PAULI GULDINI SANCTO-GALLENSIS E SOCIETATE JESU,

DE CENTRO GRAVITATIS,

LIBER TERTIUS, DE FRUCTU,

EX USU CENTRI GRAVITATIS binarum ſpecierum Quantitatis continuæ, collecto;

QUI EST

GEOMETRIA ROTUNDI.

VIENNÆ AUSTRIÆ,

Formis Matthæi Coſmerovij in Aula Colonienſi.

ANNO à CHRISTO NATO

M. DC. XLI.

LECTORI S.

ABUSU ad FRUCTUM gradum facimus: ordine fortassis Legum sacerdotibus, qui à Fructu ad Usum procedunt, non probato. Nihilominus tamen illos, immò, in re tamen licita, etiam Usurarios imitamur. Nam à Centro gravitatis invento, tanquam à Fructu Primi Libri, ad Usum ipsius, quem in Secundo exercere docuimus, pedem protulimus. Et rursus ex hoc Usu, quasi per Usuram, in hoc Libro Tertio uberiorem alium Fructum condimus. Immò ex hoc Fructu denuò captantes fructum; cum GLORIA (quam sequenti Libro producemus) teste Romanæ facundiæ parente Tullio, sit fructus Virtutis; eius subintellige quam & in præcedentibus vidimus & in hoc Libro exercemus: in quibus, iubente eodem, serere voluimus quasi beneficia, ut inde metere possemus, Gravitatis Centro debitam GLORIAM. FRUCTUM igitur quem hoc Libro decerpsimus, est GEOMETRIA ROTUNDI. Quid autem per Rotundum intelligamus, monuimus Libro præcedenti: quid per Geometriam, etsi omnibus notum sit: eam tamen in Prolegomenis Mathematicis Libro Primo præfixis, subdivisimus in Magnitudinum Descriptionem, Dimensionem, Auctionem Diminutionemque, Sectionem, Transformationem, & tandem in earundem Proportionem. In Secundo Libro nos Descriptioni, quantum nimirum ad propositum nostrum spectabat, satisfecisse utcunq; visi sumus. Dimensionem hoc Libro, prioribus præcipuè quatuor Capitibus, ex instituto tractamus. Quinto verò & Sexto Capite Proportionem, quantum visum est, absolvimus. Dimensionem verò hanc atq; Proportionem, hac ratione datam, passibus æquis *ſubſequitur, & facili labore inde deducitur Transformatio. Auctionem Diminutionemque, una cum Sectione, eo quod Principia noſtra Rotationem videlicet Centrumque gravitatis parum attingerent, data opera prateriuimus. Septimo tandem & ultimo huius Libri Capite, ex hac Geometria Rotundi, Poteſtatumque Compoſitione, ad idem unde peregrinati fueramus, redimus* Gravitatis Centrum. *Quamquam autem nos* Geometriam Rotundi, *tam arctis atque anguſtis limitibus, ut Finkius, non circumſcribimus, & ut vidimus Libro ſuperiori, longe ampliorem illi tribuamus Provinciam, quam tamen in multis locis deſertam incultamque relinquimus: Verum etiamſi illa & civitatibus & egregijs bello animis ſtipata eſſet, nondum tamen ius plenum ac dignitatem Geometria Rotundi debitam ſuſtinere poſſet. Latius enim multo hac Geometria maieſtatis ſua pomaria protendit: in qua quamvis aliqua, eaque non pauca, pro futuris adificijs, à diverſis ſint iacta fundamenta, ſubſtructio tamen ſcopum ſuum, multo minus omnis ſtructura moles faſtigium attigit. Nam quemadmodum in Plano Euclides contemplatus eſt linearum & figurarum ortum, proprietates, comparationes, contactus, ſectiones, &c. ex planis item quamplurima corpora, plano inſiſtentia, immò etiam ex ſuperficiebus Conicis & Cylindris, conſtruxit, eaq; rurſus iuxta ſuas proprietates expendit: ita ea qua ipſe fecit in Plano, hoc ut Geometria Rotundi numeris ſuis abſoluta exiſteret, fieri deberet etiam in ſuperficiebus alijs rotundis, Conicis, Cylindricis, &c. Praſtitit aliqua quidem Apollonius Pergaus in Conicis, Serenus Antinſenſis in Cylindricis: ſed potiorem partem rurſus illis ipſis planis, qua per ſectiones Coni & Cylindri eruerant, tribuerunt. Unica certè* Geometria Globi *latiſſimum aperit ſcrutandi campum: ita ut quod Euclides, cateriq; Geometra non pauci, in ſuperficie praſtiterunt plana, hoc idem optamus ut facerent ſuo modo in Spharica, de lineis nimirum & figuris in illa varie conſideratis: immò ex ipſis ſuperficiei ſphærica*

rica

rica partibus corpora construerent, eorundemq́ue passiones ac proprietates detegerent. In hac Globi Geometria nobilissima profectò iecit fundamenta Theodosius Tripolita, qui non tantum in sola Globi superficie hæsit, quamvis pleraque eo spectent, sed ubi id opus fuit etiam intima ipsius penetravit, planis secat, centrumque ipsius, qua ratione inveniendum sit docuit, quidque planis secantibus, quidque lineis rectis penetrantibus, tam in superficie extra, quam intra Globum eiusq́ue centro accidat, edisserit. Varios in superficie Globi circulos describit, eorundemque polos, accidentia, & proprietates, tam inter se, quam cum alijs diversis comparationes investigat. Contactus denique, inclinationes varias ad se invicem circulorum, sive per æqualia sive per inæqualia spatia; remotiones etiam eorundem ab se invicem, accuratissime contemplatur atque determinat. Ex quibus deinde tam veteres quam recentiores Scriptores plurima, & utilia & in seipsis præstantia deduxerunt. Hinc hodie tot abundamus triangulorum Sphæricorum variorum Auctorum Doctrinis, quibus non parva & pauca implerentur Volumina, ad Tabulas etiam numerosq́ue diversos, non ita pridem quos Logarithmos *vocant, excogitatos, pervenerunt. Sed nec dum perfecta est aut scopum desideratum attigit Rotundi sive* Globi Geometria: *Plurima adhuc in nucleo sunt, quæ quemcunque rerum harum studiosum ad eliciendas illas, invitare atque incitare merito possunt. Egregie profectò incepit, & desideratas partes complere, & scientiam ipsam excolere, & iam rem præstitit quam multis annis in votis habui,* Bonaventura Cavalerius *superiori Libro à nobis productus: Aream nimirum invenire ac capacitatem triangulorum quorumvis Sphæricorum, datis magnitudinibus angulorum sive seorsim, sive simul sumptorum. Et licet deserente nos adhuc Circuli quadratura, area illa absolute dari nequeat, eius tamen proportionem ad integram Globi superficiem clarissime demonstrat. In Opere enim illo quod* Directorium Generale Vranometri-

cum

eum *inscribit, Parte Tertia Capite octavo hanc tradit Propositionem:* Superficies Sphæræ ad superficiem cuiuscunq; Trianguli sphærici in eadem descripti, eandem habet rationem, quam quatuor recti ad dimidium excessus summæ angulorum eiusdem Trianguli super duos rectos. *Pulcherrimum sane & utilissimum Inventum Cavalerioq; dignum, à quo iure merito exspectandum sit quidquid adhuc in Geometria hac Rotundi sive Globi desideratur. Ex hac autem Propositione tanquam Corollaria deducit proportionem primò totius Sphæræ ad Pyramidem Triangulatam, cuius vertex centrum Sphæræ, basis verò triangulum in sphærica superficie occupat. Secundò proportionem triangulorum ad invicem. Deinde septem Problematibus docet transformationem trianguli sphærici propositi; in superficiem integram alterius Sphæræ; in superficiem Sectoris eiusdem Sphæræ; in Zonam Polarem; & in non Polarem: Zonam in superficiem sectoris; Pyramidis supradicti in aliam Sphæram; & tandem, quod mireris, ipsius Trianguli Sphærici Quadraturam. Si quidem quod suprà monuimus Quadraturam Circuli supposueris. Macte animo Cavaleri, & ab illis infinitis indivisibilibus, ad finita divisibilia, stylum converte. Tibi debetur hoc* Geometriæ Rotundi Supplementum, *qui attulisti à me diu desideratum Complementum. Enimvero eodem tempore quo Romæ me à Setho Calvisio expedivissem, dum cogitarem cui rei ex Mathematicis maxime manum admoverem, mihique quamplurima occurrissent, in quibus operam meam fructuose collocarem, inter alia erat hoc de Geometria Rotundi Supplementum. Sed vicit & pervicit paulò post, illa brevissimo tempore excogitata, de Centro Gravitatis Inventio & Usus, quem per plures annos memoriæ non satis fideli commisimus & circumtulimus. Totum enim filum & cogitandi & scribendi abrupit, ut in Præfatione Primi Libri Lectorem monuimus, imperata in Germaniam profectio, quo cum appulissem & deploratum statum illarum Provinciarum didicissem, non alias Indias, in quibus ruituras iam iam sub Orcum animas cælo lucrarer, mihi*

