illi numeri, vt vno diuiso per alterum, Quotiens sit 28? Item qui sunt duo illi numeri, vt vno diuiso per alterum, Quotiens sit $\frac{5}{6}$? Has quæstiones, & alias similes multiplicatio enodat. Si namq; Quotientem datũ multiplices per quemuis numerum, dabit Quotiens numerum diuidendũ, diuisor autem erit numerus multiplicans assumptus. Vt in priori quæstione, si 28. multiplices per quemuis numerum, vt per 6. efficies numerum 168. Hic ergo diuisus per 6. faciet 28. In quæstione autem posteriori, si $\frac{5}{6}$. multiplices per quemlibet numerum, vt per $\frac{1}{2}$. procreabis $\frac{5}{1}\frac{}{2}$. quibus diuisis per $\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{5}{6}$.

Quæstio 11.

11. PER quem numerũ multiplicanda sunt 7. Aut quis numerus multiplicandus est per 7. vt producto numero diuiso per 8. Quotiens sit 3? Item per quem numerum multiplicari debent $\frac{2}{5}$. Aut quis numerus per $\frac{2}{5}$. multiplicandus est, vt producto numero per $\frac{3}{4}$. diuiso, Quotiens sit $\frac{1}{4}$? Quæstiones huiusmodi multiplicatione, & diuisione soluuntur. Nam si diuisorem datum per datum Quotientem multiplices, numerumq; productum per datum numerũ multiplicandũ, multiplicantẽve partiaris, erit Quotiens numerus, qui quæritur. Vt in priori quæstione, si multiplicetur diui-

sor

sor datus 8. per datum Quotientem 3. producetur numerus 24. qui diuisus per numerũ multiplicandũ, multiplicantemve datũ, nempe per 7. faciet $3\frac{3}{7}$. numerũ quæsitum. Si enim multiplicentur 7. per $3\frac{3}{7}$. fiet numerus 24. qui diuisus per 8. faciet Quotientem 3. In posteriori vero quæstione, si diuisor datus $\frac{3}{4}$. multiplicetur per datum Quotientem $\frac{1}{4}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuisus per $\frac{2}{3}$. numerum multiplicantem, multiplicandumve datum faciet $\frac{1}{3}\frac{5}{2}$. numerum quæsitum. Si namque $\frac{2}{3}$. multiplicentur per $\frac{1}{3}\frac{5}{2}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuisus per $\frac{3}{4}$. faciet Quotientem $\frac{1}{4}$.

Quæstio 12.

12. QVOTA pars est numerus 6. huius numeri 54? Item quota pars est hic numerus $\frac{3}{5}$. huius numeri $\frac{9}{10}$? Quæstiones tales per diuisionem explicantur. Nam si numerus datus, qui debet esse pars, per alterum datũ numerum (qui semper maior esse debet altero) diuidatur, indicabit Quotiés, quota pars, aut partes sit numerus datus numeri dati. Vt in priori quæstione, diuisis 6. per 54. fit Quotiens $\frac{6}{54}$. id est, $\frac{1}{9}$. Erit ergo numerus 4. vna nona pars numeri 54. In posteriori aũt quæstione, diuisis $\frac{3}{5}$. per $\frac{9}{10}$. fit Quotiens $\frac{30}{45}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. Continebit ergo numerus $\frac{3}{5}$. duas tertias partes numeri $\frac{9}{10}$. Hoc aũt ita esse, experiri licebit per 6. quæstionẽ. Si enim quratur numerus, iuxta illã quæstionẽ, qui sit $\frac{1}{9}$. numeri 54. reperiet numerus 6. Si itẽ inuestigetur, qui numerus contineat $\frac{2}{3}$. numeri $\frac{9}{10}$. inueniet numerus $\frac{15}{30}$. hoc est, $\frac{3}{5}$.

Quæstio 13.

13. NVMERVS hic 6. cuius numeri erit vna nona pars? Item numerus $\frac{3}{5}$. cuius numeri duas tertias continebit? Diuisio quæstiones tales soluit. Si namq; datus numerus diuidatur per minutiam, quæ significet propositam partem, partesve, dabit Quotiens numerũ quæsitum. Vt in quæstione priori, diuisis 6. per $\frac{1}{9}$. fit Quotiens 54. Numerus ergo 6. nona pars erit numeri 54. In quæstione vero posteriori, diuisis $\frac{3}{5}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{10}$. Huius ergo numeri duas tertias continebit hic numerus $\frac{3}{5}$.

Quæstio 14.

14. HIC numerus 7. quot octauas partes vnius

integri continet? Item numerus hic $\frac{3}{4}$. quot duodecimas partes vnius integri continet? Item hic $\frac{3}{7}$. quot octauas vnius integri continet? Multiplicatio huius generis quæstiones dirimet. Si enim datus numerus per denominatorem partium, quæ quæruntur, multiplicetur, dabit productus numerus numerũ partium quæsitum. Vt in priori quæstione, multiplicatis 7. per 8. fiunt 56. Numerus ergo 7. continebit 56. octauas. In posteriori autem quæstione, multiplicatis $\frac{3}{7}$. per 8. fit numerus $\frac{24}{7}$. hoc est, $3\frac{3}{7}$. Numerus ergo $\frac{3}{7}$. cõtinet tres octauas, & $\frac{3}{7}$. vnius octauæ. Atq; hoc ita esse, perspicuum est. Si enim $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$. hoc est, $\frac{3}{56}$. & $\frac{3}{8}$. in vnam summã colligantur, deprehendentur $\frac{3}{7}$. Ex quo fit, $\frac{3}{7}$. continere $\frac{3}{8}$. & $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$.

REGVLA TRIVM, QVAE alio nomine regula aurea, siue regula proportionum dici solet. Cap. XVII.

HACTENVS iacta sunt à nobis necessaria Arithmetices fundamenta; sequuntur iam variæ regulæ, in quibus mirificus eorũ vsus apparet, non solum Mathematicis, verum etiam mercatoribus, immo vero & cuilibet priuato homini, si in cõmercijs, cõuentisq; mutuis nõ vult decipi, aut decipere (quorũ illud turpe, hoc vero etiam iniquum foret) maxime vtiles, ac necessariæ. Primo autem loco sese offert regula illa nunquã satis laudata, quæ, ob immensam vtilitatem, Aurea dici solet, vel regula proportionũ, propterea quòd in quatuor numeris proportionalibus, quorũ priores tres noti sunt, quartus autẽ ignotus quæritur, versetur; vnde & regula trium apud vulgus appellata est: quòd tres numeros ponat cognitos, & ex ijs quartum ignotum eliciat. Ita autem regula hæc proportionum

Regula aurea, siue proportionum, aut regula trium, cur sic dicta sit.

num se habet. Dispositis tribus numeris notis, ita vt is, qui quæstionem habet annexam, (Semper enim vnus illorum quæstionem secũ affert, vt in exemplis apparebit.) tertio statuatur loco; reliquorũ autem ille, qui de eadẽ est re, hoc est, qui tertio similis est, (Exempla autem declarabunt, in quo similitudo hæc consistat.) primum occupet locum; mediã deniq; sedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, similis esse debet: Dispositis, inquam, hoc modo numeris, multiplicentur tertius, & medius inter se, productusq; numerus per primum diuidatur. Nam quotiens numerus, erit quartus, qui quærebatur, satisfacietq; quæstioni propositæ: hoc est, tertius numerus ad eum habebit eandem proportionem, quam primus ad secundum.

Numeri per regula trium quo pacto sint collocãdi

Quo pacto per regulã triũ quartꝰ numerus ignotus sit inquirendus.

Exemplum.

Quatuor aureis emuntur 12. libræ piperis, quæritur, quot libræ emi possint Aureis 20. Hic vides, 20. aureos habere annexam quæstionem: de illis enim quæritur, quot nam libras exhibere possint; cui numero similis est numerus 4. aureorũ. Nam sicut 4. aureis emptæ sunt 12. libræ, ita 20. aureis emendæ sunt aliæ libræ, ita vt vterq; numerus sit pretiũ: at 12. libræ piperis sunt merces. Ita ergo stabit exemplum.

Aurei.	Lib.	Aurei.		Lib.
4.	12.	20.	fiunt	60.

Multiplicando autem inter se secundum, & tertiũ numerum, & productum 240. per primum diuidendo, inueniemus libras 60. pro quarto numero, qui quærebatur. Vbi vides, quemadmodum primus numerus 4. tertia pars est secundi numeri 12. ita numerum tertiũ 20. tertiam partem esse quarti numeri inuenti 60.

Aliud exemplum.

Aureos 60. expendo 5. mensibus, peto, 132. aureos

quot mensibus expendam? Hic etiam cernis, quæstionem fieri de 132. aureis, & huic numero similem esse hunc 60. aur. Sic igitur exemplum stabit.

Aurei.	Menses.	Aurei.	Menses.
60.	5.	132.?	fiunt 11

Multiplicando autem secundum numerum, & tertium inter se, productumq; 660. diuidendo per primũ reperiemus 11. menses, quibus expendam 132. aureos. Vbi etiam vides, tertium numerum 132. duodecies continere quartum inuentum 11. quemadmodũ primus 60. secundum 5. complectitur duodecies.

Demonstratio regulæ triũ.

Demonstratio huius regulæ hæc est. Quoniam eadẽ proportio esse debet primi numeri ad secundum, quæ tertij ad quartum inuentũ, vt dictum est, & ex propositis exemplis constat; necesse est, ex propos. 19. lib. 7. Eucl. eundem numerũ produci ex multiplicatione primi numeri per quartum, qui ex secundo in tertium gignitur. Cum igitur numerus ex secundo in tertiũ productus diuidatur per primum, vt quartus inueniatur, veluti regula triũ præcipit; fit, vt primus numerus per Quotientem, hoc est, per quartum numerum inuentũ multiplicatus producat eundem numerũ diuisum, qui nimirum ex secundo in tertium fuit procreatus. Nam numero quolibet per alium quemuis numerũ diuiso, si diuisor per Quotientem multiplicetur, necessario numerus diuisus rursus procreatur, vt in tertio examine Diuisionis numerorum integrorum cap. 5. dictum est. Id quod etiam constat ex definitionibus Diuisionis, ac Multiplicationis: quod hoc exemplo proposito declarabimus. Numerus 12. diuidatur per 4. vt fiat Quoties 3. qui nimirũ, secundum definitionẽ Diuisionis cap. 5. traditam, toties vnitatem contineat, quoties diuisus numerus 12. diuisorem 4. continet. Dico si multiplicemus diuisorem 4. per Quotientem 3. necessario rursus produci diuisum numerũ 12. Nam cum, iuxta definitionẽ Multiplicationis cap. 4. traditã, numerus procreari debeat, qui toties contineat diuisorẽ 4. qui est

Numero per alium diuiso, si Diuisor p Quotientem multiplicetẽ, cur rursum numerus diuisus producatur.

vnus

vnus numerorũ multiplicantiũ, quoties numerus Quotiens 3. qui est alter numerus multiplicans, vnitatẽ cõtinet; contineat aũt diuisus numerus 12. toties diuisorem 4. quoties numerus Quotiens 3. vnitatem includit, vt dictũ est; liquido constat, numerũ diuisum 12. ex dicta multiplicatione diuisoris 4. per Quotientẽ 3. procreari. Eademq; ratio est in omnino numerus Quotiens per regulam trium inuentus, quartus numerus proportionalis, qui quæritur, vt ex dicta ꝓpos. 19. lib. 7. Eucl. constat: qñquidẽ idem numerus producitur ex primo numero in quartũ, qui ex secũdo in tertiũ, vt diximus.

Probatio regulæ trium.

Ex his, quæ ꝓxime scripsimus, facile colligitur, qua ratione regula triũ possit examinari. Nam si idẽ procreetur numerus ex primo numero in quartum inuentum, qui ex secundo in tertium, dubitandum non est, quin recte inuentus sit quartus numerus ꝓportionalis; si vero nõ idẽ numerus gignat, repetẽda erit operatio.

Alia probatio regulæ triũ

Est tñ alia probatio regulæ triũ à pleriſq; vſurpata, quę fit hoc modo. Statuat primus numerus in tertio loco, & tertius in primo, quartuſq; in medio. Si náq; iuxta ꝓceptũ regulę triũ, reperiat hoc modo quartus numerus qui prius erat secũdus, recte soluta fuit quæstio propoſita. Vt primũ exemplũ ſupra allatum ita ſtabit.

Aurei.	Libræ.	Aurei.		Libræ.
20.	60.	4.	fiunt	12.

Nam si verũ est, 20. aureis emi 60. lib. propterea quod 4. aureis emptæ sunt libræ 12. efficitur necessario, vt viciſſim 4. aureis, emantur libræ 12. hoc ipso, quòd 20. aureis libræ 60. emantur.

Compendia regulæ triũ varia.

Possunt interdũ duo numeri ex datis tribus, vt primus & secũdus, vel primus & tertius, ad minores redigi, vt facilior reddat operatio. qđ quidẽ fiet, si tam primus, quàm secũdus; vel tã primus, quàm tertius, per cõmunem aliquã vtriuſq; menſuram notam, ſiue ea maxima ſit, ſiue non maxima, diuidatur, & loco illorum Quotientes ſtatuantur. Vt in hoc exemplo.

4. 12. 20. fiunt 60.

quoniam numerus 4. metitur primum, & secundum, si, diuiso vtroq; per 4. quotientes 1. & 3. pro illis ponãtur, ita stabit exemplum.

1. 3. 20. fiunt 60.

Item quia in eodẽ exemplo numerus idẽ 4. numerat primũ & tertiũ, si, diuiso vtroq; per 4. Quotientes 1. & 5. pro illis accipiantur, sic stabit idem exemplum.

1. 12. 5. fiunt 60.

Item in sequenti hoc exemplo.

36. 48. 63. fiunt 84.

quoniam numerus 12. metitur primum, & secundum, si, diuiso vtroq; per 12. Quotientes 3. & 4. pro illis reponantur, ita stabit exemplum.

3. 4. 63. fiunt 84.

Item quia numerus 9. metitur primum, & tertiũ in eodem exemplo, si, diuiso vtroq; per 9. Quotientes 4. & 7. pro illis in regula collocentur, sic stabit exemplum.

4. 48. 7. fiunt 84.

Rursus hoc etiam modo quæstio proposita soluetur. Diuidatur secundus numerus per primũ, & per Quotientem tertius multiplicetur: vel tertius per primum diuidatur, & per Quotientem multiplicetur medius. Vtroq; enim modo productus numerus erit quartus proportionalis, qui quæritur. Vt in hoc exemplo.

60. 360. 132. fiunt 792.

Diuiso secundo numero per primum, fit Quotiens 6. per

per quem si multiplicetur tertius numerus, gignetur quartus 792. ac si iuxta præceptum regulæ trium operatus esses. Item diuiso tertio numero per primum, fit Quotiens $2\frac{1}{6}\frac{2}{6}$. hoc est, $2\frac{1}{3}$. siue $\frac{1}{3}\frac{1}{3}$. per quem si multiplicetur secundus, producetur idem quartus 792. His recte intellectis, varijs modis examinare poteris, num per regulam trium quartus numerus recte sit inuentus, necne. Nam si per varias huiusmodi operationes eundem semper quartum numerũ repereris, maximo argumento est, operationem recte esse institutam.

Variæ probationes regulæ trium.

Quòd si quis roget, qui fieri possit, vt per tot vias ad eundẽ semper scopũ perueniamus, sciat, huius rei causam totam ex proportionibus pendere. Quoniam enim eadem proportio esse debet inter primum numerum, & secundum, quæ inter tertium, & quartum; fit vt & permutando eadem proportio sit inter primum, & tertium, quæ inter secundum, & quartum; Item & conuertendo eadem inter secundum, & primum, quæ inter quartum, & tertium; nec non eadem inter tertiũ, & primum, quæ inter quartum, & secundum. Cum ergo semper eadem proportio sit inter Quotientes duorum numerorũ per eundem numerum diuisorum, quæ inter ipsos numeros; perspicuum est, si diuidatur tam primus numerus, quàm secundus, vel tã primus, quàm tertius per cõmunem aliquã mensuram eandem, & pro ipsis numeris Quotientes reponantur, esse adhuc eandem proportionem inter Quotientes primi, & secundi numeri, quæ est inter tertium numerum, & quartũ; Item eandem esse proportionem inter Quotientes primi, & tertij numeri, quæ est inter secundum numerum & quartum. Rursus, quoniam, diuiso numero quouis per alium numerum, producitur denominator proportionis, quam diuisus numerus habet ad diuisorem; denominator autem alium quemcunq; numerum multiplicans producit numerum, qui ad multiplicatum proportionem habet à dicto denominatore denominatam; fit, vt diuiso secundo, aut tertio numero per primũ, Quotiens sit denominator proportionis secundi, aut tertij

Demonstratio cõpendiorũ regulæ trium.

numeri ad primum. Quare si per hunc Quotientē multiplicetur tertius numerus, aut secundus, procreabitur quartus, qui videlicet eandem proportionem habeat ad tertiū, quam secundus ad primum, vel eandem ad secundum, quam tertius ad primum.

Quæstiones nonnullę quibus variæ difficultates regulę triū explicantur.

Quoniam vero frequenter quæstiones per regulam triū soluendæ præpostero ordine proponuntur, interdum etiam diuersæ monetæ, menturæ, vel pondera in vno numero reperiuntur, deniq; non raro primus numerus dissimilis est tertio, vt facile hærere, atq; impediri possit is, qui parum in rebus Arithmeticis est versatus; explcabimus quæstionibus aliquot varias difficultates, quę occurrere possunt; hinc exordientes.

Quæstio 1.

1. Quanti constat vna libra piperis, si 60. libręmptæ sint aureis 20? In hac quæstione præpostere positi sunt numeri. Nam 1. libra, cuius primo loco mentio fit, quæstionem habet annexam, ac proinde tertiū occupare debet locum, primum vero numerus 60. librarum, cum numero vnius libræ sit similis. Itaq; recto ordine proponenda fuisset quæstio hoc modo. Libręs 60. piperis constant 20. aureis, libra ergo 1. quanti constabit? vt in appositio hoc exemplo apparet.

Lib.	Aur.	Lib.	Aur.
60.	20.	1.?	fiunt $\frac{2}{6}\frac{0}{0}$. siue $\frac{1}{3}$.

Inuenies aūt (si secundū numerum per tertium multiplices, productumq; 20. per primū partiaris) valorem 1. libræ esse $\frac{2}{6}\frac{0}{0}$. vel $\frac{1}{3}$. vnius aurei, quia cum minor numerus per maiorē diuiditur, fit fractio, cuius numerator est numerus diuidendus, denominator aūt Diuisor, vt cap. 5. & 6. diximus. Reducetur aūt vtrauis harū minutiarū, nempe prior, ad baiochos hoc modo. Multiplicetur numerator 20. per 100. (tot enim baiochi vnū aureū conficiunt.) productusq; numerus 2000. per denominatorē 60. diuidatur. Quotiens enim dabit baiochos $33\frac{2}{6}\frac{0}{0}$. siue $33\frac{1}{3}$. Tantundē inuenisses, si posterioris minutię $\frac{1}{3}$. numeratorē per 100. multipli

casses,

tasses, productũq; per denominatorem distribuisses. Quòd si $\frac{1}{3}$. vnius baiochi ad quatrinos velis reuocare, multiplicabis numeratorem per 4. (cum tot quatrini baiochum conficiant.) productumq; per denominatorem partieris. Inuenies enim quatr. $1\frac{1}{3}$. Itaq; 1. libra constabit Baioch. 33. quatr. $1\frac{1}{3}$.

2. SI libræ $10\frac{2}{5}$. & vnciæ $7\frac{1}{2}$. ceræ albæ consient aureis 2. & Iulijs 6. quantum ceræ emetur baiochis 90? sic stabit exemplum. Quæstio 2.

Aur. Iul.	Lib. Vnc.	Baioc.	Vnc.
2. 6.	$10\frac{2}{5}.7\frac{1}{2}$.	90.?	fiunt $45\frac{2}{2}\frac{0}{6}\frac{7}{0}$.

Quoniam vero in primo numero, ac tertio diuersę monetæ continentur, reducendę erunt omnes ad minimã monetã ibi expressam, vt ad baiochos, eruntq; in primo numero baiochi 260. Rursus quia in secũdo numero reperiũtur diuersa pondera, redigenda erunt ad minima ibi expressa, vt ad vncias, quarum 12. vnam libram efficiunt, eruntq; in $10\frac{2}{5}$. libris vnciæ $124\frac{4}{5}$. quibus si addantur vnciæ $7\frac{1}{2}$. fient vnciæ $132\frac{3}{1}\frac{3}{0}$. Itaque sic stabit exemplum reductum. Quid agendum. qñ diuersæ monetæ, mensuræ, pondera, & fractiões occurrũt.

Baioc.	Vnc.	Baioc.	Vnc.
260.	$132\frac{3}{1}\frac{3}{0}$.	90.?	fiunt $45\frac{2}{2}\frac{0}{6}\frac{7}{0}$.

Illud vero hoc loco annotandũ est, minutiã ex multiplicatione medij numeri per tertiũ productã, licet eius numerator sit denominatore maior, non debere redigi ad integra, donec diuisio sit absoluta, ne operatio impediatur. Vnde quia tunc multiplicatio medij numeri per tertium facit $\frac{1}{1}\frac{1}{1}\frac{9}{1}\frac{0}{0}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$. diuidenda erit hæc minutia, antequã ad integra reducatur, per primum numerũ: quæ diuisio dabit hanc minutiã $\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{9}{0}\frac{0}{0}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$. continentem vncias $45\frac{2}{2}\frac{0}{6}\frac{7}{0}$.

3. QVANTI cõstabunt $\frac{7}{8}$. vnius vlnæ panni, si $\frac{3}{4}$. vnius aurei quispiam emerit $\frac{1}{3}$. vnius vlnæ? Sic stabit exemplum. Quæstio 3.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.	Aur.
$\frac{1}{3}$.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{7}{8}$?	fiunt $1\frac{3}{1}\frac{1}{2}$.

Mul-

Multiplicatio medij numeri per tertium facit minutiã $\frac{2}{3}\frac{1}{2}$. qua diuisa per primum numerum, inuenietur minutia hæc $\frac{6}{3}\frac{3}{2}$. vnius aurei, quæ facit aur. $1\frac{3}{3}\frac{1}{2}$. Reducta autem hæc minutia $\frac{3}{3}\frac{1}{2}$. vnius aurei ad Iulios, Baiochos, & quatrinos dat Iul. 9. Baioc. 6. quatr. $3\frac{1}{2}$.

Quæstio 4. Studiosus quidã in vniuersitate volens dare operã literis 6. annos, animaduertit se 7. mensibus, & 13. diebus expendisse aureos 200. Iulios 7. Baiochos $8\frac{2}{7}$. Quæritur ergo, quãta pecunia indigeat. Ita stabit exẽplũ.

Men.	Dies.	Aur.	Iul.	Baioc.	An.	Aur.	Baioc.
7.	13.	200.	7.	$8\frac{2}{7}$.	6. fiũt	1956.	$7\frac{1}{1}\frac{1}{5}\frac{9}{7}\frac{1}{5}$.

Hic in primo numero menses, & in tertio anni ad dies reuocandi sunt. Quod vt fiat, considerandum est, quinam menses illi sint, quia non omnes menses eundem dierum numerum continent. Nam si ponamus priores 7. menses, initio facto à Ianuario, continebunt dicti 7. menses in anno cõmuni dies 212. vt hic vides (in anno vero bissextili 213. cum in eo Februarius cõtineat dies 29) Additis diebus 13. fient dies 225. Deinde considerandũ est, quot anni bissextiles in illis 6. annis contineantur. Nã pro singulis addendus est dies 1. ad dies 365. anni vnius communis. Vnde si ponamus duos annos bissextiles contineri, multiplicabimus 6. annos per 365. dies, & producto numero addemus 2. vt efficiantur dies 2192. Rursus in numero medio redigendi sunt aurei, & Iulij ad Baiochos, qui erunt numero 20078 $\frac{2}{7}$. ita vt exemplũ reductum ita se habeat.

Ian.	31.
Febr.	28.
Mar.	31.
Apr.	30.
Maius.	31.
Iun.	30.
Iul.	31.
	212.
	13.
	225.

Dies.	Baioc.	Dies.	Baioc.
225.	$20078\frac{2}{7}$.	2192.	fiunt $195607\frac{1}{1}\frac{1}{5}\frac{9}{7}\frac{1}{5}$.

Postremo reducendus erit quartus numerus inuentus

baio-

baiochorum ad aureos, & Iulios. Faciunt autem omnes illi baiochi aureos 1956. Iul. 0. Baioc. 7 $\frac{1}{1}\frac{1}{5}\frac{9}{7}\frac{1}{5}$. Tanta pecunia necessaria est studioso illi 6. annis, quorum duo bissextiles sint.

Hac eadem ratione post operationem semper reducenda est moneta quarti numeri ad maiorem, si fieri potest: Item pondera, mensuræve ad maiora pondera, vel mensuras; vt vnciæ ad libras, palmi, vel pedes ad passus, passus autem ad milliaria.

5. Quidam conficit 7. diebus milliaria 210. Peto quot diebus milliaria 1600. conficiet, si quotidie iter faciat, & cursum nec remittat, nec intendat? Sic ponetur exemplum. Quæstio 5.

Milliar.	Dies.	Milliar.		Dies.
210.	7.	1600?	fiunt	$53\frac{7}{2}\frac{0}{1}\frac{}{0}$.

Fractio hęc $\frac{7}{2}\frac{0}{1}\frac{}{0}$. vnius diei in quarto numero, si numerator per 24. multiplicetur, productusq; numerus per denominatorẽ diuidatur, redigetur ad horas 8.

6. Si aureis 100. Iulijs 7. baiochis 8 emptus sit ager passuum quadratorum 400. quanti constabit ager passuum quadratorum 1000. pedum quadratorum 4. & palmorum quadratorum 3? ita stabit exemplum. Quæstio 6.

Passus.	Aur.	Iul.	Baioc.	Pass.	Ped.	Palm.
400.	100.	7.	8.	1000.	4.	3.?

fiunt Baioc. $25199\frac{1}{8}\frac{7}{0}\frac{6}{0}\frac{1}{0}\frac{3}{0}$.

Reductis aureis, ac Iulijs secundi numeri ad baiochos, & passibus, ac pedibus tertij numeri ad palmos, tribuendo 16. palmos quadratos vni pedi quadrato, & 25. pedes quadratos vni passui quadrato, necnon & passibus primi numeri reductis ad palmos quoque, tribuendo vni passui quadrato 400. palmos quadratos; ita stabit exemplum reductum.

Palmi.	Baioc.	Palmi.		Baioc.
1600000.	10078.	400067?	fiunt	$25199\frac{1}{8}\frac{7}{0}\frac{6}{0}\frac{1}{0}\frac{3}{0}$.

Quartus

Quartus autē numerus baiochorum continet aur. 251. Iul. 9. baioc. 9 $\frac{1}{8}\frac{7}{0}\frac{6}{0}\frac{1}{0}\frac{3}{0}$.

Quæstio 7. 7. In nundinis quibusdam 44. aureis emptæ sunt 52. vlnæ panni cuiusdam, quanti cōstabunt vlnæ 260. eiusdem panni? Ita stabit exemplum.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
52.	44.	260. ?	fiunt	220.

Quæstio 8. 8. Emit quispiam 52. vlnas panni 44. aureis, quot vlnas emet aureis 220? Exemplum ita disponetur.

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
44.	52.	220. ?	fiunt	260.

Quæstio 9. 9. Emit quispiam summa quadam pecuniæ 52. vlnas panni, atque eodem pretio accepit postea 260. vlnas, quæ constiterunt aureis 220. quid ergo prius expendit? Disponetur exemplum hoc modo.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
260.	220.	52. ?	fiunt	44.

Quæstio 10. 10. Vlnas aliquot panni emit quidā 44. aureis, atq; eodē pretio alius deinde aureis 220. emit vlnas 260. quot ergo vlnas prior emit? Stabit exēplū hoc modo.

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
220.	260.	44. ?	fiunt	52.

Apposui quatuor hæc postrema exempla, in quibus ijdem quatuor numeri regulæ trium varijs modis vices inter se permutant, quippe cum quisq; illorum ex alijs tribus datis eruatur, vt intelligas, quo pacto te gerere debeas in alijs quæstionibus similibus.

REGVLA TRIVM EVERSA. Cap. XVIII.

DIXIMVS, in quatuor numeris regulæ triū eam proportionem esse primi numeri ad secundū, quæ est tertij ad quartum, atq; adeo, (vt ex propos. 14. lib. 5. Eucl.

5. Eucl. colligitur.) si primus maior est, vel minor tertio, secundum quoq; maiorem esse, vel minorem quarto; id quod in exemplis omnibus hactenus adductis perspicuum esse potest. Solet nonnunquã accidere, vt quò maior est primus tertio, eò minor esse debeat secundus quarto; & quò minor est primus tertio, eò maior esse debeat secundus quarto. Quare contraria tunc via tenenda erit, nempe primus numerus per secundũ multiplicandus, numerusq; productus per tertium diuidendus. Quando autem hæc regula trium euersa adhibẽda sit, & ratio naturalis dictare videtur, & clarissime ex sequentibus exemplis intelligi potest, quorum primum hoc sit. Regula triũ euersa quo pacto quartũ numerum eliciat.

1. Pannus 9. vlnarũ, cuius latitudo est 3. palmorũ, emitur à quodã, vt sibi tunica conficiatur. Quot ergo vlnæ alterius panni, cuius latitudo est 2. palmorũ, requiruntur ad eandem tunicam, vel similem conficiendam? Quoniam quæstio est de panno latitudinem habente 2. palmorum, ita stabit exemplum. Quæstio 1.

Palmi latitud.	Vlnæ.	Palmi latitud.	Vlnæ.
3.	9.	2. ?	fiunt $13\frac{1}{2}$

Hic manifeste vides, quò angustior est secundus pannus, eò plures vlnas esse necessarias. Quare licet primus numerus tertio maior sit, non tamen propterea secundus maior etiam esse debet quarto, sed minor; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat secundus ad quartum. Hinc fit, vt primus per secundum sit multiplicandus, numerusque productus per tertium diuidendus: quia vt debita proportio seruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum est, atq; hic apparet.

Palmi latitud.	Palmi latitud.	Vlnæ.	Vlnæ.
2.	3.	9. ?	fiunt $13\frac{1}{2}$.

2. Quidam accepit mutuo ab alio 4000. aur. ad annos Quæstio 2.

annos 3. quos cum ei restitueret, nullum censum accipere voluit, sed tantum petijt, vt ei vicissim pecuniam mutuo daret. Dedit ergo ei mutuo 7480. aur. Quamdiu ergo hic pecuniâ istâ retinere debet, vt ei satisfiat pro beneficio præstito per 4000. aur. quos illi accommodauerat? Quia numerus 7480. aur. secũ habet quæstionem, collocandi erunt numeri hoc ordine.

Aur.	Anni.	Aur.		Anni.	Dies.	Horæ.
4000.	3.	7480.?	fiunt	1.	220.	$13\frac{8}{1}\frac{9}{8}\frac{}{7}$.

Perspicuum etiam hic est, maiorem censum deberi aureis 7480. quàm aur. 4000. atq; adeo minori tempore opus esse, quàm 3. ann. vt idẽ census, qui debetur aur. 4000. tribus annis, lucrifiat. Quare licet primus numerus maior sit, quàm tertius, non tamen idcirco secundus maior etiam erit, quàm quartus, sed minor; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primũ, eam habeat secundus ad quartum. Ex quo fit, multiplicandum esse primum per secundũ, productumq; numerum per tertiũ diuidendum: quia vt debita proportio seruetur, tertius numerus primũ locũ obtinere debet in regula proportionum, vt dictum est, atq; hic apparet.

Aur.	Aur.	Anni.		Anni.	Dies.	Horæ.
7480.	4000.	3.?	fiunt	1.	220.	$13\frac{8}{1}\frac{9}{8}\frac{}{7}$.

Quæstio 3. 3. Quando mensura tritici emitur 6. aureis, panis vno baiocho emptus, iuxta ciuitatis alicuius ordinationem, pondus habet 10. vnciarum: Iam si eadẽ mensura tritici ematur 4. aureis, vel 8. aureis, quantũ esse debet eiusdem panis pondus? Ita stabunt exempla.

Aur.	Vnciæ.	Aur.		Vnciæ.
6.	10.	4.?	fiunt	15.
6.	10.	8.?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

Ratio dictat, quò vilius est triticum, eò maius pondus habe-

habiturũ panem, & quò carius, eò minus. Talis enim proportio debet esse 4. aur. ad 6. aur. vel 8. aur. ad 6. aur. qualis est ponderis 10. vnciarum ad pondus ignotum, quod quæritur. Vnde iuxta regulam proportionum ita collocandi essent numeri.

Aur.	Aur.	Vnciæ.		Vnciæ.
4.	6.	10. ?	fiunt	15.
8.	6.	10. ?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

4. Operarij 30. perficiunt opus quoddam in 4. annis; quanto ergo tempore idem absoluent 50. operarij, vel 20. ? Vel, quot operarij idem absoluent in annis 2. & diebus 146. ? Vel in annis 4. & diebus 292? Quadruplex hoc exemplum ita stabit, reductis annis ad dies, in posterioribus duobus exemplis. Quæstio 4.

Operarij.	Anni.	Operarij.		Anni.	Dies.
30.	4.	50. ?	fiunt	2.	146.
30.	4.	20. ?	fiunt	6.	0.

Dies	Operarij.	Dies.		Operarij.
1460.	30.	876. ?	fiunt	50.
1460.	30.	1752. ?	fiunt	25.

Quò enim plures sunt operarij, eò minore tempore opus est, quò autem pauciores, eò maiore. Item quò minus tempus est, eò pluribus operarijs opus est, quò autem maius, eò paucioribus. Igitur iuxta regulam proportionum ita collocarentur numeri.

Operarij	Operarij.	Anni.		Anni.	Dies.
50.	30.	4. ?	fiunt	2.	146.
20.	30.	4. ?	fiunt	6.	0.

Dies.	Dies.	Operarij.		Operarij.
876.	1460.	30. ?	fiunt	50.
1752.	1460.	30. ?	fiunt	25.

5. Ob-

Quæstio 5. Obsessus quidam exercitus 8500. militum victū habet ad 11. menses; verum spes nulla est solutionis obsidionis, vel futuri auxilij, nisi post 25. mēses. Quot ergo milites dimittendi sunt, vt reliquis victus sufficiat ad 25. menses? Numeri ita disponendi sunt.

Menses.	Milites.	Menses.		Milites.
11.	8500.	25.	fiunt	3740.

Dimittendi ergo erunt 4760. milites, & retinēdi 3740. his enim victus sufficiet ad 25. menses.

REGVLA TRIVM COMPOsita. Cap. XIX.

FIT, vt interdum plures, quàm tres numeri proponantur noti, ita tamen, vt sint semper tres principales, alij autem illis adiuncti minus principales, denotantes vel tempus, vel lucrum, damnumve. Quod vbi contigerit, fit regula triū composita, & tunc vel instituenda erit regula trium bis, aut ter, vel quilibet numerus per sibi adiunctos multiplicandus, vt fiant tres tantum numeri noti, per quos quartus ignotus eliciatur, vel certe alia quædam via tentanda. Id quod sequentibus exemplis perspicuum fiet, in quibus variæ quæstiones de lucro, damno, interueniente etiam diuersitate temporis, & varietate lucri in ratione tot pro 100. discutientur.

Regula triū composita qd & quō fiat.

Quæstio 1. Sunt 8. in cōmuni conuictu, quorū singuli singulis mensibus soluunt 6. aureos. Quantū ergo erit omniū victus pretium ad 4. annos? Hæc quæstio ita recte proponeretur. Vnus in vno mense soluit 6. aureos: quid ergo soluent 8. in 4. annis, hoc est, in 48. mensibus? Ita autem collocandi erunt numeri.

Conuictor.	Menses.	Aur.	Conuictores.	Menses.
1.	1.	6	8.	48.
	fiunt	Aur.	2304.	

Vbi

Vbi vides, primum numerum vnius conuictoris habere adiunctum vnum mensem, tertium autem 8. conuictorum habere adiunctos 48. menses. Primo ergo ita instituetur regula triũ. Si vnus soluit 6. aureos, quantum soluent 8? vt hic.

Conuict.	Aur.	Conuict.		Aur.
1.	6.	8.?	fiunt	48.

Soluent ergo 8. conuictores in vno mense 48. aureos, cum vnus soluat 6. aureos in mense. Secundo ergo iterum ita instituetur regula trium. Si in vno mense soluũt 48. aureos, quantũ soluẽt in 48. mẽsibus? vt hic.

Mensis.	Aur.	Menses.		Aurei.
1.	48.	48.?	fiunt	2304.

Breuius tamen eadem quæstio explicabitur, si tam duo numeri in principio quæstionis primo loco positi inter se, quàm duo tertio loco positi inter se multiplicẽtur, vt fiant tres numeri regulæ trium hoc modo.

	Aur.			Aur.
1	6.	384?	fiunt	2304.

Nam ex hac multiplicatione procreantur numeri maiores conuictorum pro vno mense, qui æquiualent minoribus pro pluribus mensibus, vt ex multiplicatione 8. conuictorum per 48. menses producuntur 384. cõuictores pro vno mẽse. Si enim singulis mensibus sunt 8. conuictores, procul dubio in 48. mensibus, si accederent semper noui conuictores, fierent 384. conuictores: atq; ita tantum soluent hi 384. conuictores in vno mense, quantum 8. conuictores in 48. mensibus. Hæc est causa, cur multiplicandi sint numeri principales per adiunctos minus principales, qui tempus significant, vel aliud quippiam, dummodo nõ sit de eadẽ re, quã significant numeri principales: alioquin nõ essent duo numeri, sed vnus. Vt si in aliquo loco positi sint

aurei, baiochi, & quatrini, censebuntur tres hi numeri pro vno, cum sint de eadem re, vtpote qui monetam significent. Eademq; ratio est proportione quadam in alijs huiusmodi quæstionibus.

Quæstio 2. 2. Pro 200. libris quarundã mercium aduectis per 100. milliaria soluendi sunt 4. aurei. quantum ergo soluendum est pro 300. libris aduectis per 400. milliaria? Ita collocabuntur numeri.

Lib. Mill.	Aur.	Lib. Mill.	Aur.
200. 100.	4.	300. 400. ?	fiunt 24.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij loci inter se, confecti erunt tres numeri regulæ trium hoc pacto.

Aur.		Aur.
20000.	4.	120000. ? fiunt 24.

Si eadem hæc quæstio soluenda sit per regulam trium bis repetitam, ita stabit primo loco exemplum.

Lib.	Aur.	Lib.	Aur.
200.	4.	300. ?	fiunt 6.

Atq; ita soluẽdi essent 6. aurei pro 300. libris per 100. milliaria aduectis, per quot nimirũ 200. libras sunt aduectæ: Sed quoniã 300. libræ vehendæ sunt per 400. milliaria, ita rursus stabit secundo loco exemplum.

Mill.	Aur.	Mill.	Aur.
100.	6.	400.	fiunt 24.

Quæstio 3. 3. Tres personæ consumunt modiũ tritici 3. aureis emptũ in 5. septimanis. quantus ergo est singularũ sumptus in vno die? Ita numeri ordinandi erunt.

Pers.	Sept.	Aur.	Pers.	Dies.
3.	5.	3.	1.	1. ?

fiunt Aur. $\frac{3}{1}\frac{3}{0}\frac{3}{5}$. hoc est, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Redu-

Reductis autem 5. septimanis ad dies, vt primus numerus, ac tertius similes sint, ita stabit exemplum.

Pers.	Dies.	Aur.	Pers.	Dies.
3.	35.	3.	1.	$1\frac{2}{7}$.

fiunt Aur. $\frac{3}{1}\frac{3}{0}\frac{}{5}$. hoc est, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Multiplicatis duob numeris primi loci, & duobus tertij inter se, disponentur tres numeri ad regulam trium hoc modo.

Aur.	Aur.	quatrini.
105. 3.	1.?	fiunt $\frac{3}{1}\frac{3}{0}\frac{}{5}$. hoc est, $11\frac{3}{7}$.

Per regulã triũ bis repetitã ita soluetur eadẽ quæstio.

Pers.	Aur.	Pers.		Aur.
3.	3.	1.?	fiunt	1.

Item.

Dies.	Aur.	Dies.	Aur.	quatrini.
35.	1.	1.?	fiunt $\frac{1}{3}\frac{}{5}$.	hoc est, $11\frac{3}{7}$.

4. Si 300. aurei in 4. annis lucrantur 100. aureos, quid lucrabuntur 1580. aurei in 7. annis? Multiplicatis aureis, qui ad lucrum exponuntur, per tempus adiunctum, ita stabit exemplum. Quæstio 4.

Aur.		Aur.		Aur.
1200.	100.	11060.?	fiunt	$921\frac{2}{3}$.

Per regulam trium bis repetitam ita stabit exemplum.

Aur.	Aur. lucrum.	Aur.		Aur. lucrum.
300.	100.	1580.?	fiunt	$526\frac{2}{3}$.

Item.

Anni.	Aur.	Anni.		Aur.
4.	$526\frac{2}{3}$.	7.?	fiunt	$921\frac{2}{3}$.

5. Quidam in tribus mẽsibus 10. aureis lucratus est 4. aureos. in quanto ergo tempore 100. aureis lucrabitur 2000. aureorum? Hæc quæstio redigi non po- Quæstio 5.

test ad simplicem regulam trium, propterea quòd tempus, in quo 100. aurei lucrari debent 2000. aureos, ignotum est, atque adeo per 100. aureos multiplicari non potest. Adhibenda ergo erit regula trium bis, hoc modo.

Aur.	Aur. lucr.	Aur.		Aur. lucr.
10.	4.	100. ?	fiunt	40.

Atq; ita 100. aurei lucrabuntur 40. aureos in tribus mensibus, in quibus 10. aurei lucrati sunt 4. Quare vt sciatur, in quanto tempore 100. aurei lucraturi sunt 2000. instituetur secundo regula trium hoc modo.

Aur.	Menses.	Aur.		Menses.
40.	3.	2000. ?	fiunt	150.

Itaq; si 10. aurei in 3. mensibus lucrantur 4. aureos, 100. aurei lucrabuntur 2000. aur. in 150. mensibus. Quod facile probabitur, si quæstio ita proponatur. Si 10. aur. in 3. mens. lucrantur 4. aur. quantum in 150. mens. lucrabuntur aurei 100? Reperietur enim lucrum 2000. aur. vt hic apparet.

Aur.	Mens.	Aur.	Aur.	Mens.		Aur.
10.	3.	4.	100.	150. ?	fiunt	2000.

Nam si tempus quodlibet per suam pecuniam multiplicetur, stabit exemplum ad simplicem regulam triũ reductum hoc modo.

	Aur.		Aur.
30.	4.	15000. ?	fiunt 2000.

Quæstio 6. 6. Si 100. aurei in 8. mensibus lucrãtur 20. aureos, in quanto tempore ijdem 100. aurei lucrabuntur 3000. aur. ? Dispositio numerorum ita se habet.

Aur.	Mens.	Aur.		Mens.
20.	8.	3000. ?	fiunt	1200.

Quando

Quando enim eadem semper summa exponitur ad lucrum, non ponenda est ea inter numeros alios. Idem etiam fiet, quando idem tempus proponitur, vt in sequenti exemplo apparebit.

Quæstio 7.

7. Si 300. aurei in 7. mensibus lucrãtur 45. aureos, quid lucrabuntur 1780. aurei in eisdem 7. mensibus? Ita stabit exemplum.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.	Lucr. aur.
300.	45.	1780.?	fiunt 267.

Quæstio 8.

8. Si singulis militibus in singulos menses tribuerentur 4. aurei, quantum pecuniæ expenderetur in 13000. militum nouem mensibus? Ita stabit exemplũ.

Milit.	Mens.	Aur.	Milit.	Mens.	Aur.
1.	1.	4.	13000.	9.	fiũt 468000.

Quæstio 9.

9. Si 10. equis quotidie dentur 7. mensuræ hordei, vel auenæ, quot mensuræ, iuxta eandem distributionem, conuenient 100. equis ad 20. dies? Ita stabit exemplum.

Equi.	Dies.	Mensuræ.	Equi.	Dies.	Mensuræ.
10.	1.	7.	100.	20.?	fiunt 1400.

Quæstio 10.

10. Si 12. messores demetant 20. iugera in 9. diebus, quanto tempore 30. messores demetent 45. iugera? Hic opus est regula trium bis repetita, primo tamen loco euersa, quòd 30. messores minori tempore indigeant ad demetenda 20. iugera, quàm 12. messores. Ita ergo stabit regula trium euersa.

Messores.	Dies.	Messores.	Dies.
12.	9.	30.?	fiunt $3\frac{3}{5}$.

Atq; diebus $3\frac{3}{5}$. demetent 30. messores 20. iugera. Quare ita rursum stabit exemplum ad regulam trium.

Iugera.	Dies.	Iugera.	Dies.
20.	$3\frac{3}{5}$.	45.?	fiunt $8\frac{1}{10}$.

Quæstio 11. 11. Romæ aureus ducatus æstimatur Iulijs 11½. hoc est, baiochis 115. Quot ergo eiusmodi ducatos recipiam pro 1000. aureis, quorum singuli 10 Iulijs, siue 100. baiochis æstimantur? Vel si 20. ducati constituant 23. aureos, quot aureos efficient 1000. ducati? Vtrumq; exemplum sic stabit, reductis prius 1000. aureis ad baiochos 100000.

Baioc.	Duc.	Baioc.		Duc.
115.	1.	100000. ?	fiunt	869 1/2 3/3.

Aur.	Duc.	Aur.		Duc.
23.	20.	1000. ?	fiunt	869 1/2 3/3.

Quæstio 12. 12. Quot aureos reddent 4000. duc. si 1. aureus contineat 100. baiochos, at 1. ducatus 115 baiochos? vel si 20. ducati æstimentur 23. aureis? Reductis 4000. ducatis ad baiochos 460000. sic stabit vtrūq; exēplū.

Baioc.	Aur.	Baioc.		Aur.
100.	1.	460000. ?	fiunt	4600.

Duc.	Aur.	Duc.		Aur.
20.	23.	4000. ?	fiunt	4600.

Quæstio 13. 13. Mercator quidam emit 300. libras cuiusdā mercis aureis 60. scire autem cupit, quantum pro 100. aureis lucretur, si easdem 300 libras vendat 64. aureis? Vel quantum pro 100. aureis perdat, si 300. illas libras vendat 57. aureis? Hic manifestū est, eū pro 60. aureis lucrari 4. aureos, vel perdere 3. aureos, vt patet, si minus pretium à maiori subducatur. Dic ergo. Si 60. aur. lucrantur 4. aur. vel perdunt 3. aur. quantum lucrabuntur, vel perdent 100. aurei?

Aur.	lucr. aur.	Aur.		lucr. aur.
60.	4.	100. ?	fiunt	6 2/3.

Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
60.	3.	100. ?	fiunt	5.

14. Quæ-

14. Quærit apud se mercator quidam, quanti emendæ sint libræ 100. alicuius mercis, vt eædē postea venditæ 64. aureis lucrum dent aur. $6\frac{2}{3}$. pro 100. aureis? Perspicuū est, eum, qui $6\frac{2}{3}$. aur. lucrari vult pro 100. aur. augere velle 100. vt fiant $106\frac{2}{3}$. Dic ergo. Si $106\frac{2}{3}$. aur. qui continent & pretium 100. aureorum, & lucrum $6\frac{2}{3}$. aur proueniunt ex 100. aureis, ex quo prouenient 64. aurei, qui continent & pretium 100. librarum ignotum, & lucrum simul ignotum etiam, quod reddat $6\frac{2}{3}$. pro 100? Quæstio 14.

Pretium, & lucrum.	Aur.	Pretium, & lucrum.	Aur.
$106\frac{2}{3}$.	100.	64. ?	fiunt 60.

Emendæ ergo sunt 100. libræ aureis 60. Nam diuendi tæ postea 64. aureis dant lucrum 4. aureorum, at pro 100. dabunt lucrum $6\frac{2}{3}$. aur.

15. Empta est gemma quædam, quæ si vendatur 200. aureis, perduntur 10. aurei pro 100. quanti ergo constitit gemma illa? Hic etiam clarum est, eum, qui perdit 10. pro 100. facere 90. ex 100. Dic ergo. Si 90. aur. fiunt ex 100. aur. ex quo fient 200. aur? Quæstio 15.

Aur.	Aur.	Aur.	Aur.
90.	100.	200.	fiunt $222\frac{2}{9}$.

Constitit ergo gemma illa $222\frac{2}{9}$. aur. Quod vt probes, dic. Si ex $222\frac{2}{9}$. aur. fiunt 200. aur. quid fiet ex 100? Inuenies enim fieri 90. aureos, ac proinde damnum fieri 10. aureorum pro 100. vt hic vides.

Aur.	Aur.	Aur.	Aur.
$222\frac{2}{9}$.	200.	100. ?	fiunt 90.

Vel dic. Si pro $222\frac{2}{9}$. aur. amitto $22\frac{2}{9}$. aur. (Nam si gemma illa empta sit $222\frac{2}{9}$. aur. vendatur aūt 200. aureis, liquido constat, damnum fieri $22\frac{2}{9}$. aur.) pro 100. quid amittam? Inuenies enim damnum 10. aureorum, vt hic apparet.

Aur.	Damnum aur.	Aur.	Damnum aur.
$222\frac{2}{9}$.	$22\frac{2}{9}$.	100. ?	fiunt 10.

Quæstio 16. 16. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quas si 3. aureis minoris emisset, & vendidisset postea 3600. aureis, lucratus fuisset 10. pro 100. aureis, quanti ergo 1000 illas vlnas emit? Quoniam qui lucrari cupit 10. pro 100. vult ex 100. facere 110. Dic ergo. Si 110. fiunt ex 100. ex quo fient 3600? vt hic cernis.

Aur.	Aur.	Aur.	Aur.
110.	100.	3600. ?	fiunt $3272\frac{8}{11}$.

Si igitur voluisset tm̃ lucrari 10. pro 100. constitissent illæ 1000. vlnæ aureis $3272\frac{8}{11}$. Nam si $3272\frac{8}{11}$. aur. dant 3600. aureos, aurei 100 dabũt 110. aureos, ac proinde 10. cedent in lucrum ex 100. vt hic patet.

Aur.	Aur.	Aur,	Aur.
$3272\frac{8}{11}$.	3600.	100. ?	fiunt 110.

Vel si $3272\frac{8}{11}$. aur. lucrantur $327\frac{3}{11}$. aur. (Qui enim emit quippiam $3272\frac{8}{11}$. aureis, postea autem vẽdit aureis 3600. lucratur necessario $327\frac{3}{11}$. aur.) 100. aurei lucrabuntur 10. aur. vt hic vides.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.	Lucr. aur.
$3272\frac{8}{11}$.	$327\frac{3}{11}$.	100. ?	fiunt 10.

Sed quoniam in quæstione additũ est, eum lucraturũ fuisse 10. aur. pro 100. si 1000. illas vlnas 3. aureis minoris emisset, vendidisletq; 3600. aureis; liquido constat, eũ 3. aureos expendisse vltra $3272\frac{8}{11}$. aureos. Quare 1000. vlnæ constiterunt $3275\frac{8}{11}$. aur.

Quæstio 17. 17. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quæ si 6. aureis pluris constitissent, & venditæ postea fuissent 3600. aureis, perditi fuissent 10. aurei pro 100. quantum ergo fuit pretium illarum 1000. vlnarum?

Quo-

Quoniam qui perdit 10. pro 100. facit 90. ex 100. Dic ergo. Si 90. fiunt ex 100. ex quo fient 3600?

Aur. Aur. Aur. Aur.
90. 100. 3600.? fiunt 4000.

Si igitur perdidisset tantum 10. pro 100. constitissent 1000. vlnæ 4000. aureis. Nã si 4000. aur. dant 3600. aur. dabũt 100. aurei aureos 90. vt patet. Vel si 4000. aur. perdunt 400. aur. (Qui enim emit rem aliquam 4000. aureis, eandem autem vendit 3600. aureis, perdit omnino 400. aureos.) 100. aurei perdent 10. aureos, vt hic vides.

Aur. Damn. aur. Aur. Damn. aur.
4000. 400. 100.? fiunt 10.

Quia vero additum est in quæstione, eum perditurum fuisse 10. pro 100 si 1000. vlnas 6. aureis pluris emisset, easq; vendidisset postea 3600. aureis; liquet, eum 6. aureos minus expendisse, quàm 4000. Quare 1000. vlnæ constiterunt 3994. aureis.

18. Qui singulas libras mercis alicuius vendit 20. baiochis, lucratur 30. pro 100. quantum ergo lucrabitur, si vendat maiori pretio, nempe 24. baiochis? Hic primum inuestigare oportet, quanti constat vna libra, vt vendita 20. baiochis det lucrum 30. pro 100. vt in quæstione 14. docuimus, hoc modo. Si 130. (pretium nimirum 100. & lucrum 30.) proueniunt ex 100. vt pretio, ex quo prouenient 20. baiochi, qui continent & pretium vnius libræ ignotum, & lucrũ simul, ignotum etiam, quod reddat 30. pro 100.? Quæstio 18.

130. 100. 20.? fiunt $15\frac{5}{13}$.

Constabit ergo vna libra $15\frac{5}{13}$. baiochis. Ita enim fiet, vt cum $15\frac{5}{13}$. baiochi (vna libra vendita 20. baiochis) lucrentur baiochos $4\frac{8}{13}$. ex 100. baiochis lucrifiant baiochi 30. vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$. $4\frac{8}{13}$. 100? fiunt 30.

Iam

Iam vero inuento pretio vnius libræ, $15\frac{5}{1\ 2}$. baioch. perſpicuũ eſt, ſi vna libra vendatur 24. baiochis, ex baiochis $15\frac{5}{1\ 2}$. lucrifieri baiochos $8\frac{8}{1\ 3}$. Quare ex 100. baioch. lucrifient 56. baiochi, vt hic vides.

$15\frac{5}{1\ 3}$. $8\frac{8}{1\ 3}$. 100? fiunt 56.

Quæſtio 19. 19. Qui 100. libras mercis alicuius vendit 10. aureis, perdit 10. pro 100. quantum ergo pro 100. perdet, ſi eas vendat minori pretio, nempe 8. aureis? Hic etiam primum inueſtigare oportet, quanti conſtãt 100. illæ libræ, vt venditæ 10. aureis damnum inferant 10. aureorum pro 100. vt in quæſtione 15. docuimus, hoc modo. Si 90. fiunt ex 100. (qui enim perdit 10. pro 100. facit 90 ex 100.) ex quo numero fient 10?

90. 100. 10.? fiunt $11\frac{1}{9}$.

Emptæ ergo ſunt illæ 100. libræ aureis $11\frac{1}{9}$. Ita enim fiet, vt cũ $11.\frac{1}{9}$. aur. (venditis 100. illis libris 10. aureis) perdãt aur. $1\frac{1}{9}$. perdant 10. p 100. vt hic cernis.

$11\frac{1}{9}$. $1\frac{1}{9}$. 100.? fiunt 10.

Inuento autem pretio 100. illarum librarũ, $11\frac{1}{9}$. aur. manifeſtum eſt, ſi eædem 100. libræ vendãtur 8. aureis, ex $11\frac{1}{9}$. aureis amitti aureos $3\frac{1}{9}$. Quamobrem pro 100. perdentur 28. vt hic vides.

$11\frac{1}{9}$. $3\frac{1}{9}$. 100.? fiunt 28.

Quæſtio 20. 20. Mercator quidam in Luſitania emit 50000. libras piperis, aureis 10000. & ibidem pro vectigali ſoluit aureos 500. Naulum autem illinc in Italiam conſtitit 300. aureis, & in portu aliud vectigal exactum eſt 200. aur. Vectura deinde à mari Florentiam vſq; cõſtitit 100. aureis, ibiq; aliud vectigal perſolutum 100. aur. Miniſtris deniq; ad eam negotiationem miſſis pro mercede,

mercede, & victu dati sunt 1000. aurei. Verum hæsitat, quanti vendenda sit libra, vt supra omnes impensas de singulis libris lucretur 2. Iulios. Hic omnes impensas primum in vnam summam colligere oportet, vt habeat pretiũ, quod cũ omnibus illis impensis p 50000. libris expositũ est. Summa aũt hæc in exemplo dato cõplectitur 12200. aur. Quare si 50000. lib. constant 12200. aureis, siue 122000. Iulijs, vna libra cõstabit $2\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. Iul. vt hic vides.

	Aurei.
Piper.	10000.
Vectigal.	500.
Naulum.	300.
Vectigal.	200.
Vectura.	100.
Vectigal.	100.
Ministri.	1000.
	12200.

Lib.	Iul.	Lib.		Iul.
50000.	122000.	1.	fiunt	$2\frac{1}{2}\frac{1}{5}$.

Igitur si singulas libras vendat $4\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. Iul. lucrabitur de singulis libris Iulios 2.

REGVLA SOCIETATVM. Cap. XX.

SEQVITVR societatum regula imensum vsum apud mercatores habens: quæ quidẽ tota nititur regula trium, vt ex propositis exẽplis fiet perspicuum. Adhibetur autem, quãdo plures consortium ineunt, ita vt singuli summã quandã pecuniæ cõferant, sitq; hoc modo. Pecuniæ omnium in vnã summam colliguntur, & numerus collectus primo loco in regula trium statuitur: Secundum vero locum occupat lucrum commune, vel damnum, quod ex omniũ pecunijs prouenit: Tertium deniq; locum tenent pecuniæ singulorum, &c. ita vt toties adhibenda sit regula triũ, quot sunt illi, qui societatẽ inierunt. Quando autem

Regula societatum quãdo adhibetur, & quo pacto fiat.

Quoties regula trium adhibenda sit in regula societatũ

Quando est diuersitas temporum in regula societatis, quid agendum.

do autem interuenit temporũ diuersitas, multiplicãdi erit cuiusq; pecunia per suum tempus, antequã omniũ pecuniæ in vnam summã colligantur: Deinde hi numeri producti colligendi in vnam summã, vt habeatur primus numerus in regula triũ: Tertium autem locũ occupabunt singuli numeri producti ex multiplicatione pecuniæ cuiusq; in suum tempus, collocato rursus lucro, vel damno communi in medio loco. Id quod in exemplis manifestum erit, quorum primum hoc sit.

Quæstio 1.

1. Quatuor mercatores, inito cõsortio, lucrati sunt in nundinis quibusdam 6000. aur. Primus aũt illorũ contulit tantũ 60. aur. secundus 100. tertius 120. & quartus 200. In quæstionẽ iam vocatur, quid quisq; ex illo lucro accipere debeat, habita ratione pecuniæ, quam exposuit. Ante omnia colligenda est summa ex omniũ pecunijs, quæ est 480. aur. Deinde quater instituenda est regula trium hoc modo. Si 480. aurei (quæ est pecunia ex omnium pecunijs collecta) lucrati sunt 6000. aur. quid lucrabuntur 60. aur. quid 100. quid 120. & quid 200. quos singuli posuerunt? veluti hic apparet.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.	fiunt	Lucr. aur.
480.	6000.	60. ?		750. Primi.
		100. ?		1250. Secũdi.
		120. ?		1500. Tertij.
		200. ?		2500. Quarti.
				6000.

Facta operatione, vt præcipit regula trium, reperies, primum debere accipere 750. aur. secundum 1250. tertium 1500. & quartum 2500.

Examen huius rei erit, si lucra omniũ in vnam summã collecta efficiant lucrum totum, vt hic factũ esse vides.

Quæstio 2.

2. Tres mercatores, emptis mercibus nauem onerarunt. Primi merces constiterunt 300. aur. secundi 500. tertij 180. Graui deinde tempestate orta, proiectæ sunt in mare merces graviores, quæ constabant

400.

400. aur. Conuenit aũt inter eos, vt iactura hæc cõmunis sit. Quantum ergo quisque damnum feret pro rata suarum mercium portione? Colligantur in vnam summam aurei omnium, & numerus collectus 980. in primo loco regulæ trium collocetur, damnũ vero cõmune in secundo, & pecuniæ singulorum in tertio, vt hic vides.

		Aur.		Damn. aur.	
Aur. 980.	Damn. aur. 400.	300?	fiũt	122 4/9 4/8 0/0.	primi.
		500?		204 9/8 0/0.	secũdi.
		180?		73 4/9 6/8 0/0.	tertij.

Primus ergo perdet 122 4/9 4/8 0/0 aur. secundus 204. 9/8 0/0 & tertius 73 4/9 6/8 0/0.

3. Tres emere volunt 4000. lib. sacchari, quæ æstimantur 500. aur. Primus tamen vult 1300. lib. secundus 1460. tertius deniq; reliquas lib. 1240. quantum ergo soluet quilibet? Dic, si 4000. lib. valent 500. aur. quid valent 1300. lib. quid 1460 & quid 1240. lib. quas singuli capere volunt? Inuenies enim primũ soluere aur. 162 1/2. secundum 182 1/2. & tertium 155. vt hic vides. Quæstio 3.

		Lib.		Aur.	
Lib. 4000.	Aur. 500.	1300?	fiunt	162 1/2.	Primi.
		1460?		182 1/2.	Secũdi.
		1240?		155.	Tertij.

4. Tres, societate inita, lucrati sunt 1000. aur. Primus exposuit 200. aur. eosq; post 8. menses repetijt. Secundus contulit 450. aur. cosq; post 6. menses recepit. Tertius deniq; 500 aur. attulit, eosq; in negotiatione reliquit 10. mensibus. Quantum ergo quisq; ex lucro accipiet, habita ratione suæ pecuniæ, & temporis? Cuiusq; pecunia per suũ tempus multiplicetur, & numeri producti in vnam summam colligantur, pro primo numero regulę triũ: secundũ vero locũ occupet Quæstio 4.

lucru m

lucrum: tertium deniq; tres illi producti. In nostro exemplo, ex pecunia primi in suum tempus fiunt 1600. ex pecunia secundi in suum tempus, 2700. ex pecunia tertij in suum tempus 5000. horum autem productorum summa est 9300. Sic ergo stabit exemplum.

Lucr. aur. 9300. 1000. (1600? 2700? 5000?) fiunt Lucr. aur. (172 4/9. Primi. 290 3/9. Secúdi. 537 3/9. Tertij.)

Quæstio 5. 5. Tres, societate inita, lucrati sũt 1000. aur. Primus posuit 300. aur. per 10. menses. Secũdus attulit 700. aur. Tertius vero 800. aur. Accepit autem primus ex lucro 500. aur. secundus 300. & tertius 200. Quanto ergo tempore fuerunt duorum posteriorũ pecuniæ in negotiatione? Quoniam, vt in præcedenti quæstione dictum est, pecunia cuiusq; in suum tempus multiplicanda est; multiplicabimus pecuniam primi per suũ tempus, faciemusq; 3000. atq; ex hoc producto proueniet lucrum primi. Vt igitur sciamus, ex quibusnam productis lucra posteriorum duorum proueniant, dicemus. Si 500. aur. (quod est lucrum primi) proueniunt ex 3000. ex quo prouenient 300. & 200. aur. quæ sunt lucra posteriorum? Veluti hic apparet.

Lucr. aur. 500. 3000. (Lucr. aur. 300? 200?) fiunt (1800. Secúdi. 1200. Tertij.)

Secundi ergo tempus per suam pecuniam multiplicatum facit 1800. Tertij vero 1200. Quare si 1800. diuidamus per 700. hoc est, per pecuniam secundi, inueniemus menses 2 4/7. quibus à secundo expositi sunt ad lucrum 700. aurei. Item si 1200. partiamur per 800. id est, per pecuniam tertij, reperiemus menses 1 1/2. pro tertio.

Hoc ita esse experieris, si ita consortium proponas.

Tres,

Tres, i nito consortio, lucrati sunt 1000. aur. Primus posuit 300. aur. per 10. menses: secundus 700. aur. per menses $2\frac{4}{7}$. tertius denique 800. aur. per $1\frac{1}{2}$. mens. Quantum ergo quisq; pro rata pecuniæ suæ, ac temporis portione ex lucro accipiet? Si cuiusq; pecunia per suum tempus multiplicetur, faciemus ex pecunia primi in suum tempus, 3000. ex pecunia secundi in suum tempus, 1800. ex pecunia tertij in suum tempus, 1200. Hi autem tres producti faciunt summam 6000. Sic ergo stabit exemplum.

Lucr. aur.				Lucr. aur.	
6000.	1000.	3000?	fiunt	500.	Primi.
		1800?		300.	Secúdi.
		1200?		200.	Tertij.

Vbi vides prodijsse lucra singulorum, sicut in quæstione proponebantur. Recte ergo tempora duorum posteriorum explorata sunt.

6. Quatuor societatem inierunt biennio duraturã, lucratiq; sunt 10000. aur. Primus in initio societatis attulit 3000. aur. & post mensem octauum transactum abstulit ex illis 1000. aureos. Vicesimo deinde mense inchoante exposuit rursum 1200. aur. Secũdus à principio dedit 2400. aur. & post 6. menses elapsos abstulit 800. aur. sed ad initium mensis 16. denuo protulit 1400 aur. Tertius sub initiũ consortij exhibuit 2000. aur. transactisq; 7. mensibus, totam pecuniam suam repetijt: sed mense 18. incipiente, iterũ posuit 1600. aur. Quartus denique, inchoante 7. mense exposuit 1800. aur. & post 4. menses finitos recepit 900. aur. sed ad initium mensis 17. rursus contulit 1500. aur. Quantũ ergo quilibet ex cõmuni lucro pro ratione suæ pecuniæ, ac temporis recipiet? Hic diligenter explorandũ est, quãtam quisq; pecuniam, & quanto tempore exposuerit, vt semper pecuniam per tempus multiplicemus, &c. Quod vt planius fiat, exemplum propositum ita explicabimus. Quæstio 6.

Quoniam primus in principio consortij dedit 3000.

aur.

aur. recepitq; 1000. post 8. menses exactos, manifestum est, eũ in cõmuni negotiatione exposuisse 3000. aur. per 8. menses. Multiplicantes ergo 3000. per 8. faciemus 24000. Et quia post 8. menses elapsos abstulit 1000. aur. certum est, remansisse in cõmuni consortio 2000. aur. vsq; ad finem 19. mensis, vbi nouã pecuniam contulit. Auferentes igitur 8. menses ex 19. remanent 11. menses, quibus expositi tantum 2000. aur. & multiplicantes 2000. per 11. faciemus 22000. Post hæc, quoniam denuo attulit 1200. aur. ad initium 20. mensis vsq; ad finem secundi anni, liquet, si addamus hos 1200. aur. ad 2000. aur. eum in communi negotiatione per 5. reliquos menses duorũ annorum habuisse 3200. aur. multiplicantes ergo 3200. per 5. faciemus 16000. Colligentes iam tres hosce productos 24000. 22000. 16000. in vnam summam, efficiemus 62000. qui numerus erit positio primi, productus ex pecunijs, & temporibus ipsius.

Rursus, quoniam secundus per 6. menses imposuit 2400. aur. propterea quòd elapso 6. mense, abstulit 800. aur. multiplicabimus 2400 per 6. faciemusque 14400. Quia vero ad principium 16. mensis, nouã pecuniam dicitur exhibuisse, perspicuum est, eum per 9. menses à principio 7. mensis vsq; ad finem 15. habuisse in consortio communi 1600. aur. qui relinquuntur, subtractis 800. ex 2400. Multiplicantes igitur 1600. per 9. faciemus similiter 14400. Deinde, quia dicitur ad initium 16. mensis iterum posuisse 1400. aur. manifestum est, hanc pecuniam expositam esse per reliquos 9. menses duorum annorum: quibus si addantur aurei 1600. qui adhuc in cõmuni negotiatione exponũtur, fient aurei 30000. qui per 9. illos vltimos menses in communi vsu fuerunt. Multiplicantes ergo 3000 per 9. faciemus 27000. Collectis autem tribus hisce productis 14400. 14400. 27000. in vnam summam efficiemus 55800. pro numero secundi producto ex pecunijs, & temporibus ipsius.

Post hæc, cum tertius per 7. menses cõtulerit 2000.

aur.

aur. quòd eos repetierit post 7. menses elapsos; multiplicabimus 2000. per 7. efficiemusque 14000. Sed quia ad principium 18. mensis denuo exhibuit 1600. aur. multiplicabimus 1600. per 7. (tot enim menses ex duobus annis supersunt) faciemusq; 11200. Collectis aût duobus hisce productis 14000. 11200. in vnã summam, procreabimus 25200. numerum ex pecunijs, ac temporibus tertij mercatoris productum.

Quia tandẽ quartus à principio 7. mensis per 4. menses posuit 1800. aur. multiplicabimus 1800. per 4. efficiemusq; 7200. Sed quia, finitis 4. mensibus, recepit 900. aur. relicti sunt 900. aurei, qui fuerunt in negotiatione per 6. menses, à principio 11. mensis vsq; ad finem 16 mensis, quando nouã pecuniam attulit. Multiplicantes ergo 900. per 6. faciemus 5400. Quoniam vero sub principiũ 17. mensis posuit iterum 1500. aur. vsq; ad finem duorũ annorũ, additis 900. aur. qui adhuc in cõmuni vsu sunt, fient 2400. Multiplicantes ergo 2400. per 8. menses residuos, faciemus 19200. Collectis autem tribus hisce productis 7200. 5400. 19200. in vnam summam, efficiemus 31800. pro numero ex pecunijs, temporibusq; quarti mercatoris procreato.

Iam verò colligentes hos quatuor numeros 62000. 55800. 25200. 31800. qui ex singulorũ pecunijs, ac tẽporibus ꝓducti sunt, in vnã summã, faciemus 174800. ꝓ primo numero regulę triũ. In secdo aût loco erit lucrũ cõe, & in tertio numer⁹ ex pecunijs, & tporib⁹ cuiusq; ꝓcreatus, vt in 4.ꝙone dictũ est. Ita ergo stabit exẽplũ.

174800. 10000. { 62000. ? / 55800. ? / 25200. ? / 31800. ? } fiunt

3546 1/1 5/7 6/4 2/8. primi.
3192 1/1 5/7 4/8 4/8. secundi.
1441 1/1 1/7 3/4 2/8. tertij.
1819 1/1 3/7 8/4 8/8. quarti.

7. Tres ineunt societatẽ. Primus confert 400. aur. Quæstio.

Secundus 300. aur. & 86. baioc. Tertius 1000. aur. Iul. 7. baioc. 9. In ipsa autē negotiatione vsi sunt fortuna aduersa, iacturamq; fecerunt de tota summa 100. aureorum. Quantū ergo est cuiuslibet damnū? Reductis omnibus ad baiochos, fient pro primo 40000. baiochi; pro secundo, 30086. pro tertio vero 100079. quorum omnium summa est 170165. Ita ergo stabit exemplum.

	Baioc.		Damn. baioc.
Si	170165.	dant	10000.

	Baioc.		Damn. baioc.
Quid	40000?	fiunt	2350 1/1 1/7 2/8 2/2 5/8 0/0.
	30086?		1768 1/1 7/4 0/9 1/6 6/3 3/3.
	100079?		5881 1/1 7/0 1/1 6/5 5/5.

Quæstio 8.

8. Tres societatem inierunt. Primus attulit 100. aur. eosq; in societate reliquit 12. mensibus. Secundus contribuit 240. aur. Tertius aureum torquem, cuius pretium repetijt, post decem menses elapsos. Lucrum acquisitum fuit 138. aureorum. Facta autē debita distributione, primus habuit 60. aur. secundus 48. & tertius 30. Quot ergo mensibus reliquit secundus pecuniam collatam in consortio, & quanti torques aureus æstimatus, vt dictæ portiones lucri cuilibet deberentur? Quoniam pecunia cuiusq; per suū tempus multiplicari debet, multiplicabimus 200. aur. primi per 12. menses, faciemusq; 2400. atq; ex hoc numero illi prouenerunt 60. aur. Dic ergo, vt scias, ex quo secundus lucrū 48. aureorū acquisierit: Si 60 aur. prouenerunt ex 2400. ex quo prouenerunt aurei 48? vt hic vides.

60. 2400. 48? fiunt 1920.