petendas

petendas esse existimavi; egique rem pro viribus diligenter, quamvis etiam per aliquot annos tum in Celeberrimo scientiarum Lycæo Viennensi, tum in Athenis Styrorum Graciensibus publico ex suggestu Mathematica traderem, ad salutem animabus afferendam: unamque animam perditam Conditori suo restituere pluris esse iudicavi, quam omnia Mathematica Inventa, ipsamque Circuli Quadraturam. Hac ratione factum est ut & tardius & tardus ad scriptionem redirem: cum enim ut alibi monui per crebros morbos vires frangerentur, acumen hebesceret, Moderatorum meorum iudicio gravioribus Laboribus sublevatus sum. Ita evenit ut dum vigerent vires & ingenium, deesset scribendi otium: & iam dum utcunque fruar otio, vires & alia requisita me destituunt: & tamen scripturio & scribo; quod si non pro dignitate rei, saltem ad senectutis molestias temperandas hanc scriptionem valere iudicavi. Verum ut redeamus ad rem nostram de uno adhuc Lector admonendus est: nam cum Ratio nostra qua Conos & Cylindros efformamus, mensuramus, & inter se comparamus, non nisi Rectos admittat; de Scalenis verò nulla fiat mentio, ideo quod mentem adhuc non adiecerimus. Interim tamen hoc obiter & quasi aliud agentes adnotamus, omnia ea quæ nos tradimus & concludimus de Conis atque Cylindris Rectis, ea etiam competere Scalenis, si doctrina debito applicetur modo; ita tamen ut sermo tantum sit, de corpore atque soliditate, non autem de superficie, de quibus nihil adhuc conclusimus; de Corporibus verò Clavius noster demonstrat, eadem quæ Euclides demonstravit (quas nos demonstrationes in aliam formam redigimus Libro 4. Capite tertio) de Conis atque Cylindris rectis, convenire etiam scalenis, ut videre est Libro duodecimo Elementorum ad Propositiones decimam, 11, 12, 13, 14, & decimam quintam. Sed ut monuimus de area corporea tantum demonstrationes illæ loquuntur. De superficierum area ideò nihil conclusimus, quod de Conorum Scalenorum superficie nihil sese *menti obijceret. Invenimus quidem atq; Geometricè demonstrare possumus, superficiem Cylindri Scaleni, æqualem esse rectangulo sub latere Cylindri, & perimetro eius Ellipsis cōprehenso, quæ nascitur quando planum aliquod Cylindrum Scalenum ita secat, ut & ad latus & ad axem eiusdem, rectum sit, Sereno suffragante.*

Capite porrò secundo inquirimus superficies corporum illorum, quæ, cum ovo gallinaceo aliqua ratione aßimilantur, Ovata *dicuntur, non quod deesset aliorum solidorum copia, sed ut exemplo ostenderemus quomodo principia nostra utcunq; speculativa, serviant etiam rebus practicis: de ijs verò ulterius non egimus, soliditatem nimirum illorum indagare, aut inter se vel cum alijs comparare, sed ea cum alijs innumeris posteris contemplanda ac perficienda transmittimus. Quid autem in reliquis Capitibus huius Libri tractemus, Lector inveniet suis in locis. Concludo ergo cum Commandino,* non me Persio vel Scipioni, aut Rutilio scripsisse, profiteor, *inquit,* quorum iudicium à Lucilio reformidabatur. *sed ijs qui & Mathematicas disciplinas primoribus quasi labris attigerunt, vel ni ijs utcunque profectum fecerunt: non autem ijs,* qui scientiæ ipsius naturam ac indolem perspectam habent, in eius se adita penetrant, & ab universalibus instructi sunt præceptis, quibus Theoremata ac Problemata innumera excogitandi, eademque demonstrandi facilitas comparatur: *quamvis etiam aliquam saltem particulam ex hisce nostris illis fortaßis gratam futuram non diffidam. Non enim omnia possumus omnes.* Fructum *ergo Lector benevole decerpe istum; quia tuus est; nihil mihi illius vendico; licet plerumque quisque amet quod utile. Poma Hesperidum aurea aureis sylvis nata, dracones defensârunt, partum invidendum, promiscuo gutturi: abnuit tam atrocem vigilem; Fructus hic meus, legi, stringi, demeti amat à quavis manu; propterea maturuit; & cum diu illum cortice clausum circumtulissem, iam protrudere coactus sum, quia tuus esse gestiebat. Vale ergo Lector, & fruere si palato tuo gratum inveneris.*

DE

DE CENTRO GRAVITATIS

LIBER TERTIVS,

Continens

FRVCTVM EIVSDEM,

QVI EST

GEOMETRIA ROTVNDI.

CAPVT PRIMVM,

DE DIMENSIONE SVPERFIcierum Rotundarum à Lineis Rectis descriptarum.

DIMENSIONEM Superficierum Rotundarum plures ac diversi Auctores & antiqui & recentiores tradiderunt; non tamen neque hoc nomine, & quod caput est, neque omnium, neque generatim. Nos eam ita tractare constituimus, ut eandem ex solis & unicis nostris principiis, ex Usu Centri Gravitatis deductis, pendere ostendamus, omnemque omnium rotundarum superficierum, quas idem Centrum gravitatis admittit, eamque generalem mensurationem tradamus. Quare etiamsi nullius alterius Geometræ exstarent de dimensione Rotundi lucubrationes, eam tamen ex his nostris, sine ullo alio alterius auxilio expediemus. Unicam excipimus

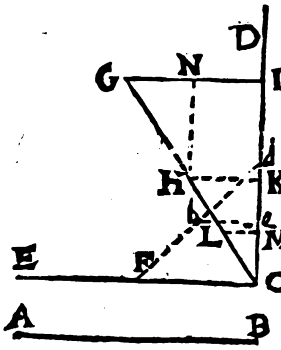
 diametri

diametri ad peripheriam circuli proportionem: quam ob caussam etiam Linearum Dimensionem omittimus rotundarum; cum illa unica unicæ sit peripheriæ circuli, de qua tamen alibi satis diximus [Libro 2. Cap. 1. Propos. 4.] Dimensio enim circularis peripheriæ, licet illa ipsa sese aliquo modo ut suprà vidimus [Lib. 2. Cap. 9. Propos. 1. Num. 1.] insinuet; absolutè tamen loquendo illa ex nostris principijs ortum non ducit; sed ipsa potius ad omnes alias Rotundi dimensiones ita nos iuvat, ut absq; illa nulla omnino perficiatur. Unde est quod ubiq; eandem supponimus, & data semidiametro, notam esse dicimus circuli peripheriam. & contra data peripheria, ex eadem proportione, quam in numeris accuratissimam à Ludolpho & Snellio accepimus, & in Tabulis nostris proposuimus semidiametrum latere non posse asserimus, quam proportionem etiam in Tabulis Prima & Secunda complexi sumus. Brevitati autem consulentes exempla dimensionis non ubiq; apponimus. Et ubi citantur Libri Primus & Secundus, &c. subintellige Centrobarycorum nostrorum.

PROPOSITIO I.

Circuli propositi, cuius radius notus sit, aream in numeris invenire.

RADIUS circuli ducatur in ipsius semicircumferentiam & numerus productus quantitatem areæ circuli propositi indicabit.



Est enim semidiameter circuli recta *EC*, cuius centrum gravitatis *F*; ostendimus [*Lib: 2. Cap: 9. Propos: 2.*] aream circuli produci ex multiplicatione eiusdem semidiametri in circumferentiam, quam descripsit centrum illud quod diximus: sed hæc circumferentia æqualis est medietati circumferentiæ circuli propositi, ab *EC* circa punctum *C* rotata descripti; eo quod semidiameter *CF*, sit semissis semidiametri *EC*, & circumferentiæ inter se sint, ut diametri, sive semidiametri. Ergo si Radius circuli, &c. Quod erat faciendum.

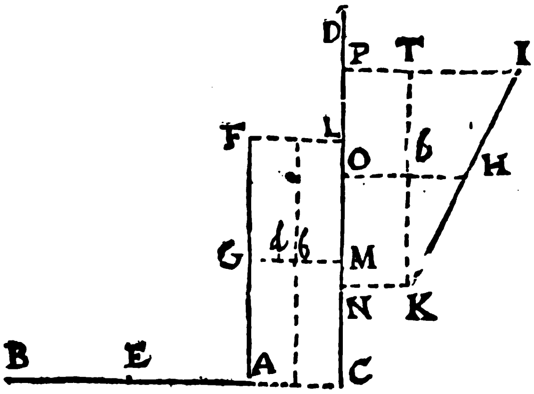
COROLLARIUM.