Inuenieſq; 1920 qui numerus productus est ex 240. aur. secundi in suum tempus. Diuiso igitur numero dicto 1920 per 240 prodibunt menses 8 quibus pecunia secundi in negotiatione mansit. Rursus, vt scias, ex quo tertius lucrum 30 aureorum adeptus sit, dic. Si lucrū primi 60. aur. prouenit ex 2400. ex quo oritur

tur lucrum tertij 30. aur.? Vel si lucrum secundi 48. aur. ortum est ex 1920. ex quo proueniet lucrum tertij 30. aur.? vt hic cernis.

60. 2400. 30? fiunt 1200.
48. 1920. 30? fiunt 1200.

Semper enim inuenies numerum 1200. qui productus est ex 10. mensibus tertij in suam pecuniam, hoc est, in pretium torquis. Diuiso ergo hoc numero 12 0. per 10. menses, prodibit valor torquis aureorum 120. quos tertius ad negotiationem per 10. menses attulit.

Rem ita se habere, cognosces, si ita proponas sodalitatem. Tres, consortio inito, lucrati sunt 138. aur. Primus contulit 200. aur. per 12. menses: secundus 240. aur. per 8. menses: & tertius 120. aur. per 10. menses Quantum ergo cuilibet de lucro debetur? Multiplicata enim pecunia cuiusq; per suum tempus, inuenies lucra singulorum, quemadmodum in quæstione dictum est, vt hic apparet.

				Lucr. aur.
5520.	Lucr. aur 138.	2400? 1920? 1200?	fiunt	60. primi. 48. secundi. 30. tertij.

9. Tres, inito consortio per annũ duraturo, lucrati sunt summã quandã aureorum. Primus exposuit statim ab initio 1000. aur. secundus vero aureos, nescio quot, contulit post 2. menses exactos: Tertius demum post 4. menses à secundo contribuit etiam multitudinem aureorũ mihi ignotam. Finita tamen societate, lucrum participarunt æqualiter. Quid ergo secundus & tertius in eam societatem contulerunt? Multiplicando 1000 aur. primi per 12. menses, quibus eos in sodalitate reliquit, fient 12000. Ac tantundem debet fieri ex pecunia secundi in suum tempus, atq; ex pecunia tertij in suum tempus: quandoquidé æqualia lucra habere debent. Quoniam vero secundus pecuniam suã 10. mensibus reliquit in negotiatione, si partiamur,

Quæstio 9.

12000. per 10. inueniemus pecuniam secundi fuisse 1200. aur. at si diuidamus per 6. menses, quibus tertius suam pecuniam exposuit, deprehendemus pecuniam tertij fuisse 2000. aur. Nam hac ratione ex pecunia cuiusq; in suũ tempus producetur numerus 12000. qui tertium locũ in regula triũ occupabit; ac proinde æqualia lucra omnes tres habebunt, quodcunq; fuerit lucrum illud cõmune. Si enim lucrum cõmune fuisset 900. aur. & tres hi numeri 12000. 12000. 12000. qui ex singulorum pecunijs in sua tempora sunt producti, in vnam summam colligerẽtur, ita staret exemplum.

$$36000.\quad 900.\quad \left.\begin{matrix}12000.\,?\\12000.\,?\\12000.\,?\end{matrix}\right\}\ \text{fiunt}\ \left\{\begin{matrix}300.\\300.\\300.\end{matrix}\right.$$

Quæstio 10. 10. Tres in cõmuni negotiatione lucrati sunt 190. aur. quos ita distribuerunt, vt portio primi tripla esset portionis secundi, & quadrupla portionis tertij. Primus autem contulit per 12. menses 80. aur. Secundus suam pecuniam exposuit per 8. menses, & tertius per 4. Quantum ergo quisque duorum posteriorum contulit in hanc societatem, & quid de lucro singuli acceperunt? Multiplica pecuniam primi, nempe 80. aur. per suum tempus, vt per 12. menses; faciesq; 960. Huius numeri sume $\frac{1}{3}$. nimirũ 320. Item $\frac{1}{4}$. nempe 240. Atq; hi numeri sunt, qui produci debent ex pecunijs duorum posteriorum in sua tempora: quia hac ratione lucrum secundi erit $\frac{1}{3}$. lucri primi, & lucrũ tertij erit $\frac{1}{4}$. eiusdem, quemadmodum & numerus 320. ex quo lucrum secundi oritur, est $\frac{1}{3}$. numeri 960. ex quo lucrum primi gignitur, & numerus 240. quod parit lucrum tertij, $\frac{1}{4}$. eiusdem numeri 960. Si igitur partiamur 320. per 8. menses secundi, inueniemus 40. aur. quos secundus posuit: Si vero diuidamus 240. per 4. menses tertij, producentur 60. aur. pro tertio. Nam hac ratione pecuniæ singulorum per sua tempora multiplicatæ producunt numeros 960. 320. 240. quorum

rum primus triplus est secundi, & quadruplus tertij. Ex quo fit, lucra easdem quoq; proportiones habitura. Vt hic vides.

1520. 190. $\begin{pmatrix} 960.\ ? \\ 320.\ ? \\ 240.\ ? \end{pmatrix}$ fiunt $\begin{pmatrix} 120. \\ 40. \\ 30. \end{pmatrix}$

Quæstio 11.

11. Tres, inito consortio, contulerunt in communem negotiationem 1520. aur. lucratiq; sunt aur. 190. quos (habita ratione pecuniæ cuiusque, quam posuit) ita partiti inter se sunt, vt primus haberet 120. secundus 40. Quid ergo tertius habuit, & quid quisque in societatem contulit? Si lucrum tam primi, quàm secundi ex toto lucro demas, relinquetur lucrum tertij 30. aur. Cognitis autem singulorum lucris, dic. Si totum lucrum 190. aur. ortum est ex communi pecunia 1520. aur. ex quo prouenit lucrum primi 120. aur. & lucrum secundi 40. aur. & lucrū tertij 30. aur. ? Reperies enim primum attulisse 960. aur. secundum 320. & tertium 240. vt hic vides. Examinabitur, si dicas. Si 1520. (quæ est summa pecuniarum, quas singuli contulerunt) lucrantur 190. quid lucrabuntur 960. 320. & 240. ? Inuenies enim lucra 120. 40. & 30.

190. 1520. $\begin{pmatrix} 120.\ ? \\ 40.\ ? \\ 30.\ ? \end{pmatrix}$ fiunt $\begin{pmatrix} 960. & \text{primi.} \\ 320. & \text{secundi.} \\ 240. & \text{tertij.} \end{pmatrix}$

Quæstio 12.

12. Tres, inita sodalitate, in negotiationem contulerunt 1520. aur. quibus lucrati sunt 190. aur. Primus, facta distributione, recepit 1080. aur. conflatos ex sua pecunia, quam posuit, & lucro, quod illi obtigit. Similiter secundus accepit 360. aur. & tertius 270. Quantum ergo quisque posuit, & quantum est lucratus? Facta vna summa ex pecunia, quam omnes posuerunt, & lucro communi, quæ est 1710. Dic. Si 1710. pecunia omnium, & lucrum, proueniunt ex 1520. pecunia omniū, ex quo prueniūt 1080. qui nume-

us continet & pecuniam primi, & lucrum? & exiquo orientur 960. quæ continent & pecuniam, & lucrum secundi? & ex quo numerus 270. producetur continẽs & pecuniã, & lucrũ tertij? Inuenies cũ hoc modo pecunias, quas singuli posuerunt. vt hic manifestũ est.

1710. 1520. { 1080? 360? 270? } fiunt { 960. primi. 320. secundi. 240. tertij.

Ablata autem pecunia cuiusq; ex numero, qui illi obtigit, relinquetur lucrum solum. Ita deprehendes, lucrum primi esse aureos 120. secundi 40. & tertij 30.

Quæstio 13.

13. Duo in cõmuni cõsortio lucrati sunt 200 aur. ex quibus primo obtigerunt 50. aur. secundus tamen duplo plus contulit, quàm primus, & præterea 8. aur. Quantum ergo vterq; exposuit? Quoniam primus lucratus est 50. aur. manifestum est, secundum, qui duplo plus posuit, lucratum esse 100. ac proinde reliquos 50. aur. qui ex toto lucro 200. aur. supersunt, esse lucrum 8. aureorum, quos præterea secundus attulit. Vt ergo habeas pecuniam, quam vterque posuit, dic. Si 50 aur residui proueniunt ex 8 aur. quos secundus præterea contribuit, ex quo producentur 50 aur. quos primus lucratus est, & ex quo 100. aur. quos lucratus est secundus? Reperies enim hac ratione primum posuisse 8. aur. & secundum 16. vt hic apparet.

50. 8. { 50? 100? } { fiunt } { 8. 16.

Si igitur addas 8 ad 16 aur. secundi, facies 24. aur. quos secundus in eam sodalitatem contulit.

Examen huius rei erit, si 8. aur. & 24. quos ambo contribuerunt, in vnam summam colligas, quæ est 32. & dicas. Si 32. lucrati sunt 200. quid lucrabuntur 8. & quid 24.? Deprehendes enim lucrum primi esse 50. aur. & secundi 150. vt hic vides.

32. 200.

32. 200. { 8? / 24? } fiunt { 50. / 150.

Quæstio 14.

14. Duo contraxerunt societatem, quorum primus exposuit 120. aur. & secundus 180. Assumpserunt autem procuratorem ea conditione, vt ex lucro acciperet 10. pro 100. Lucrum vero fuit 1000. aur. Quid ergo debuit habere procurator, & quid vterq; illorum? Dic. Si 100. dant 10. procuratori, quid dabunt 1000? inuenieſq; 100. aur. qui procuratori debentur in ratione 10. pro 100. Ablatis autem his 100. aur. ex toto lucro, hoc eſt, ex 1000. aur. remanent 900. aur. pro lucro amborum. Dic ergo Si 300. aur. quos ambo posuerunt, lucrati sunt 900. aur. quid lucrabuntur aurei 120. & quid 180? Veluti hic appositum eſt.

300. 900. { 120? / 180? } fiunt { 360. / 540.

Quæstio 15.

15. Tres inierunt societatem, lucratiq; sunt 1520. aur. Primus contulit 1080. aur. & secundus 360. tertius autem tantam pecuniam exposuit, vt ei de lucro cederent 240. aur. Quid ergo hic tertius posuit, & quid duorum priorũ quiſq; eſt lucratus? Subtrahe 240. aur. quos tertius lucratus eſt, à toto lucro 1520. aureorum, vt reliqui sint 1280. aur. pro lucro priorum duorum. Dic ergo. Si 1440. aur. quos primus, & secundus exposuerunt, lucrantur 1280. aur. quid lucrabuntur 1080. aur. primi, & quid 360. aur. secundi? Inuenieſq; lucrũ primi eſſe 960. & secũdi 320. vt hic cernis.

1440. 1280. { 1080? / 360? } fiunt { 960. / 320.

Ita enim omnium lucra conficient 1520. aur. Vt autẽ habeas pecuniam à tertio expositã, dic. Si lucrũ priorum duorum 1280. aur. provenit ex 1440. aur. quos in societatem attulerunt, ex quo provenit lucrum tertij 240 aur. ? inuenieſq; 270. aur. vt hic vides.

1280. 1440. 240.? fiunt 270.

Quæstio 16. 16. Tres exposuerunt æquales pecuniæ summas, lucratiq; sunt 1000. aur. in vno anno. Primus reliquit suam pecuniam in consortio 7. mensibus, secundus suã repetijt post 6. menses, tertius autem suã vsq; ad finẽ anni exposuit. Quid ergo quisque de lucro accipiet? Collectis omnibus mensibus, quibus singuli suas pecunias exposuerunt, vt fiat summa 25. dic. Si 25. lucrantur 1000. quid lucrabuntur 7. menses, & quid 6. & quid 12.? quemadmodum hic factum est.

25. 1000. { 7.? / 6.? / 12.? } fiunt { 280. / 240. / 480. }

Verum hoc esse, perspicuũ est, cum omnium lucra efficiant 1000. aur. quos omnes dicebantur lucratos esse. Idem tamen hoc modo examinabis. Finge singulos exposuisse 100. aur. quos per tempus cuiusq; multiplica, vt fiant 700. 600. 1200. Collectis autem hisce numeris in vnam summã, quæ est 2500. dic. Si 2500. lucrantur 1000. quid lucrabuntur 700. 600. & 1200? Inuenies enim eadem lucra, quæ prius, vt hic apparet.

2500. 1000. { 700 ? / 600 ? / 1200.? } fiunt { 280. / 240. / 480. }

Quæstio 17. 17. Quatuor simul lucrati sunt 340. aur. quos ita inter se, habita ratione pecuniarũ collectarum, partiti sunt, vt quoties secundus habuit 5. toties tertius habuerit 9. quoties aũt tertius habuit 7. toties quartus habuerit 11. quoties deniq; quartus habuit 9. toties primus habuerit 13. Primus autem contulit 286. aur. quid ergo alij tres exposuerunt, & quid singuli ex lucro reportarunt? Hic exprimũtur proportiones lucrorum, atq; adeo pecuniarũ, ex quibus lucra proueniunt. Sunt enim lucra pecunijs expositis proportionalia.

Quo-

Quoniam igitur primus toties habiturus est 13. quoties quartus 9. erit proportio pecuniarũ expositarum eadem, quæ 13. ad 9. propterea quòd idem numerus multiplicans 13. & 9. producit pecunias vtriusque, cũ toties in illa contineri debeant 13. quoties 9. in hac. Dic ergo. Si 13. dãt 286. aur. quos primus posuit, quid dabunt 9.? inuenieſq; 198. aur. pro collatione quarti, vt hic cernis.

13. 286. 9.? fiunt 198.

Vbi vides, toties cõtineri 9. in 198. quoties 13. in 286.

Quoniam vero quartus dicitur habiturus 11. quoties tertius 7. erit proportio 198. ad pecuniam tertij, quæ 11. ad 7. Dic ergo. Si 11. dant 198. quid 7.? reperiesque collationem tertij 126. aur. vt hic constat.

11. 198. 7.? fiunt 126

Vbi etiam liquet, toties contineri 7. in 126. quoties 11. in 198.

Rursus quia tertius toties debet habere 9. quoties secundus 5. erit proportio 126. ad pecuniam secundi, quæ 9. ad 5. Dic ergo Si 9. dant 126. quid 5.? inuenieſque collationem secundi 70. aur. vt hic patet.

9. 126. 5.? fiunt 70.

Vbi etiam apparet, toties reperiri 5. in 70. quoties 9. in 126.

Habitis autem pecunijs, quas singuli contribuunt, inueniemus lucra eorũ, sicuti in alijs societatibus. Collectis enim omniũ pecunijs in summam 680. dicemus. Si 680. lucrantur 340. quid lucrabũtur 286. 70. 126. 198. quos primus, secuundus, tertius, ac quartus posuit? veluti hic vides.

680. 340. { 286.? 70.? 126.? 198.? } fiunt { 143. primi. 35. secundi. 63. tertij. 99. quarti.

Vbi

Vbi quidem liquido cernis, omnia lucra facere 340. & toties contineri 13. in 143. quoties 9. in 99. & toties 5. in 35. quoties 9. in 63. Item toties 7. in 63. quoties 11. in 99.

Quæstio 18. 18. Tres partiri inter se volunt 760. aur. ea conditione, vt quoties primus habet 10. toties secundus habeat 7. & tertius 2. Quantum ergo singuli sunt accepturi? Iunge simul 10. 7. & 2. vt habeas 19. Deinde dic. Si 19. dant 760. quid dabunt 10. 7. & 2? veluti hic vides.

19. 760. (10. ? / 7. ? / 2. ?) fiunt (400. primi. / 280. secundi. / 80. tertij.)

Quæstio 19. 19. Quatuor partiri inter se volunt 785. aur. ea lege, vt quoties primus habet 10. toties secundus habeat 7. quoties autem secundus habet 14. toties tertius habeat 3. quoties deniq; tertius habet 12. toties quartus habeat 9. Quid ergo quisq; accipiet? Vt facilior reddatur operatio, incipiendū erit ab vltimo, nempe à quarto, qui ponatur habere semel 9. Habebit igit tertius semel etiā 12. Quia vero quoties tertius habet 3. toties secūdus habere debet 14. si diuidamus 12. numerum tertij, per 3. inueniemus Quotientē 4. qui indicabit, in 12. quater contineri 3. Multiplicabimus igitur 14. per dictum Quotientem 4. vt inueniamus 56. numerum secundi, in quo toties 14 continentur, quoties 3. in 12. Et quoniam quoties secundus habet 7. toties primus habere debet 10. si partiamur 56. numerum secundi, per 7. inueniemus Quotientem 8. qui indicat, in 56. octies contineri 7. Multiplicabimus igitur 10. per Quotientem hunc 8. vt producatur numerus primi 80. in quo toties 10. continentur, quoties 7. in 56. Atq; ita partes numeri dati habere debent proportiones horum numerorum 80. 56. 12. 9. Ita enim toties primus habebit 10. quoties secundus 7. Et toties secundus 14. quoties tertius 3. Et quoties tertius 12. toties quartus 9. Collectis igitur illis numeris in vnam summam,

ſummam, quæ erit 157. Dic. Si 157. dant 785. quid dabunt 80. 56. 12. & 9.? vt hic vides.

$$157.\quad 785.\left\{\begin{array}{l}80.?\\56.?\\12.?\\9.?\end{array}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{array}{l}400.\ \text{primi.}\\280.\ \text{ſecundi.}\\60.\ \text{tertij.}\\45.\ \text{quarti.}\end{array}\right.$$

Alio modo ita ſoluetur eadẽ quæſtio propoſita. Quoniam cum primus habet 10. ſecundus habet 7. Ponemus 10. pro primo, & 7. pro ſecundo. Deinde, quia cum ſecundus habet 14. tertius habet 3. dicemus. Si 14 ſecundi ſunt 7. quid erunt 3. tertij? Inueniemuſq; $1\frac{1}{2}$. atq; talem proportionem habebit poſitio ſecundi ad poſitionem tertij, qualem 7. ad $1\frac{1}{2}$. hoc eſt, toties erunt 14. in 7. quoties 3. in $1\frac{1}{2}$. Rurſus quia cũ tertius habet 12. quartus habet 9. dicemus. Si 12. tertij ſunt $1\frac{1}{2}$. quid erunt 9. quarti? inueniemuſq; $1\frac{1}{8}$. atq; talem proportionem habebit poſitio tertij ad poſitionem quarti, qualem $1\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{8}$. hoc eſt, toties erunt 12. in $1\frac{1}{2}$. quoties 9. in $1\frac{1}{8}$. Collectis iam his numeris 10. 7. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{8}$. in vnam ſummam, efficiemus $19\frac{5}{8}$. Quare dicemus. Si $19\frac{5}{8}$. dant 785. quid dabunt 10. 7. $1\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{8}$. vt hic vides.

$$19\tfrac{5}{8}.\quad 785.\left\{\begin{array}{l}10\ ?\\7\ ?\\1\frac{1}{2}.\\1\frac{1}{8}.\end{array}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{array}{l}400.\ \text{primi.}\\280.\ \text{ſecundi.}\\60.\ \text{tertij.}\\45.\ \text{quarti.}\end{array}\right.$$

20. Quatuor duces, ſex ſigniferi, & 100. milites in direptione cuiuſdã vrbis irruerunt in domũ quandam, vbi repererunt 36200. aur. quos inter ſe ita partiti ſunt, vt quoties quilibet dux acceperit 8. toties quilibet ſignifer acceperit 5. & quilibet miles 3 Quid ergo cuilibet ex illa præda obuenit? Multiplica numerũ ducum, id eſt, 4. per 8 nempe per numerum, quem toties quilibet dux debet habere, quoties alij 5. & 3. efficieſq; Quæſtio 20.

cieſq; 32. Similiter multiplica 6. numerum ſignifero-rum per 5. & 100. numerum militum per 3. efficieſq; 30. & 300. Iunctis ſimul tribus his numeris 32. 30. 300. vt fiant 362. dic. Si 362. dant 72400. quid da-bunt 32. 30. & 300. vt hic vides.

$$362.\ 72400.\ \left\{\begin{matrix}32.?\\30.?\\300.?\end{matrix}\right\}\ \text{fiunt}\ \left\{\begin{matrix}6400.\\6000.\\60000.\end{matrix}\right.$$

Itaque quatuor duces acceperunt ex illa præda 6400. aur. at 6. ſigniferi 6000. & 100. milites 60000. qui om nes conficiunt ſummã aureorũ inuentã 72400. Iam ve ro, ſi partiamur aureos ducũ 6400 per 4. numerũ du-cum, reperiemus quemlibet habuiſſe 1600. aur. Item ſi aureos ſigniferorum diuidamus per 6. deprehendemus cuilibet obtigiſſe 1000. aur. Si deniq; aureos militum per 100 diſtribuamus, inueniemus ſingulos accepiſſe 600. aur. Vbi manifeſte vides, toties 8. cõtineri in 1600. quoties 5 in 1000 & 3. in 600. nimirum ducenties.

Quæſtio 21. 21 Quidam extremũ ſpiritum agens, cui filia erat, & filius, qui in bello dicebat occubuiſſe, ita hæreditatẽ 18088. aureorũ diſtribuendã inter vxorem, & filiam reliquit, vt vxor haberet $\frac{2}{3}$. filia aũt $\frac{1}{3}$. ſed ſi forte filius rediret, vt filius $\frac{2}{3}$. haberet. Accidit aũt, vt filius reuerteretur. Qua igitur ratione dicta hæreditas diuiden da eſt, vt voluntati teſtatoris ſatisfiat? Certũ eſt, quæ-ſtionem hanc non poſſe intelligi, vt verba ſonant. Nã ſi filius accipiat $\frac{2}{3}$. non poterit vxor habere $\frac{2}{3}$ & fi-lia $\frac{1}{3}$ Quare omnes Arithmetici voluntatẽ teſtatoris interpretantur, vt voluerit, filiũ duplo plus debere ha-bere, quàm vxorem, & vxorẽ duplo plus, quàm filiã, Id quod proportio harum minutiarũ $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$. quæ du-pla eſt, (continet enim minutia $\frac{2}{3}$. minutiã $\frac{1}{3}$. bis.) indicare videtur. Itaq; numerus 18088. ſecandus eſt in tres partes, ita vt prima contineat ſecundam bis, & ſecunda tertiam etiam bis, hoc eſt, quæ habeãt conti-nuam proportionem duplam. quod hoc modo fiet. Po ne tertiam eſſe 1. Erit ergo ſecunda 2. & prima 4. quę

omnes

omnes faciunt 7. Dic igitur. Si 7. dant 18088. quid dabunt 4. 2. & 1. ? vt hic vides.

7. 18088. $\left\{\begin{matrix}4.\ ?\\2.\ ?\\1.\ ?\end{matrix}\right\}$ fiunt $\left\{\begin{matrix}10336.\ \text{filij.}\\5168.\ \text{vxoris.}\\2584.\ \text{filiæ.}\end{matrix}\right.$

Quæstio 22.

22. Tres crumenã inuenerũt cũ 3042. aur. quos ita inter se distribuerũt. Primus accepit $\frac{1}{2}$. secũdus $\frac{1}{3}$. & tertius $\frac{1}{4}$. Quid ergo quisq; accepit? Hic etiã perspicuũ est, q̃stionẽ nõ posse intelligi, vt sonat. Si namq; primus accepisset $\frac{1}{2}$. & secũdus $\frac{1}{3}$. nõ potuisset tertius accipere $\frac{1}{4}$. Nã hæ tres minutiæ efficiunt plus, quàm integrum, nempe $\frac{1}{1}$ $\frac{3}{2}$. Quare sensus est, vt datus numerus distribuatur in tres partes, quæ easdem proportiones inter se habeant, quas hæ minutiæ $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. Quod vt fiat, inueniatur numerus à denominatoribus numeratus. Minimus aũt hic numerus est 12. inuentus per ea, quæ cap. 10 scripsimus. Ex hoc numero cape $\frac{1}{2}$. nempe 6. Item $\frac{1}{3}$. nempe 4. Itẽ $\frac{1}{4}$. nempe 3. quas partes simul adde, vt habeas 13. Dic ergo. Si 13. dant 3042. quid dabunt 6. 4. & 3. ? vt hic cernis.

13. 3042. $\left\{\begin{matrix}6.\ ?\\4.\ ?\\3.\ ?\end{matrix}\right\}$ fiunt $\left\{\begin{matrix}1404.\ \text{primi.}\\936.\ \text{secundi.}\\702.\ \text{tertij.}\end{matrix}\right.$

Examen ita fiet. Reduc datas minutias ad eandẽ denominationẽ, vt ad $\frac{6}{12}$. $\frac{4}{12}$. $\frac{3}{12}$. Habebunt enim hæ minutiæ easdem proportiones, quas numeratores habent. Easdem autem habent tres numeri inuenti 1404. 936. 702. vt patet.

Quæstio 23.

23. Tres inuento loculo cum 1407. aur. ita distribu tionem fecerunt. Primus accepit $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{3}{5}$. tertius $\frac{8}{11}$. quid ergo quisq; accepit? Hic etiam sensus est, vt datus numerus in tres partes secetur datis minutijs proportionales: aliàs impossibilis quæstio foret. Inuento igit, ex cap. 10. minimo numero 110. dictas minutias cõtinẽte, sume eius dimidiũ 55. & tres quintas 66.

& octo

& octo vndecimas 80. easque in vnam summam 201. collige, ac dic. Si 201. dant 1407. quid dabunt 55. 66. & 80.? vt hic apparet.

201. 1407. { 55.? 66.? 80.? } fiunt { 385. primi. 462. secundi. 560. tertij.

Examen fiet, vt in antecedente quæstione. Reductis enim datis minutijs ad eandem denominationem, vt ad $\frac{55}{110}\cdot\frac{66}{110}\cdot\frac{80}{110}$. habebunt tres numeri inuenti easdem proportiones, quas hæ minutiæ, nempe earum denominatores habent, vt constat.

Quæstio 24. Quatuor partiri inter se volunt 396. aur. ita vt primus habeat $\frac{1}{2}$. & præterea 10. secundus $\frac{3}{9}$. minus 20. tertius $\frac{1}{3}$. & præterea 8. quartus deniq; $\frac{1}{4}$. minus 6. quantum ergo quisq; accipiet? in huiusmodi quæstionibus aufer ex tota summa numeros, qui accipi debent vltra partes dictas, & alios, qui deesse debēt dictis partibus, ad eandem summam adijce. Vt hic aufer 10, & 8. vt remaneant 378. adde rursus 20. & 6. fiunt 404. Deinde inuento minimo numero 60. continente datas minutias, cuius $\frac{1}{2}$. est 30. & $\frac{3}{9}$. 36. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. quæ omnes faciunt 101. Dic ergo. Si 101. dant 404. (qui numerus productus est ex additione, & subtractione datorum numerorū ex tota summa 396.) quid dabunt 30. 36. 20. & 15? vt hic vides.

101. 404. { 30.? 36.? 20.? 15.? } fiunt { 120. primi. 144. secundi. 80. tertij. 60. quarti.

Quatuor igitur hi numeri inuenti proportiones habēt easdem, quas datæ minutiæ, sed in vnam summā collecti faciunt 404. non autem 396. vt quæstio proponit. Quòd si primo addas 10. vt fiant 130. & à secundo auferas 20. vt relinquantur 124. tertio item adijcias 8. vt fiant

vt fiant 88. & à quarto demum auferas 6. vt remaneãt 54. efficient hi quatuor numeri 396. Vt autẽ habeant dictas proportiones, auferendi erunt prius numeri, & addendi, qui additi sunt, & subtracti. Ita vt vere 130. ad 124. proportionem habeãt, quam $\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{5}$. si prius 10. detrahantur ex illo, & huic adijciantur 20. vt recte dicatur numerus 130. cõtinere $\frac{1}{2}$. & præterea 10. numerus vero 124. continere $\frac{3}{5}$. minus 20. &c.

25. Est cisterna habens in imo tres fistulas inæquales: maxima reserata, effluit tota aqua in 2. horis; media autem aperta, effluit tota aqua in 3. horis; minima deniq; aperta, effluit tota aqua in 6. horis. Quanto ergo tempore, reseratis omnibus tribus fistulis, tota aqua effluet, si per singulas fistulas à principio vsq; ad finem aqua semper eodem modo effluat? Sumpto minimo numero, quem tempora in quæstione expressa, nempe horæ 2. 3. & 6. metiantur, qui hic est 6. dic. Si maxima fistula in 2. horis vnam cisternam exhaurit, quot cisternas in 6. horis exhauriet? inuenies q; 3. Item si media fistula vnam cisternam exhaurit in 3. horis, quot cisternas in 6. horis exhauriet? inuenies q; 2. Item, si minima fistula in 6. horis vnam cisternam exhaurit, quot cisternas exhauriet in 6. horis? inuenies q; 1. vt hic vides. Quæstio 25.

Horæ.	Cisterna.	Horæ.	Cisternæ.
2. 3. 6.	1.	6.	3. 2. 1.

Collectis iam in vnum his tribus inuentis numeris 3. 2. 1. vt fiant 6. dic. Si sex cisternæ euacuantur in 6. horis, quanto tempore vna euacuabitur? inuenies que in vna hora. Id quod hac ratione examinabis. Si maxima fistula exhaurit totam cisternam in 2. horis, & media in 3. & minima in 6. quantã partem cisternæ exhaurient singulæ fistulæ in 1. hora? veluti hic appositum est.

Horæ.

Horæ.	Cisterna.	Hora.	Cisterna.
2. 3. 6.	1.	1?	$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{6}$.

Inuenies enim maximam fistulam euacuare $\frac{1}{2}$. cisternæ, & mediam $\frac{1}{3}$. & minimam $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt vnam integram cisternam.

Eadem hæc quæstio ita proponi potest. Est cisterna habens in summitate tres fistulas inæquales: maxima replet cisternam in 2. horis, media in 3. & minima in 6. quanto ergo tempore omnes simul cisternam implebunt? Inuenies enim 1. horam.

Pari ratione ita potest proponi. Sunt tres artifices: primus absoluit opus quoddam in 2. annis, secundus in 3. & tertius in 6. quanto ergo tempore omnes simul idem opus perficient? Inuenies enim 1. annum.

Alia solutio huius qstionis.

Cæterum huiusmodi quæstiones solui etiã possunt hoc pacto. Inuestigetur per regulam trium, quantum aquæ singulæ fistulæ exhauriant in 1. hora, tresq, numeri inuenti in vnam summam colligantur. Nam si hæc summa fuerit 1. requiritur 1. hora, vt omnes fistulæ totam cisternam euacuent: si vero non fuerit 1. inuenietur tempus requisitum per regulam trium, vt in hoc exemplo erit manifestum. Sunt tres artifices: primus absoluit opus quoddam in 6. annis, secundus in 9. & tertius in 18. Quanto ergo tempore omnes simul idẽ opus perficient? Dic. Si primus in 6. annis absoluit 1. opus, & secundus in 9. & tertius in 18. quantum absoluet quilibet in 1. anno? vt hic vides.

Anni.	Opus	Ann.	Operis.
6. 9. 18.	1.	1.? fiunt	$\frac{1}{6}$. primi. $\frac{1}{9}$. secundi. $\frac{1}{18}$. tertij.

Efficiunt autem tres numeri inuenti $\frac{1}{3}$. Dic ergo. Si $\frac{1}{3}$. operis requirit 1. annum, quot annos requiret 1. opus

opus? inuenieſq; 3. annos. Quod examinabis, vt ſupra, veluti hic vides.

Anni.	Opus.	Anni.	
6. 9. 18.	1.	3. ?	$\frac{1}{2}$. prim. $\frac{1}{3}$. ſecund. $\frac{1}{6}$. terti.

Inuenies enim primũ in 3. annis abſoluere $\frac{1}{2}$. operis, ſecundũ $\frac{1}{3}$. & tertiũ $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt 1.

Si prius exemplũ hac arte explicaretur, prima ſtatim operatione ſcopus attingeretur: quia in 1. hora tota ciſterna euacuatur, vt conſtat ex operatione examinis dicti exempli.

2. Eſt ciſterna habens fiſtulã in orificio, per quam impletur in 4 horis, habet aũt in imo fundo aliã fiſtulam, per quã in 6 horis euacuatur. Si ergo cõtinue influat aqua, & effluat, quanto tempore ciſterna replebitur? Primũ inueſtigare oportet, quanta pars ciſternæ in 1. hora impleatur, hoc modo. Si in 4. horis 1. ciſterna impletur, quantũ implebitur in 1. hora? Inuenies autẽ $\frac{1}{4}$. ciſternæ. Rurſus. Si in 6. horis 1. ciſterna exhauritur, quantũ euacuabitur in 1. hora? Inuenies aũt $\frac{1}{6}$. ciſternæ. Si ergo auferas $\frac{1}{6}$. ex $\frac{1}{4}$. remanebit $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. ciſternæ: ac tanta portio ciſternæ implebitur in 1. hora. Dic ergo. Si $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. ciſternæ requirit 1. horã, quid requiret 1. ciſterna? Inuenieſq; 12. horas. Quod hac ratione examinabis verum eſſe. Si in 4. horis impletur 1. ciſterna; in 12. horis quot ciſternæ implebuntur? Inuenies enim 3. ciſternas. Item ſi in 6. horis euacuatur 1. ciſterna; in 12. horis quot ciſternæ euacuabuntur? Inuenies autem 2. ciſternas, quas ſi auferas ex 3. inuentis, remanebit 1. ciſterna plena. Quæſtio 26

Quod ſi quis dicat Ciſterna per fiſtulã ſuperiorẽ impleẽ in 3. horis, per inferiorẽ euacuaẽ in 8. horis: eodẽ modo ſoluetur q̃ſtio, ſi dicas. Si in 3 horis 1. ciſterna impletur, quantũ implebiẽ in 1. hora? Inuenies enim $\frac{1}{3}$. ciſternæ. Item ſi in 8. horis 1 ciſterna euacuaẽ, quantũ euacuabiẽ in 1. hora? Inuenies eũ $\frac{1}{8}$. ciſternæ. Si ergo

demas $\frac{1}{8}$. ex $\frac{1}{3}$. remanebunt $\frac{5}{24}$. ac tanta portio cisternæ implebitur in 1. hora. Dic ergo. Si $\frac{5}{24}$. cisternæ requirunt 1. horam, quid requiret 1. cisterna? Inuenies; $4\frac{4}{5}$. hor. Quod ita probabis. Si in 3 horis impletur 1. cisterna; in $4\frac{4}{5}$ hor. quot cisternæ replebuntur? Inuenies autem $1\frac{3}{5}$. Item si in 8. horis euacuatur 1. cisterna; in $4\frac{4}{5}$. hor. quot cisternæ euacuabuntur? Inuenies autem $\frac{3}{5}$. quas si ex $1\frac{3}{5}$. auferas, remanebit 1. cisterna plena.

Alia solutio huius ꝙstionis.

Breuius fortassis huiusmodi quæstiones soluentur, si quæratur, quanta portio cisternæ impleatur in illis horis, in quibus tota impleretur, si nihil effluere t. Quod ita fiet in priori quæstione. Dic. Si 6. horæ 1. cisternã euacuant, quantum euacuabunt 4. horæ? Inueniesque $\frac{2}{3}$. quas si ex 1. auferas, (ponimus enim 1. cisternam 4. horis impleri, si nihil effluere t) remanebit $\frac{1}{3}$. quæ 4. horis implebitur. Dic igitur rursus. Si $\frac{1}{3}$. cisternæ requirit 4. horas, quid requiret 1. cisterna? inueniesq; 12. horas, vt prius.

In posteriori vero quæstione dic. Si 8. horæ 1. cisternam exhauriunt, quantum exhaurient 3. horæ? inueniesque $\frac{3}{8}$. quas si demas ex 1. (ponimus enim 1. cisternam 3. horis impleri, si nihil effluere t) remanebunt $\frac{5}{8}$. quæ 3. horis implebuntur. Dic ergo rursus. Si $\frac{5}{8}$. cisternæ expoſcunt 3. horas, quid expoſcet 1. cisterna? inueniesque $4\frac{4}{5}$. horas, vt prius.

REGVLA ALLIGATIONIS. Cap. XXI.

Regula alligationis quid.

SOLENT nõnunquã Arithmetici varias merces variorũ pretiorũ miscere, ita vt, statuto quodam pretio medio, omnes eo emantur: quod quidem efficiunt regula quadam, quam regulam alligationis dicũt, eò quòd variæ merces alligentur quodammodo ad vnum pretium, vt ex sequentibus exemplis perspicuum fiet.

1. Duo

Quæstio 1.

1. Duo genera vini sunt, mensura 1. primi constat 20. baioch. at mensura 1. secundi venditur 12. baioc. Quantum ergo ex vtroq; sumendum est, vt mensura 1. valeat 15. baioch.?

Regula alligationis qūo fiat.

Pone vnum pretium sub altero, & ad sinistram illorum colloca pretium statutum, quod medium est inter data duo pretia. Deinde cōfer vtrūq; pretium datum cum statuto pretio, differentiāq; vtriusq; pone ad dexteram pretiorū, alternatim tamen, hoc est, differentiam maioris pretij iuxta minus pretium, & differentiam minoris iuxta maius: atq; has differentias in vnam summam collige, vt in exemplo vides. Post hæc institue regulam trium bis, ita vt summa differentiarū primum locum occupet; mensura vero 1. secundum; & vtraque differentia tertium, veluti hic cernis.

Pretia.		Differentiæ.
	20.	3.
15.		
	12.	5.
		8.

Pretium medium.

Summa differentiarum.

8. 1. { 3.? / 5.? } fiunt { $\frac{3}{8}$. primi. / $\frac{5}{8}$. secundi.

Dic ergo. Si summa differentiarum 8. dat 1. mensuram, quid dabunt singulæ differentiæ 3. & 5.? Inuenies enim ex primo vino accipiendas esse $\frac{3}{8}$. vnius mensuræ, ex secundo vero $\frac{5}{8}$. atque ita fiet 1. mensura ex vtroq; constans 15. baiochis. Quod ita probabis. Dic. Si 1. mensura primi vini valet 20. baioch. quid valebunt $\frac{3}{8}$? Item, si 1. mensura secundi vini valet 12. baioch. quid valebunt $\frac{5}{8}$? vt hic vides.

1. 20. $\frac{3}{8}$? fiunt $7\frac{1}{2}$.
1. 12. $\frac{5}{8}$? fiunt $7\frac{1}{2}$.

Inuenies enim duo pretia efficere 15. baiochos, quemadmodum proponitur.

Quæstio 2. 2. Sunt duo genera argenti non puri. Primi libra 1. valet aur. 30. alterius libra 1. valet aur. 24. Vt ergo lib. 1. valeat aur. 28. quantũ ex vtroq; argento sumendũ est? Facta alligatione, vt in p̃cedenti quæstione, dic. Si summa differentiarum 6. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 4. & 2.? vt hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
28.	30.	4.
	24.	2.
		6.

Summa differentiarum.

6. 1. { 4.? 2.? } fiunt { $\frac{2}{3}$. primi. $\frac{1}{3}$. secundi.

Hoc enim modo habebis 1. lib ex vtroq; argento cõstantem 28. baiochis. Vt examines, dic. Si 1. lib. argenti prioris valet aur. 30. quid valebunt $\frac{2}{3}$. vnius libræ? Item si 1. lib. posterioris argenti valet 24. aur. quid valebit $\frac{1}{3}$.? vt hic apparet.

1.	30.	$\frac{2}{3}$?	fiunt	20.
1.	24.	$\frac{1}{3}$?	fiunt	8.

Atq; ita 1. lib. constabit 28. aur. vt proponitur.

Quæstio 3. 3. Libra 1. piperis valet 4. Iul. Libra 1. garyophilli 3. Iul. Libra 1. cinnamomi 6. Iul. Libra 1. croci 10. Iul. Libra 1. zingiberis 8. Iul. Quantum ergo ex quolibet accipiendũ est, vt 1. libra constet 7. Iulijs? Quando plures res proponuntur alligandæ, varijs modis fieri potest alligatio, dummodo quælibet semel saltem alligetur. Potest enim quodlibet pretiũ cum quolibet, alio, vel cum pluribus etiam alligari ad pretium medium, ita tamen, vt statutum pretium sit medium inter duo, quæ alligantur ad ipsum, vel certe alteri illorum æquale: vt in hoc exemplo apparebit, quod varijs alligationibus explicabimus. Primo ergo alligabimus p̃tia piperis, & zingiberis ad pretiũ mediũ, quorũ differẽtię sunt

Varijs modis fieri posse alligationẽ eiusdem exempli.

sunt 3. & 1. alternatim collocatæ. Deinde pretia garyop. & croci, quorũ differentiæ sunt 4. & 3. alternatim quoque positæ. Deniq; quia supereſt solum cinnamo. alligabimus eius pretiũ cum pretio zingib. exempli gratia, quorum differentiæ sunt 1. & 1. alternatim etiam scriptæ. Omnium differentiarũ summa est 13. Differentiæ autem è regione zingib. faciunt 4. Semper enim differentiæ plures è regione eiusdẽ pretij positæ colligendæ sunt in vnam summam. Dic iam. Si summa differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 1. 3. 1. 4. 4. ? vt hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
7.	Piper. 4.	1.
	Garyoph. 3.	3.
	Cinnam. 6.	1.
	Crocus. 10.	4.
	Zingib. 8.	3. 1.
	Summa differentiarum.	13.

Quid sit faciendũ, qñ plures differẽt, & ponũtur è regione eiusdem pretij.

$$13.\quad 1.\quad \left\{\begin{matrix}1.\ ?\\3.\ ?\\1.\ ?\\4.\ ?\\4.\ ?\end{matrix}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1\ 3}.\ \text{Pip.}\\ \frac{3}{1\ 3}.\ \text{Garyoph.}\\ \frac{1}{1\ 3}.\ \text{Cinnam.}\\ \frac{4}{1\ 3}.\ \text{Croc.}\\ \frac{4}{1\ 3}.\ \text{Zingib.}\end{matrix}\right.$$

Hac ratione habebis 1. lib. ex omnibus, quæ constet 7. Iulijs. Vt examines, dic. Si 1. lib. piperis valet 4. Iul. quid valebit $\frac{1}{1\ 3}$. ? Item, si 1. lib. garyoph. valet 3. Iul. quid valebunt $\frac{3}{1\ 3}$. ? Item, si 1. lib. cinnam. valet 6. Iul. quid valebit $\frac{1}{1\ 3}$. ? Item, si 1. lib. croci valet 10. Iul. quid valebunt $\frac{4}{1\ 3}$. ? Item, si 1. lib. zingib. valet 8. Iul. quid valebunt $\frac{4}{1\ 3}$. ?

$$1.\quad \left\{\begin{matrix}4.\\3.\\6.\\10.\\8.\end{matrix}\right\}\text{quid}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1\ 3}?\\ \frac{3}{1\ 3}?\\ \frac{1}{1\ 3}?\\ \frac{4}{1\ 3}?\\ \frac{4}{1\ 3}?\end{matrix}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{matrix}\frac{4}{1\ 3}.\ \text{Pip.}\\ \frac{9}{1\ 3}.\ \text{Garyop.}\\ \frac{6}{1\ 3}.\ \text{Cinnam.}\\ 3\ \frac{1}{1\ 3}.\ \text{Croc.}\\ 2\ \frac{6}{1\ 3}.\ \text{Zingib.}\end{matrix}\right.$$

Alia alligatio huius 3. quæstionis.

Inuenieſq; omnia pretia efficere 7. ſub vt proponitur.

Alio modo fiet alligatio, ſi pretia piperis, & zingib. alligentur ad pretium medium: Item pretia piperis, & croci. Deinde pretia garyoph. & zingib. & rurſus pretia garyoph. & croci. Poſtremo pretia cinnam. & croci: Item pretia cinnam. & zingib. vt in hoc appoſito exemplo factum eſt. neq; vero plures alligationes fieri poſſunt in hoc exẽplo. Nã pretia piperis, garyoph. & cinnam. inter ſe alligari non poſſunt, cum ſingula minora ſint ſtatuto pretio medio: atq; ita quodlibet illorum bis tantum alligari poteſt; poſteriorum aũt duorum vtrumq; ter, nempe cum quolibet trium priorum. Dic ergo. Si ſumma differentiarũ 28. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 4 4. 4 8. & 8.? vt hic cernis.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
7.	Piper.	4.	1. 3.
	Garyoph.	3.	1. 3.
	Cinnam.	6.	3. 1.
	Crocus.	10	3. 4. 1.
	Zingib	8.	3. 4. 1.
			28.
	Summa differentiarum.		

28. 1. { 4.? 4.? 4.? 8.? 8.? } fiunt { 4/28. Pip. 4/28. Garyoph. 4/28. Cinnam. 8/28. Croc. 8/28. Zingib.

Ita enim conflabis 1. libram ex omnibus, quæ conſtet 7. Iulijs. Quod vt pbes, dic Si 1. lib. pip. valet 4. Iul. quid valebũt 4/28? Itẽ, ſi 1. lib. Garyoph. valet 3. Iul. quid valebunt 4/28? &c. veluti hic factum eſſe vides

1. { 4. 3. 6. 10. 8. } quid { 4/28? 4/28? 4/28? 8/28? 8/28? } fiunt { 1 6/28. Pip. 1 2/28. Garyop. 2 4/28. Cinnam. 2 4/28. Croc. 2 8/28. Zingib.

Inue-

Inuenies enim omnia pretia conficere 7. Iulios. quemadmodum in quæstione proponitur.

Alia alligatio huius 5. quæstionis.

Potest etiã alia ratione institui alligatio huius eiusdem exempli, si pretia piperis, & croci alligentur; Deinde pretia garyo. & zingib. Ac postremo pretia cinnam. & zingib. Vt in hoc exemplo videre licet. Dic ergo Si summa differentiarũ 13. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 3. 1. 1. 3. & 5? quemadmodũ hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
7.	Piper. 4.	3.
	Garyoph. 3.	1.
	Cinnam. 6.	1.
	Crocus. 10.	3.
	Zingib. 8.	4. 1.
		13.
	Summa differentiarum.	

13. 1. { 3. ? / 1. ? / 1. ? / 4. ? / 3. ? / 5. ? } fiunt { $\frac{1}{13}$ 3. Pip. / $\frac{1}{13}$ 3. Garyoph. / $\frac{1}{13}$ 3. Cinnam. / $\frac{1}{13}$ 3. Croc. / $\frac{1}{13}$ 3. Zingib.

Sic eũ habebis 1. lib. ex omnibus pro 7. Iulijs. Quod probabis, vt supra.

Quid obseruandũ sit in alligationib. plurium rerum.

Vides igitur, varijs modis fieri posse alligationem, si res alligandæ plures sint, quàm duæ; dummodo pretiũ mediũ semper minus sit vno pretio alligãdo, & maius altero; vel certe æquale vni, & maius, vel minus altero. Verũ licet ex varijs alligationibus semper habeas pondus rerum miscendarum propositũ pro pretio medio statuto, non tamen eadem semper pondera ex rebus miscendis accipies, vt ex propositis exemplis perspicuum est.

Quæstio 4.

4 Vlna 1. panni rubri valet 4. aur. vlna 1. panni viridis valet 6. aur. & vlna 1. panni nigri valet 10. aur. Vult quidam ex omnibus 80. vlnas pro 480. aureis. quantum ergo ex singulis pannis accipiet? In huiusmodi quæstionibus oportet prius inuestigare pretiũ

vnius vlnæ ex omnibus pannis mixtæ, quod ita fiet in noſtro exemplo. Si 80. vlnæ mixtæ valent 480. aur. quid valebit 1. vlna? inueniesq; 6 aur. quod eſt pretiũ 1. vlnæ medium inter pretiũ vilioris panni, & pretium carioris. Quòd ſi reperiretur pretiũ non medium, impoſſibilis eſſet quæſtio. Vt ſi diceret aliquis. Vult quidam ex omnibus pannis 80. vlnas pro 300. aur. vel pro 900. aur. impoſſibilis eſſet quæſtio. Nam ſi 80. vlnæ valent 300. aur. valebit 1. vlna $3\frac{3}{4}$. aur. quod pretiũ minus eſt pretio vilioris panni. Quare neq; ex viliori panno habere poteſt quiſpiam 80. vlnas pro 300. aur. tantũ abeſt, vt ex omnibus vlnas 80. accipiat. Rurſus, ſi 80. vlnæ valent 900. aur. valebit 1. vlna $11\frac{1}{4}$. aur. quod pretium maius eſt pretio carioris panni. Quare plures vlnas carioris panni, quàm 80. emet quiſpiam aureis 900. ac proinde multo plures, ſi ex omnibus aliquot vlnas accipere velit: Sed redeamus ad noſtrũ exẽplũ. Inuento pretio medio vnius vlnæ, fiat alligatio, vt in præcedentibus, quemadmodũ hic eſt factum. Primũ enim alligauimus pretia 4. & 10. ad mediũ pretium 6. Deinde pretia 6. & 10. Dic igitur. Si ſumma differẽtiarũ 10. dat 80. vlnas, (tot eñ vlnas accipere vult ex triplici panno) quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. 4. & 2.? vt hic factum eſt.

Quando quæſtio alligationis eſt impoſſibilis.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	rub.	4.	4.
6.	virid.	6.	4.
	nig.	10.	2.
			10.
	Summa differentiarum.		

10. 80. $\left\{\begin{matrix}4.?\\4.?\\2.?\end{matrix}\right\}$ ſiunt $\left\{\begin{matrix}32.\text{ rubri.}\\32.\text{ viridis.}\\16\text{ nigri.}\end{matrix}\right.$

Ita enim ex tribus illis pannis ſumentur 80. vlnæ pro 480. aur. Quod ita probabis. Si 1. vlna valet 6. aur. (hoc enim pretium medium inuentum eſt vnius vlnæ ex tribus pannis mixtæ.) quid valebunt 32. vlnæ panni rubri, & 32. viridis, & 16. nigri? veluti hic cernis.

1. 6.

1. 6. $\left\{\begin{matrix}32.\\32.\\16.\end{matrix}\right\}$ fiunt $\left\{\begin{matrix}192.\ \text{rub.}\\192.\ \text{virid.}\\96.\ \text{nig.}\end{matrix}\right.$

Reperiesq; omnia pretia conficere 480. aureos.

Quòd si pretium panni viridis non alligassemus cũ pretio panni nigri, sed cum pretio panni rubri, ita staret alligatio. Verũ alios numeros inuenissemus. Dixissemus enim. Si sũma differentiarũ 8. dat 80. vlnas, quid dabunt singulæ differentiæ 4. 2. & 2.? vt hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
6.	rub. 4.	4. 0.
	virid. 6.	2.
	nig. 10.	2.
		8. Summa differentiarum.

8. 80. $\left\{\begin{matrix}4.\\2.\\2.\end{matrix}\right\}$ fiunt $\left\{\begin{matrix}40.\ \text{rub.}\\20.\ \text{virid.}\\20.\ \text{nig.}\end{matrix}\right.$

Examen fiet, vt prius, si dicas. Vlna 1. valet 6. aur. quid valebunt vlnæ 40. panni rubri, & 20. viridis, & 20. nigri? Inuenies em̃ omnia ptia cõficere 480 aureos.

5. Sunt quatuor genera vini; primi amphora 1. valet 21. baioch. secundi 27. tertij 30. & quarti 40. Vult quidam miscere ex his 300. amphoras, ea lege, & cõditione, vt singulæ amphoræ valeant 33. baioc. Quã tũ ergo ex quolibet accipiet? Quæstio 5.

Hic necessario tria priora p̃tia cũ posteriore alligãda sũt ad mediũ p̃tiũ 33. baioc. cũ illa tria sint hoc minora, quæ admodũ hic vides. Dic ergo. Si sũma differentiarũ 42. dat 300. amphoras, quid dabunt singulæ differentiæ 7. 7. 7. & 21.? vt hic apparet.

Pretia.	Differentiæ.
21.	7.
27.	7.
30.	7.
33. 40.	12. 6. 3.
	42. Summa differẽtiarũ.

42. 300.

42. 300. { 7.? 7.? 7.? 21.? } fiunt { 50. primi. 50. secundi. 50. tertij. 150. quarti. }

Sic enim conficies 300. amphoras, quarũ singulæ constabunt 33. baioch. Quod vt probes, dic. Si summa differentiarum 42. dat 1. amphoram, quid dabunt singulæ differentiæ 7. 7. 7. & 21.? vt hic vides.

42. 1. { 7.? 7.? 7.? 21.? } fiunt { $\frac{1}{6}$. primi. $\frac{1}{6}$. secundi. $\frac{1}{6}$. tertij. $\frac{1}{2}$. quarti. }

Atq; ita habebis vnam amphorã ex quadruplici illo vino mixtam. Dic ergo rursus. Si 1. amphora vini primi valet 21. baioch. quid valebit $\frac{1}{6}$. amphoræ? Item si 1. amphora secundi valet 27. quid valebit $\frac{1}{6}$? Item si 1. amphora tertij valet 30. quid valebit $\frac{1}{6}$? Item si 1. amphora quarti valet 40. quid valebit $\frac{1}{2}$. vt hic vides.

1. { 21. 27. 30. 40. } quid { $\frac{1}{6}$? $\frac{1}{6}$? $\frac{1}{6}$? $\frac{1}{2}$? } fiunt { $3\frac{1}{2}$. primi. $4\frac{1}{2}$. secundi. 5. tertij. 20. quarti. }

Quæ omnia pretia efficiunt 33. baioch. vt proponitur. Breuius tamen ita quoq; institui potest examen. Quoniam si 1. amphora valere debet 33. baioch. valebunt 300. amphoræ 9900 baioc. Dicemus ergo. Si 300. amphoræ valent 9900. baioc. quid valebunt 50. amphoræ primi vini, & quid 50. secũdi, & 50. tertij, & 150. quarti? vt hic vides.

300. 9900. { 50? 50? 50? 150? } fiunt { 1650. primi. 1650. secundi. 1650. tertij. 4950. quarti. }

Inue-

Inuenies enim omnia pretia conficere 9900. baiochos.

6. Quidam pro 400. aur. emere vult 400. lib. aromatum variorum, nimirum Garyophillorum, piperis, cinnamomi, zingiberis, nucum myristicarum, & croci, quorum hæc sunt pretia pro singulis libris, Iul. 6. 7. 9. 11. 12. 16. Quot ergo singulorum libras accipiet, vt 400. lib. pro 400 aureis habeat? Hic, vt in quæstione 4. dictum est, inuestigandum est prius pretium medium vnius libræ, ad quod alligatio fieri debet, hoc modo. Si 400. lib. valent 400. aur. quid valebit 1. lib.? Inuenies enim 1. aur. hoc est, 10. Iul. Quoniam vero, vt diximus, variæ fieri possunt alligationes, alligabimus primum garyoph. cum zingib. & croco. Deinde piper cum nuc myrist. & croco. Postremo cinnam. cũ nuc. myrist. vt hic factũ esse vides. Deinde dicemus. Si summa differentiarum 32. dat 400. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 7. 8. 2. 4. 4. & 7.? vt hic vides.

Quæstio 6.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
10.	garyoph.	6.	1. 6.
	piper	7.	2. 6.
	cinnam.	9.	2.
	zingib.	11.	4.
	nuc. myr.	12.	3. 1.
	crocus.	16.	4. 3.
	Summa differentiarum.		32.

32.	400.	7.?	fiunt	87 1/2. garyoph.
		8.?		100. pip.
		2.?		25. cinnam.
		4.?		50. zingib.
		4.?		50. nuc. myr.
		7.?		87 1/2. croc.

Inuenies enim 400. lib. quæ valebunt 400. aur. & singulæ lib. constabunt 10. Iulijs. Quod probabis, vt in præcedenti quæstione dictum est.

Possunt fieri in hac quæstione plures aliæ alligationes diuersæ, vt in 4. exemplis hic appositis apparet.

Pretia

Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium.	6.	1. 2. 6.
	7.	1. 2. 6.
10.	9.	1. 2. 6.
	11.	4. 3. 1.
	12.	4. 3. 1.
	16.	4. 3. 1.
Summa differentiarum.		51.

Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium.	6.	1.
	7.	2.
10.	9.	6.
	11.	4.
	12.	3.
	16.	1.
Summa differentiarũ.		17.

Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium.	6	6.
	7.	2.
10.	9.	1.
	11.	1.
	12.	3.
	16.	4.
Summa differentiarũ.		17.

Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium.	6.	2.
	7	1.
10.	9	6.
	11.	3.
	12	4.
	16	1.
Summa differentiarũ.		17.

In primo enim quodlibet priorum trium pretiorum alligatum est cum omnibus tribus posterioribus. In secundo vero primum cum quarto, & secundum cum quinto, & tertium cum sexto. In tertio deinde primũ cum sexto, & secundum cum quinto, & tertium cum quarto. In quarto denique primum cum quinto, & secundum cum quarto, & tertium cum sexto. Atque ita in similibus quæstionibus plures fieri possunt alligationes inter se diuersæ.

Quæstio 7. 7. Quidam vult statuam argenteam 300. librarum, offeruntur ei duo genera argenti: Primi libra 1. valet 30. aur. secundi 20. quæ ita inter se miscere vult, vt 1. libra constet 24. aur. Quantum ergo ex quolibet argento

gento sumet, vt habeat 300. lib. quarũ singulę constent 24. aur.? Ita stabit alligatio. Dic ergo. Si summa differentiarũ 10. dat 300. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 4. & 6.? vt hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
24.	30.	4.
	20.	6.
	Summa differentiarum.	10.

10. 300. { 4.? / 6.? } fiunt { 120. primi arg. / 180. secundi arg.

Ita enim reperies 300. libras, quarũ singulæ valent 24. aur. Quod probabis, vt in quæstione 5. dictum est.

REGVLA FALSI SIMPLICIS positionis. Cap. XXII.

INTER alias Arithmeticæ regulas non postremum locum obtinet regula falsi, quæ sic dicitur, non quòd falsum nos doceat, sed quòd ex falso posito verum eruere ostendat: quod quidem efficit, ponendo quemuis numerum, qui propositæ quæstioni putatur satisfacturus, licet re ipsa non satisfaciat. Hæc autem regula duplex est. Quædam enim vocatur simplicis positionis, in qua nimirum vnica fit positio vnius duntaxat numeri, qui quæstioni creditur satisfacturus: quædam vero duplicis positionis dicitur, in qua videlicet duplex fit positio duorum numerorum, quorum vterq; quæstioni satisfacturus putatur. Cæterum magnum est inter duas has regulas discrimen. Quidquid enim per priorem soluitur, id etiam per posteriorem explicari potest, non autem contra. Innumeræ enim propemodum quæstiones per posteriorem soluuntur, quæ

Regula falsi cur sic dicta sit.

Regula falsi duplex.

Discrimẽ inter duas regulas falsi.

quæ nulla ratione per priorem possunt explicari. Nam sub priori continentur illæ tantum quæstiones, in quibus tales partes, aut numeri exprimuntur, qui eandem proportionem habent in paruis numeris, quam in magnis: quales sunt $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$. &c. item numeri dupli, tripli, quadrupli, &c. Itaq; satis esset, si posterior regula sola proponeretur. Sed quia per priorem plurimæ quæstiones multo breuius explicãtur, quàm per posteriorem, vtramq; paucis declarabimus, initio sumpto à priori, quæ facilior est.

Regula falsi simplicis positionis quo fiat.

Proposita igitur quæstione quacunq; per regulã falsi simplicis positionis soluenda, ponatur quiuis numerus, qui quæstioni creditur satisfacturus, isq; iuxta quæstionis tenorem examinetur; et si omnia consonent, numerus positus erit is, qui quæritur: Si vero aliter se res habeat, falsa fuit positio numeri assumpti. Quare ex hoc falso eliciendum erit verum beneficio regulæ trium, vt in exemplis declarabitur.

Quæstio 1.

1. Tres emere constituunt domum quandã 2700. aureis. Secundus duplo plus vult dare, quàm primus, & tertius triplo plus, quàm secundus. Quantum ergo quisq; expendet? Hac quæstione nihil aliud quæritur, quàm vt numerus 2700. diuidatur in tres partes ea lege, vt secunda sit dupla primæ, & tertia tripla secundæ. Pone ergo primum dare quotcunq; aureos volueris, nempe 6. Igitur iuxta tenorem quæstionis secundus dabit 12. cum hic numerus sit duplus primi; tertius vero dabit 36. quòd hic numerus sit triplus secundi. Omnes autem hi tres numeri efficiunt 54. aur. cum tamen efficere deberent 2700. Dic ergo. Si 54. prouenerunt ex falsa positione 6. aur. primi, ex qua vera positione prouenient 2700? Inuenies; primum dedisse 300. aur. ac proinde secundum 600. & tertium 1800. qui omnes tres numeri efficiunt 2700.

Posset quoq; pecunia secundi, & tertij reperiri ex vtriusq; positione, si diceretur. Si 54. prouenerunt ex falsa positione 12. aur. secundi, & ex falsa positione 36. aur. tertij, ex quo prouenient 2700. ? inuenires eñ

pecu-

pecuniam ſecundi eſſe 600. aur. & tertij 1800. Sed ſatius eſt inueſtigare per regulã trium pecuniã vnius dũtaxat. Ex hac enim aliorum pecuniæ facili negotio elicientur, iuxta tenorem quæſtionis.

Eoſdem prorſus numeros reperiſſes, ſi pro primo alium numerum poſuiſſes, quàm 6. ac proinde pro ſecundo alium, quàm 2. & pro tertio alium, quàm 36.

2. Interrogatus quidam, quantum pecuniæ in arca haberet, reſpondit, ſe neſcire, hoc tamen ſe certò à procuratore cognouiſſe, $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. ſuæ pecuniæ cõſtituere 4700. aur. Quantum ergo pecuniæ is habuit? Hic etiam nihil aliud quæritur, quàm numerus, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. ſimul efficiant 4700. Pone ergo illũ habere 60. aur. (vt autẽ fractiones vitentur, quo ad fieri poteſt, ſumendus eſt ſemper numerus, qui contineat fractiones in q̃ſtione expreſſas, vt cap. 10. docuimus, qualis hic eſt 60.) cuius $\frac{1}{3}$. eſt 20. & $\frac{1}{4}$. 15. & $\frac{1}{5}$. 12. quæ omnes partes conſtituunt 47. Debebant autẽ conficere 4700. Dic ergo. Si 47. prouenerunt ex 60. quẽ numerũ falſo poſuimus, ex quo prouenient 4700? Inueniemuſq; 6000 atq; tot aureos in arca habuit. Nã $\frac{1}{3}$. continet 2000 & $\frac{1}{4}$. 1500. & $\frac{1}{5}$. 1200. quæ omnes partes efficiunt 4700. Quæſtio 2.

3. Interrogatus quidam ludimagiſter, quot haberet diſcipulos, reſpondit: Si adhuc ſemel tot haberẽ, quot habeo, & accederet $\frac{1}{2}$. eorum, & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & præterea 1. haberem 112. Quot ergo diſcipulos habuit? Hæc quæſtio ita propoſita ſolui non poteſt per hanc regulam, propterea quòd vnitas, cuius poſtremo loco fit mentio, non poteſt habere eandem proportionem cum $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ & duplo parui numeri, quam cum eiſdem partibus, & duplo magni numeri. Si tamen auferatur 1. ex numero 112 qui in quæſtione debet produci, ſoluetur quæſtio propoſita. Tunc em̃ nihil aliud quæritur, quàm numerus, qui bis ſumptus, vnà cũ $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. facit 111. Nam ſi tandem addatur 1. fient 112. Pone ergo illum habuiſſe 12. diſcipulos. Hic em̃ numerus continet fractiones datas. Si ergo totidem Quæſtio 3.

diſcipuli

discipuli accedant, habebit 24. nempe duplo plures, quàm prius. Ad quos si rursus accedat $\frac{1}{2}$. nimirum 6. & $\frac{1}{3}$. nempe 4. & $\frac{1}{4}$. vtpote 3. habebit 37. Debebant autem esse 111. vt addito 1. haberet 112. Dic ergo. Si 37. prouenerunt ex 12. ex quo prouenient 111? Inuenieſq; eum habuisse 36. discipulos. Nam si accedant totidem, habebit 72. quibus si addantur $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. videlicet 18. 12. & 9. fient 111. addito denique 1. fient 112.

Quæstio 4. 4. Quidam emit equum, hortum, ac domum 5000. aureis, ea lege, vt hortus quadruplo pluris constet, quàm equus, at domus quincuplo pluris, quàm hortus. Quanti ergo emit equum, & quanti hortum, & quanti domum? Hic quæritur, vt numerus datus 5000. distribuatur in tres partes, ita vt secunda sit primæ quadrupla, & tertia secundæ quincupla. Estq; quæstio hæc similis primæ. Pone ergo, equum valere 30. aur. quo posito valebit hortus 120. aur. & domus 600. qui omnes numeri conficiunt 750. Deberent autem conficere 5000. Dic ergo. Si 750. prouenerũt ex 30. ex quo prouenient 5000? Inuenieſq; 200. atq; tot aureis fuit emptus equus, ac proinde hortus emptus fuit 800. aur. & domus 4000. qui omnes numeri cõstituũt 5000. aur.

Quæstio 5. 5. Quidam proficiscens Venetijs Hierosolymam expendit in itinere $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. suæ pecuniæ; domum autẽ reuersus deprehendit sibi supereſſe 36. aureos. Quãtum ergo pecuniæ is secum tulit? Hic quæritur numerus, à quo si auferantur $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. reliquus sit numerus 36. Pone illum habuisse 300. aur. ex quo numero si auferas $\frac{2}{3}$. nempe 200 & $\frac{1}{5}$. nimirum 60. supersunt 40. Debebant autem remanere tantum 36. Dic ergo. Si 40. prouenerunt ex 300. ex quo prouenient 36? Inueniesq; 270. atq; tot aureos habuit. Nam ablatis $\frac{2}{3}$. nempe 180. & $\frac{1}{5}$. nimirum 54. supersunt 36.

Quòd si quando contingat, partes in quæstione expressas vnitatem superare, ac proinde non posse ex posito numero subtrahi, quæstio impossibilis erit. Vt si diceret quis. Da mihi numerum, vt, si ex eo demas $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$.

& $\frac{3}{5}$. relinquantur 36. quæstio esset impossibilis. Nam $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. vnitatem superant, ac proinde auferri nequeunt ex posito numero 300. quia $\frac{2}{3}$. sunt 180. & $\frac{3}{5}$. sunt etiam 180. quæ partes simul constituunt 360. qui numerus ex 300. auferri non potest.

6. Quæratur numerus, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. efficiant 522. Pone numerum eum esse 60. cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. nempe 30. 20. 15. 12. & 10. efficiunt 87. Nos autem volumus 522. Dic ergo. Si 87. prouenerunt ex 60. ex quo prouenient 522? Inuenieſque 360. Huius enim numeri $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. nimirum 180. 120. 90 72. & 60. efficiunt 522. Quæstio 6.

7. Quidam interroganti se, quantum pecuniæ haberet, respondit, se tot aureos habere, vt, si ad eos addatur $\frac{1}{2}$ eorum, & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & præterea 100. aur. constituant 300. aur. Quantam ergo pecuniam habuit? Vt hæc quæstio per hanc regulã soluatur, detrahendi sunt 100. aur. ex 300. vt in quæstione 3. diximus, & inquirendus numerus, vt, si addatur eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. fiant 200. Tunc enim additis 100. fient 300. vt in quæstione proponitur. Pone ergo eum numerum esse 24. Huius $\frac{1}{2}$. est 12. & $\frac{1}{3}$. 8. & $\frac{1}{4}$. 6. quæ omnes partes additæ ad 24. faciunt 50. Nos aũt volumus, vt efficiãt 200. Dic ergo. Si 50. prouenerunt ex 24. ex quo prouenient 200? Inuenieſq; 96. ac tanta fuit ſumma aureorũ. Nam $\frac{1}{2}$. continet 48. & $\frac{1}{3}$. 32. & $\frac{1}{4}$. 24. qui omnes numeri faciunt 104. additi aũt ad 96. efficiunt 200. ad quẽ numerũ si tandẽ adijciantur 100. fiẽt 300. Quæstio 7.

8. Quidam volens molere 500. modios tritici adit molitorem habentem 5. molas, quorum prima singulis horis molit 7. modios, secunda 5. tertia 4. quarta 3. quinta 1. Quanto ergo tempore totum triticum moletur, si omnibus molis triticum imponatur, & quantũ tritici singulis molis imponendũ? Pone in 4. horis. Quo posito, prima mola conficiet 28. modios, secunda 20. tertia 16. quarta 12. & quinta 4. qui omnes modij faciunt 80. Debent autem esse 500. Dic ergo. Si 80. modij prouenerunt ex 4. horis: 500. modij ex quot horis Quæstio 8.

prouenient? Inuenieſq; 25. horas. In tot enim horis prima mola molet 175. modios, ſecunda 125. tertia 100. quarta 75. & quinta 25. qui omnes ſunt 500. modij, atq; tot modij cuilibet molæ ſubijciendi ſunt, quot ipſa modios molit in 25. horis.

Quæſtio 9. 9. Quidam proficiſcens ad nundinas lucratus eſt ex pecunia, quam ſecum attulerat, tantum, vt lucrũ vnà cum pecunia allata triplũ eſſet pecuniæ allatæ. Ex hac deinde pecunia in alijs nundinis tantam pecuniam lucratus eſt, vt lucrum vnà cum pecunia ad has nundinas allata quincuplum eſſet huius pecuniæ. Poſtremo ex hac pecunia in alijs nundinis tantum lucratus eſt, vt lucrum vnà cum pecunia, quam proxime habebat, quadruplum eſſet huius pecuniæ; inuenitq; ſe habere 400. aureos. Quantum ergo pecuniæ ad primas nundinas attulit? In hac quæſtione inquiritur numerus, qui multiplicatus per 3. & productus numerus per 5. & hic numerus productus per 4. faciat 400. Pone eũ numerum eſſe 10. quem ſi multiplices per 3. facies 30 ℔ lucro vnà cum pecunia in primis nundinis. Si autem multiplices 30. per 5. procreabis 150. pro lucro vnà cum pecunia in ſecundis nundinis. Si deniq; multiplices 150. per 4. facies 600. pro lucro vnà cum pecunia in tertijs nundinis. Nos vero diximus, in tertijs nundinis eum habuiſſe 400. tantum aureos. Dic ergo. Si 600. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 400? Inuenieſq; $6\frac{2}{3}$. atque tot aureos ſecum ille attulit ad primas nundinas. Nam ſi multiplicemus $6\frac{2}{3}$. per 3. efficiemus 20. pro lucro & pecunia in primis nundinis. Si deinde multiplicemus 20. per 5 gignemus 100. pro lucro ac pecunia in ſecundis nundinis. Si deniq; multiplicemus 100. per 4. producemus 400. pro lucro ac pecunia in tertijs nundinis.

Quæſtio 10. 10. Inueſtigetur numerus, vt eo multiplicato per 4. & ℔ducto numero per 3. & hoc ℔ducto numero per 6. atq; huic numero ℔ducto additis 10. producatur numerus 800. Hæc quæſtio per hanc regulã ſolui nequit, niſi prius detrahantur 10. ex 800. propter rationem in

quæ-

quæstione 3. dictam. Subtrahe ergo 10. ex 800. relinquenturq; 790. atq; hic numerus producendus est ex multiplicationibus in quæstione expressis. Nã si ei addantur 10. fiet numerus 800. Pone numerum quæsitũ esse 10 quem si multiplices per 4. facies 40. qui numerus multiplicatus per 3. facit 120. Hic deniq; numerus multiplicatus per 6. producit 720 Deberet autem produci numerus 790. Quare dic. Si 720. prouenerunt ex 10 ex quo puenient 790? Inuenieſq; $10\frac{3}{3}\frac{5}{6}$. atq; hic est numerus, qui quæritur. Si enim multiplices $10\frac{3}{3}\frac{5}{6}$. per 4. facies $43\frac{8}{9}$. quem numerum si rursus multiplices per 3. gignes numerum $131\frac{2}{3}$. quẽ si deniq; per 6 multiplices, procreabis 790. Additis autẽ 10. fient 800.

11. Senex quidam interroganti de sua ætate respondit, se tot habere annos, vt si eis adderetur $\frac{1}{2}$. ipsorũ, & ex summa detraheretur $\frac{1}{4}$. ipsius, haberet 99. annos. Quot ergo annos habuit? Hic inueniendus est numerus, ad quem si adijciatur $\frac{1}{2}$ ipsius, & ex summa detrahatur $\frac{1}{4}$ eiusdem summæ, reliquus sit numerus 99. Pone eum habuisse 80. annos. Si igitur adijciatur eorum $\frac{1}{2}$. nempe 40. anni, fient 120. à quibus si detrahatur $\frac{1}{4}$. nimirum 30. supererunt 90. Dicuntur autem superesse 99. Dic ergo. Si 90. prouenerunt ex 80. ex quo puenient 99? Inuenieſq; 88. atq; tot annos senex ille habuit. Si nãq; eis adijcias $\frac{1}{2}$. eorũ, nimirũ 44. facies 132. à quibus si auferas $\frac{1}{4}$. nẽpe 33. supererũt 99. Quæstio 11.