SEQUITUR hinc si idem Radius circuli ducatur in quadrantē circumferentiæ, proditurum areā semicirculi. Id quod suprà monuimus in Corol: 1. Prop: 5. Cap: 6. Lib: 2.

PROPOSITIO II.

Data Corona circularis, cuius latitudo & semidiameter alterutrius peripheriæ, quæ Coronam continent, cognitæ sint, dimetiri.

1. LATI-



1. LATITUDO Coronæ ducatur in peripheriam circuli ſemidiametri minoris, auctç medietate latitudinis datæ: Vel peripheria ſemidiametri maioris, eâdem medietate mulctatæ, in eandem ducatur latitudinem, & producetur area Coronæ propoſitæ.

Demonſtratio conſtat ex ijs quæ alibi diximus. [*Num: 3. Propoſ: 2. Cap: 9. Lib: 2.*] Ibi enim recta *AB*, quæ eſt latitudo Coronæ, ducta eſt in peripheriam Radij *CE*, qui eſt *AC* ſemidiameter minoris peripheriæ plus *AE:* vel *CB*, ſemidiameter maioris peripheriæ minus *BE*.

2. Quod ſi binæ tantum ſemidiametri datæ eſſent, minor ex maiore ſubtracta relinqueret latitudinem Coronæ.

PROPOSITIO III.

Superficiei curvæ ſive rotundæ Coni Iſoſcelis, cuius latus, & ſemidiameter baſis data ſit, magnitudinem exhibere.

1. LATUS Coni ducatur in medietatem peripheriæ baſis, productus numerus magnitudinem ſuperficiei conicæ, dempta baſi, indicat.

Demonſtratio conſtat [*ex Num: 2. Propoſ: 2. Cap: 9. Lib: 2.*]. Ibi enim (in Figura paginæ 212.) ut hanc componeremus ſuperficiem, rectam *CG*, quæ eſt latus Coni, duximus in peripheriam Radij *HK*; quæ peripheria eſt medietas peripheriæ baſis Coni, cum *HK* ſit ſemiſſis ipſius *GI*, ſemidiametri.

2. Si loco *CG* lateris Coni datus fuiſſet axis Coni *CI*, latus quod requiritur ad dimenſionem haberetur, ſi quadratum *CI* adderetur ad quadratum *GI:* radix enim quadrata huius ſummæ eſſet latus *CG*.

3. Sic ſi loco *IG*, ſemidiametri baſis datus ſit idem axis, quadratum ipſius ſubductum ex quadrato lateris *CG*, relinquit quadratum baſis *GI*.

PROPOSITIO IV.

Ex ijſdem datis, totam eiuſdem Coni ſuperficiem dare.

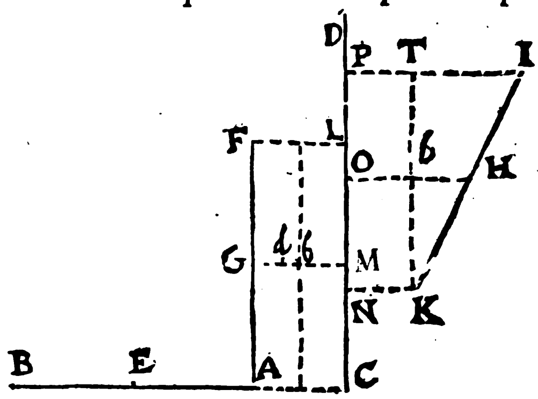
SUMMA Lateris Coni & ſemidiametri baſis, ducatur in eandem Conicæ baſis peripheriæ medietatem, numerus productus dat totam ſuperficiem curvam ſimul conicam, & planam baſis circularem.

Demonſtratio conſtat [*ex Lib: 2. Cap: 9. Propoſ: 3. Num: 5. in fine.*]. Et in eadem figura facile eſt oſtendere: Nam ut illam quam diximus componeremus ſuperficiem, duximus ſummam rectarum *IG*, *GC*, baſis nimirum & lateris coni, in peripheriam cuius radius *KH*, quæ eſt, ut ante diximus, medietas peripheriæ baſis: centrum enim gravitatis commune utriſq; *CG*, & *GI*, conſiſtit in recta *HN*, ac proinde Radius rotationis æqualis eſt ipſi *KH*.

PROPOSITIO V.

Frusti Conici, cuius semidiametri basium & latus cognita sint, superficiem conicam invenire.

1. LATUS frusti ducatur in peripheriam, cuius radius sit medio loco Arithmeticè proportionalis inter utramque basium (quæ bases supponuntur esse parallelæ & rectæ ad axem) semidiametrum, productus numerus quantitatem superficiei petitæ indicat.



Demonstratio constat [*ex Lib: 2. Cap: 9. Propos: 5. Num: 5.*]. Ibi enim duximus rectam *IK*, quæ est latus Frusti, in peripheriam radij *OH*, qui est medium Arithmeticum inter radios basium, *PI* & *NK*.

2. Si loco lateris Frusti datus esset axis, latus habetur si quadrato axis addatur quadratum excessus quo semidiameter basis maioris, semidiametrum minoris superat; summæ enim radix quadrata, æqualis est lateri quæsito.

3. Sic si loco alterutrius semidiametri basis, datus esset axis; quadratum axis ablatum ex quadrato lateris, reliquum faciet quadratum supradicti excessus, quo excessu ablato ex maiori semidiametro, manebit minor; vel additus minoris semidiametro conflabitur maior. Res constat ex triangulo rectangulo *KTI*, & penultima primi Elementorum.

4. Si cupias simul habere etiam superficies basium: eæ inquirendæ sunt ex Propos: 1. huius; caussam cur non ut in præcedenti Propos: in Cono, superficiem totam simul demus, vide in præcedentibus. [*Lib: 2. Cap: 9. Propos: 4. Num: 1.*

PROPOSITIO VI.

Cylindri recti, dato ipsius axe sive altitudine, & semidiametro basis, superficiem circularem promere.

ALTITUDO Cylindri ducta in circumferentiam basis, producit superficiem quæsitam.

Demonstratio constat [*ex Lib: 2. Cap: 9. Propos: 2. Num: 4*]. Facta est enim ibi superficies Cylindrica, per circumferentiam radij *MG*, qui æqualis est semidiametris basium, &c.

PROPOSITIO VII.

Ex ijsdem datis, totam Superficiem Cylindri colligere.

FIAT

FIAT ut summa ex binis basium semidiametris, & altitudine Cylindri collecta, ad eandem altitudinem; ita semissis semidiametri unius, ad aliud; hoc subtractum ex semidiametro basis, relinquit radium cuius peripheria ducta in priorem summam, producit superficiem quæsitam.

Per priorem enim operationem divisa est recta *Gb*, quæ *G* centrum gravitatis rectæ *FA*, sive altitudinis Cylindri nectit cum *b*, centro communi semidiametrorum basium *FL*, *AC*, in puncto *d*, in proportionem quam habent eædem binæ semidiametri, ad eam quam diximus altitudinem; ac proinde punctum *d* commune est centrum gravitatis trium rectarum *CA*, *AF*, *FL*; & sic *Md* est Radius rotationis; huius ergo peripheria, quæ est æqualis ei, quæ fit à radio æquali alterutrius basis semidiametro, multata recta æquali ipsi *Gd*, ducta in summam trium rectarum quas diximus, producit ipsius Potestatem rotundam, quæ est tota Cylindri recti superficies, hoc est, rotundæ à recta *FA* descriptæ, cum binis basium circulis.

PROPOSITIO VIII.

Superficiem Rhombi solidi, datis ipsius lateribus, & semidiametro basis communis, notam facere.

1. QUID per Rhombum solidum intelligamus diximus Libro præcedenti Cap: 8. Propos: 1. Num: 8. Cap: 9. Propos: 3. Num: 5. & Cap: 11. Propos: 1. Num: 3. Ipsius superficiem sic habebimus.

Summa binorum Laterum ducatur in semicircumferentiam basis communis, & prodibit superficies quæsita.

Demonstratio constat ex Lib: 2. Cap: 9. Propos: 3. Num: 5.

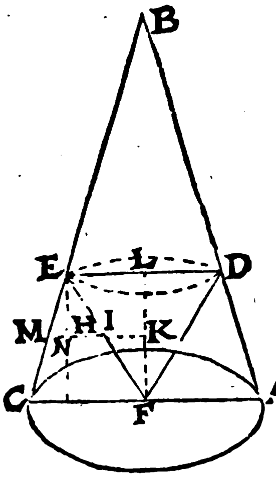
2. Si altitudines conorum Rhombum componentium, unà cum semidiametro basis communis datæ essent, & laterent latera, tum quadratum semidiametri datæ, addatur ad binarum altitudinum quadrata, seorsim sumpta, quando altitudines inæquales sunt, Radices enim quadratæ binarum summarum dabunt bina latera desiderata: quando altitudines æquales sunt, etiam latera æqualia erunt, & sic satis erit unius altitudinis quadratum, addere quadrato semidiametri datæ, &c.