12. Apparet fastigium cuiusdã turris 24. palmorũ: dicit aũt quidam, $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{5}$. eiusdem turris à circumiacentibus ædificijs occultari. Quanta ergo est totius turris altitudo? Hic quærendus est numerus, ita vt, si ab eo auferatur $\frac{1}{3}$. & præterea $\frac{2}{5}$. relinquantur 24. Pone eum numerum esse 30. à quo si auferas $\frac{1}{3}$. videlicet 10. & $\frac{2}{5}$. nimirum 12. remanent 8. Nos autem volumus, vt relinquantur 24. Dic ergo. Si 8. prouenium ex 30. ex quo prouenient 24? Inuenieſq; 90. ac tanta est altitudo turris. Nam si auferas $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{5}$. nempe 30. & 36. relinquentur 24. Quæstio 12.

13. Est hasta, cuius $\frac{1}{3}$. alba est, & $\frac{1}{5}$. nigra, & $\frac{2}{9}$. cærulei coloris, supersunt autem 12. palmi rubri. Quanta est ergo longitudo illius hastæ? Hic etiam inquirendus est numerus, ita vt, si ex eo dematur $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. reliquus sit numerus 12. Pone eum numerum esse 45. à quo si auferas $\frac{1}{3}$. nempe 15. & $\frac{1}{5}$. nimirum 9. & $\frac{2}{9}$. hoc est, 10. supersunt 11. Debent autem remanere 12. Dic ergo. Si 11. prouenerunt ex 45. ex quo prouenient 12? Inuenies q; $49\frac{1}{11}$. ac tot palmorum est hastæ illius longitudo. Nam eius $\frac{1}{3}$. cõtinet $16\frac{4}{11}$. palmos; at $\frac{1}{5}$. continet $9\frac{9}{11}$. palmos; Item $\frac{2}{9}$. cõtinét $10\frac{10}{11}$. palmos: qui omnes numeri ablati ex lõgitudine hastę palmorũ $49\frac{1}{11}$. relinquũt 12. palmos.

14. Quidam pro 30. vlnis panni albi, & 40. vlnis panni nigri expendit 660. aureos, constiteruntq; singulæ vlnæ panni nigri duplo pluris, quàm singulę vlnæ panni albi. Quanti ergo constitit vna vlna panni albi, & quanti vna vlna nigri? Pone vnã vlnam panni albi constitisse 4. aur. Et quoniã pretium vnius vlnæ panni nigri est duplo maius, necesse est, vnam vlnã panni nigri constitisse 8. aur. Ex quo fit, 30. vlnas panni albi constare 120. aur. & 40. vlnas panni nigri valere 320. aur. qui omnes aurei efficiunt 440. Nos autem diximus, illũ expendisse 660. aur. Dic ergo. Si 440. proue nerunt ex 4. ex quo proueniẽt 660? Inuenies q; 6. aur. pro pretio vnius vlnæ panni albi, ac proinde 12. aur. pro pretio vnius vlnæ panni nigri. Ita enim 30. vlnæ panni albi constabunt 180. aur. & 40. vlnæ panni nigri valebunt 480. aur. qui omnes aurei cõficiunt 660. aur

REGVLA FALSI DVPLIcis positionis. Cap. XXIII.

Regula falsi duplicis positionis quo modo fiat.

PROPOSITA quæstione quacũq; per regulam falsi duplicis positionis explicanda, ponatur quiuis numerus siue paruus, siue magnus, qui iuxta tenorem quæstionis examinetur: Nam

Nam si is quæsito respondeat, soluta erit quæstio; sin minus, notandus erit excessus, vel defectus, quo a veritate aberratum est, vnà cum litera P. vel M. quarum illa plus, hæc vero minus significat, prout videlicet error veritatem excesserit, aut ab ea defecerit. Deinde ponatur rursus aliquis alius numerus siue maior priore, siue minor, qui eodē modo examinetur, &c. Nā ex duplici hac positione, & duplici errore veritas elicietur hoc modo. Si in vtraq; positione à veritate aberratum est per excessum, vel defectum, subtrahatur minor error ex maiore, & numerus relictus pro diuisore seruetur. Deinde numerus primo positus per secundū errorem, & numerus secundo positus per primū errorē multiplicetur, minorq; numerus ꝓductus ex maiore detrahatur. Nam si numerus hic residuus per diuisorē iā inuentū, nimirū per differentiā errorū, diuidat, dabit Quotiēs numerū q̄sitū, qui q̄stioni ꝓpositæ satisfaciet.

Quando vtraq; positio veritatem excedit, fit subtractio.

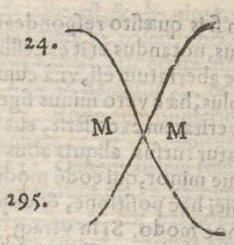
Si vero in alterutra positione à veritate aberratum est per excessum, & in altera per defectum, colligendi erunt duo errores in vnam summam, vt habeatur diuisor: Similiter duo illi numeri, qui ex multiplicatione numerorū positorū per errores, vt dictū est, producuntur, in vnam summam sunt colligendi, vt habeat numerus diuidēdus, &c. Id quod ex q̄onibus fiet perspicuū.

Quando vna positio veritatem excedit, & altero deficit, fit additio.

Quæstio 1.

1. Quæratur numerus, à cuius dimidio subtracta $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. relinquantur 300. Ponatur numerus 24. qui nimirum habeat partem $\frac{1}{2}$. in quæstione expressam, & eius $\frac{1}{2}$. alias partes expressas, nempe $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. contineat, vt fractiones, quoad fieri potest, vitentur: qui quidem numerus facile inuenietur, si numerus sumatur habens posteriores fractiones, & is postea duplicetur. Solet autem numerus hic primo acceptus poni ad sinistram in superiori parte crucis, & error in parte inferiori ad sinistram quoque, litera deniq; P. vel M. prout veritatem excesserit error ille, vel ab ea defecerit, in medio crucis ad eandem sinistram: Secundus vero numerus acceptus cum errore, & litera P. vel M. codē ordine collocari solet ad dexteram eiusdem crucis,

vt in nostro exemplo factum esse vides. Hic numerus 24. positus ita iuxta pronunciationem quæstionis examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. est 12. à quo numero detrahenda est $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. Est autē $\frac{1}{3}$. numeri 12. numerus 4. & $\frac{1}{4}$. numerus 3. qui numeri detracti ex 12. relinquūt 5. Debebant autem relinqui 300. Aberratum est ergo à veritate per defectum 295. vnitatum; ac proinde error hic notandus est cum litera M.



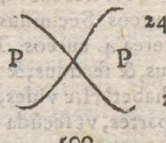
Ponatur secundo numerus 96. qui ita iuxta quæstionem examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. est 48. at $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. huius numeri 48. sunt 16. & 12. qui ex 48. ablati, relinquunt 20. Debebant autem relinqui 300. Defecimus ergo rursus à veritate 280. vnitatibus; ac proinde error hic notandus est cum litera M.

Iam vero, quia in vtraq; positione defecimus à vero, subtrahendus erit minor error ex maiore, vt habeatur diuisor 15. in inferiori parte crucis collocandus. Deinde multiplicandus numerus 24. primo positus per 280. secundum errorem, & numerus 96. secundo positus per 295. primum errorem, minorq; numerus productus 6720. ex maiore 28320. subtrahendus, vt relinquatur numerus diuidendus 21600. Hic enim numerus diuisus per diuisorem inuentum 15. dabit Quotientē 1440. qui est numerus quæsitus. Eius enim $\frac{1}{2}$. est 720. & huius $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. sunt 140. & 180. qui numeri ex 720. detracti relinquunt 360. vt in quæstione proponebatur.

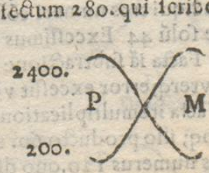
Sed soluamus eandem quæstionē per alios duos numeros, qui veritatem excedant; deinde per alios, quorum vnus veritatem excedat, & alter ab eadem deficiat. Ponatur ergo primum numerus 4800. Huius $\frac{1}{2}$.

est

est 2400. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. sunt 800. & 600. qui numeri ex 2400. ablati relinquunt 1000. Debebant aût relinqui 300. Excessimus ergo veritatem 700 vnitatibus, atq; adeo error hic scribendus est cum litera P. Ponatur deinde numerus 2400. Huius $\frac{1}{2}$. est 1200. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$ sunt 400. & 300. quibus numeris ex 1200 ablatis, remanent 500. Debebant aût relinqui 300. Excessimus ergo rursus veritatem 200. vnitatibus. Iam vero, subtracto minore errore de maiore, relinquetur diuisor 500. Facta autem multiplicatione numerorum positorum per errores in crucem, vt dictũ est, subtractoq; minore numero producto 960000. de maiore 1680000. relinquetur numerus dividendus 720000. qui per 500. diuisus dabit Quotiente 1440. vt prius.

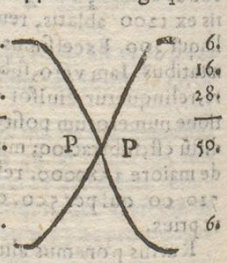


Rursus ponamus alium numerum 2400. quo examinato iuxta quęstionem propositam, inueniemus excessum 200. qui error scribendus est cum litera P. Deinde ponamus numerum 96. quo eadem ratione examinato, deprehendemus defectum 280. qui scribendus est cum litera M. Quoniã vero in vna positione excessimus veritatem, & in altera defecimus à vero, facienda erit additio errorum, vt componatur diuisor 480. Item duo numeri producti ex multiplicatione numerorum positorũ per errores in crucem, nempe 672000. & 19200. in vnam summam colligendi, vt fiat dividendus numerus 691200. Diuiso enim hoc numero 691200. per 480. fiet Quotiens 1440. veluti prius.



Quæstio 2.

2. Tres habent summã quandam pecuniæ, nempe 44 aureos. Secundus habet duplo plus quàm primus, & pterea 4. aureos. Tertius aũt tantũ habet, quantũ primus, & secũdus, & pterea 6. aur. Quantũ ergo quisque habet? Hic vides, numerũ 44 distribuendũ esse in tres partes, vt secũda dupla sit primæ, cõtineatq; pterea 4 tertia vero æqualis sit primæ ac secundæ, contineatq; pterea 6. Vel q̃rendos esse tres numeros, quorũ secundus contineat primũ bis, & insuper 4. tertius vero contineat primũ, & secundum semel, & præterea 6. ipsi vero tres numeri conficiant 44. Pone ergo primũ habere 10. quo posito, habebit secundus 24. nempe duplo plus, quàm primus, & insuper 4. tertius autem habebit 40. tantũ videlicet, quantum primus, ac secundus, ac præterea 6. qui tres numeri conficiunt 74. Deberent autem cõficere solũ 44. Excessim⁹ ergo veritatẽ 30. vnitatibus. Pone de inde primũ habere 6. Habebit ergo secũdus 16. & tertius 28. qui tres numeri cõficiunt 50. Deberent aũt cõficere solũ 44. Excessimus ergo rursũ veritatẽ 6. vnitatibus Facta iã subtractione minoris erroris de maiore, quia vterq; error excessit veritatẽ, reliquus erit diuisor 24. Facta itẽ multiplicatione 10. per 6. & 6. per 30. subtracto q; illo producto 60. ex hoc 180. remanebit diuidẽdus numerus 120. quo diuiso per 24. fiet Quotiẽs 5. Tantũ ergo habet primus: secũdus vero 14. & tertius 25. qui tres numeri in vnã summã collecti efficiunt 44.



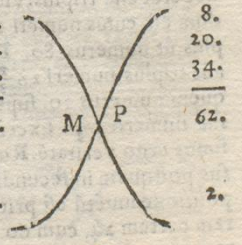
Si multiplicarentur numeri, quos posuimus secundum, ac tertiũ habere, per eosdem errores, &c. inuenirentur numeri, quos secundus, ac tertius habent. Vt ex 24. per 6. fiunt 144. & ex 16. per 30. fiunt 480. Subtracto autem illo numero ex hoc, remanent 336.

quo

quo numero diuiso per 24. diuisorẽ inuentũ, fiet Quotiens 14. pro numero secundi. Item ex 40. per 6. fiũt 240. & ex 28. per 30. fiunt 840. subtracto autem illo numero ex hoc, reliquus erit numerus 600. quo diuiso per 24. fiet Quotiens 25. pro numero tertij. Sed satius est, inuento numero primi, inuestigare reliquos, iuxta pronunciationem quæstionis, nempe eo modo, quo vterq; numerus falso positus est examinatus. Aliquãdo tñ cõmodius erit inquirere alios numeros ea ratione, qua primus quæsitus est, vt in qstione 5. manifestũ erit.

3. Quærantur tres numeri, qui faciant 60. secundus autem contineat primũ bis, & insuper 4. tertius vero contineat primũ ac secundũ, & præterea 6. Hæc quæstio similis est antecedenti. Pone primum numerũ esse 6. ac proinde secundũ 16. & tertium 28. qui tres numeri faciunt 50. Deberent aũt facere 60. Factus est ergo error per defectum 10. Pone rursus primum numerum esse 8. ac proinde secundum 20. & tertium 34. qui tres numeri faciunt 62. Deberent aũt facere 60. Excessimus ergo verum 2. vnitatibus. Operare, vt regula præcipit, inuenieſq; primum numerum esse $7\frac{2}{3}$. ac proinde secundũ $19\frac{1}{3}$. & tertium 33. qui tres numeri efficiunt 60.

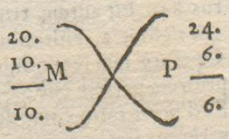
Quæstio 3.



12.
Diuisor.

4. Diuidat numerus 30. in duas partes, quarũ prior cum 60. numerũ faciat triplũ numeri ex posteriori parte, & 20. compositi. Pone priorẽ partẽ esse 20. ac proinde posteriorem 10. Prior cũ 60. facit 80. & posterior cum 20. facit 30. Deberet aũt numerꝰ 80. triplus esse numeri 30. iuxta pro-

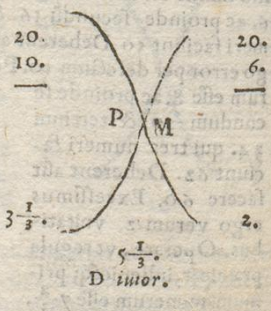
Quæstio 4.



16.
Diuisor.

ta pronunciationem exempli. Cum ergo numerus 90. triplus sit numeri 30. defecimus 10. vnitatibus à vero. Pone rursus priorem partem esse 24. ac propterea posteriorem 6. Prior cum 60. facit 84. & posterior cũ 20. facit 26. Deberet aũt numerus 84. iuxta tenorem quæstionis, triplus esse numeri 26. Cum ergo numerus 78. triplus sit numeri 26. excessimus veritatem 6. vnitatibus. Operare, vt regula præcipit, inuenieſq; priorẽ partem esse $22\frac{1}{2}$. atq; adeo posteriorẽ $7\frac{1}{2}$. Prior cũ cum 60. facit $82\frac{1}{2}$. & posterior cum 20. facit $27\frac{1}{2}$. cuius numeri ille triplus est.

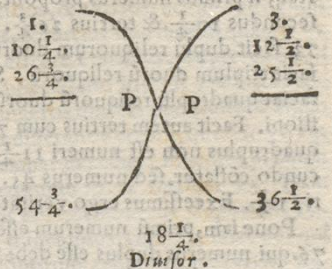
Alio modo institui potest solutio huius quæstionis. Postquã enim in prima positione deprehendimus priorem partem 20. cum 60. facere 80. & posteriorẽ partem 10. cum 20. facere 30. cuius numeri ille deberet esse triplus; vidẽdum est, cuius numeri triplus sit numerus 80. Est aũt triplus numeri $26\frac{2}{3}$. quem numerus 30. superat numero $3\frac{1}{3}$. Excessimus ergo veritatẽ. Rursus postquam in secunda positione inuẽtũ est priorem partem 24. cum 60. facere 84. & posteriorẽ partem 6. cum 20. facere 26. cuius numeri ille deberet esse triplus; videndum est, cuius numeri triplus sit numerus 84. Est autem triplus numeri 28. à quo numerus 26. deficit 2. vnitatibus. Defecimus ergo à veritate. Operare iam secundum regulæ præcepta, inuenieſque priorem partem esse $22\frac{1}{2}$. & posterioré $7\frac{1}{2}$. vt prius. Sed prior ratio cõmodior videtur, cum facilius per eã vitentur fractiones.



Quæstio 5. Quærantur tres numeri, quorũ primus additus ad 73. faciat duplũ reliquorum duorũ; secundus vero cũ 73. faciat triplum duorũ reliquorum; tertius denique

cum

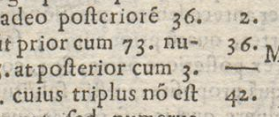
cum 73 faciat quadruplum reliquorũ duorum. Pone primũ numerũ esse 1. vel alium quemuis numerũ imparẽ, vt additus ad 73 faciat numerũ parẽ, qui possit habere dimidiũ, quandoquidem primus cũ 73. debet facere numerum duplum reliquorũ duorum. Quoniam igitur 1. cũ 73. facit 74. qui numerus duplus debet esse, iuxta pronunciationem exempli, reliquorũ duorum, necesse est, reliquos duos simul esse 37. Et quia secundus cum 73. debet facere numerũ triplum primi, qui est 1. & tertij, diuidendus erit, per antecedentem quæstionem, numerus 37. in duas partes, quarũ prior cum 73. faciat triplum numeri, qui ex posteriore parte, & 1. componitur. atq; ita, antequã proposita quæstio soluitur, necesse est, aliã prius soluere, quæ in ipsa operatione occurrit. Pone ergo priorem partem esse 2. atq; adeo posteriorem 35. Facit autẽ prior cum 73 numerũ 75. posterior vero cum 1. facit 36. cuius triplus non est numerus 75. sed numerus 108. Defecimus ergo à veritate 33. vnitatibus, cum tot vnitatibus minor sit noster numerus 75. quàm 108. Pone rursus, priorem partem esse 5. atq; adeo posteriorẽ 32. Prior autem cum 73. facit 78. & posterior cum 1. facit 33. cuius numeri triplus non est numerus 78. sed numerus 99. Defecimus ergo rursus 21. vnitatibus. Operare iam secundũ præcepta regulæ falsi, inuenieſq; priorem partẽ esse $10\frac{1}{4}$. ac proinde posteriorẽ $26\frac{3}{4}$.



Itaq;

Itaq; si primus numerus propositæ quæstionis est 1. erit secundus $10\frac{1}{4}$. & tertius $26\frac{3}{4}$. Ita enim primus cum 73. facit duplũ reliquorum duorũ, & secundus cũ 73. facit triplum duorũ reliquorũ. Si ergo tertius cũ 73. faciat quadruplũ reliquorũ duorũ, satisfactũ erit quæstioni. Facit autem tertius cum 73. numerũ $99\frac{3}{4}$. qui quadruplus non est numeri $11\frac{1}{4}$. qui ex primo, & secundo cõflatur, sed numerus 45. quadruplus est numeri $11\frac{1}{4}$. Excessimus ergo veritatẽ hoc numero $54\frac{3}{4}$.

Pone iam, primũ numerum esse 3. qui cum 73. facit 76. qui numerus duplus esse debet reliquorũ duorum. Duo ergo reliqui efficient 38. Et quia secundus cum 73. debet facere triplũ primi, qui est 3. & tertij; diuidendus erit, per antecedentem quæstionem, numerus 38. in duas partes, quarũ prior cum 73. faciat triplum eius numeri, qui ex posteriori parte, & 3. componitur. Pone ergo priorẽ partẽ esse 2. atq; adeo posteriorẽ 36. Facit aũt prior cum 73. numerũ 75. at posterior cum 3. facit 39. cuius triplus nõ est numerus 75. sed numerus 117. Defecimus ergo à veritate numero 42. Pone rursus, priorẽ partẽ esse 23. ac proinde posteriorẽ 15. Prior aũt cũ 73. facit 96. at posterior cũ 3. facit 18. cuius numeri triplus nõ est numerus 96. sed numerus 54. Excessimus ergo verũ numero 42. Operare secundũ regulam falsi, inuenieſq; priorem partẽ esse $12\frac{1}{2}$. ac proinde posteriorẽ $25\frac{1}{2}$. Itaque si numerus primus quæstionis propositæ est 3. secundus erit $12\frac{1}{2}$. & tertius $25\frac{1}{2}$. Ita enim primus cũ 73. facit duplum reliquorũ duorum, & secundus cum 73. facit triplum reliquorũ duorũ. Si igitur tertius cũ 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, soluta erit quæstio. Facit autem tertius cum 73. numerum $98\frac{1}{2}$. qui quadruplus non est numeri $15\frac{1}{2}$. sed numerus 62. Excessimus ergo verum numero hoc $36\frac{1}{2}$.

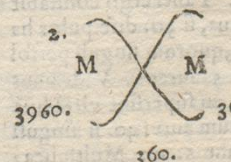


Iam

Iam vero si multiplices primos numeros per errores in crucem, item secundos, & tertios, (cómodius enim inuenientur secundus, & tertius hoc modo, quàm si ex primo inuento illos elicere vellemus, propterea quòd opus esset quæstione præcedenti hic vti) & facta subtractione, residuos numeros diuidas per diuisorẽ inuentum $18\frac{1}{4}$. nempe per differentiã errorũ, quòd in vtraq; positione factus est semper excessus, inuenies primum numerum esse 7. secundum 17. & tertium 23. Nam primus cum 73. facit 80. qui numerus duplus est reliquorum duorum: at secundus cum 73. facit 90. qui numerus triplus est duorum reliquorum: tertius denique cum 73. facit 96. qui numerus reliquorum duorum quadruplus est.

6. Quæratur numerus, quo multiplicato per 3. & producto additis 10. Et summa hac multiplicata per 4. productoq; additis 20. Summa vero hac multiplicata per 5. & producto additis 30. Summa deniq; hac multiplicata per 6. productoq; additis 40. numerus producatur 6700. Finge numerum eum esse 2. qui multiplicatus per 3. facit 6. additis autem 10. fiunt 16. Hæc autem summa multiplicata per 4. fiunt 64. & additis 20. fiunt 84. Rursus hæc summa multiplicata per 5. fiunt 420. additisq; 30. fiunt 450. Hæc deniq; summa multiplicata per 6. fiunt 2700. additisque 40. fiunt 2740. Debebat autem vltima hæc summa esse 6700. Defecimus ergo à veritate hoc numero 3960. Finge deinde, eundem numerum esse 3. qui multiplicatus per 3. facit 9. additisq; 10. fiunt 19. Hæc aũt summa multiplicata per 4. facit 76. additisq; 20. fiũt 96. Hæc rursum summa per 5. multiplicata facit 480. additisq; 30. fiunt 510. Deniq; hæc summa multiplicata per 6. facit 3060. additisq; 40. fiunt 3100. Debebant autem

Quæstio 6.

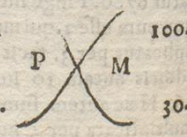


360.
Diuisor.

effici

effici 6700. Defecimus ergo iterũ à veritate numero hoc 3600. Operare ſecundum regulam, inuenieſq; numerum quæſitum eſſe 13. Hic enim numerus multiplicatus per 3. facit 39. additiſq; 10. fiunt 49. Hæc ſumma multiplicata per 4. facit 196. additis vero 20. fiũt 216. quæ ſumma multiplicata per 5. facit 1080. additis autem 30. fiunt 1110. quæ deniq; ſumma multiplicata per 6. facit 6660. additiſq; 40. fiunt 6700.

Quæſtio 7. 7. Ludimagiſter quidã tot habet diſcipulos, vt ſi ſinguli perſoluant 5. aur. deſint illi 30. aur. ad emendam domum, in qua habitat; ſi vero ſinguli dent 6 aur. ſuperſint 40. aurei vltra pretium domus. Quot ergo habet diſcipulos, & quantũ eſt pretium domus? Hic nihil aliud quæritur, quàm numerus, qui multiplicatus per 5. talem procreet numerũ, vt additis 30. eadem ſumma fiat, quæ relinquitur, ſi idẽ numerus per 6. multiplicetur, & à producto detrahantur 40. Pone ergo, numerum diſcipulorũ eſſe 30. qui multiplicatus per 5. facit 150. additiſq; 30. fiunt 180. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 30. diſcipulos habeat, quorum ſinguli perſoluant 5. aureos. Videamus iam, an ſuperſint vltra hoc pretium aurei 40. ſi ſinguli ſoluant 6. aur. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 30. per 6. fiunt 180. nihilq; ſupereſt vltra pretiũ domus 180 aureorũ: debebant autem ſupereſſe 40. aurei. Defecimus ergo à veritate hoc numero 40. Finge rurſus, numerum diſcipulorum eſſe 100. qui multiplicatus per 5. facit 500. additiſq; 30. fiunt 530. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 100. habeat diſcipulos, quorum ſinguli perſoluant 5. aureos. Videamus iam, an ſuperſint 40. aurei vltra hoc pretium, ſi ſinguli dent 6 aureos. Multiplicatus autẽ idem numerus diſcipulorũ 100. per 6. facit 600. ſuperſuntq; 70. aurei vltra pretiũ domus 530. aureorũ: debe-



debebant aũt supereſſe tantũ 40. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 30 Operare per regulã falſi, inueniesq; numerũ diſcipulorum 70. Hic enim numerus multiplicatus per 5. facit 350. additisq; 30. fiunt 380. Tantum ergo eſt pretium domus. Idem numerus diſcipulorũ 70 multiplicatus per 6. facit 420. qui numerus ſuperat priũ do nus 380. aureorũ hoc numero 40.

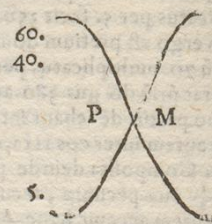
8. Duo partiri debebant inter ſe 100. aureos æqualiter: orta autem inter eos rixa, quilibet, quantũ potuit, arripuit. Compoſita deinde pace inter eos, depoſuit primus $\frac{1}{3}$ ſuæ pecuniæ, ſecundus vero depoſuit $\frac{1}{5}$. primus autem accepit hanc $\frac{1}{5}$. & ſecundus illam $\frac{1}{3}$. quo facto, vterq; habuit 50. Quantum ergo quiſq; primo rapuit? Finge, primũ rapuiſſe 30. aur. ac proinde ſecundũ 70. Primi $\frac{1}{3}$ eſt 10. quam ſi deponat, relinquuntur illi 20. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt 14. quæ ſi detur primo, habebit primus 34. aureos. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate numero hoc 16. Finge rurſus, primum ſurripuiſſe 60. ac proptерea ſecundum 40. Primi $\frac{1}{3}$. eſt 20. quam ſi deponat, ſupererunt ei aurei 40. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt 8. quam ſi demus primo, habebit primus 48. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo in hac etiam poſitione à veritate numero 2. Operare per regulam, reperieſque, primum ſurripuiſſe $64\frac{2}{7}$. atq; adeo ſecundum $35\frac{5}{7}$. Primi enim $\frac{1}{3}$. eſt $21\frac{3}{7}$. quam ſi deponat, remanebunt ei $42\frac{6}{7}$. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt $7\frac{1}{7}$. quam ſi deponat, ſupererunt ei $28\frac{4}{7}$. Iam vero ſi $\frac{1}{5}$. ſecundi, nempe $7\frac{1}{7}$. detur reſiduo primi, quod fuit $42\frac{6}{7}$. habebit primus 50. Item ſi $\frac{1}{3}$. primi, nimirum $21\frac{3}{7}$. detur reſiduo ſecundi, quod fuit $28\frac{4}{7}$. habebit quoq; ſecundus 50. vt in quæſtione proponebatur.

Quæſtio 8.

9. Duo inter ſe ita diſtribuunt 100. aur. vt ſi primus deponat $\frac{1}{3}$. & ſecundus $\frac{1}{4}$. atq; aggregatũ harũ partium

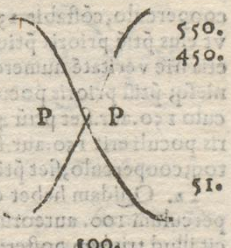
Quæſtio 9.

partium bifariam secetur, deturq; $\frac{1}{2}$. vtriq; numero relicto, numeri fiant æquales, nempe 50. & 50. Quantæ ergo sunt amborũ partes? Finge primi partem esse 60. ac proinde secundi 40. Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 20. remanent ei 40. Si vero $\frac{1}{4}$. secundi, nempe 10. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, hoc est, ad 20. fient 30. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. nimirum 15. demus residuo primi, qđ fuit 40. faciemus 55. Debebamus autem facere tantummodo 50. Excessimus ergo veritatem hoc numero 5. Finge deinde, primum habere 24. ac proinde secundum 76. (Posui aũt hosce numeros, quòd prior habeat $\frac{1}{3}$. & posterior $\frac{1}{4}$. sine fractionibus) Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. supersunt ei 16. Si vero $\frac{1}{4}$. secundi, videlicet 19. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, nempe ad 8. fient 27. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. hoc est, $13\frac{1}{2}$. demus residuo primi, quod fuit 16. habebit primus $29\frac{1}{2}$. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate hoc numero $20\frac{1}{2}$. Operare iam per regulam, inuenieſq; partem primi esse $52\frac{1}{1}\frac{6}{7}$. ac proinde secundi $47\frac{1}{1}\frac{1}{7}$. Nam primi $\frac{1}{3}$. est $17\frac{1}{1}\frac{1}{7}$. quam si deponat, remanent ei $35\frac{5}{1}\frac{}{7}$. Secundi $\frac{1}{4}$. est $11\frac{1}{1}\frac{3}{7}$. quam si deponat, supersunt ei $35\frac{5}{1}\frac{}{7}$. Aggregatũ autem ex $\frac{1}{3}$. primi, & ex $\frac{1}{4}$. secundi, id est, ex $17\frac{1}{1}\frac{1}{7}$. & $11\frac{1}{1}\frac{3}{7}$. est $29\frac{7}{1}\frac{}{7}$. cuius $\frac{1}{2}$. videlicet $14\frac{1}{1}\frac{2}{7}$. adiecta ad residuum primi, hoc est, ad $35\frac{5}{1}\frac{}{7}$. & ad residuũ secũdi, id est, ad $35\frac{5}{1}\frac{}{7}$. facit 50. & 50.



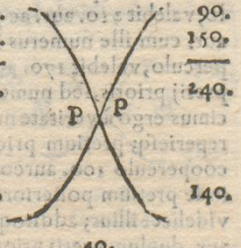
Quæstio 10. 10. Diuidatur numerus 1000. in duas partes, quarum maior superet minorem numero hoc 49. Finge, maiorem partem esse 600. ac proinde minorem 400. Superat autem illa hanc numero 200. & nos volebamus

mus, excessū esse 49. Excessimus ergo veritatē numero 151. Finge deinde, maiorē partē esse 550. ac proinde minorem 450. Superat autē illa hanc numero 100. & nos volebamus, excessum esse 49. Excessimus ergo rursus veritatem numero 51. Operare secundū regulā, inuenies q; maiorem partem esse $524\frac{1}{2}$. ac propterea minorem $475\frac{1}{2}$. Illa enim hanc superat numero dato 49.



Quæstio 11.

11. Quidā habet duo pocula aurea, & vnum cooperculū 150. aureorū, quod additum priori poculo facit illud triplū posterioris poculi, additū vero posteriori poculo facit illud eiusdē pretij cum priori. Quanti ergo constant duo illa pocula? Hic quæruntur duo numeri, quorū primus cum 150. triplus sit secundi, secundus vero cum 150. æqualis sit primo. Pone, prius poculū constare 30. aur. (Pono aūt hunc numerū, quia, additis 150. fit numerus, qui habet subtriplū sine fractione.) Addito cooperculo 150. aureorum, constabit 180. aur. Et qm̄ pretiū hoc triplum esse debet pretij posterioris poculi, constabit posterius poculū 60. aur. Addito cooperculo, cōstabit 210. Debebat autē cōstare tm̄ 30. vt eius pretiū æquale esset pretio prioris. Excessimus ergo veritatē numero 180 Pone deinde, pr̄i⁹ poculū cōstare 90. aur. Addito cooperculo 150. aureorū, cōstabit 240. aur. ac proinde posterius poculū constabit

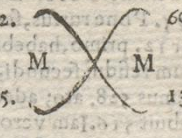


ſtabit 80. aur. cũ ille numerus huius ſit triplus. Additò cooperculo, cõſtabit 230. Debebat aũt cõſtare tm 90. vt eius ptiũ prioris ptio eſſet æquale. Exceſſimus ergo etiã hic veritatẽ numero 140. Operare per regulã, inueniesq; ptiũ prioris poculi 300. aur. Addito em cooperculo 150. aur. fiet ptiũ 450. aur. atq; adeo ptiũ posterioris poculi erit 150. aur. ſubtriplũ videlicet illius; additoq; cooperculo, fiet ptiũ 300. aur. æquale ptio prioris.

Quæſtio 12. 12. Quidam habet duo pocula aurea, & vnũ cooperculum 100. aureorũ, quod additũ priori poculo facit illud triplum posterioris, additũ vero posteriori facit illud duplum prioris. Quanti ergo æſtimantur duo illa pocula? Finge, prius valere 50. aur. Addito cooperculo 100. aureorum, valebit 150. aur. ac proinde posterius valebit etiam 50. aur. cum ille numerus huius triplus ſit. Addito cooperculo, valebit 150. aur. qui numerus duplus non eſt pretij prioris, ſed numerus 100. duplus eſt illius pretij. Exceſſimus ergo veritatẽ numero 50. Pone rurſus, prius valere 110. aur. Addito cooperculo, valebit 210. aur. ac propterea posterius valebit 70. aur. cum ille numerus huius ſit triplus. Addito cooperculo, valebit 170. aur. qui numerus duplus non eſt pretij prioris, ſed numerus 220. eius duplus eſt. Deſecimus ergo à veritate numero 50. Operare per regulã, reperieſq; pretium prioris poculi 80. aur. Addito em cooperculo 100. aureorũ, fiet pretiũ 180. aur. ac proinde pretium posterioris poculi erit 60. aur. ſubtriplũ videlicet illius; additoq; cooperculo, fiet pretiũ 160. aur. duplum pretij prioris, quod erat 80. aureorum.

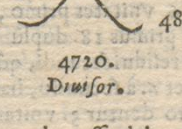
Quæſtio 13. 13. Quidam emit tot perdices, vt ſi emiſſet $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. illorũ, & præterea 22. haberet 100. Quot ergo emit? Hic quæritur numerus, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. cum 22. fa-

22. faciant 100. Pone cum emisse 12. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est 6. & $\frac{1}{3}$. 4. & $\frac{1}{4}$. 3. quæ partes faciunt 13. additisq; 22. fiunt 35. Debebant autẽ fieri 100. Defecimus ergo numero 65. Pone secundo, eum emisse 60 Huius numeri $\frac{1}{2}$. est 30. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. quæ partes faciunt 65. additisq; 22. fiunt 87. Debebant aũt fieri 100. Defecimus ergo iterum numero 13. Operare per regulã, inuenieſque, eũ emisse 72. perdices. Huius namq; numeri $\frac{1}{2}$. est 36. & $\frac{1}{3}$. 24. & $\frac{1}{4}$ 18. quæ partes conficiunt 78. additis autem 22. fiunt 100.



Quæstio 14.

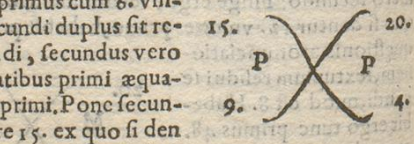
14. Duo habent summã quandam aureorũ: si secundus primo det 12. habebit primus sextuplo plus, quàm secundus; si vero primus det 15. secundo, habebit secundus decuplo plus, quàm primus. Quot ergo quisq; aureos habet? Hic quæruntur duo numeri, quorũ primus cum 12. vnitatibus secundi sextuplus sit residui secundi, secundus vero cum 15. vnitatibus primi decuplus residui primi. Vt hanc, & similes quæstiones facilius sine fractionibus soluas, incipiendum erit à numero secundo. Finge ergo, secundum habere 20. ex quo si dentur 12. vnitates primo, habebit primus iuxta quęstionis pronunciationem, sextuplum residui secundi, quod est 8. Habebit ergo tunc primus 48. atq; adeo, antequam 12. accepit à secũdo, habuit 36. Iam vero si ex hoc numero 36. primi dẽtur 15. vnitates secundo, habebit secundus 35. qui numerus decuplus esse debet, iuxta quæstionis tenorem, residui primi, quod est 21. Cõstat autem, numerũ 35. non esse decuplum numeri 21.



sed numerũ 210. Defecimus ergo à veritate numero 175. Pone rursus, secundũ habere 100. ex quo si dentur 12. primo, habebit primus, vt vult quæstio, sextuplum residui secundi, quod est 88. Habebit ergo tunc primus 528. atq; adeo, antequã 12. accepit à secundo, habuit 516. Iam vero si ex hoc numero 516. primi dentur 15. vnitates secundo, habebit secundus 115. qui numerus decuplus esse debet, vt q̃stio vult, residui primi, quod est 501. constat autem, numerũ 115. non esse decuplum numeri 501. sed numerum 5010. Defecimus ergo rursus à veritate numero 4895. Operare per regulam, inuenieſq; secundum habere $17\frac{2}{5}\frac{2}{9}$. ex quo si dentur 12. vnitates primo, habebit primus sextuplũ residui secundi, quod est $5\frac{2}{5}\frac{2}{9}$. Habebit ergo tunc primus $30\frac{1}{5}\frac{2}{9}$. ac proinde, antequam à secundo accepit 12. habuit $18\frac{1}{5}\frac{2}{9}$. Si enim ex hoc numero dentur secundo 15. vnitates, habebit secundus $32\frac{2}{5}\frac{2}{9}$. qui numerus decuplus est residui primi, qd est $3\frac{1}{5}\frac{2}{9}$. vt quæstio proponit.

Quæstio 15.

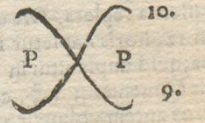
15. Duo habent summam quandam aureorum: Si secundus det 6. primo, habet primus duplum residui secundi; si vero primus secundo det 3. habebit secundus numerum æqualem residuo primi. Quot ergo aureos quisq; habuit? Hic etiam quæruntur duo numeri, quorũ primus cum 6. vnitatibus secundi duplus sit residui secundi, secundus vero cũ 3. vnitatibus primi æqualis residuo primi. Pone secundum habere 15. ex quo si dentur 6. vnitates primo, habebit primus 18. duplũ videlicet residui secundi, qd est 9. atq; adeo, priusquàm acciperet 6. à secundo, habuit 12. Iam vero si ex hoc numero dentur 3. vnitates secundo, habebit secundus 18. qui numerus æqualis non est residuo primi, quod est 9. sed maior. Excessimus ergo veritatem numero 9. Pone deinde, secundum habere 20. ex quo si dentur 6.



tur 6. vnitates primo, habebit primus 28. duplum videlicet residui secundi, quod est 14. Antequã ergo acciperet 6. à secũdo habuit 22. Iam vero si primus det secundo 3. vnitates, habebit secundus 23. qui numerus non est æqualis residuo primi, quod est 19. sed maior. Excessimus ergo rursus veritatẽ numero 4. Operare per regulã, inuenieſque, secũdũ habere 24. ex quo si denẽ 6. vnitates primo, habebit primus 36. nempe duplũ residui secundi, quod est 18. Prius ergo habuit 30. atq; adeo si det 3. vnitates secũdo, habebit secũdus 27. qui numerus æqualis est residuo primi, qđ etiã est 27.

16. Est cisterna habens in fundo tres fistulas inæquales: per maximam reseratam effluit tota aqua in 2. horis, per mediam in 3. & per minimam in 6. Si ergo aqua semper æquabiliter effluat, quanto tempore effluet, si omnes tres fistulę simul reserentur? Finge in 4. horis, & dic. Si maior fistula in 2. horis euacuat 1. cisternam, quid euacuabit in 4. horis? inueniesq; 2. cisternas. Item, Si media fistula in 3. horis euacuat 1. cisternam, quantũ exhauriet in 4. horis? inueniesq; $1\frac{1}{3}$. cistern. Item, Si minima fistula in 6. horis exhaurit 1. cisternã, quantũ euacuabit in 4. horis? inueniesq; $\frac{2}{3}$. cistern. atq; ita omnes tres fistulæ in 4. horis euacuarent 4. cisternas. Nos aũt volumus tantũ 1. cisternã. Excessimus ergo veritatẽ numero 3. Pone secundo, in 10. horis, & dic. Si maxima fistula in 2. horis exhaurit 1. cisternã, quantũ exhauriet in 10. horis? inueniesq; 5. cisternas. Itẽ si media fistula 1. cisternã euacuat in 3 horis, quantum euacuabit in 10. horis? reperieſq; $3\frac{1}{3}$. cistern. Itẽ si minima fistula in 6. horis euacuat 1. cistern. quid exhauriet in 10. horis? inueniesq; $1\frac{2}{3}$. cister. atq; ita oẽs tres fistulæ euacuarẽt in 10. horis 10. cister. Nos aũt volumus 1. cisternã. Excessimus ergo veritatẽ numero 9. Operare p regulã, inueniesq;

Quæstio 16.

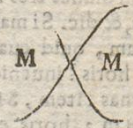


in 1. hora euacuari cisternam. Nam maxima fistula in vna hora exhauriet $\frac{1}{2}$. & media $\frac{1}{3}$. & minima $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes conficient 1. cisternam.

Hæc quæstio etiam ita proponi potest. Est cisterna habens in orificio tres cannales inæquales. Per maximum impletur cisterna in 2. horis, per medium in 3. & per minimum in 6. &c.

Quæstio 17.

17. Est cisterna habens fistulam in orificio, per quã impletur in 12. horis: in imo vero fundo habet aliam fistulam, per quã euacuatur in 18. horis. Si igitur per superiorem continue influat aqua, & per inferiorẽ sem per effluat, quanto tempore replebitur tota cisterna? Pone in 20. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur 1. cisterna, quid euacuabitur in 20. horis? inuenieſque $1\frac{1}{9}$. cistern. Necesse est ergo in 20. horis impleri $2\frac{1}{9}$. cistern. vt eodẽ tempore euacuata $1\frac{1}{9}$. cistern. maneat 1. cisterna repleta. Dic ergo. Si in 12. horis impletur 1. cisterna, quid implebitur in 20. horis? inuenieſq; $1\frac{2}{3}$. cistern. Nos autem volumus $2\frac{1}{9}$. cistern. Defecimus ergo à veritate numero hoc $\frac{4}{9}$. Pone secundo in 30. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur 1. cisterna, quid euacuain 30. horis? inuenieſq; $1\frac{2}{3}$. cistern. Necesse est ergo in 30. horis impleri $2\frac{2}{3}$. cistern. vt eodẽ tempore euacuata $1\frac{2}{3}$. cistern. relinquatur 1. cisterna plena. Dic ergo. Si in 12. horis impletur 1. cisterna, quid implebitur in 30 horis? inuenieſq; $2\frac{1}{2}$. cistern. Nos autẽ volumus $2\frac{2}{3}$. cistern. Iterum ergo à veritate defecimus hoc numero $\frac{1}{6}$. Operare per regulam, inenieſq; in 36. horis cisternam impleri. Nam in 36. horis superior fistula implebit 3 cisternas, inferior autem exhauriet 2. cisternas, atq; ita remanebit vna plena.



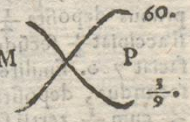
$\frac{5}{1\ 8}$.
Diuisor.

Quæstio 18.

18. Artifex quidam absoluit opus quoddam in 30. diebus; at si accedat alius, absoluent ambo idem opus

in 18.

in 18. diebus. Quanto ergo tempore secundus hic solus idem opus perficiet? Dic primo. Si primus artifex in 30. diebus absoluit opus, quantum absoluet in 18. diebus? inuenieſq; $\frac{3}{5}$. operis. Eodē ergo tempore secundus absoluet $\frac{2}{5}$. vt ambo totū opus perficiant. Pone ergo primo secundū absoluere totum opus in 40. diebus, & dic. Si secundus in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum absoluet in 40. diebus? inuenieſq; $\frac{8}{9}$. operis. Nos autem posuimus eum absoluere totum opus. Defecimus ergo à veritate hoc numero $\frac{1}{9}$. Pone deinde, secundū absoluere opus in 60. diebus, & dic. Si secundus in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum absoluet in 60. diebus? inuenieſq; $1\frac{3}{9}$. Nos autem posuimus eum absoluere 1. opus. Excessimus ergo veritatem hoc numero $\frac{3}{9}$. Operare per regulam, reperieſq; secundum absoluere opus totum in 45. diebus. Nam si in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, absoluet in 45. diebus 1. opus.



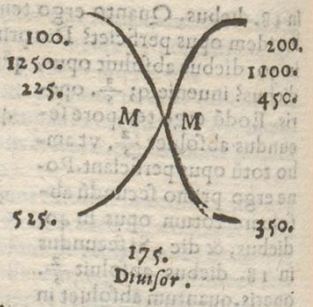
Alia solutio huius ꝗstionis.

Facilius tamen sine regula falsi hæc quæstio soluetur hoc modo. Postquā inueniſti, secundum in 18. diebus absoluere $\frac{2}{5}$. operis, ita vt supersint $\frac{3}{5}$. Dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, $\frac{3}{5}$. quot dies requirent? inuenieſq; 27. dies, qui additi ad 18. faciunt 45. dies, quibus totum opus perficiet, vt prius.

Quæstio 19.

19. Tres inter se ita luserunt, vt statim primus lucratus sit $\frac{1}{2}$. pecuniæ secundi: postea vero secundus $\frac{1}{3}$. pecuniæ tertij: Tertius deniq; $\frac{1}{4}$. pecuniæ eius, quā primus in ludū attulit. Finito autem ludo, quiſq; ipsorum 700. aureos habuit. Quantum ergo pecuniæ quiſq; in ludū attulit? Hic aliud nihil quæritur, quàm vt datus numerus 2100. (si enim singuli habent 700. habebunt omnes tres 2100.) in tres partes distribuatur, ita vt, si prima det $\frac{1}{4}$. tertio, accipiat vero $\frac{1}{2}$. secundæ; secunda autem accipiat $\frac{1}{3}$. tertiæ, fiant tres

numeri æquales, nempe 700. 700. 700.



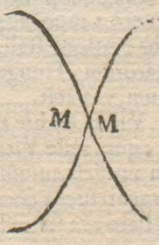
Vel certe quærũtur tres numeri, quorũ primus deposita $\frac{1}{4}$. si accipiat $\frac{1}{2}$ secũdi, faciat 700. similiter secundus, deposita $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertij faciat 700 eodẽq; modo tertius, deposita $\frac{1}{3}$. cum $\frac{1}{4}$. primi faciat 700 Pone primũ lusorem attulisse 100. aur. Deposita $\frac{1}{4}$ nempe 25. supersunt ei 75. Et quia hoc residuũ cum $\frac{1}{2}$. secundi debet facere 700. erit $\frac{1}{2}$. secundi 625. quòd hic numerus cum residuo primi, nempe cum 75 faciat 700. Attulit ergo secundus 1250. Postquã autem perdiderit $\frac{1}{2}$. remanebunt ei 625. Quoniã vero residuũ hoc cum $\frac{1}{3}$. tertij debet facere 700 erit $\frac{1}{3}$. tertij 75 quòd hic numerus cum residuo secundi faciat 700. Quare tertius secum attulit in ludum 225. Postquam autẽ perdiderit $\frac{1}{3}$. supererunt ei 150 Et quia hoc residuum cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, cum 25. facit 175. Debebat autem facere 700. defecimus propterea à veritate numero 525.

Pone deinde, primũ attulisse in ludũ 200. aur. Deposita $\frac{1}{4}$. nempe 50. supersunt ei 150. aur. qui cũ $\frac{1}{2}$. secundi facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{2}$. secundi 550. aur. Attulit ergo secum 1100. Perdita aũt $\frac{1}{2}$. supersunt ei 550. aur. qui cum $\frac{1}{3}$. tertij facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{3}$. tertij 150. ac proinde in initio ludi habuit 450. Amissa aũt $\frac{1}{3}$. remanent ei 300. aur. qui cũ $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, cum 50. faciunt 350. Debebant aũt facere 700. Defecimus ergo etiam nunc à veritate numero 350. Operare per regulã, inueniesq; primum lusorem attulisse 400. aur. secundũ 800. & tertiũ 900. Numeros porrò hos secundi & tertij inuenies vel ex regula falsi, multiplicando errores per secundi ac tertij

tij positiones, &c. vel ex primo inuento, quemadmodũ paulo ante ex 100. & 200. quos numeros posuimus primũ habere, numeros secundi, ac tertij inuestigauimus. Nam si primus habet 400. habebit, deposita $\frac{1}{4}$. nimirũ 100. quam perdidit, 300. & quia cum $\frac{1}{2}$. secundi debet habere 700. erit $\frac{1}{2}$. secundi 400. ac proinde secundus attulit 800. Amissa aũt $\frac{1}{2}$. supererunt ei 400. Quoniam vero hæc $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertij facere debet 700. erit $\frac{1}{3}$. tertij 300. propterea aq; tertius attulit 900. Amissa enim $\frac{1}{3}$. remanebunt ei 600. quibus si addatur $\frac{1}{4}$. primi, hoc est 100. aurei, habebit 700. vt quæstio vult.

Quæstio 20.

20. Tres mercatores lucrati sunt 400. aur. quos, habita ratione pecuniæ, quam quisq; posuit, ita distribuerunt, vt secundi portio superaret portionem primi numero 12. tertij vero portio excederet portionẽ secundi numero 16. Quanta ergo fuit portio cuiusque? Finge, primum accepisse 1. aur. (Volo enim quæstionem hanc soluere per minimos numeros, nempe per positionem 1. & 2. vt clarius appareat generalitas huius regulæ falsi.) ac proinde secundũ 13. & tertiũ 29. qui omnes numeri conficiunt 43. Debebant aũt conficere 400. Defecimus ergo à veritate numero 357. Finge rursus, primũ accepisse 2. aur. atq; adeo secũdũ 14. & tertiũ 16. qui oẽs numeri cõficiunt 46. Debebant aũt conficere 400. Defecimus ergo etiã nunc à veritate numero 354. Operare per regulam, inuenieſq; primi portionem esse 120. aur. secundi 132. & tertij 148. qui tres numeri cõficiunt summam 400. aur. vt in quæstione proponitur.



21. Imperatoris exercit⁹ cõtra Turcas cõtinet 40000. Germanorũ peditũ, tot vero Italos, & Hungaros, vt

Quæstio 21.

nume-

numerus Italorum sit $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum, numerus vero Hungarorũ sit $\frac{1}{3}$. Germanorũ, atq; Italorum. Quantus ergo est Italorum, & quantus Hungarorum numerus, atq; adeo quantus totus exercitus? Finge, Italos esse 30000. Et quoniam hic numerus debet esse $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorũ, erũt Germani, atq; Hungari 60000. Cum ergo Germani sint 40000. erunt Hungari 20000. qui debent conficere $\frac{1}{3}$. Germanorum atq; Italorum, nempe numeri 70000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$. numeri 60000. Excessimus ergo veritatem numero 10000. Finge secundo, Italos esse 24000. Et quoniam hic numerus debet esse $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorũ, erunt Germani, atq; Hungari 48000. Cum ergo Germani sint 40000. erunt Hungari 8000. qui debent cõficere $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, nempe numeri 64000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$. numeri 24000. Excessimus ergo rursus veritatem numero 40000. Operare per regulam, inuenieſque, Italos esse 32000. Hungaros vero 24000. ac proinde totum exercitũ 96000. Nam hac ratione Itali conficiunt $\frac{1}{2}$. Germanorũ, atq; Hungarorum, Hungari vero $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, vt patet.

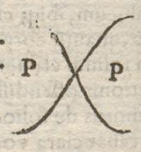
Quæstio 22.

22. Visum est hic apponere artificium illud Archimedis, quo, teste Vitruuio lib. 9. cap. 3. deprehendit furtum aurificis cuiusdã in corona aurea, hoc est, quãtum argenti fuerit cõmistũ, nõ dissoluta corona. Cum enim Hiero rex statuisset Dijs suis votiuam offerre coronam ex puro auro, aurifex, sublata auri portione, argenti tantundem commiscuit: Indignatus vero Hiero se contemptum, (vt verbis Vitruuij vtar) neq; inueniens, qua ratione id furtum deprehenderet, rogauit Archimedem, vti in se sumeret sibi de eo cogitationem.

nem. Tunc is, cum haberet eius rei curam, casu venit in balneum, ibiq; cum in solium descenderet, animaduertit, quantū corporis sui in eo insideret, tantū aquæ extra solium effluere. Itaq; cum eius rei rationem explicationis offendisset, nō est moratus, sed exiliuit gaudio motus de solio, & nudus vadens domum versus significabat clara voce, inuenisse, quod quæreret. Nam currens identidē græce clamabat εὕρηκα, εὕρηκα. Tum vero ex eo inuentionis congressu duas dicitur fecisse massas æquo pondere, quo etiam fuerat corona, vnam ex auro, alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aqua, in quo demisit argenteam massam, cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aquæ effluxit: ita exempta massa, quanto minus factum fuerat, refudit, sextario mensus, vt eodem modo, quo prius fuerat, ad labra æquaretur. Ita ex eo inuenit, quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum aureā massam similiter pleno vase demisit, & ea exempta, eadem ratione, mensura addita, inuenit ex aqua non tantum defluxisse, sed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri massa esset, quàm argenti. Postea vero repleto vase, in eadē aqua ipsa corona demissa, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam, quàm in auream eodem pondere massam, & ita ex eo, quod plus defluxerat aquæ in corona, quàm in massa, ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem. Hactenus Vitruuius. Explicemus autem nos, quo pacto per regulam falsi furtum dictū deprehēdi possit, si adhibeatur artificiū illud Archimedis. Ponatur exempli causa, coronam illā fuisse 100. lib. eaq; imposita in vase effluxisse 65. lib. aquæ; imposita vero massa puri aur. 100. lib. effluxisse 60. lib. aquæ; imposita tandem massa puri argenti 100. lib. effluxisse 90. lib. aquæ. Finge ergo, aurificem abstulisse 40 lib. aur. totidemq; libras argenti substituisse, ita vt in corona fuerint 60. lib. auri, & 40. lib. argenti. Vide iā, an corona ita confecta eijciat 65. lib. aquæ.

quod

quod ita scies. Dic. Si 100. lib. auri eijciũt 60. lib. aquæ, quantũ aquæ eijcient 60. lib. auri? Item si 100. lib. argenti expellunt 90. lib. aquæ, quantum aquæ expellent 40. lib. argenti? inuenieſq; in vtraq; operatione 36. lib. aquæ, ita vt corona eijciat 72. lib. aquæ. Debebat aũt eijcere tantũ 65. lib. Exceſſimus ergo veritatem numero 7. Finge ſecundo, aurificem ſurripuiſſe 30. lib. auri, ac proinde in corona fuiſſe 70. lib. auri, & 30. lib. argenti. Dic ergo. Si 100. lib. auri expellunt 60. lib. aquæ, quantum aquæ expellent 70. lib. auri? Item, ſi 100. lib. argenti eijciunt 90. lib. aquæ, quantum aquæ eijcient 30. lib. argenti? inuenieſque in priori operatione 42. lib. aquæ, in poſteriori vero 27. quæ efficiunt 69. lib. aquæ. Debebant autem eſſe tantum 65. lib. Rurſus ergo veritatem exceſſimus numero 4. Operare per regulam, inuenieſque, aurificem accepiſſe $16\frac{2}{3}$. lib. auri, atq; adeo, coronam illam mixtam fuiſſe ex $83\frac{1}{3}$. lib auri, & ex $16\frac{2}{3}$. lib. argenti. Quod vt probes, dic. Si 100. lib. auri eijciunt 60. lib. aquæ, quatũ aquæ eijcient $83\frac{1}{3}$. lib. auri? Item, ſi 100. lib. argenti eijcient 90. lib. aquæ, quantũ aquæ eijcient $16\frac{2}{3}$. lib. argenti? inuenieſq; in priori operatione 50. lib. aquæ, in poſteriori vero 15. lib. aquæ, quæ omnes conficiunt 65. libras aquæ, quas poſuimus coronam eijcere.



Eodem modo deprehenſum fuiſſet furtum, etiamſi maſſæ auri, & argenti non fuiſſent 100. lib. quot libras habebat corona, ſed quotcunq; librarum, nempe auri 10. lib. verbi gratia, & argenti 20. dummodo diligenter exploretur, quantum aquæ ſingulæ maſſæ eijciant. Nos ponamus, 10. lib. auri eijcere 6. lib. aquæ, at 20. lib. argenti eijcere 18. lib. aquæ. Vnde in priori poſitione dices. Si 10. lib. auri eijciunt 6. lib. aquæ, quãtum aquæ eijcient 60. lib. auri? &c.

Hoc

Hoc ergo artificio deprehendetur in quacunq; massa ex auro, argentoque commixta, quantum auri, quantumque argenti permixtum sit.

PROGRESSIONES ARITHmeticæ. Cap. XXIIII.

PROGRESSIO Arithmetica est series plurium numerorum se æqualiter superantium. vt hic. Progressio Arithmetica quid.

Progressio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. &c.

Progressio numerorum imparium incipiens ab 1.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. &c.

Progressio numerorum parium incipiens à 2.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. &c.

Prima enim harũ trium progressionũ dicitur progressio naturalis numerorum, incipitq; ab 1. in qua omnes numeri se ordine superant vnitate. Secunda vero dicitur progressio numerorũ imparium, incipitq; ab 1. in qua oẽs numeri se ordine superant binario. Tertia deniq; appellat progressio numerorũ pariũ, incipitq; à 2. qui est primꝰ numerus par, quẽadmodũ & 1. est primus numerus impar, atq; adeo primus omnium numerorũ, licet improprie. In hac autem progressione numerorũ parium omnes numeri se ordine superant etiã binario, quemadmodum & in progressione numerorũ impariũ. Progressio naturalis numerorũ, & numerorum impariũ, pariumq; quid.

Aliæ progressiones.

2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. &c.

4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36. 40. &c.

Prior harũ ꝓgressionũ incipit à 2. prograturq; per 3. cũ oẽs numeri in ea se ordine superent ternario: posterior vero incipit à 4. ꝓgrediturq; per eundẽ numerũ 4. cũ in ea oẽs numeri se ordine superent quaternario.

Con-

Arithmetica progressio quo pacto cõtinuetur.

Continuatur quælibet progressio Arithmetica, si differentia, excessusve numero illi addatur, post quem progressio extendenda est. Vt si progressio hæc, 4. 9. 14. 19. 24. continuanda sit, addemus differentiam, siue excessum progressionis, nempe 5. (quam quidē differentiā, excessumve inueniemus, si primum progressionis numerum à secundo, vel quemuis alium à proxime maiori in eadem progressione subtrahamus.) vltimo numero 24. efficiemusq; 29. Huic iterum numero adijciemus 5. componemusq; 34. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, si quis progressionem incipere velit à 7. & progredi per differentiam, excessumve 6. addenda erunt 6. ad 7. vt fiant 13. pro secundo numero progressionis: Item 6. ad 13. vt fiant 19. pro tertio numero, &c.

Differentia progressionis Arithmeticæ quo modo inueniatur.

Pari ratione progressio Arithmetica cõtinuatur retrocedendo, si differentia progressionis à minori extremo subducatur. Vt si progressio hæc 30. 37. 44 51. 58. continuanda sit versus minores numeros, auferemus differentiam 7. ex minori extremo 30. vt relinquantur 23. Ex his rursus subducemus 7. vt remaneãt 16. Ex his rursus detrahemus 7. vt remaneant 16. Ex his rursus subducemus 7. vt supersint 9. à quibus rursus auferemus 7. vt supersint 2. à quibus amplius auferi nequeũt 7. ac propterea dicta progressio amplius nõ potest decrescere. Sic etiam, si quis progressionem inchoare velit à 40. & progredi per 4. versus vnitatẽ, auferenda erunt 4. ex 40. vt relinquãtur 36. Itẽ 4. ex 36. vt remaneãt 32. Rursus 4. ex 32. vt supersint 28. &c.

Progressio Arithmetica de crescere non põt in infinitum.

Proprium est progressionis Arithmeticæ trium numerorum, vt aggregatum extremorum æquale sit duplo medij numeri; vt hic apparet. 7. 17. 27. demonstraturq; à Iordano lib. 1. propos. 2. Progressionis vero Arithmeticæ quatuor numerorum proprium est, vt aggregatum extremorũ æquale sit aggregato mediorum; veluti hic apparet. 4. 12. 20. 28. demonstraturq; à Iordano lib. 1. propos. 3. Atq; hoc non solum verũ est in quatuor numeris sese continuo eodem numero supe-

Proprietas progressionis Arithmeticæ triũ, vel quatuor numerorũ.

superantibus, quales sunt numeri in dato exemplo, sed etiã in quatuor, quæ nõ cõtinue se superant eodẽ numero, dummodo eadẽ sit differentia inter primum, ac secundum, quæ inter tertium, ac quartum; vt hic vides. 4. 12. 30. 38.

Proprietas progressionis Arithmeticæ quotcunq; terminorũ, si numerus terminorũ fuerit impar.

Ex hac proprietate colligitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorũ est impar, aggregatum extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorũ numerorũ quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, nec non duplo medij numeri. Vt hic apparet.

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39. 43.

Cum enim hi numeri 3. 7. 39. 43. habeant eandẽ differentiam, licet non continuatã, (Nam eadem est differentia inter 3. & 7. quæ inter 39. & 43.) erit, ex ijs, quæ proxime diximus, aggregatum extremorum 3. & 43. æquale aggregato mediorum 7. & 39. Eadem ratione aggregatum ex 7. & 39. æquale erit aggregato ex 11. & 35. quòd hi numeri 7. 11. 35. 39. habeant eandem differentiam, licet non continuatam. & ita de reliquis, donec ad tres medios numeros 19. 23. 27. perueniamus; qui cum habeant eandem differentiam, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, aggregatum extremorum 19. & 27. æquale duplo medij numeri 23. Eadem est ratio de omnibus alijs huius generis progressionibus Arithmeticis.

Proprietas progressionis Arihmeticę quotcunq; terminorũ, si numerus terminorũ fuerit par.

Ex eadem proprietate efficitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est par, aggregatũ extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium. Vt hic manifestum est.

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quòd postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medij 15. 19. 23. 27. non autem tres tantum, vt prius; quia hic non est

non est vnicus numerus medius, sed duo. Nunc sequuntur regulæ ad Arithmeticas progressiones spectantes,

REGVLA I.

Summa cuiuscúq; progressionis Arithmeticæ quo pacto inueniat.

SI in quauis progressione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum vnà cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem summæ omnium terminorum, hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatum per numerum terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit summa omniũ terminorũ. Vt in hac progressione.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37.

ex 4. & 37. fiunt 41. quæ multiplicata per numerum terminorum, hoc est, per 12. (Sunt enim 12. numeri in ea progressione) faciunt 492. Huius numeri dimidium 246. est summa omnium numerorum datæ progressionis. Eademq; ratio est de cæteris.

Summa cuiuscúq; progressionis Arithmeticæ quo pacto aliter inueniatur.

Hæc regula à nonnullis diuiditur in duas, hoc modo. Quando numerus terminorum est par, multiplicãt aggregatum ex primo, & vltimo termino per dimidiũ numeri terminorum: Si vero numerus terminorũ est impar, multiplicant dimidium aggregati ex primo, & vltimo termino (quando enim numerus terminorum est impar, semper illud aggregatum est par) per numerum terminorum. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorũ progressionis. Vel hoc modo Quando aggregatum ex primo, & vltimo termino est par, multiplicãt eius dimidium per numerum terminorum, siue is par sit, siue impar. Si vero aggregatum illud est impar, multiplicant illud per dimidium numeri terminorum, qui numerus tunc semper par est. Vt in superiori exemplo, quia numerus terminorũ est par, nempe 12. vel quia aggregatum ex primo termino, & vltimo est impar, videlicet 41. multiplicant illud per 6. dimidium numeri terminorum, efficiuntq;

summam

summam omnium numerorũ 246. vt prius. In his aũt duabus progressionibus, in quarũ priori numerus terminorum est par, nempe 10. & in posteriori impar, nempe 11. quoniam aggregatum ex primo termino, & vltimo est par, nimirum 42. in priori, & 38. in posterio-

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39.
4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

ri, multiplicant tam dimidium illius, nimirũ 21. per 10. numerum terminorum, quàm dimidiũ huius, quod est 19. per 11. numerum terminorum, vt in priori efficiãt summam 210. & in posteriori 209.

Ratio harum regularũ hæc est. Quoniam supra diximus, quando numerus terminorũ est par, aggregatũ extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorũ ab extremis æqualiter distantium, fit, vt omnia aggregata simul sint tot, quot vnitates sunt in dimidio numeri terminorum. Quare si vnũ aggregatũ, nempe extremorum, multiplicetur per dimidium numeri terminorũ, producetur summa omniũ aggregatorũ. Rursus quia docuimus, quando numerus terminorũ est impar, aggregatum extremorũ esse æquale cuilibet aggregato duorũ quorumlibet numerorũ ab extremis æqualiter distantiũ, necnõ duplo medij numeri, fit, vt medius numerus sit dimidium cuiuslibet aggregati. Ergo omnia aggregata simul, vnà cum medio numero, continebunt tot dimidia vnius aggregati, quot sunt termini. Si igitur dimidium vnius aggregati, nempe extremorum, multiplicetur per numerum terminorũ, producetur summa omniũ terminorũ.

Itaque, vt vides, satis est, vt cognoscatur primus terminus, & vltimus, vnà cum numero terminorum, ad elicienda summã totius progressionis, etiamsi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem ex primo numero cognito, vnà cum numero terminorum, & differentia progressionis, vltimus terminus inuestigetur, sequenti regula explicabimus.

Particularis inuentio sūmæ pgressionis naturalis numerorū.

In progressione autem naturali numerorū, quæ ab 1. incipit, inuenietur breuissime summa omniū terminorū, hoc modo. Multiplicetur vltimus numerus (qui semper indicat numerum terminorū) per numerū proxime maiorē. Huius enim numeri producti dimidium est summa omnium terminorum. Vt hic.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Numer⁹ terminorum progressionis naturalis numerorū est vltimus terminus.

Ex multiplicatione vltimi numeri 11. per 12. numerū proxime maiorem producitur numerus 132. cuius dimidium 66. est summa totius progressionis. Sic etiam in hac progressione.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Ex multiplicatione vltimi numeri 10. per 11. numerū proxime maiorem fit numerus 110. cuius dimidiū 55. est totius progressionis summa. Itaq; si quis velit summam progressionis naturalis, quæ terminetur in numero 100. hoc est, in qua sint 100. termini, multiplicandus erit numerus 100. datus per 101. numerum proxime maiorem, vt fiant 10100. Huius enim numeri dimidium, nempe 5050. erit summa dictæ progressionis.

Alia inuētio sūmæ pgressionis naturalis numerorū.

Alij hanc etiā regulam distrahunt in duas, hoc modo. Si vltimus numerus est par, multiplicant numerū proxime maiorem in dimidium vltimi numeri: Si vero est impar, multiplicant eum in dimidiū numeri proximo maioris. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorū progressionis. Vt in posteriori progressione naturali, multiplicant 11. numerum proxime maiorem vltimo numero per 5. dimidium vltimi numeri, faciuntq; 55. summam totius progressionis, vt prius. In priori autem progressione naturali, multiplicant 11. vltimum numerum per 6. dimidium numeri proxime maioris vltimo numero, efficiuntque 66. summam totius progressionis, vt prius.

Particularis inuentio sūmę numerorū imparium.

In progressione quoq; numerorū impariū, quæ ab 1. incipit, inuenietur facilimo negotio summa omniū terminorū, si numer⁹ terminorū in seipsū multiplicet. vt hic.

1. 3. 5.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19.

Ex multiplicatione 10. numeri terminorũ in seipsum procreatur numerus 100. qui est summa totius progressionis.

Habetur autem numerus terminorum, si vltimo numero adijciatur 1. & compositi numeri dimidium sumatur. Vt in dato exemplo, si addatur 1. ad 19. fit numerus 20. cuius dimidium 10. indicat numerorũ terminorum.

Numeꝰ terminorũ i progressione numerorũ imparium quo pacto reperiatur.

Itaq; si quis velit summam progressionis numerorũ imparium, quæ terminetur in numero 67. addenda erit 1. ad 67. vt fiant 68. Huius numeri dimidiũ 34. nempe numerus terminorum, si in se multiplicetur, producetur summa illius progressionis 1156. & numerus terminorum erit 34. quot nimirum vnitates sunt in illo dimidio.

Particularis inuentio summę numerorũ parium.

In progressione deniq; numerorum parium, quæ à 2. incipit, nullo etiam labore reperietur summa, si dimidium vltimi numeri, quod semper indicat numerũ terminorum progressionis, (semper enim tot sunt termini progressionis eiusmodi numerorum parium, quot sunt vnitates in dimidio vltimi termini.) multiplicetur per numerum proxime maiorem illo dimidio. Vt hic.

Numeꝰ terminorũ in progressione numerorum parium qua ratione inueniat.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24.

Ex multiplicatione 12. (qui numerus est dimidium vltimi termini, vel numerus terminorum) per 13. numerum proxime maiorem illo dimidio, fit numerus 156. hoc est, summa omnium illorum numerorum parium.

Itaq; si quis velit summam progressionis numerorũ parium, quæ terminetur in numero 100. multiplicandus erit numerus 50. qui dimidium conficit numeri 100. per 51. numerum proxime maiorem. Productus enim numerus 2550. erit summa illius progressionis; & numerus terminorum erit 50. quot nimirum vnitates sunt in dimidio vltimi numeri.

REGVLA II.

Vltimus terminus cuiuscũq; progressionis Arithmeticæ quo pacto eliciatur ex numero terminorũ, vnà cũ primo termino, & differẽtia pgressionis.

SI in quauis progressione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum, vnà cum primo termino, & differentia progressionis, inueniemus vltimũ terminũ, etiamsi intermedios terminos non habeamus, hoc modo. Ex numero terminorum abijciatur 1. reliquus vero numerus per differentiam multiplicetur, ac tandem huic producto primus terminus adijciatur. Numerus enim compositus erit vltimus terminus. Vt si primus terminus alicuius progressionis sit 3. numerus autem terminorum sit 10. & differentia 8. cognoscemus decimum terminũ, hoc est, vltimum huius progressionis sine intermedijs, hac ratione. Ex 10. numero terminorum auferemus 1. & reliquum numerũ 9. multiplicabimus per 8. differentiam progressionis, producto tandẽ numero 72. adijciemus 3. primum terminum. Compositus enim numerus 75. est decimus terminus progressionis, cuius primus terminus est 3. & differentia 8. Veluti hic apparet, vbi omnes termini ponuntur.

3. 11. 19. 27. 35. 43. 51. 59. 67. 75.

Quæstio de bobus Augiæ.

Itaq; si quis hanc quæstionem proponat. Augias Herculi de numero boum, quos habebat, interroganti respõdit, boues suos omnes per loca 40. ita esse dispositos, vt quoties in primo loco continentur 3. boues, toties in secundo contineantur 5. in tertio 7. in quarto 9. &c. Accessit Hercules ad primũ locum, & reperit boues 30. Quot igit boues habuit Augias, & quot boues in vltimo loco fuerunt? soluenda erit hoc modo. Quoniam in primo loco sunt decies 3 boues, erũt in secundo loco decies 5 nimirũ 50. & in tertio decies 7. nempe 70. & sic deinceps, vt sit progressio quædã Arithmetica, cuius primus terminus sit 30. differentia vero 20. & numerus terminorũ 40. Eliciendus ergo est vltimus terminus hoc modo. Ex 40. numero terminorum abijciatur 1. & reliquus numerus 39. per 20. differentiam multiplicetur, productoq; numero 780. primus

mus terminus 30. adijciatur. Fiet enim vltimus terminus, siue quadragesimus, 810. atq; tot boues fuerunt in vltimo loco. Iam vero inuento vltimo termino, cognoscemus per primam regulam summam totius progressionis, etiamsi non habeamus intermedios omnes terminos, hoc modo. Primus terminus 30. vltimo termino 810. adijciatur, compositusq; numerus 840. per 20. hoc est, per dimidium numeri terminorū, multiplicet. Productus nāq; numerus 16800. est summa totius ꝓgressionis, atq; adeo numerus boū Augiæ. Vt aūt videas, quot boues in singulis locis fuerint, atq; adeo in vltimo loco fuisse 810. apposuimꝰ hic totā ꝓgressionē.