3. Sic si altitudines datæ essent, aut unà saltem, unà cum lateribus & ignoraretur basis, altitudinis quadratum subtractum à quadrato correspondentis lateris, relinquet quadratum basis communis.

PROPOSITIO IX.

Superficiem figuræ solidæ invenire, quæ relinquitur ablato ex Cono Isosceli Rhombo solido.

DE



De hac figura loquitur Archimedes Lib: 1 de Sphæra & Cylindro Propos: 19.

Ut si sit Conus Isosceles *ABC*, qui secetur plano *ED*, basi *CA* æquidistanter ducto, & sit circulus sectionis, alterius coni *EFD* basis, cuius vertex *F* centrum sit basis prioris coni; ita ut duo coni *BED*, & *FED*, Rhombum componant solidum; qui Rhombus ablatus à toto Cono *CBA*, reliquum facit Truncum Coni, excavatum sive imminutum cono *EFD*; huius igitur imminuti Frusti oportet invenire superficiem.

Componitur quidem hæc superficies, ex superficie curva Frusti conici, quam metiri docuimus Propos: 5. huius; & ex superficie coni *EFD*, quam colliges ex Propos: 3. huius; & ex circulo basis *CA*, qui mensurabitur per Propos: 1. Hæ tres partes simul iunctæ conflant totam propositæ figuræ superficiem.

Verum rotundam figuræ huius superficiem etiam hoc modo habebimus: Fiat ut duo latera *CE*, *EF* simul, ad unum *CE*; ita *MI* semissis semidiametri basis *CF*, ad aliam, quæ sit *HI*. huic addatur *IK*, semissis ipsius *EL*, & totius *HK* tanquam radij quæratur peripheria, hæc enim ducta in summam laterum *CE*, *EF*, producit superficiem conicam & exteriorem & interiorem simul, propositæ figuræ: cui si addiderimus basim, tota consurget quæsita superficies.

Priori enim operatione inquisivimus punctum *H*, quod est centrum gravitatis commune binorum laterum *CE*, *EF*; nam semissi ipsius *CF*, æqualis est recta *MI*; ac proinde *HK*. est Radius rotationis, utriusque lateris circa axem *LF*, qui radius conflatur ex rectis *HI*, & *IK*, quæ *IK* æqualis est semissi ipsius *EL*: cum diameter *EF*, in parallelogrammo, *ELF*, rectam *NK* (quæ æqualis est ipsi *EL*) bisecet. Cætera constant [*ex Lib: 2. Cap: 9. Propos: 3.*] Aut certe componatur [*ex Propos: 6. eiusdem Capitis*] Potestas perimetri trianguli *CEF*; ea enim æqualis erit superficiei conicæ totius propositæ figuræ *CEFDA*.

Notandum autem est dari debere, saltem rectas *CF*, *EL*, & altitudinem *LF*; cætera enim per calculum haberi poterunt [*ex penultima primi elementorum*].

PROPOSITIO X.

Superficiem Figuræ solidæ Sphæræ inscriptæ, ex dato ipsius uno latere, multitudine, sive numero laterum, ac Sphæræ radio colligere.

FIGURA solida Sphæræ inscripta apud Archimedem Lib: 1. de Sphæra & Cylindro Propos: 22. in Corollario, est quando Circulo maximo Sphæræ inscriptum est Polygonum æquilaterum, Laterum numero pariter parium, aut saltem quaternario numerabilium, & manente immota diametro circumagatur & figura & circulus: hic describet Sphæram, & illa Figuram illam, quam diximus solidam.

Huius

Huius ergo Figuræ ſolidæ oportet, ex illis quæ diximus datis, invenire ſuperficiem, quod fiet hac ratione. Quadratum ſemiſſis dati lateris auferatur ex quadrato radij dati, & habebitur quadratum rectæ perpendicularis quæ ex centro circuli ducitur in ipſum latus: Fiat deinde ut quarta pars omnium laterum Polygoni, ad radium; ita prædicta perpendicularis, ad alium Radium; huius peripheria ducta in medietatem omnium laterum Polygoni, ſive in ſemiperimetrum Figuræ circulo inſcriptæ, totam producit quam quærimus Figuræ ſolidæ propoſitæ ſuperficiem.

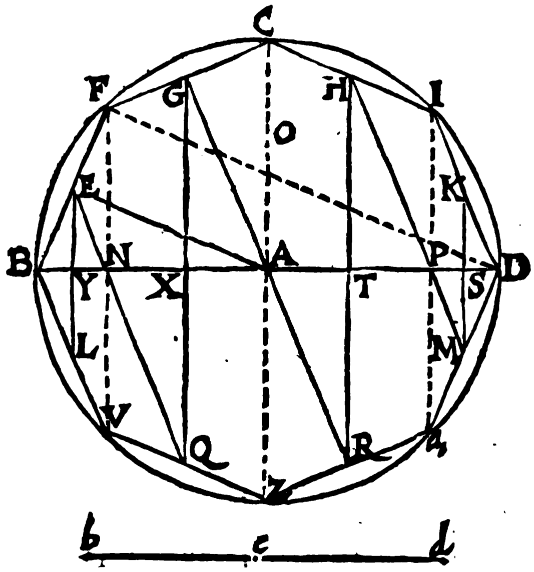
Demonſtratio conſtat [*ex Lib: 2. Cap: 9. Propoſ: 5. Num: 3.*]

Exemplum. Eſto circulo maximo Sphæræ inſcriptum Polygonum 16 laterum, & quantitas unius lateris ſit 390, poſito radio circuli maximi ſive Sphæræ 1,000. Quadratum igitur ſemilateris 38,025, ſubtractum ex 1,000,000 quadrato radij relinquit 961,975, cuius radix quadrata 981, proxime maior, eſt perpendicularis ex centro in unum Figuræ ſive Polygoni latus. Fiat ergo ut 1,560, quarta pars omnium laterum, ſive quatuor latera ſimul ſumpta, ad 1000 radium datum; ita perpendicularis 981, ad 629: hæc ut ſemidiameter ſumpta, eiuſque peripheria 3,951 in 3,120 medietatem laterum inſcriptorum ducta, producit 12,327,120 totam ſuperficiem Figuræ ſolidæ petitam.

SCHOLIUM.

1. *FACILIUS fortaſſis, univerſalius & accuratius ſolvitur Problema hoc ex Propoſitione 23. Libri 5. Collect. Mathematicarum Pappi Alexandrini, quæ ſic habet.*

Et ex hoc manifeſtum eſt, ſi alicuius ſemicirculi *BCD*, circumferentia quædam, ut *BFCI*, in quotcunque partes æquales dividatur, & iungantur rectæ lineæ; quæ à iunctis rectis lineis *BF, FC, CI*, ex converſione circa axem *BD* fiunt ſuperficies, æquales ſunt circulo, cuius ſemidiameter (iuncta *FD*) poteſt id, quod *FD, BP* continetur.



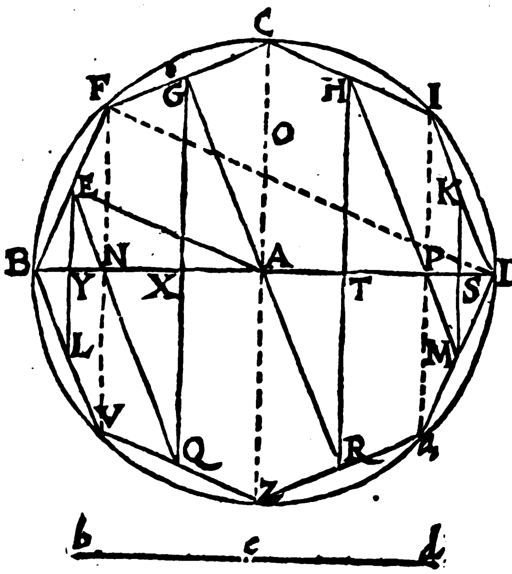
Et in fine demonſtrationis tanquam Corollarium adiungit ſequentia.

Perſpicuum autem eſt, ſi tota ſemicirculi circumferentia in partes æquales dividatur, quarum una ſit *BF*, & inter ſe iungantur; ſuperficiem factam ab omnibus polygoni lateribus ex ſimili converſione, æqualem eſſe circulo, cuius ſemidiameter poteſt illud, quod *FD, BD* continetur.

2. *Data igitur unica inſcripta ſive uno Polygoni inſcripti latere, & Sphæræ diametro, ex ſupradictis hanc nos formabimus Regulam.*

Quadratum dati lateris auferatur à quadrato datæ diametri, & reſidui radix quadrata ducatur in eandem diametrum datam; Fiat deinde ut dupla aliqua circuli diameter ad eiuſdem ſemiperipheriam, ita numerus proxime productus ad aliud, hoc quadruplicetur, & habebitur ſuperficies quæſita.

 Demon-



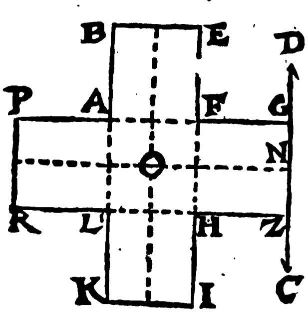
Demonstrationem & exemplum simul afferemus. Sit autem idem exemplum in hac decima Propositione allatum, ubi latus inscripti Polygoni dabatur 390, & diameter Sphæræ 2,000: quadratum igitur lateris dati 152, 100 ablatum ex 4, 000, 000 quadrato diametri, relinquit quadratum 3, 847, 900 rectæ scilicet FD, *in triangulo rectangulo* BFD (*supponitur enim* BF *esse latus Polygoni 16 laterum*) *cuius radix quadrata 1, 961, ducta in diametrum datam 2,000 producit 3,922,000, potentiam semidiametri eius circuli, qui superficiei quæsitæ æqualis est; Fiat deinde ut 2, 000 aliqua dupla diameter ad 1570 semicircumferentiam, ita 3, 922, 000 ad 3, 078, 770, & hac est area circuli,* [*ex Corollario 2. Propos: 4. Cap: 6. Lib: 2.*] *cuius diameter est semissis diametri circuli, paulò ante dicti; ergo ipsemet circulus qui quæritur est quadruplus huius, quadruplicatis igitur 3, 078, 770 paulò ante inventis, habebimus 12, 315, 080 aream circuli eius, quem superficies quæsita adæquat. Est autem hic numerus minor illo, in hac 10 Propos: invento, eo quod ibi unus numerus maior vero ad computum adhibitus sit.*

3. *Quodsi quæratur superficies Polygoni circuli segmento, verbi gratia* BFCI, *inscripti, & circa axem* BD *rotati, cuius latera sunt numero tria* BF, FC, CI; *omnia facienda sunt ut in Regula diximus, nisi quod radix quadrata illa, hoc est recta* DF *non ducenda sit in* BD *diametrum, sed in rectam* BP, *ab ipsa* IP *perpendiculari ad* BD *determinata, quæ* BP *vel dari debet, vel calculo inquiri, est enim altitudo segmenti circuli* IBa.

4. *Hæc autem maxime ea de caussa attulimus, ut appareat quomodo inventa nostra, non solum cum inventis antiquorum & approbatorum Auctorum conveniant; sed quod Ipsa nostra, licet in aliquibus, quando ad particulare aliquod pervenitur pluribus fortaßis indigeat ex calculo, ex eodem tamen semper & unico fundamento, quod ipsum paucis circumscribitur, ex* Centro *nimirum* Gravitatis *deducantur, ex qua doctrina Universali poterit Ingeniosus Geometra plurima invenire Compendia particularia.*

PROPOSITIO XI.

Figura solida, à Plano crucis regularis descripta, superficiem invenire, dato uno crucis latere.



C*RUCEM planam regularem vocamus illam, quæ ex quinque quadratis planis constat, qualia sunt in cruce apposita quadrata* AE, FZ, HK, LP, AH: *ex cuius rotatione circa axem* DC, *nascuntur duo annuli, quos* (*si ea quæ Lib: 2. Cap: 8. Propos: 1. Num: 9, & alibi etiam scripsimus, servata volumus*) *quadratos appellare debebimus; rotundos quidem, quæ annulorum natura est,*

sed

sed à quadratis ABEF *&* LKIH *descriptos*, *&* *idcirco etiam Cylindracei annuli*, *aut corona solida nominari possent*; *nascitur praeterea*, *ex tribus quadratis* RA, AH, HG, *vel si mavis*, *ex unico rectangulo* PRGZ, *Cylindrus*, *cuius basium semidiametri sunt recta* PG, RZ, *altitudo sive axis ipsi* GZ, *aequalis*. *Horum corporum superficies qua extra soliditatem extant*, *ex dato latere crucis* 100, *oportet hoc loco exhibere*.

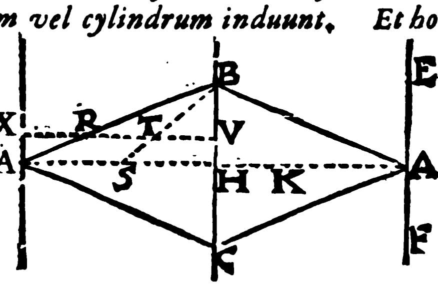
Perimeter crucis qui est 1,200 ducatur in peripheriam, cuius radius æquatur 150 sesquilateri crucis, hoc est, in 942$\frac{477}{}$, productus enim numerus 1,130,972 superficiei propositæ quantitatem indicat.

Demonstratio. Centrum gravitatis perimetri crucis propositæ, ex duodecim rectis æqualibus compositi, est punctum medium sive centrum figuræ, *O*; nam sex rectarum *AB*, *BE*, *EF*; *HI*, *IK*, *KL* centrum gravitatis commune est punctum *O*; sed & reliquorum sex laterum *AP*, *PR*, *RL*; *HZ*, *ZG*, *GF* centrum commune idem est punctum *O*: ergo idem punctum centrum est gravitatis commune omnium Laterum, hoc est, totius perimetri: quare Radius rotationis est recta *ON*, qui sesquilatus adæquat: Ergo, &c.

PROPOSITIO XII.

Superficies Annulorum à rectis lineis descriptas mensurare.

ANNULORUM *differentias alibi cum Keplero descripsimus*, *eosq; genericè in Strictos & Absolutos divisimus*: *Strictos vocantes eos qui in medio sui unicum tantummodo complecterentur punctum*. *Absolutos vel absolutè*, *hoc est sine ullo addito*, *qui admodum corona circulum vel cylindrum induunt*. *Et hos Annulos cognominare soliti fuimus*, *à figura qua annulum in sui rotatione descripsit*: *qua de re lege ea qua Lib*: 2. *Cap*: 8. *Propos*: 1. *Num*: 9. § *Potest igitur*, *&c. scripsimus*: *Sic Propos*: *praecedenti diximus de Annulo Quadrato*: *Annuli Rhombici mentionem fecimus Lib*: 2. *Cap*: 9. *Propos*. 5. *Num*: 2. *in fine*. *Sic in adiecta figura*



Rhombus ABAC, *circa axem* EF *descripsit Annulum Rhombicum strictum*, *cuius superficiem sic mensurabimus*.

Semissis lineæ diagonalis *AA*, hoc est rectæ *HA* tanquam Radij acceptæ peripheria, ducatur in perimetrum Rhombi propositi, & prodibit quantitas Superficiei Annuli Stricti Rhombici.

Pro Annulo absoluto addatur ad radium proxime dictum, radius circuli vel cylindri ab annulo comprehensi, & compositi tanquam unius Radij peripheria, ducatur in eundem perimetrum, & producetur Annuli absoluti Superficies, hoc est Rhombici: Nam Annulum omnino Absolutum vocavimus illum, qui describitur à Circulo. Et sic de cæteris.

Demonstratio constat [*ex Cap*: 9. *Lib*: 2.]. Nam *AH* est Radius rotationis, perimetri *ABACA*, circa axem *EF*, &c.

SCHOLIVM.

Ex his paucis Propositionibus quilibet Geometricis vel leviter tinctus colliget, qua ratione infinitorum corporum Rotundorum, ex rectis lineis ortum ducentium, superficies dimetiri debeant. Qui sese exercere voluerit adhibeat sex illas Figuras, quas pag: 157 & 158 proposuimus. Nos ad alia pergimus.

CAPVT II.

DIMENSIO SUPERFICIERUM Rotundarum à curvis Lineis descriptarum.

RESTAT illa Rotundorum corporum dimensio superficierum, quas lineæ curvæ in sui rotatione describunt, quas inter præcipuæ, immò unicæ sunt circulares; cum de reliquarum centro gravitatis nihil adhuc constet: quæ tamen & inter se, & cum rectis etiam variè componi poterant; ac proinde varias multiplicesque superficies describere. Nos paucas aliquas quasi exempli loco adducemus. Non sumus autem nescij alios esse etiam modos rotundas superficies mensurandi, & aliquos nostris fortassis faciliores: sed scopus noster non est ubique & in omnibus facilitas, sed magis universalitas, ut nimirum eas afferamus dimetiendi rationes, quæ ex solis ac unicis nostris è Centro Gravitatis deductis paucis principijs dependeant.

PROPOSITIO I.

Quantitatem Superficiei Sphæricæ, data diametro, notam facere.

DUPLA diameter in semiperipheriam maximi circuli datæ Sphæræ ducta, producit superficiem eiusdem Sphæræ propositæ.