30. 50. 70. 90. 110. 130. 150. 170. 190. 210.
230. 250. 270. 290. 310. 330. 350. 370. 390. 410.
430. 450. 470. 490. 510. 530. 550. 570. 590. 610.
630. 650. 670. 690. 710. 730. 750. 770. 790. 810.

Quæstio de ducibꝰ militiæ.

Similis erit quæstio, si quis ita dicat. Imperator strenuis ducibus numero 20. distribuit pecuniam in direptione vrbis inuentam, hac lege, vt ei, qui vltimus murum hostilem transcenderat, daret 100. aur. penultimo 130. antepenultimo 160. & ita deinceps eodem modo progrediendo. Quanta ergo fuit ea summa pecuniæ, & quantum, qui primus murum transcendit, accepit? Si namq; ex 20. numero terminorū (tot enim sunt termini in illa progressione, quot sunt duces.) auferas 1. & reliquum numerum 19. multiplices per 30. differentiam progressionis, productoq; numero 570. adijcias primū numerū, nēpe 100. efficies 670. pro vltimo progressionis termino: atq; tot aureos habuit primus dux. Inuento aūt vltimo termino, si ei addatur primus, nimirū 100. vt fiant 770. atq. hic numerus per 10. dimidium numeri terminorum multiplicetur, fiet summa omnium terminorum 7700. Tanta ergo fuit summa pecuniæ distributæ. Tota vero progressio ita se habet.

100. 130. 160. 190. 220. 250. 280. 310. 340. 370.
400. 430. 460. 490. 520. 550. 580. 610. 640. 670.

PROGRESSIONES GEOmetricæ. Cap. XXV.

Progressio Geometrica quid.

PROGRESSIO Geometrica est series pluriũ numerorũ se in eadẽ proportione superantiũ, vt hic apparet.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. &c.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. &c.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768. 1536. &c.

Prima enim harum progressionũ progreditur per proportionem duplam, ita vt quilibet numerus sit duplo maior eo numero, qui proxime præcedit; secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus sit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atq; vtraq; harum progressionum ab 1. incipit; tertia deniq; per duplam etiam proportionem progreditur, non tamen ab 1. sed à 3. initium sumit.

Geometrica ꝓgressio quo pacto cõtinuetur.

Continuatur quælibet ꝓgressio Geometrica, si per denominatorem proportionis numerus ille, post quẽ progressio extendenda est, multiplicetur. Vt si progressio hæc proportionis triplæ, 4. 12. 36. continuanda sit, multiplicabimus vltimum numerum 36. per 3. denominatorem proportionis, (quem quidem denominatorem inueniemus, si secundum numerum per primum diuidamus, vel quemuis alium per proxime minorem in eadem progressione.) efficiemusq; 108. Hunc iterũ numerum per 3. multiplicabimus, producemusq; 324. & ita deinceps in infinitũ. Sic etiam, si quis progressionẽ incipere velit à 7. & ꝓgredi per proportionẽ quincuplam, cuius denominator est 5. multiplicanda erũt 7. per 5. vt fiant 35. pro secundo numero progressionis. Itẽ 35. per 5. vt fiant 175. pro tertio numero, &c.

Denominator ꝓportionis in ꝓgressione Geometrica quo inueniatur.

Pari ratione progressio Geometrica continuatur retrocedendo, si minus extremum per denominatorem diuidatur. Vt si progressio hæc 64. 128. 256. 512. cõtinuanda sit versus minores numeros, cum denomina-

tor

tor proportionis sit 2. diuidemus 64. per 2. faciemusq; 32. quæ rursum partiemur per 2. inueniemusq; 16. & sic deinceps in infinitum. Vt in hoc exemplo apparet.

512.256.128.64.32.16.8.4.2.1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. &c.

Progressio Geometrica decrescit in infinitum.

& nunquam erit finis huius decrementi in progressione Geometrica. Sic quoque, si quis progressionē inchoare velit à 100. & pgredi versus vnitatē per pportionem sesquialteram, cuius denominator est $1\frac{1}{2}$. diuidemus 100. per $1\frac{1}{2}$. vt habeamus $66\frac{2}{3}$. Item $66\frac{2}{3}$. per $1\frac{1}{2}$. vt habeamus $44\frac{4}{9}$. &c.

Proprietas pgressionis Geometricæ trium vel quatuor terminorum.

Proprium est progressionis Geometricæ trium numerorū, vt numerus, qui ex primo numero in tertium producitur, æqualis sit numero, qui ex medio fit in seipsum multiplicato. Vt hic apparet, 3. 9. 27. demonstraturq; ab Euclide lib. 7. propos. 20. Progressionis vero Geometricæ quatuor numerorum proprium est, vt numerus, qui ex multiplicatione primi numeri in quartum fit, æqualis sit numero, qui ex secundo in tertium procreatur. Vt hic vides, 2. 6. 18. 54. demonstraturq; ab Euclide lib. 7. propos. 19. Atq; hoc non solum verum est in quatuor numeris continue proportionalibus, quales sunt quatuor numeri in dato exemplo, sed etiam in quatuor, quæ non sunt continue proportionales, dummodo eadē sit proportio secundi ad primū, quæ quarti ad tertiū. Vt hic cernis, 3. 6. 10 20.

Proprietas pgressionis Geometricæ quoteūq; terminorū, si numer⁹ terminorū sit impar.

Ex hac proprietate colligitur, in omni progressione Geometrica, cuius numerus terminorum est impar, numerum, qui fit ex multiplicatione extremorum inter se, æqualem esse numero, qui ex multiplicatione duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium producitur, necnon numero, qui ex medio in seipsum fit. Veluti hic apparet.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768.

Cum enim hi numeri 3. 6. 384. 768. habeant eandem proportionem, licet non continuam, erit, ex ijs, quæ

proxime diximus, numerus, qui fit ex 3. in 768. æqualis ei, qui fit ex 6. in 384. Eadem ratione numerus, qui fit ex 6. in 384. æqualis erit ei, qui ex 12. in 192. producitur, quòd hi numeri 6. 12. 192. 384. eandem habeant proportionem, licet nõ continuatã: & ita de reliquis, si plures sint, donec ad tres medios 24. 48. 96. perueniamus; qui cum eandẽ habeant proportionem, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, numerus productus ex primo in tertium æqualis numero, qui ex medio in seipsum gignitur. Eademq; ratio est de omnibus alijs huiusmodi progressionibus Geometricis.

Proprietas ꝓgressionis Geometricæ quotcũq; terminorum, si numerus terminorũ sit par.

Ex eadem proprietate efficitur, in omni progressione Geometrica, cuius numerus terminorum est par, numerum ex multiplicatione extremorũ productũ æqualem esse numero, qui ex multiplicatione duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantiũ producitur. Vt hic manifestum est.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quòd postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medij 12. 24. 48. 96. non autem tres tantum, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius, sed duo. Sequuntur iam regulæ ad progressiones Geometricas spectantes.

REGVLA I.

Summa cuiuscũq; ꝓgressionis Geometricæ quo pacto inueniat.

SI in quauis progressione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vnà cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionẽ summæ omnium terminorum, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo, & reliquus numerus per numerum, qui vna vnitate minor sit, quàm denominator, diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, siue maius extremum adijciatur, componetur summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.

3. 12. 48. 192. 768. 3072. 12288. 49152.

Dem-

Demptis 3. ex 49152. remanent 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ, quã habent numeri datæ progressionis, est 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminũ, siue maius extremum 49152. adijciemus, conficiemusque summam totius progressionis 65535. Item hic.

4. 6. 9. 13 $\frac{1}{2}$. 20 $\frac{1}{4}$. 30 $\frac{3}{8}$. 45 $\frac{9}{16}$.

Subtractis 4. ex 45 $\frac{9}{16}$. relinquuntur 41 $\frac{9}{16}$. quæ si diuidantur per $\frac{1}{2}$. (Est enim $\frac{1}{2}$. denominator ꝓportionis sesquialteræ, quã habent numeri huius ꝓgressionis, ablata aũt 1. remanet $\frac{1}{2}$.) fiet Quotiẽs 83 $\frac{1}{8}$. cui si addatur vltimus numerus, siue maius extremũ 45 $\frac{9}{16}$. fiet sũma totius ꝓgressionis 128 $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{16}$. atq; eodem modo summã cuiuscuq; ꝓgressionis Geometricę inueniemus.

Itaque, vt vides, satis est, vt cognoscatur primus terminus, & vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendã summam totius progressionis, etiãsi intermedij termini ignorentur. Quo pacto aũtẽ in cognitionem vltimi termini peruenire possimus, licet nõ cõtinuetur tota ꝓgressio, sequẽti regula explicabimus.

Particularis inuentio sũmæ ꝓgressionis ꝓportionis duplę cuius initiũ ẽ 1.

In progressione aũt Geometrica duplæ ꝓportionis, cuius initiũ est 1. facilimo negotio summa totius progressionis quotcunq; terminorũ reperietur, si vltimus terminus duplicetur, & à duplo abijciatur 1. Vt hic.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

Si vltimus terminus 512. duplicetur, & à duplo 1024. reijciatur 1. habebit summa totius ꝓgressionis 1023. Ex quo fit, quemlibet numerũ in huiusmodi progessione, abiecta prius vnitate, esse summã omniũ numerorũ antecedentiũ, cum quilibet numerus sit proxime præcedentis numeri duplus.

In ꝓgressione Geometrica incipiẽte ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate est sũma omnium antecedẽtium numerorũ.

REGVLA II.

IN omni progressione Geometrica, quæ ab 1. incipit, quiuis numerus seipsum multiplicans gignit numerum,

merum, qui ab eo abest tanto interuallo, quanto ipse ab vnitate distat, quiuis autē numerus alium maiorem multiplicans producit numerū, qui à maiore tanto interuallo distat, quāto ipse minor ab vnitate abest. Hęc regula clarissime ex ꝓpos. 11. lib. 8. Euclidis colligit, vt in scholio eiusdem propos. declarauimus. Vt in hac progressione duplæ proportionis.

Si in progressione Geometrica incipiēte ab 1. numerus aliquis se ipsū, vel alium numerum multiplicet, quem locū numerus ꝓductus occupet.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024.

Si numerus 16. qui quintum locum ab vnitate occupat, in seipsum multiplicetur, ꝓducetur numerus 256. qui quintum etiam locum à numero 16. occupat, nempe nonum. Sic quoq; si numerus 32. sextum locū ab vnitate occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus 1024. qui sextū etiam locum à numero 32. occupat, nimirū vndecimum. Ita etiam numerus 8 quarti loci multiplicans numerum 64. producit numerum 512. quarto loco à numero 8. reponendum.

Quilibet numerus in ꝓgressione Geometrica incipiēte ab 1. seipsum multiplicans producit numerū in duplo maiore loco, minꝰ vnitate, quàm numerꝰ multiplicās, ponēdū.

Itaq; hanc licebit regulam colligere. Si in progressione Geometrica, cuius initium est 1. numerus aliquis quemcunq; locū occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus in duplo maiore loco minus vna vnitate, quàm sit locus numeri multiplicantis, ponendus. Vt si numerus seipsum multiplicans occupet tertium locum, gignetur numerus in quinto loco reponendus: si occupet septimū locum, producetur numerus in tertiodecimo loco ponendus, &c. Id quod aperte ostensum est in progressione superiori proportionis duplæ, idemq; clarissime in hac altera progressione proportionis quadruplæ apparet.

1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096. 16384. 65536.

Nā si numerus 64. in quarto loco positus seipsum multiplicet, gignetur numerus 4096. in septimo loco ponendus. Ita quoq; numerus 256. quintum occupans locum seipsum multiplicans producit numerū 65536. in nono loco reponendum.

Vt

Vt autem facilius sciatur, quo in loco quilibet numerus productus sit collocandus, subscribenda est progressioni Geometricæ progressio naturalis numerorũ hoc ordine. Sub 1. hoc est, sub primo numero, scribatur o sub secundo numero ponatur 1. sub tertio 2. sub quarto 3. & ita deinceps, vt in hac progressione proportionis duplæ factum est.

Progressio naturalis numerorũ quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus sit in progressione Geometrica incipiẽte ab 1.

1. 2. 4. 8, 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Nam quilibet numerus progressionis Geometricæ seipsum multiplicans producit numerum supra illum numerũ progressionis naturalis numerorũ collocandum, qui duplus est illius, qui subscribitur multiplicãti: quilibet vero numerus alium multiplicans procreat numerum supra illum numerũ progressionis naturalis numerorũ reponendum, qui componitur ex duobus numeris, qui numeris multiplicantibus subscribuntur. Vt si numerus 32. in se multiplicetur, procreabitur numerus 1024. supra 10. collocandus, quòd numerus 10. duplus sit numeri 5. qui numero 32. subscribitur. Item ex multiplicatione 8. in 256. producetur numerus 2048. supra 11. reponendus, quòd numerus 11. componat ex 3. & 8. qui numeri sub 8. & 256. scripti sunt.

Et quoniam, quot vnitates sunt in quolibet numero progressionis naturalis numerorũ, talem locum vno amplius occupat in progressione Geometrica numerus illi suprapositus, vt in superiori exemplo perspicue apparet; facile inueniemus numerum cuiusq; loci in progressione Geometrica, etiamsi non scribamus omnes numeros intermedios. Sit enim inueniendus verbi gratia numerus in vicesimo loco supradictæ progressionis collocandus. Primum scribo quatuor, aut quinque, vel plures numeros progressionis, vnà cum progressione naturali, vt hic vides.

Quo pacto numerus cuiusq; loci in progressione Geometrica incipiẽte ab 1. inuestigetur sine intermedijs.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Deinde

Deinde multiplico, verbi gratia, 8. in se, facioq; 64. numerũ septimi loci, sub quo nimirum positus est numerus 6. vna vnitate minor numero locorum; quòd numerus 3. sub 8. duplicatus faciat 6. Quòd si multiplicemus 8. in 64. faciemus 512. numerum decimi loci, sub quo nimirum scriberetur numerus 9. vna vnitate minor numero locorum, quòd numeri 3. & 6. sub 8. & septimo loco faciant 9. Rursus si 512. numerum decimi loci, sub quo ponitur numerus 9. multiplicemus in se, producemus numerum 262144. in loco decimonono scribendum, sub quo nimirum poneretur numerus 18. vna vnitate minor numero locorum, propterea quòd numerus 9. sub decimo loco duplicatus facit 18. Iã vero quia ex 18. qui numerus sub decimonono loco scribit, & ex 1. sub secũdo loco posita fiũt 19. si multiplicem⁹ numerũ 2. supra 1. positũ per numerũ 262144. supra 18. positũ, cõficiemus numerũ 524288. in vicesimo loco, sub quo videlicet numer⁹ 19. ponit, scribẽdũ.

Rursus, si quis velit in eadem progressione numerũ in decimooctauo loco reponendum, multiplicabimus numerum 32. sub quo ponuntur 5. in seipsum, producemusq; numerũ 1024. in vndecimo loco scribendũ, sub quo numerũ ponitur numerus 10. qui duplus est numeri 5. Et quoniã ex 10. qui numerus sub vndecimo loco ponitur, & ex 6. qui numerus ponitur sub septimo loco, fiunt 16. qui numerus sub loco decimoseptimo scribitur, si numerũ 64. septimi loci per numerũ 1024. vndecimi loci multiplicemus, procreabimus numerũ 65536. loci decimiseptimi. Tandẽ quia ex 16. qui numerus sub decimoseptimo loco ponitur, & ex 1. quæ sub secundo loco ponitur, fit numerus 17. qui sub decimooctauo loco scribitur; si multiplicemus numerũ inuentũ 65536. decimiseptimi loci per numerũ 2. secundi loci, gignemus numerũ 131072. in loco octauodecimo scribẽdũ, sub quo videlicet ponit numerus 17.

Quæ dicta sunt hac regula de pro-

HAEC omnia quadrant etiam in progressionem quamcunq; Geometricam non ab 1. sed à quouis alio numero incipiente, dummodo quemlibet numerũ ex

multi-

multiplicatione productum diuidamus per primũ numerũ progressionis. Quotiens enim erit numerus quæsitus. Vt in hac ꝓgressione ꝓportionis duplæ apparet.

5. 10. 20. 40. 80. 160. 320. 540. 1280. 2560. 5120.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Nam si numerus 80. quintũ locũ à primo numero occupans in seipsũ multiplicetur, ꝓcreabitur numerus 6400. quo diuiso per primũ numerũ, vtpote per 5. fiet Quotiens 1280. in quinto loco à numero 80. collocandus, nempe in nono loco, sub quo ponit numerus 8. qui duplus est numeri 4. sub numero 80. multiplicante positi. Vbi vides, numerũ 80. quinti loci, cũ seipsum multiplicat, ꝓducere numerũ, quo diuiso per primũ numerum ꝓgressionis, fiat Quotiens 1280. in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm sit locus numeri multiplicãtis, reponendus. Sic etiã, si numerus 40. quarti loci multiplicet numerũ 640. & ꝓductus numerus 25600. per primum numerũ 5. diuidatur, fiet Quotiens 5120. quarto loco à numero 640. scribẽdus, nempe loco vndecimo, sub quo ponitur numerus 10. conflatus ex 3. sub 40. & ex 7. sub 640. Quòd si numerum 1280. multiplicemus per 5120. procreabimus numerum 6553600. quo diuiso per primum numerum 5. reperiemus Quotientem 131720. reponendum in loco decimonono, qui nimirum vnitate superat numerum 18. conflatum ex numeris 8. ac 10. positis sub numeris multiplicantibus.

Ex his facile inueniemus numerum cuiusq; loci. Si namq; in data progressione inueniendus sit numerus tricesimo loco ponendus, multiplicabimus numerum 5120. in se, producemusq; numerũ 26214400. quo diuiso per 5. fiet Quotiens 5242880. ponendus loco vicesimo primo, qui videlicet vnitate superat numerum 20. qui duplus est numeri 10. sub 5120. positi, ponitur q; sub vicesimo primo loco. Et qm̃ 20. & 9. faciunt 29. si numerũ inuẽtũ 5242880. vicesimi primi loci, sub quo numerus 20. ponit, multiplicemus per 2560. sub quo numerus 9. scribit, efficiemus numerũ, quo diuiso per

gressione Geometrica incipiẽte ab 1. vera etiã esse de progressione Geometrica incipiẽte non ab 1. sed ab alio numero.

Quo pacto numerus cuiusq; loci in progressione Geometrica incipiẽte à quouis numero inuestiget sine intermedijs numeris,

per 5. fiet Quotiens 2 6 8 4 3 5 4 5 6 0. locandus in loco triceſimo, qui nimirum vnitate ſuperat conflatum illum numerum 29.

Quoniam vero in prima regula diximus, numerum quemcunq; in progreſſione Geometrica proportionis duplæ incipiente ab 1. abiecta prius vnitate, ſummã eſſe omniũ antecedentium numerorũ; in hac autem ſecunda regula docuimus, quemlibet numerũ progreſſionis Geometricæ ab 1. incipientis, ſi ſeipſum multiplicet, gignere numerũ in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, ponendum: fit, vt ſi ſummæ quotcunq; numerorum progreſſionis Geometricæ ꝓportionis duplæ ab 1. incipientis addatur 1. & aggregatum in ſeipſum multiplicetur, producatur ſumma, abiecta prius vnitate, duplo pluriũ numerorum eiuſdem progreſſionis: quia prior ſumma, addita vnitate, conſtituit proxime ſequentem numerum in eadem progreſſione, qui numerus ſeipſum multiplicãs producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, reponendũ; ac proinde, abiecta vnitate, idem numerus ſumma erit omnium antecedentiũ numerorum, qui quidem duplo plures ſunt, quàm priores, quorũ ſumma accepta fuit. Exempli gratia, ſumma ſeptem terminorũ, addita vnitate, conſtituit octauũ terminum, qui multiplicatus in ſe producit terminũ decimumquintũ, nempe numerum in duplo maiore loco, quàm ſit octauus, minus vnitate, ponendũ; qui quidem, abiecta vnitate, ſumma erit quatuordecim antecedentiũ terminorũ, nimirum duplo plurium, quàm ſeptem, quorũ ſumma accepta fuit. Eademq; ratio eſt de cæteris.

Summa quotcũq; terminorum progreſſionis Geometricæ ꝓportionis duplæ ab 1, incipientis, addita priꝰ vnitate, ſeipsã multiplicans producit numerũ, qui, abiecta prius vnitate, sũma eſt duplo plurium terminorũ.

Quo pacto facile inueniatur sũma 64. locorũ ꝓgreſſionis Geometricæ duplæ ꝓportionis ab 1. incipientis.

Itaq; ſi quis breuiter cupiat inuenire ſummã 64. terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, quot nimirũ loca ſunt in ludo latrunculorum, quem vocant ludum ſcacchiorum, accipienda erit primum ſumma horum quatuor terminorũ 1. 2. 4. 8. nempe 15. Deinde, addita vnitate, multiplicandum aggregatũ 16. in ſe. Si enim ex numero producto

ducto 256. abijciatur 1. erit summa octo terminorum 255. Rursus, addita 1. multiplicandú aggregatú 256. in se, vt fiant 65536. ac proinde summa 16. terminorũ 65535. Quòd si rursus, addita 1. aggregatũ 65536. in se multiplicetur, procreabitur numerus 4294967296. qui, abiecta prius vnitate, dabit summã 32. terminorũ. Postremo si 4294967296. in se multiplicentur, fiet numerus 18446744073709551616. qui, abiecta prius vnitate, dabit summam 64. terminorum. Atq; tot quatrini requiruntur, vt quis repleret omnia 64. loca diĉi ludi latrunculorum, ponendo 1. quatrinũ in primo loco; 2. quatr. in secundo; 4. in tertio; 8. in quarto, & sic deinceps progrediendo per duplam proportionem: qui efficiunt aureos, (tribuendo singulis aureis 4co. quatrinos) 461168601842738793/8/0. quanta pecunia vix in toto vno regno, vel etiam pluribus, reperitur; quod multis incredibile videtur.

Quanta pecunia requiratur, vt impleátur 64. loca ludi latrunculorũ, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in secúdo 2. in tertio 4. & ita deinceps ꝓgrediẽdo per ꝓportionẽ duplam.

Pari ratione, si quis optet summam 40. terminorum eiusdem progressionis, accipienda primum erit summa horum 5. terminorum 1. 2. 4. 8. 16. nempe 31. Deinde, addita 1. multiplicandum aggregatum 32. in se. Abiecta enim vnitate ex producto numero, fiet summa 10. terminorum 1023. Rursus, addita 1. si aggregatũ multiplicetur in se, & ex ꝓducto numero reijciatur 1. exurget summa 20. terminorum 1048575. Postremo, addita rursus 1. si aggregatum in seipsum multiplicetur, & ex producto numero dematur 1. ꝓducetur summa 40. terminorum 1099511627775. Atq; tot quatrinos reciperet Dux aliquis, qui 40. oppida sua ea lege diuenderet, vt ei pro primo solueretur 1. quatrinus, pro secundo 2. quatr. pro tertio 4. & ita deinceps ꝓgrediẽdo semper per ꝓportionẽ duplã. Hi aũt quatrini conficiunt aureos 274877906957/4/0/5/0. Quòd si hac pecunia emerentur redditus annui, ita vt 00. aurei tantum lucrificarent 5. aureos (cum tamen lege ordinaria plus lucrentur) 13743895 3, & baioch. 47 3/1/6. quantos redditus nullus vnquã Monarcha, aut Resp. habuit: vt non insanus iudicandus sit Dux ille, (vt plerisq;

Qua ratione facile inueniatur summa 40. terminorũ ꝓgressionis Geometricæ ꝓportionis duplæ ab 1. incipientis.

Quanti constent 40. oppida, si vendãtur, ita vt pro primo soluatur 1. quatr. pro secundo 2. quatri. ꝓ tertio 4. &c.

risque, qui in Arithmeticis parum sunt exercitati, videtur) qui ea ratione 40. sua oppida diuendit, sed sapientissimus.

Quo modo breuiter elicitatur summa 24. terminorũ ꝓgressionis Geometricæ ꝓportionis duplæ ab 1 incipientis.

Postremo si quis cupiat expedite summã habere 24. terminorum ciusdẽ progressionis, sumenda erit primũ summa trium horum terminorũ 1. 2. 4. quæ est 7. Deinde, addita 1. multiplicandum aggregatum in se, & à producto numero auferenda 1. vt habeatur summa 6. terminorũ 63. Addita rursus 1. multiplicandũ aggregatũ in se, & auferenda 1. ex numero producto, vt fiat summa 12. terminorũ 4095. Tandem, addita rursus 1. multiplicandũ aggregatum in se, & 1. subducenda ex numero procreato, vt exurgat summa 24. terminorũ 16777215. Non ergo ridendus esset, qui bellicosum equum, qui in pedibus habet 24. clauos, ita venderet, vt ei pro primo clauo soluatur 1. quatr. pro secundo 2. pro tertio 4. pro quarto 8. &c. Nam reciperet pro equo 16777215. quatr. qui conficiunt $4194303\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. aur. pro quo pretio vnusquisq; libẽter suũ equũ daret. Hæc pauca de progressionibus dicta sint satis. Multo enim plura de eisdem scribemus in pleniore nostra Arithmetica.

Quanti constet equus habẽs 24. clauos in pedibꝰ, si ita vẽdatur, vt detur 1. quatri. ꝓ primo clauo, & 2. pro secundo, & 4. pro tertio, &c.

EXTRACTIO RADICIS *quadratæ. Cap. XXVI.*

Quadratus numerus quid.

NVMERVS quadratus dicitur, qui ex aliquo numero in seipsum multiplicato producitur. qualis est 4. qui ex multiplicatione numeri 2. in seipsum gignitur. Item 9. cum ex 3. in se producatur. Item 2209. quia generatur ex multiplicatione 47. in se, &c. Vnitas quoq; ab Arithmeticis numerus quadratus, licet improprie, appellatur, propterea quod ex 1. in se producatur. Numerus autem, qui in se multiplicatus, producit quadratum numerũ, vocatur latus, siue radix quadrati.

Radix quadrata quid.

Extra-

Extractio igitur radicis quadratæ est inuentio numeri, qui in se multiplicatus producat numerum propositum, si quadratus est, vel, si non est quadratus, maximum numerum quadratū in eo contentum. Vt extractio radicis quadratæ ex numero 2209. est inuentio numeri 47. quia hic in se multiplicatus producit propositū numerū 2209. Item extractio radicis quadratæ ex numero 3375. est inuentio numeri 58. quia hic in se multiplicatus gignit numerum quadratum 3364. qui est omnium maximus in 3375. contentus. Nam proxime maior quadratus numerus, cuius latus, siue radix est 59. vna vnitate maior, quàm 58. est 3481. Extractio radic. quadratæ q̄d.

Primum autem numerus propositus, cuius radix inuestiganda est, signandus est punctis quibusdam, posito puncto sub prima figura ad dextram, vel supra primam figuram, & alio sub tertia, & alio sub quinta, & ita deinceps sub septima, nona, & sub aliis locis imparibus: ita vt quodlibet punctum habeat duas figuras, illam videlicet, sub qua punctum signatum est, & aliā, quæ hanc versus sinistram præcedit; excepto vltimo puncto ad sinistram, quod aliquando vnicam figuram habet, quando nimirum numerus figurarum est impar. Tot autem figuras habebit radix propositi numeri, quot puncta signata sunt. Vt hic numerus 21178404. ita signabit, habebitq; eius radix quatuor · · · · figuras. Hic aūt numer⁹ 456789012. ita signabit, eiusq; radix 5. figuris scribet. · · · · · Quomodo numerus, cuius radix quæritur, punctis sit signandus.

Quot figuras habeat radix ppositi numeri.

Signato hac rône numero, ita radix ipsius eruetur.

Sub vltimo puncto ad sinistram ponitur radix maximi quadrati in figuris ad illud punctum spectantibus contenti, quæ maior esse non potest, quam 9. eadēq; radix scribitur ad dexteram numeri propositi post hāc lineam curuam (. vt de diuisione integrorū numerorū diximus: atq; hæc radix, instar Quotiētis figuræ, p radicem sub puncto positā, instar diuisoris, multiplicatur, pductusq; numer⁹ ex supra scripto numero subtrahit, deletis prius figuris, a quibus fit subtractio, una cū Quo pacto radix quadrata ex dato numero eruatur.

radice sub puncto notata, quemadmodum in diuisione integrorum docuimus. Numerus autem residuus non pōt esse maior, quàm duplus radicis sub puncto positæ.

Post hæc duplicat radix inuenta, scribiturq; numerus hic duplicatus sub sequēti pūcto, hoc ordine, vt prima eius figura ponatur sub figura, quę proxime punctū vltimum sequitur versus dextrā, aliæ vero, si quæ sint, ordine suo versus sinistram progrediendo, ita vt sub figura, sub qua sequens punctum ponitur, nihil scribatur. Sub ea enim ponenda est noua figura Quotientis. Posito hac ratione numero illo duplicato, diuidit per illam numerus suprascriptus, Quotientisq; figura ad dexteram post propositum numerū scribitur, atq; etiā sub puncto, vt fiat quasi integer diuisor ex duplicato illo numero, & figura hac Quotientis. Quo facto, multiplicatur figura hęc Quotientis in totum illum diuisorem, vt in diuisione integrorum, productusq; numerus ex suprascripto numero subducitur, &c. Antequā autem figuram hanc nouā Quotientis scribas, tentandū prius erit, num ea multiplicata in duplicatum illum numerum, & in seipsam positam post illum numerum duplicatum, talem numerum producat, qui à suprapositō numero possit subtrahi.

Rursus eodē modo totus numerus post lineā hanc curuam (. hactenus positus duplicatur, duplicatusq; numerus sub sequenti puncto scribitur eo ordine, quē supra præscripsimus, ita vt rursus sequens punctū vacuū relinquatur pro noua figura Quotientis. Per hūc numerum vero duplicatum diuiditur suprascriptus numerus, sumiturq; talis figura pro Quotiente, quæ in numerum illum duplicatum, & in seipsam post illū numerum duplicatum positam multiplicata, numerū procreet, qui ex suprascripto numero detrahi possit.

Pari ratione totus numerus in Quotiente hactenus positus duplicatur, & reliqua fiunt, vt prius: atq; ita deinceps, donec omnia puncta sint absoluta. Verum hæc omnia exemplis fient clariora.

Sit eruenda radix quadrata ex numero 21178404.

Notatis

Notatis pũctis, vt ſupra dictũ eſt, pono ſub vltimo puncto ad ſiniſtram figuram 4 tanquã radicem maximi quadrati in ſupraſcripto numero 21. contenti, (quadratus enim numerus maioris radicis, nempe 5. eſt 25) eamq; rurſus ſcribo poſt lineã hanc curuã (. Multiplicata autem figura 4. in Quotiente per figurã 4. ſub puncto, fiunt 16. quæ ex 21. ſublata, vt in diuiſione integrorum præcepimus, relinquunt 5. ſpectabuntq; ad ſequens punctum tres hæ figuræ 517.

5
21178404 (46
486

Deinde duplicata figura quotientis 4. vt fiant 8. ſcribo 8. ſub 1. vt in exemplo vides; diuidoq; 51. per 8. & inuenio 8. contineri in 51. ſexies. Pono ergo 6 tã in Quotiente poſt 4. quàm ſub puncto figuræ 7. Multiplicata aũt figura hac Quotientis 6. per totum diuiſorem 86 productoq; detracto ex ſupraposito numero 517. remanet 1. pertinebuntq; hæ tres figuræ 184. ad ſequens punctum.

851
21178404 (460
48620
9

Rurſus duplicato Quotiente 46. hactenus inuento, vt fiant 92. ſcribo 2. ſub 8. & 9. ſub 1. vt in exemplo vides; diuidoq; 18. per 92. Sed quia 92. nõ continentur in 18. pono 0. in Quotiente, & ſub puncto figuræ 4 deleoq; totum diuiſorem 920. ſpectabit autem ad poſtremum punctum totus hic numerus 18404.

851
21178404 (4602
48620002
992

Poſtremo duplicato Quotiente 460. hactenus inuento, vt fiant 920. ſcribo 0 ſub 0. & 2. ſub 4. & 9 ſub 8. vt vides in exemplo. Di-

851
21178404 (4602
48620002
992

 uidendo

uidendo autem 1840 per 920. inuenio hunc numerum in illo contineri bis. Pono ergo figuram 2. tam in Quotiente, quam sub puncto primæ figuræ 4. Multiplicata vero hac figura 4 per totum diuisorem 9202. productoque numero dempto ex numero suprascripto, nihil supereſt. Radix ergo quadrata numeri propositi est 4602. ipseq; numerus propositus quadratus est, cum nihil superfuerit post vltimam subtractionem factam.

Sit rursus inquirenda radix quadrata ex numero 456789012. Signatis punctis, vt docuimus, scribo sub vltimo puncto ad sinistram figuram 2. tanquam radicem maximi quadrati in suprascripto numero 4. cõtenti, eamq; rursus pono in Quotiente. Multiplicata autem figura 2. in Quotiente per figurã 2. sub puncto, fiunt 4. quæ ex 4. subducta nihil relinquunt, pertinebuntque hæ duæ figuræ 56. ad punctum sequens.

456789012 (21
· · · · · ·
241

Duplicata figura Quotientis 2. fiunt 4. quæ scribo sub 5. relicto puncto sequenti vacuo pro noua figura Quotientis. Diuidẽdo autem 5. per 4. inuenio Quotiẽtem 1. quem scribo tam post Quotientem 2. quam sub puncto figuræ 6. Multiplicata autem figura hac Quotientis 1. per totum diuisorem, ablatoque numero producto ex 56. remanent 15. ita vt ad sequens punctum spectent quatuor hæ figuræ 1578.

15
456789012 (213
· · · · · ·
241123
4

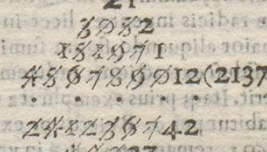
Deinde duplicato Quotiente 21. hactenus inuento, vt fiant 42. pono 2. sub 7. & 4. sub 5. Diuidendo autem 157. per 42. reperio Quotientem 3.

30
1578
456789012 (2137
· · · · · ·
24112367
442

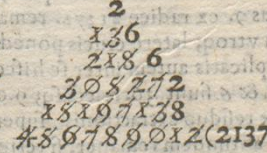
quem

quem pono & in Quotiente, & sub puncto figuræ 8. Multiplicata autem hac figura Quotientis 3. per totum diuisorem 423. subtractoque numero producto ex 1578. relinquuntur 309. Pertinebunt ergo ad sequens punctum quinque istę figurę 30990.

Rursus duplicato Quotiente 213. hactenus inuento, vt fiant 426. scribo 6 sub 9. & 2. sub 9. & 4. sub 0. Diuidendo autem 3099. per 426. inuenio Quotientem 7. quem scribo tam in Quotiente, quàm sub puncto figuræ 0. Multiplicata vero hac Quotientis figura 7. per totum diuisorem 4267. detractęque producto numero ex 30990. remanent 1121. atque adeo ad punctum sequens pertinebunt sex hæ figuræ 112112.



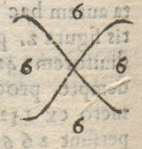
Postremo duplicato Quotiente 2137. hactenus inuento, vt fiant 4274. colloco 4. sub 1. & 7. sub 1. & 2. sub 2. & 4. sub 1. Diuidendo autem 11211. per 4274. reperio Quotientem 2. quem scribo & in Quotiente, & sub puncto figuræ 2. Multiplicata autem hac Quotientis figura 2. per totum diuisorem 42742. & dempto producto numero ex 112112. supersunt 26628. Numerus ergo propositus quadratus non est, ac proinde Quotiens inuentus 21372. non est eius radix, sed alterius numeri, qui



est maximus quadratus in dato numero comprehensus, qualis est numerus 456762384. Nam proxime maior quadratus, qui videlicet habet radicem vna vnitate maiorem radice inuenta 21372. constituit numerũ maiorem proposito numero.