Demonstratio patet ex Libro secundo, [*Num: 3. Propos: 1. Cap: 10.*] ubi ostensum est, si peripheria Radij rotationis, quam viam rotationis vocavimus, ducatur in semiperipheriam circuli maximi, prodituram superficiem Sphæræ: & demonstravimus [*Scholio Propos: 2. Cap: 12. Num: 2.*] hanc viam æqualem esse duplæ diametro, eiusdem circuli maximi. Ergo, &c.

Exemplum. Sit data Sphæræ diameter 2,000, erit peripheria circuli maximi 6,283 185, cuius medietas 3,141 592 ducta in 4,000, duplam diametrum, producit 12,566,368 Superficiem Sphæricam quæsitam.

COROL-

COROLLARIVM.

MANIFESTUM est sequi hinc, si diameter ducatur in semiperipheriam maximi circuli Sphæræ, exituram Superficiem hemisphærij.

PROPOSITIO II.

Superficiem Sectoris Sphæræ mensurare.

CUM Sector Sphæræ, quem Archimedes ut monuimus [*Lib: 2. Cap: 12. Propos: 2. Num: 6.*] Frustum solidum vocat, minor quidem hemisphærio componatur ex minore portione Sphæræ, & cono basem habente eandem cum portione, & altitudinem æqualem perpendiculari, ex centro sphæræ in basem portionis deductæ: Sector verò maior hemisphærio sit illud corpus, quod remanet quando ex maiore portione aufertur conus ante descriptus.

Minoris ergo Sectoris superficies habetur, si [*per Propos: 3. Cap. 1. huius Libri*] inquirantur superficies rotundæ & coni, & [*per Propos: proxime sequentem*] portionis componentis, atq; inventæ hæ duæ superficies colligantur, & componetur superficies sectoris minoris.

Maioris autem superficies componetur, ex superficie convexa portionis maioris, & superficie rotunda coni supradicti. Superficies ergo Sectorum sphæricorum mensuravimus. Quod faciendum erat.

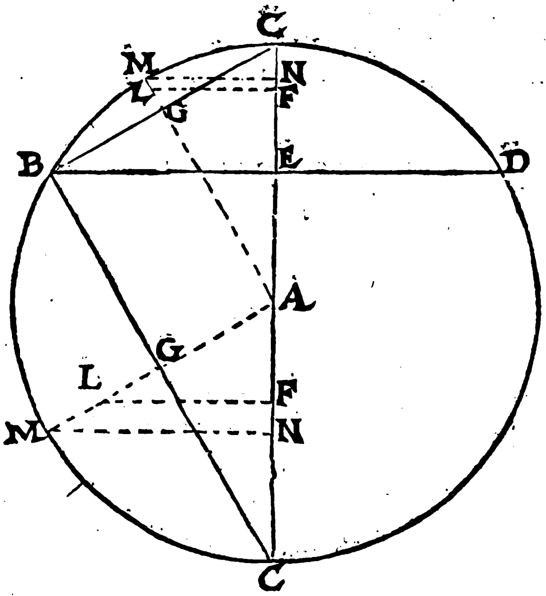
SCHOLIVM.

LIBRO primo Centrobarycorum Propos: 9. Cap: 11. Sectorem sphæræ aliter accepimus, pro corpore nimirum, quod continetur à binis semicirculis maximis, diametris suis in axe Sphæræ coëuntibus, & intercepta superficiei Sphæricæ parte convexa: eius superfities habetur, si superficiei circuli maximi (hic enim æquatur binis quas diximus semicirculis) addatur pars superficiei convexæ Sphæræ, quæ pars ad totam Sphæræ superficiem eam proportionem habeat, quam arcus circuli maximi inter binos semicirculos planos interceptus, ad totam circuli maximi circumferentiam. Res hæc clara est definitionem huius sectoris rectè consideranti.

PROPOSITIO III.

Superficiem portionis Sphæræ, cuius altitudo, semidiameter basis, arcus maximus, unà cum radio Sphæræ, nota sint, dimetiri.

FIAT ut semiarcus datus, ad datam basis semidiametrum, ita radius Sphæræ datus, ad quartum: & rursus ut eadem semidiameter ad altitudinem portionis, ita quartus inventus, ad alium; hic acceptus ut radius dabit peripheriam quæ ducta in semiarcum datum, producet superficiem portionis Sphæricæ propositæ.



Demonstratio. Sit datæ Sphæricæ portionis *BCD*, altitudo *EC*, semidiameter basis *BE*, arcus maximus *BCD*, & radius Sphæræ *AC*. Per primã igitur operationem, qua fecimus ut semiarcus datus *BMC*, ad semibasim *BE*, ita radius *AC*, ad quartum; invenimus rectam *AF*, centrum gravitatis *F*, arcus *BCD*, determinantem. [*per Propos. 2. Cap: 5. Libri primi*] In secunda verò operatione, fecimus in triangulis rectangulis & similibus *BEC*, *AFL* (nam præter rectos ad *E* & *F*, æquales sunt anguli *B* & *A*, ille ad peripheriam insistens arcui *CD* duplo; hic ad centrum arcui *MC* simplo) ut *BE*, ad *EC*, ita *AF*, ad *FL*: Est autem punctum *L*, centrum gravitatis arcus *BMC* [*ex Propos. 4. Cap: 5. Libri primi*] & sic Radius rotationis eiusdem arcus est recta *LF*, circa axem *CE*, qui describit superficiem Sphæricam portionis propositæ, & sic in viam rotationis duximus arcum *CMB*, & superficiem petitam produximus, Quod faciendum erat.

Exemplum 1. Sit data portio minor hemisphærio, altitudo nimirum *CE* 500, semibasis *BE* 866, arcus *BCD*, 2,094 tertia pars circuli maximi Sphæræ, eiusdemque radius *AC* 1,000. Fiat igitur ut semiarcus 1,047, ad 866, ita 1,000 ad *AF* 827. Et rursus ut 866, ad 500 ita 827 ad *FL* 477, huius tanquam Radij peripheria est 2,997$\frac{076}{}$, quæ ducta in arcum *BMC* 1,047, producit superficiem portionis Sphæricæ 3,137,938.

Exemplum 2. Sit iam data portio hemisphærio maior, cuius altitudo *EAC* 1,500, semibasis ut ante 866, semiarcus *BMC* 2,094 tertia pars totius peripheriæ. Fiat igitur ut 2,094 ad 866, ita 1,000 ad *AF* 413 $\frac{1}{2}$. Et rursus ut 866 ad 1,500, ita 413$\frac{1}{2}$ ad *FL* 716, huius, ut Radij, peripheria est 4,498,75, quæ in arcum *BMC* 2,094 ducta, producit superficiem maioris portionis Sphæræ 9,420,382.

SCHOLIVM.

1. *POTUISSEMUS ex Tabula Decima excerpere quantitates rectarum* AF *&* AL, *& ex quadrato huius auferre quadratum illius, & habuissemus quadratum ipsius* LF, *Radij rotationis.*

2. *Hemisphærij superficies facilius habetur ex Corollario praecedentis Propositionis, quam ex hac.*

3. *Longe faciliori ratione, quam Propositio hæc præscribit, & ex unico tantummodo Dato venabimur cuiusvis Portionis Sphæræ superficiem, hoc modo: Esto eiusdem portionis Sphæræ* BCD *invenienda superficies, & sit data sola subtensa* BC *semiarcus maximi* BMC, *hæc enim subtensa sit instar radij circuli, cuius area per Propos. 1. huius inventa æquatur superficiei portionis propositæ.*

Demonstratio constabit ex Lib: 4. Cap. 1. Propos. 10.

Exem-

Exemplum 1. *Sit primò data subtensa 1, 000; semissis peripheriæ tanquam Radio circuli debita est 3, 141 592, quæ ducta in ipsum radium 1, 000, producit aream circuli qui adæquat superficiem Portionis Sphæræ minoris 3,141,592.*

Exemplum 2. *Sit deinde data subtensa arcui maioris 1, 732, & semissis peripheriæ 5, 441, 238 quæ ducta in ipsam subtensam 1, 732 tanquam radium producit superficiem Portionis maioris 9, 424, 224.*

Differunt autem hi numeri ab illis, in Propositione hac inventis, eo quod in Propositione plures adhibitæ sint operationes pluresq́ neglectæ fractiones. Hi autem hic inventi simul faciunt 12, 565, 816 totius Sphæræ superficiem: Sed invenimus pro eodem Sphæræ radio Propositione præcedenti superficiem sphæricam esse 12,566, 368, quæ eam quam hic invenimus & iure merito quidem excedit: caussa huius excessus est quod in Propos. præcedenti ex unica via rotationis eaq́ exactissima superficies educta sit: hic autem non solum sint adhibitæ binæ viæ, sed & tam ipsa quam altera subtensarum iustis minores assumptæ.

4. *Data autem alterutrius portionis sphæricæ superficie alteram adhuc faciliùs fortassis inveniemus, ut si data sit minoris superficies 3, 141, 592 cum altitudine portionis* CE *500, & sit invenienda superficies portionis maioris, cuius altitudo* EAC *1, 500; Fiat ut* CE *500 ad* EAC *1, 500 ita superficies 3, 141, 592 ad aliud, invenietur superficies portionis maioris 9, 424,776, accuratior quam proximè inventa. Sunt enim superficies duarum portionum Sphæram simul componentium, inter se ut partes axis Sphæræ* CE *&* EAC. *Nam [ut constabit ex Propos. 10. Cap. 1. Libri 4.] superficies prædictæ sunt inter se ut circuli radiorum* CB, BC, *hoc est, ut quadrata* CB, BC, *in triangulo rectangulo* CBC, *in quo ducta est perpendicularis* BE *ad axem* CC, *ac proinde* CE, EB, EAC *sunt tres continuè proportionales, & consequenter ut prima* CE *ad tertiam* EAC, *ita quadratum secundæ* BE *ad quadratum tertiæ* EAC, *hoc est in triangulo rectangulo* CBC, *reliquis triangulis* CEB, BEC *simili, ut quadratum* CB *ad quadratum* BC.

5. *Quia verò ex rotatione alia cuiusvis arcus semicirculo minoris producitur superficies Citrij, & ex rotatione arcus maioris superficies Mali, pro dimensione earundem sit hæc*

PROPOSITIO IV.

Ex ijsdem datis superficies & Citrij, & Mali computare.

FIAT ut semiarcus datus, ad semibasim; ita radius datus, ad aliam; hæc auferatur ex radio, & ea quæ relinquitur auferatur etiam ex data altitudine; hæc enim reliqua instar semidiametri accepta, dabit peripheriam, quæ ducta in arcum datum, producit superficiem Citrij, si arcus datus semicirculo minor fuerit; Mali, si maior.

Demonstratio constat ex Libro secundò, [*Num. 3. Propos. 1. Capitis 10.*] nisi quod hic ratio istarum subtractionum reddenda sit: Nam per primam hic præscriptam operationem Regulæ proportionum inventa est recta *AF*, determinans ex centro circuli *A*, centrum gravitatis *F* dati arcus *BCD*: [*ex Propos. 2. Cap. 5. Libri primi*] hæc subtracta ex semidiametro *AC*, reliquam facit *CF*, & hæc rursus subtracta ex data altitudine *CE*, relinquit Radium rotationis *EF*, circa axem *BD*, pro utroque arcu & minori & maiori.

PROPO-

PROPOSITIO V.

Superficies Annulorum & Stricti, & Absoluti invenire, data circuli eius qui annulum descripsit circumferentia, & semidiametro circuli illius quem annulus absolutus ambit.

1. CIRCUMFERENTIA data ducatur in se ipsam, & comparebit superficies Annuli Stricti.

Demonstratio constat ex Propos: 2. Cap: 1 0. Lib: 2.

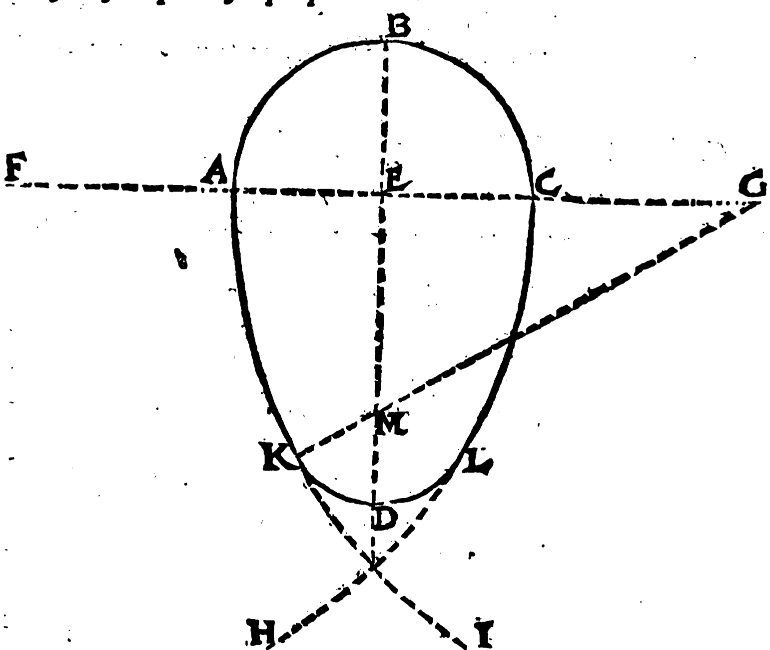
2. Pro Annulo absolutè dicto semidiameter circuli eius, quem annulus in medio sui complectitur; addatur ad semidiametrum datæ circumferentiæ, recta composita ut Radius accepta, dat peripheriam ducendam in eandem peripheriam datam, ut inde fiat superficies quæsita.

Demonstratio constat ex eadem 2. Propositione.

PROPOSITIO VI.

Figuram Ovo similem describere, eiusque tanquam Rotundi corporis, superficiem dimetiri.

1. *SEBASTIANUS Serlius Libro primo suæ Architecturæ, conatus est descriptionem Figuræ Ovo similis, ab Alberto Durero traditam, faciliori modo instituere, quod & fecit, eamq; ulterius diversis Vasis fabricandis accomodavit: Nos eundum modum paucis mutatis, & descriptioni facili, & mensurationi artificiosæ aptum sic proponimus.*



2. Ductis binis rectis *BD*, *FG* orthogonaliter sese in *E* secantibus, ex quo puncto tanquam centro, ad quodvis intervallum describatur semicirculus *ABC*, & qualium *AE* vel *EC* radius est 2, talium sit tam *CG*, quam *AF* trium, & factis centris *G* & *F*, ad intervalla *GA*, & *FC*, describantur duo arcus *AKI* & *CLH*, quorum quilibet sit sexta pars sui circuli (quod fit si idem intervallum, ad quod descripti sunt arcus, signentur ex *A* in *I*, & ex *C* in *H* puncta *I*, & *H*:) qui

qui bisecentur in K & L, ductaque recta GK, secet rectam ED in puncto M: centro igitur M, & intervallo MK arcus descriptus KDL, perficit Figuram quam quærimus $ABCLDKA$ Ovo gallinaceo persimilem.

3. Iam si cogitetur medietas huius figuræ $BAKD$, rotari circa axem BD, describet ipsius plana superficies corpus ovo simile, & perimeter eiusdē semifiguræ superficiem corporis, quam hoc loco exacte mensurare constituimus. Radius EB ponatur 100,000, & bis sumptus ducatur in peripheriam ABC, hoc est, in 314,159$\frac{265}{}$ facit 62,831,853,000, numerum primo loco notandum.

Secundò ex Tabula 10 è regione graduum 15 primæ columnæ, excerpantur, ex secunda columna quidem numerus 2,617,99, hoc est 26,180 ferè, ex sexta verò 98,861, reiectis nimirum quatuor notis; & fiat ut 2 ad 7, ita numeri excerpti, ad 91,630, & 346,013. Fiat tertiò ut 2 ad 5, ita 103,528 secans semissis anguli EGM, graduum videlicet 15, ad 258,820, hæc subtracta ex 346,013 numero ante invento, manent 87,193. Quartò fiat ut numerus etiam ante inventus 258,820, ad proximè reliquum 87,193, ita 250,000 ad alium 84,223$\frac{2}{3}$ hic numerus acceptus ut Radius dat peripheriam 529,201$\frac{381}{}$, quæ ducta in 91,630, numerum operatione secunda inventum, bis sumptum, hoc est, in 183,260, producetur 96,979,584,443, numerus secundò notandus.