Examen extractionis radicis quadratæ triplex.

Examen extractionis radicis quadratæ triplex est, quemadmodum & diuisionis integrorũ. Primum enim fit per abiectionem 9. alterum per abiectionẽ 7. & tertium per multiplicationẽ, vt in diuisione integrorũ dictum est. Sed radix inuenta accipienda est hic loco diuisoris: quia si numerus propositus diuidatur per radicem inuentam, fiet Quotiens eadem radix: Et si quid superfuerit in extractione radicis, idem supererit in diuisione, dummodo in Quotiente sumantur eædem figuræ radicis inuentæ, licet in vltima diuisione partiali maior aliquando figura sumi posset, quando nimirum residuũ extractionis radicem excesserit. Itaq; prius exemplũ ita examinabitur per 9. Reiectis 9. ex radice 4602. remanent 3. quæ in vtroq; latere crucis scribo, propterea quòd radix est & diuisor, & Quotiens, vt diximus. Multiplicatis iam inter se duabus hisce figuris 3. & 3. fiunt 9. reiectisque 9. remanet 0. in superiori parte crucis collocanda. Tandem reiectis 9. ex proposito numero, remanet etiã 0. Posterius autẽ exẽplum ita examinabitur per 9. Reiectis 9. ex radice 21372. remanent 6. in vtroq; latere crucis ponẽda. Multiplicatis autem inter se hisce figuris 6. & 6. fiunt 36. reiectisq; 9. ex 36 & ex residuo extractionis, supersunt 6. Tantundem remanet, si reijciãtur 9 ex dato numero.



Quòd si multiplicetur radix prioris numeri in se, producetur idẽ numerus prior. Itẽ si radix numeri posterioris in se multiplicetur, productoq; numero addatur residuũ extractionis, gignetur idẽ numerus posterior.

Residuũ in extra-

Obiter etiam hic aduertendum est, in nulla extra-

ctione radicis quadratæ resíduũ, si quod est, maius esse posse, quàm duplum radicis inuentæ. Si enim superaret duplum radicis inuentæ vel vna vnitate, haberet numerus propositus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta est. Ratio huius rei est, quòd quilibet quadratus numerus superat proxime minorem numerum quadratum duplo radicis ipsius minoris quadrati, & insuper vna vnitate; adeo vt, si addatur 1. ad duplum radicis cuiusuis quadrati, & hoc aggregatum ad quadratum proxime minorem, fiat quadratus proxime maior. Vt quadratus numerus 64. superat numerum quadratum 49. numero 15. Constat autem, numerum 14. duplum esse radicis quadrati 49. quæ est 7. superesseq; vnam adhuc vnitatem in 15. ac proinde, si addatur 1. ad 14. duplum radicis 7. & hoc aggregatum ad 49. fieri quadratum numerum 64. proxime maiorem, quàm 49. cuius radix est 7. Si igitur proponat quis numerum 63. vt eius radix quadrata eruatur, reperiet radix 7. supereruntq; 14. quæ radicis sunt dupla: Si vero quis ꝓponeret numerũ 64. inueniretur q; radix 7. erratum esset, quia supereſſent 15. quæ maiora sunt, quàm duplũ radicis 7. Quare radix numeri 64. erit 8.

ctiõe quadratæ radicis maius essenõ põt, quã duplũ radicis inuẽtæ.

Quæ sit differẽtia inter duos quadratos proximos.

APPROPINQVATIO RADICUM in numeris non quadratis. Cap. XXVII.

VONIAM cum numerus propositus non est quadratus, inuenta radix in se multiplicata producit numerum minorem numero ipso, quemadmodũ in posteriori exemplo patuit, vbi radix in se multiplicata gignit numerum, qui à numero proposito superatur toto hoc numero 26628. monstrabimus hoc loco duplicẽ viam, qua radix propinquior inueniatur, ita vt eius numerus quadratus à proposito numero nõ quadrato insensibili fere differentia distet. Vera enim radix numero exprimi non potest, sed solum per lineam, vt in pleniore nostra Arithmetica demonstrabitur.

Priori via reperiet radix ꝓpinquior quidē ininfinitū, sed tamē minor, quā vera; adeo vt eius quadratus numerus semper a numero ꝓposito superetur. Posterieri via inuenietur radix propinquior quoq; in infinitum, sed quæ verā excedat; ita vt eius numerus quadratus maior semper sit numero proposito. Vtrāq; prīò via demōstrata est Geometrice & a Theone Alexādrino in lib. 1. Almagesti Ptolemæi, & a Federico Cōmandino in lib. Archimedis de dimensione circuli.

Quo modo inueniatur radix ꝓpinquior, q̄ tamen minor sit, q̄ uera.

Prior ergo via ita se habet. Inuenta radice maximi quadrati in proposito numero comprehensi, adiiciatur ad eam fractio, cuius numerator est residuum ex tractionis, quo nimirū propositus numerus quadratū numerum ꝓxime minorē, quem radix inuenta ꝓducit in se multiplicata, excedit, denominator vero duplū radicis inuētæ, & præterea vnitas, quo nimirū radix numeri quadrati, qui proxime maior est proposito numero, superat radicē inuentā numeri quadrati, qui ꝓxime minor est numero proposito. Hac.n. rōne cōposita erit radix multo propinquior, quā inuenta, minor tamē, quā vera. Ad quam si addatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo ꝓpositus numerus nō quadratus excedit quadratū radicis propinquioris iā inuētæ, p numerū compositū ex duplo eiusdē radicis propinquioris, & excessu, quo radix quadrati numeri ꝓxime maioris superat radicē propinquioré inuentam, exurget radix adhuc propinquior, minor tamē, quā vera. Ad quā si iterū apponatur id, quod ꝓuenit ex diuisione excessus, quo ꝓpositus numerus nō quadratus superat quadratū radicis ꝓpinquæ vltimo loco inuētæ, per numerū cōpositū ex duplo eiusdē ultimæ radicis propinquæ, & excessū, quo radix quadrati numeri ꝓxime maioris excedit radicē eandē vltimā propinquā, efficietur adhuc ꝓpinquior radix, minor tamē, quā vera. Atq; hoc modo licebit semper inuenire radicē propinquiorē in infinitū, nunquā tñ vera radix inueniet, sed semp radix aliquāto minor, quā uera. Exēplū. Sit ꝓpositus numerus, nō quadr. 20. Radix quadrati ꝓxime minoris est 4. q̄ in se multiplicata ꝓducit 16. super

suntq;

sunt q; 4. Si ergo ad radicē 4. addat fractio $\frac{4}{9}$. cui⁹ numerator est residuū illud, denominator vero duplū in uētæ radicis 4. & ꝓterea 1. fiet propinquior radix $4\frac{4}{9}$. Huius enim quadratus numer⁹ est $19\frac{6}{8}\frac{1}{1}$. qui minor quidē est, quā ꝓpositus numerus 20. sed minus ab eo differt, quā quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Ablato hoc quadrato $19\frac{6}{8}\frac{1}{1}$. ex numero ꝓposito nō quadrato 20. supersunt $\frac{2}{8}\frac{0}{1}$. Itē radix 5. quadrati ꝓxime maioris numero ꝓposito excedit radicē ꝓpinquā $4\frac{n}{9}$. ꝓxime inuētā hac minutia $\frac{5}{9}$. quę addita ad duplū radicis ꝓpiquæ $4\frac{4}{9}$. hoc est, ad $8\frac{8}{9}$. facit numerū $9\frac{4}{9}$. p quē si diuidat residuū illud $\frac{2}{8}\frac{0}{1}$. fiet Quotiēs $\frac{1}{6}\frac{8}{8}\frac{0}{5}$. qui additus ad radicē ꝓpinquā $4\frac{4}{9}$. ꝓxime inuētā faciet radicē ꝓpiquiorē $4\frac{2}{6}\frac{9}{1}\frac{1}{9}\frac{6}{6}\frac{0}{5}$. hoc est. $4\frac{8}{7}$. Huius n. numer⁹ quadr. est $19\frac{2}{2}\frac{8}{8}\frac{5}{9}$. qui minor quoq; est, quā numerus ꝓpositus 20. nō quadratus, sed magis ad eū accedit, quā quadrat⁹ $19\frac{6}{8}\frac{1}{1}$. radicis $4\frac{4}{9}$. ante hanc radicem $4\frac{8}{7}$. inuentæ.

Rursus subtracto hoc quadrato $19\frac{2}{2}\frac{8}{8}\frac{5}{9}$. ex ꝓposito num. 20. nō quadrato, supersunt $\frac{4}{2}\frac{7}{8}\frac{5}{9}$. Itē radix 5 quadrati ꝓxime maioris numero ꝓposito excedit radicē ꝓpinquā $4\frac{8}{7}$. ultimo inuētā hac $\frac{9}{1}\frac{1}{7}$. quæ addita ad duplū vltimæ radicis ꝓpinquæ $4\frac{8}{7}$ hoc ē, ad $8\frac{1}{1}\frac{6}{7}$. facit num. $9\frac{8}{7}$. p quē si diuidat residuū illud $\frac{4}{2}\frac{7}{8}\frac{5}{9}$. fiet Quotiēs $\frac{4}{4}\frac{6}{6}\frac{8}{5}\frac{5}{2}\frac{0}{9}$ qui additus ad radicē ꝓpinquā $4\frac{8}{7}$. ultimo inuentā faciet radicē ꝓpinquiorē $4\frac{3}{7}\frac{7}{9}\frac{3}{0}\frac{3}{9}\frac{8}{9}\frac{8}{3}$. hoc est, $4\frac{7}{1}\frac{6}{6}\frac{1}{1}$. Huius. n. numer⁹ quadr. est $19\frac{2}{2}\frac{5}{5}\frac{9}{9}\frac{0}{2}\frac{1}{1}$. qui minor quoq; est ꝓposito numero 20. nō quadrato, magis tñ ad eū accedit, quā quadratus $19\frac{2}{2}\frac{8}{8}\frac{5}{9}$. radicis ꝓpinquę $4\frac{8}{7}$. ante hāc radicē $4\frac{7}{1}\frac{6}{6}\frac{1}{1}$. inuētę. Atq; in hunc modum licebit semper magis ac magis ad ueritatem accedere, ad quā tamen nunquam perueniemus, sed semper ab ea deficiemus.

Quo modo repetatur radix ꝓpinquior, q̄ tamē maior sit, q̄ uera.

Posterior autē via hæc est. Inuenta radice maximi quadrati in ꝓposito numero cōprehēsi, adiiciat ad eā fractio, cuius numerator est residuū extractionis, quo nimirū ꝓpositus numerus quadratū numerum ꝓxime minorē, quē radix inuenta ꝓducit in se multiplicata, excedit,

excedit, denomiuator vero duplum radicis inuentæ. Componetur enim hac ratione radix multo propinquior quam inuenta, maior tamen, quam vera. A qua si auferatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo quadratus numerus radicis propinquioris iam inuẽtæ excedit numerum propositum, per duplum eiusdem radicis propinquioris, relinquetur radix adhuc propinquior, maior tamen, quam vera. A qua si rursus detrahatur id, quod prouenit ex diuisione excessus quo numerus quadratus radicis propinquæ vltimo loco inuentæ superat numerum propositum, per duplũ eiusdem radicis vltimæ propinquæ, remanebit adhuc propinquior radix, maior tamen, quam vera. Atq; hoc modo licebit semper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, sed semper radix aliquanto maior, quam vera. Exemplum. Sit propositus idem numerus nõ quadratus 20. Radix quadrati proxime minoris est 4. quæ in se multiplicata facit 16. superstunq; 4. Si ergo ad radicem 4. adijciatur fractio $\frac{4}{8}$. cuius numerator est residuum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4. fiet propinquior radix $4\frac{4}{8}$. hoc est, $4\frac{1}{2}$. Huius enim numerus quadratus est $20\frac{1}{4}$. qui maior quidem est, quam propositus numerus 20. sed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Iam vero, si $\frac{1}{4}$. excessus nimirũ, quo numerus quadratus $20\frac{1}{4}$. radicis $4\frac{1}{2}$ proxime inuentæ superat numerum propositum 20. diuidatur per duplum radicis propinquæ $4\frac{1}{2}$. iam inuentæ, hoc est, per 9 fiet Quotiens $\frac{1}{9}\frac{1}{6}$. qui ablatus ex radice $4\frac{1}{2}$. proxime inuenta relinquet propinquiorem radicem $4\frac{3}{7}\frac{4}{2}$. hoc est, $4\frac{1}{3}\frac{7}{6}$ Huius em̃ numerus quadratus est $20\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{9}{9}\frac{6}{6}$ qui maior quoq; est numero proposito 20. sed minus ab eo distat, quam quadratus $20\frac{1}{4}$. radicis $4\frac{1}{2}$. ante hanc inuentæ.

Quòd si rursus $\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{9}{9}\frac{6}{6}$. excessus nimirum, quo numerus quadratus $20\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{9}{9}\frac{6}{6}$. radicis $4\frac{1}{3}\frac{7}{6}$. proxime inuentæ superat propositum numerum 20. diuidatur

datur per duplum radicis $4\frac{1}{3}\frac{7}{6}$. iam inuentæ, id est, per $8\frac{3}{3}\frac{4}{6}$. hoc est p $8\frac{1}{1}\frac{7}{8}$. fiet Quoties $\frac{1}{1}\frac{1}{1}\frac{5}{9}\frac{9}{2}$ qui subductus ex radice $4\frac{1}{3}\frac{7}{6}$. proxime inuenta relinquet radicé propinquiorem $4\frac{1}{4}\frac{9}{1}\frac{7}{7}\frac{0}{3}\frac{2}{1}\frac{8}{2}$. hoc est, $4\frac{5}{1}\frac{4}{1}\frac{7}{9}\frac{3}{2}$. Huius enim quadratus numerus est $20\frac{1}{1}\frac{3}{3}\frac{4}{3}\frac{7}{7}\frac{4}{4}\frac{4}{6}\frac{6}{4}$. qui maior etiam est numero proposito 20. sed minus ab eo distat, quam quadratus $20\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{}{9}\frac{}{6}$. radicis $4\frac{1}{3}\frac{7}{6}$ ante hanc inuentæ Atq; in hunc modum licebit semper magis ac magis accedere ad veritatem, ad quam tamen nunquam perueniemus, sed semper eam excedemus.

Agendum iam esset de extractione radicis cubicæ, & aliarum radicum, quæ infinitæ sunt, sed quoniã tractatio hæc difficilior est, inuentioq; radicis quadratæ magis est necessaria ad libros Archimedis, Ptolemæi, cæterorumq; Mathematicorum intelligendos, consulto à nobis in pleniorem nostram Arithmeticam differtur. In ea namq; non solum omnes radices, cum earum appropinquatione tractabimus, sed innumera alia, à quibus in hoc compendio dedita opera abstinuimus, exponemus.

FINIS.

ERRATORVM CORRECTIO.

Pag.	lin.	Errata.	Correcta.
39.		7.	si quam. si quem.
67.		21.	sunt nuri. sunt numeri.
81.		31.	minutia hæc $\frac{4}{7}$. minutia hæc $\frac{2}{7}$.
136.		15.	lucratos esse lucrati esse.

In vertice pag. 98. 99. 102. 103. 182. 183. 190. 191. corrigantur numeri.

INDEX OMNIVM Capitum huius Arithmeticæ.

NVmeratio integrorum numerorum. Pagina 5.
Additio integrorum numerorum. 8.
Subtractio integrorum numerorum. 17.
Multiplicatio integrorum numerorum. 25.
Diuisio integrorum numerorum. 34.
Numeratio fractorum numerorum. 57.
Aestimatio, siue valor fractorum numerorum. 59.
Reductio fractorum numerorum ad minimos numeros, siue terminos. 64.
Fractiones fractorum numerorum. 68.
Reductio fractorum numerorum ad eandem denominationem & ad integra, nec non integrorum ad fractionem quamcunque. 70.
Additio fractorum numerorum. 75.
Subtractio fractorum numerorum. 77.
Multiplicatio fractorum numerorum. 80.
Diuisio fractorum numerorum. 82.
Insitio fractorum numerorum. 84.
Quæstiunculæ nonnullæ numerorum integrorum, ac minutiarum. 93.
Regula trium; quæ alio nomine regula aurea, siue regula proportionum dici solet. 98.
Regula trium euersa. 108.
Regula trium composita. 112.
Regula Societatum. 123.
Regula Alligationis. 146.
Regula falsi simplicis positionis. 157.
Regula falsi duplicis positionis. 164.
Progressiones Arithmeticæ. 189.
Progressiones Geometricæ. 198.
Extractio radicis quadratæ. 208.
Appropinquatio radicum in numeris non quadratis. 215.

INDEX EORVM, QVAE in singulis capitibus continentur.

IN PRAEFATIONE.

ARithmeticæ præstãtia, atq; vtilitas. pag. 3.

IN NVMERATIONE INtegrorum numerorum.

Numeratio quid. 5.
Valor decem figurarũ Arithmeticarum quo pacto cognoscatur. Ibid.
Quot loca sint in quolibet numero. Ibid.
Prima figura, & vltima in quouis numero quæ sit. Ibid.
Ordo locorum in quouis numero cur à dextra siniſtrã versus procedat. Ibid.
Quid quælibet figura in quouis loco posita significet. 6.
Loca in quouis numero superãt sese ordine in decupla proportione. Ibid.
Quid obseruandum sit, vt datus numerus facile exprimatur. Ibid.

IN ADDITIONE INtegrorum numerorum.

Additio quid. 8.
Numeri addendi quo pacto sint collocãdi. Ibid.
Additio quo pacto fiat. 9.
Quid agendum sit, quando ex figuris vnius loci colligitur numerus trib⁹ figuris scribẽdus. 10.
Probatio additionis per 9. quomodo fiat. Ibid.
Nouenarij mirabilis proprietas. 11.
Probatio additionis per 9. fallax est, & quare. 12.
Probatio additionis per 9. cur ab Arithmeticis adhibeatur, cum fallax sit. 13.
Probatio additionis per 7. quomodo fiat. Ibid.
Probatio additionis per 7. fallax est, & quare. 15.
Probatio additionis per 7. cur ab Arithmeticis adhibeatur, cũ fallax sit. Ibid.
Probatio additionis per 7. minus fallax est, quam per 9. & quare. Ibid.
Tabella probationis per 7. 16.
Probatio additionis p additionẽ cõtrario modo factã quo pacto fiat. Ibi.
Probatio additionis per subtractionẽ quo pacto fiat. 17.

IN

IN SVBTRACTIONE INtegrorum numerorum.

Subtractio quid. 17.
Vter duorum numerorū maior sit, quo pacto cognoscatur. Ibid.
Subtrahēdus numerus quo pacto locādus sit sub eo, à quo fit subtractio. 18.
Subtractio quo modo fiat. Ibid.
In subtractione quid agendum sit, quando figura inferior maior est, quam superior. Ibid.
Facilior ratio subtractionis, quādo figura inferior superiore maior est. 20.
In subtractione quid agendū sit, quādo plures sunt numeri. 23.
Probatio subtractionis per 9. & 7. quo pacto fiat Ibid.
Probatio subtractionis per additionem, & subtractionem quo pacto fiat. 24

IN MVLTIPLICATIONE integrorum numerorum.

Multiplicatio quid. 25.
Tabula Pythagorica quid Ibid.
Tabula Pythagorica quo pacto constructur. 26.
Vsus tabulæ Pythagoricæ ad cognoscendum, quid faciat multiplicatio vnius figuræ in aliam figuram. Ibid.
Regula multiplicandi figuram in figuram. Ibid.
Numeri in multiplicatione quo modo collocādi sint. 28.
Numerus quiuis per vnam figuram quo pacto multiplicetur. Ibid.
Numerus quiuis per numerum pluribus figuris scriptum quo pacto multiplicetur. 29
Probatio multiplicationis per 9. & 7. quo pacto fiat. 32.
Probatio multiplicationis per diuisionem quo pacto fiat. 33
Numeri habentes in principio cifras, quo pacto facile multiplicentur. Ibid.

IN DIVISIONE INtegrorum numerorum.

Diuisio quid. 34
Numeri in diuisione quo modo sint collocandi. Ibid.
Diuisio quo modo fiat'. 35.
In Quotiente non potest poni maior numerus quā 9. Ibid.
Residuus numerus in diuisione

sione semper minor esse debet, quàm diuisor. Ibid.
Numerus per vnam figurã quo modo diuidatur. 36.
Qui numerus dicatur supra diuisorem positus. Ibid.
Vsus tabulæ Pythagoricæ ad cognoscendum, quoties figura diuisoris in supraposito numero contineatur. Ibid.
Quotiés quot possit figuras habere. 38.
Numerus per plures figuras quo pacto diuidatur. Ibi.
Qui numerus dicatur supra quamcunque figuram diuisoris positus. Ibid.
Quid agendum sit cum numero ex diuisione relicto. 42.
Quãdo numerus minor per maiorem proponitur diuidendus, quid agẽdum sit. Ibib.
Difficultas diuisionis in quo consistat. Ibid.
Quid agendum sit, quando in Quotiente sumpta est figura nimis parua uel magna. 43.
Diuisio ab aliis quo modo fiat. 51.
Probatio diuisionis per 9. quo pacto fiat. 52.
Probatio diuisionis per 7. quo modo fiat. 53.
Probatio diuisionis per multiplicationem quo pacto fiat. 54.
Diuisio nondum absoluta quo pacto examinetur. 55.
Facilitas diuisionis, quando diuisor in principio habet aliquot cifras. Ibid.
Facilis aliquando fit diuisio, quando diuidendus numerus habet aliquot cifras in principio. 56.
Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio fundamenta sunt omnium, quæ in Arithmetica traduntur. 57.

IN NVMERATIONE *fractorum numerorum*.

Fractus numerus quid. 58.
Numerator, & Denominator fractionis quid. Ibid.
Fractio quæuis quo pacto scribatur, & pronuncietur. Ibid.
Fractiones vnde oriantur. Ibid.
Fractio quæuis est pars aliquota Numeratoris à Denominatore denominata. 59.

IN AESTIMATIONE *siue valore fractorum numerorum*.

Minutiatum valor quo pacto au-

cto augeatur. 59.
Minutiarum valor quo pacto minuatur. Ibid.
Minutiæ, quarum numeratores, ac denominatores eá dem habent proportionẽ, æquales sunt. Ibid.
Quæ minutia vni integro æquialeat. 60.
Quæ minutia minor sit vno integro. Ibid.
Quæ minutia maior sit vno integro. 61.
Vtra duarum minutiarum maior sit, quo pacto cognoscatur. Ibid.
Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, pondere, vel mẽsura exploretur. 62.
Iulius, Baiochus, & Quatrinus apud Romanos quid significet. Ibid.

IN REDVCTIONE *fractorum numerorum ad minimos numeros, siue terminos.*

Minutię cur ad minimos ter minos reducantur. 64.
Minutiæ qua arte ad minimos terminos redigantur. Ibid.
Quæ minutia ad minores terminos redigi non possit. 65.
Primus numerus, & Primi inter se numeri quid. 66.
Maxima mẽsura communis Numeratoris, ac Denominatoris minutiæ datæ quo pacto reperiatur. Ibi.
Quando Numerator, & Denominator datæ minutiæ nó habeant communem mensuram, præter vnitatem. Ibid.
Maxima mensura quorumlibet duorum numerorum quo pacto inueniatur. 67.
Alia ratio redigendarum minutiarum ad minimos terminos. 68.

IN FRACTIONIBVS *fractorum numerorum.*

Minutiæ minutiarum quid, & vnde oriantur. 68.
Minutiæ minutiarum quo modo pronuncientur, ac scribantur. Ibid.
Minutię minutiarum quo pacto ad simplices minutias reuocentur. 69.

IN REDVCTIONE *fractorum numerorum ad eãdem denominationem, & ad integra, nec nõ integrorum ad fractionem quamcunque.*

Duæ Minutiæ quo pacto ad eandem denomina-

tionem reducantur. 70.
Inuentio numeri à quotcunque datis numeris numerati. 71
Inuentio minimi numeri a quotcũq; numeris numerati. Ibid.
Plures minutiæ, quam duæ, quo pacto ad eandem denominationem reducantur. 73.
Alia ratio reducendi duas minutias ad eandem denominationem. 74.
Vtilitas minimi numeri a denominatoribus datarum minutiarũ numerati. Ibid.
Minutia, cuius numerator maior est denominatore, quo pacto ad integra reducatur. 75.
Integra qua ratione ad minutiam quamcunq; redigantur. Ibid.

IN ADDITIONE *fractorum numerorum.*

Additio minutiarũ quo modo fiat. 75.
In additione minutiarum quid faciendum sit, quando integra adsunt. 76.
Praxis addendi minutias diuersarum denominationũ inter se. Ibid.
Probatio additionis minutiarum per subtractionem quo modo fiat. 77.

IN SVBTRACTIONE *fractorum numerorum.*

Subtractio minutiarum quo modo fiat. 77.
In subtractione minutiarum quid faciendum sit, quando integra adsunt. 78.
In subtractione, quando plures sunt minutiæ, quid agendum. 79.
Praxis subtrahendi minutiã à minutia. Ibid.
Probatio subtractionis minutiarum per additionem quo modo fiat. Ibid.

IN MVLTIPLICATIONE *fractorum numerorum.*

Multiplicatio minutiarum quo pacto fiat. 80.
In multiplicatione minutiarum, quando adsunt integra, quid agendum. Ibid.
Probatio multiplicationis minutiarum per diuisionem quo pacto fiat. Ibid.
In multiplicatione minutiarum cur producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicante. 81

IN DIVISIONE *fractorum numerorum.*

Diuisio minutiarum quo modo fiat. 82.

In diuisione minutiarum, quando adsunt integra, quid agendum. Ibid.
Diuisio minutiarum qua ratione ab aliis tradatur. 83.
Probatio diuisionis minutiarum per multiplicationē quo pacto fiat. Ibid.
In diuisione minutiarū cur aliqñ producatur Quotiēs maior, quàm minutia diuisa. 84.

IN INSITIONE *fractorum numerorum*.

Insitio minutiarum quid 84.
Insitio minutiarum duplex est. 85.
Insitio minutiarum propter quid excogitata sit. Ibid.
Differētia inter insitionē minutiarū, & reductionē minutiarū minutiarū. 86.
Prima regula insitionis duarum minutiarum. Ibid.
Quo modo plures minutæ, quam duæ, inserantur per primam regulam. Ibid.
Minutiæ inserendæ per primam regulam non sunt reducendæ ad minimos terminos ante finem operationis, & quare. 88.
Summa insitionis secundū primam regulam semper minor est, quam vnitas, & quare. Ibid.
Vsus primæ regulæ insitionis in diuidendo numero integro una cum minutia per numerum integrum. Ibid.
Secunda regula insitionis duarum minutiarū. 90.
Quo pacto plures minutiæ, quam duæ, inserantur per primam regulam. 91.
Minutiæ inserendæ per secundam regulam reduci possunt ad minimos terminos ante finem operationis. 92.

IN QVAESTIVNCVlis nonnullis *numerorum integrorum, ac minutiarum*.

Vtilitas quæstiuncularum dictarum. 93.
Quæstiunculæ aliquot spectātes ad additionem, subtractionem multiplicationem, diuisionemq; numerorum tam integrorum, quàm fractorū. 93. ad 98.

IN REGVLA TRIVM, *quæ alio nomine regula aurea, siue regula proportionum dici solet*.

Regula trium, siue aurea, siue proportionum cur sic dicta sit. 98.
Numeri in regula trium quo pacto

pacto sint collocandi. 99.
Quo pacto per regulam triũ quartus numerus ignotus inquiratur. Ibid.
Demonstratio regulæ triũ. 100.
Numero per alium diuiso, si diuisor per Quotientem multiplicetur, cur rursum numerus diuisus producatur. Ibid.
Probatio regulæ trium. 101.
Compendia varia regulæ trium. Ibid.
Probationes variæ regulæ trium. 103.
Demonstratio compendiorum regulæ trium. Ibid.
Quæstiones nonnullæ, quibus variæ difficultates regulæ trium explicantur. 104. ad 108.
Quid agendum, quando diuersæ monetæ, mensuræ, pondera, & fractiones in regula trium occurrunt. 105.

IN REGVLA TRIVM *Euersa.*

Regula trium euersa quo pacto quartum numerum eliciat. 109.
Quæstiones aliquot ad regulam trium euersam spectantes. 109. ad 112.

IN REGVLA TRIVM *Composita.*

Regula trium composita, quid, & quomodo fiat. 112.
Quæstiones aliquot ad regulam trium compositã spectantes. Ibid. ad 123.

IN REGVLA SOcietatum.

Regula Societatum quãdo adhibeatur, & quo pacto fiat. 123.
Quoties regula trium in regula Societatum adhibenda sit. Ibid.
Quid agendum, quando in regula Societatum est diuersitas temporũ. 124.
Quæstiones aliquot ad regulam Societatũ spectãtes. Ibid. ad 146.

IN REGVLA *alligationis.*

Regula alligationis quid. 146.
Regula alligationis quo modo fiat. 147.
Quæstiones aliquot ad regulam alligationis spectãtes. Ibid. ad 157.
Quid agendum, quando in regula alligationis po-

nuntur plures differentiæ è regione eiusdem pretij. 149.
Alligatio variis modis fieri potest, si res alligádæ plures sint, quàm duæ. 151.
Quid obseruandum sit in alligationibus plurium rerum. Ibid.
Quando quæstio alligationis sit impossibilis. 152.

IN REGVLA FALSI *simplicis positionis.*

Regula falsi cur sic dicta sit. 157.
Regula falsi duplex est. Ibi.
Discrimen inter duas regulas falsi. Ibid.
Regula falsi simplicis positionis quo modo fiat. 158.
Quæstiones aliquot ad regulam falsi simplicis positionis spectantes. Ibid. ad 164.

IN REGVLA FALSI *duplicis positionis.*

Regula falsi duplicis positiõis quo pacto fiat. 164.
In regula falsi duplicis positionis, quando vtraque positio veritatem excedit, vel ab ea deficit, fit subtractio. 165.
In regula falsi duplicis positionis, quando vna positio veritatem excedit, & altera ab ea deficit, fit additio. Ibid.
Quæstiones aliquot ad regulam falsi duplicis positionis spectantes. Ibid. ad 188.

IN PROGRESSIONIBVS *Arithmeticis.*

Progressio Arithmetica quid. 189.
Progressio naturalis numerorum, & numerorum imparium, pariumq; quid. Ibid.
Arithmetica ꝓgressio quo pacto continuetur. 190.
Differentia progressionis Arithmeticæ quo modo inueniatur. Ibid.
Arithmetica progressio decrescere non potest in infinitum. Ibid.
Proprietas ꝓgressionis Arithmeticæ triũ, vel quatuor numerorum. Ibid.
Proprietas ꝓgressionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, si numerus terminorum fuerit impar. 191.
Proprietas progressionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, ꝓsi numerus termi-

terminum fuerit pur. Ibid.
Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur. 192.
Particularis inuentio ſummæ progreſſionis naturalis numerorum 194.
Numerus terminorum progreſſionis naturalis numerorum eſt vltimus terminus. Ibid.
Alia inuentio ſummæ progreſſionis naturalis numerorum. Ibid.
Particularis inuentio ſummæ numerorum impariũ. Ibid.
Numerus terminorum in progreſſione numerorum imparium quo pacto reperiatur. 195.
Particularis inuentio ſummæ numerorum parium. Ibid.
Numerus terminorũ in progreſſiõe numerorum parium qua ratione inuenitur. Ibid.
Vltimus terminus cuiuſcunque progreſſionis Arithmeticæ quo pacto elicitur ex numero terminorum, una cum primo termino, & differentia progreſſionis. 196.
Quæſtio de bobus Augiæ. Ibid.
Quæſtio de ducibus militiæ 197.

IN PROGRESSIONIBUS *Geometricis.*

Progreſsio Geometrica quid. 198.
Geometrica progreſsio quo pacto continuetur. Ibid.
Denominator proportionis in progreſsione Geometrica quo modo inueniatur. Ibid.
Progreſsio Geometrica decreſcit in infinitum. 199.
Proprietas progreſsionis Geometricæ triũ uel quatuor terminorum. Ibid.
Proprietas progreſsionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorum ſit impar. Ibid.
Proprietas progreſsionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorum ſit par. 200.
Summa cuiuſcunque progreſsionis Geometricæ quo pacto inueniatur. Ibi.
Particularis inuentio ſummæ progreſsionis proportionis duplæ, cuius initiũ eſt 1. 201.
In progreſsione Geometrica incipiente ab 1. quilibet numerꝰ, abiecta prius vnitate, eſt ſumma omnium antecedentium numero-

merorum. Ibid.
Si in progressione Geometrica incipiente ab 1. numerus aliquis seipsum, vel alium numerum multiplicet, quem locum numerus productus occupet. 202.
Quilibet numerus in progressione Geometrica incipiente ab 1. seipsum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm numerus multiplicans, ponendum. Ibid.
Progressio naturalis numerorum quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocãdus sit in progressione Geometrica incipiente ab 1. 203.
Quo pacto numerus cuiuscũque loci in progressione Geometrica incipiẽte ab 1. inuestigetur sine intermediis. Ibid.
Quo pacto ea, quæ de progressione Geometrica incipiente ab 1. dicta sunt, accommodentur progressioni Geometricæ non incipienti ab 1. 204.
Quo pacto numerus cuiuscunq; loci in progressione Geometrica incipiẽte à quouis numero inuestigetur sine intermediis numeris. 205.
Summa quotcunq; terminorum progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, addita prius vnitate, seipsam multiplicans producit numerum, qui, abiecta prius vnitate, summa est duplo plurium terminorũ. 206.
Quo pacto facile inueniatur summa 64. terminorum progressionis Geometricæ duplę proportionis ab 1. incipientis. Ibid.
Quanta pecunia requiratur, vt impleantur 64. loca ludi latrunculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in secundo 2. in tertio 4. & ita deinceps progrediendo per proportionem duplam. 207.
Qua ratione facile inueniatur summa 40. terminorũ progressionis Geometricæ proportionis duplę ab 1 incipientis. Ibid.
Quãti constent 40. oppida, si vendantur ita, vt pro primo soluatur 1. quatr. pro secundo 2. pro tertio 4. &c. Ibid.
Quo modo breuiter eliciatur summa 24. terminorũ progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1.

ab 1. incipientis. 208.
Quanti constet equus habens 24. clauos in pedibus, si ita vendatur, vt detur 1. quat. pro primo clauo, & 2. pro secundo, & 4. pro tertio, &c. Ibid.

IN EXTRACTIONE *radicis quadratæ.*

Quadratus numerus quid. 208.
Radix quadrata quid. Ibid.
Extractio radicis quid. 209.
Numerus, cuius radix quæritur, quo modo punctis signetur. Ibid.
Quot figuras habeat radix propositi numeri. Ibid.
Quo pacto radix quadrata ex dato nũmero eruatur. Ibid.
Examen extractionis radicis quadratæ triplex. 214.
Residuum in extractione radicis quadratæ maius esse non potest, quam duplũ radicis inuentæ. 215.
Quæ sit differẽtia inter duos quadratos proximos. Ibi.

IN APPROPINQVA*tione radicum in numeris non quadratis.*

Quo modo inueniatur radix propinquior, quæ tamen minor sit, quam uera. 216.
Quo modo reperiatur radix propinquior, quæ tamen maior sit, quam uera.

FINIS.

ERRATORVM CORRECTIO.

Pag.	lin.	Errata.	Correcta.
39.	7.	*si quam,*	*si quem.*
67.	21.	*sunt nuri,*	*sunt numeri.*
81.	31.	*minutia hæc* $\frac{4}{7}$.	*minutia hæc* $\frac{2}{7}$.
136.	15.	*lucratos esse,*	*lucrati esse.*
199.	23.	*quæ non sunt,*	*qui non sunt.*
204.	23.	*sub quo numerum,*	*sub quo numero.*
207.	36.	13743895 3.	*haberentur aur.* 13743895 3.

In vertice pag. 98. 99. 102. 103. 182. 183. 190. 191. *corrigantur numeri paginarum.*

REGESTVM.

A B C D E F G H I K L M N O P.

Omnes sunt Quaterniones præter P. Duernionem.

219,(13) pp. 8pt
Index Academ.
140. 825