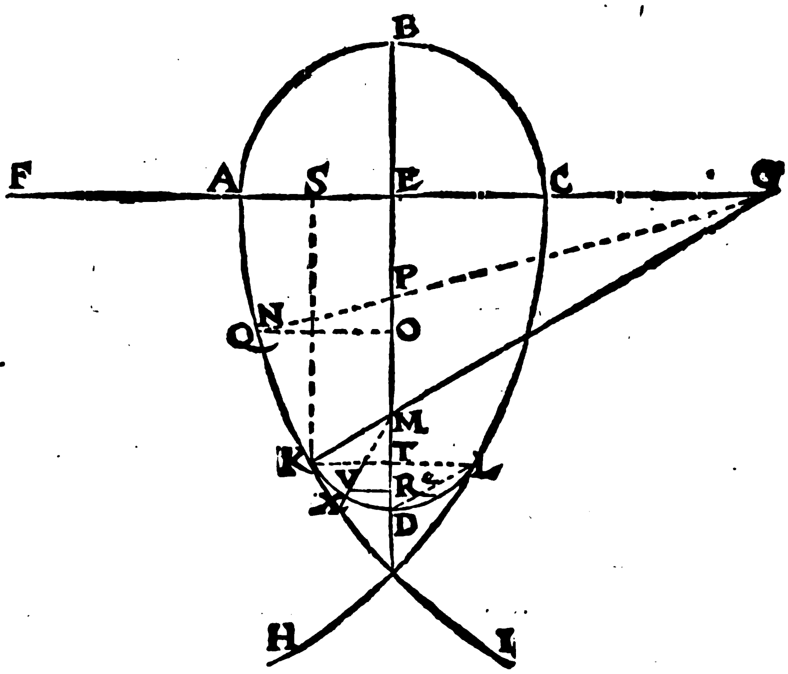
Quintò fiat rursus ut 2 ad 5, ita 57,735 tangens semissis anguli KMD, ad 144,337; hæc subtracta ex 175,000 medietate ipsius KG vel AG, reliquam facit 30,663, qui numerus duplicetur. Sextò ex Tabula Decima excerpantur è regione graduum 30, duo numeri ex columnis secunda & sexta, reiectis ut suprà 4 notis ultimis, qui sunt 52,359 & 95,493 ferè; & fiat ut 100,000 ad numerum illum duplum, hoc est, ad 61,326, ita numeri ex Tabula excerpti, ad hos 32,109 & 58,562. Septimò huius posterioris medietas, quæ est 29,281, sit Radius, eiusque peripheria 183,974 ducatur in 64,218, duplum prioris numeri, & productus 11,814,442,332, est numerus tertiò notandus.

4. Eundem autem hunc numerum tertiò notandum, citius & accuratius inveniemus hoc modo, Invento, ut quinto factum, numero 30,663, ipsius, tanquam radij peripheria 192,661, ducatur in eiusdem duplum, hoc est, in 61,326, & habebimus numerum quæsitum 11,815,128,486.

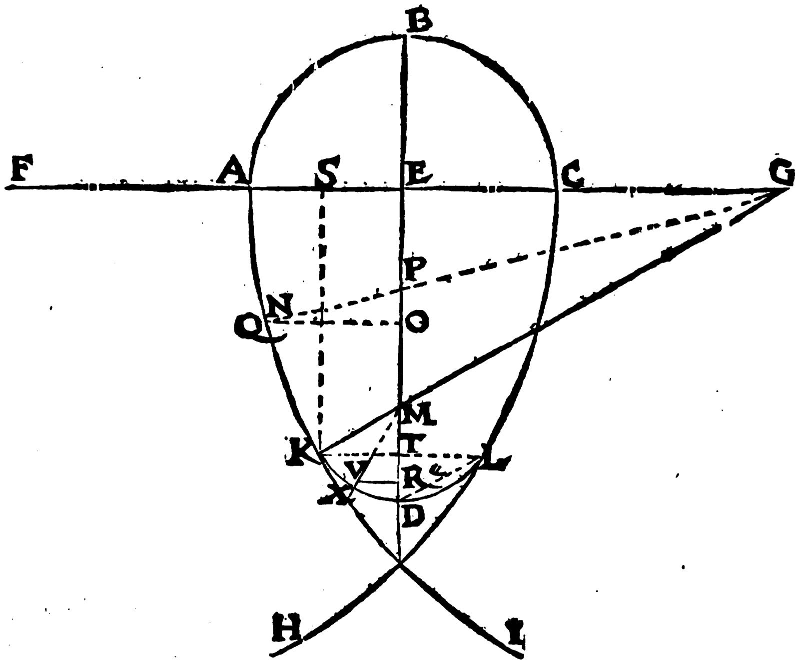
Hi tres notati numeri unam in sumam collecti, componunt superficiem Corporis Ovalis propositi, 171,626,565,929.

5. *Demonstratio*. Bisectis arcubus AK, KD, in punctis Q & X, & ductis rectis GQ (secantem rectam EM in K puncto) MX, KL, & perpendiculari ad GA, recta KS.

Duximus in prima operatione diametrū AC, in peripheriam ABC, & sic fecimus



 super-



superficiē hemisphæricam, descriptam à quadrante circuli *AB*, circa axem *BE* [*per Corollarium Propositionis 1. huius*] qui fuit primus numerus notatus.

Secundò ex Tabula Decima excerpsim' primò quantitatem arcus graduū 15: totus enim arcus *AKI*, ex constructione est 60 grad: *AK* ipsius medietas 30 grad: ergo *AQ* semissis huius est grad. 15. Deinde accepimus determinantem centrum gravitatis arcus *AQK* consistentem in recta *GK*, hoc est, rectam *GN*. Sed quia hi numeri non erant ad eundem quem posuimus radium *EC*, 100,000, sed hic sit ad radium *AG*, ex constructione ut 2 ad 7, ideo & arcum & determinantem redegimus ad tales partes.

Tertiò fecimus in triangulo rectangulo *GEP*, ut sinus totus *BE* ad sinum totum alium, hoc est, ad Latus *GE*, hoc est, ut 2 ad 5, ita secans anguli *G*, 15 graduum, ad rectam *GP*, quæ subtracta ex inventa, sive ex Tab: 10 excerpta *GN*, reliquam fecit *PN*.

Quartò considerantes duo triangula similia *GEP*, & *NOP*, (ducta prius ex centro *N*, ad *EM* perpendiculari *NO*) fecimus ut *PG* ad *PN*, ita *GE* ad *NO*, Radium rotationis arcus *AQK*, circa axem *EM*, ac proinde [*ex demonstratis Libro 2.*] ipsius Radij peripheria ducta in illum arcum, produxit superficiem rotundam descriptam ab eodem arcu *AQK*, qui erat secundus numerus notatus: & est Potestas Rotunda ipsius arcus *AQK*, Obliqua Iustâ maior.

Supererat computanda superficies ultima descripta ab arcu *KXD*, circa axem *MD*, quam sic assecuti sumus: fecimus quintò in triangulo rectangulo *GEM*, ut sinus totus *BE* ad *EG*, hoc est ut ante, ut 2 ad 5, ita tangens anguli *G*, 30 graduum, ad rectam *EM*, quam subtraximus ex medietate ipsius *GK*, hoc est ex recta *KS*, (est enim triangulum *GSK* medietas trianguli æquilateri) & sic remansit recta *MT*, quam iussimus duplicare, ut haberemus totam *MD* semidiametrum circuli, cuius arcus *KDL* est 120 graduum, nam etiam triangulum *KTM* est medietas trianguli æquilateri, ac proinde *MT*, *TD* æquales sunt.

Sextò ex Tabula Decima excerpsimus quantitatem arcus *KX*, vel *XD*, è regione 30 grad: in columna secunda; & in sexta Determinantem centrum gravitatis pro recta *MV*, consistente in recta *MX*; quos numeros redegimus ad easdem partes cum prioribus, faciendo ut radius sive sinus totus noster ordinarius *BE* ad radium *MD*, ita numeri excerpti ad alios.

Septimò

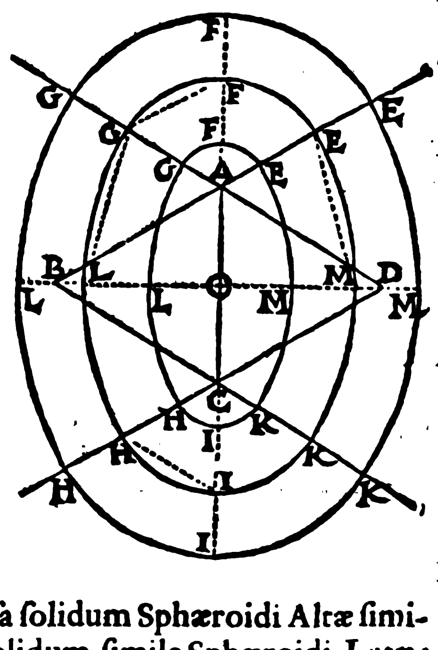
Septimò cum in triangulo *MVR*, (ducta prius recta *VR* ad *MD* perpendiculari) qui etiam est medietas trianguli æquilateri, latus *VR*, sit medietas lateri *MV*, iussimus huius medietatis *VR*, tanquam Radij rotationis ipsius arcus *KXD*, quærere peripheriam, eamque in illum arcum ducere, hoc est in duplum ipsius arcus *KX*, vel *XD*; & sic factus est tertius numerus notandus.

6. Verum supra [*Numero 4. huius*] hunc tertium numerum longe citius & accuratius invenimus, cum enim subtensa *DL* æqualis sit ipsi *DM*, (arcus enim *DL* est 60 graduum) iussimus, [*iuxta doctrinam datam Num. 3. in Scholio Propositionis 2. huius*] semissem ipsius esse Radium, eiusque peripheriam duci in ipsam subtensam. Quare Corpus Ovo simile descripsimus, & mensuravimus. Quod faciendum erat.

PROPOSITIO VII.

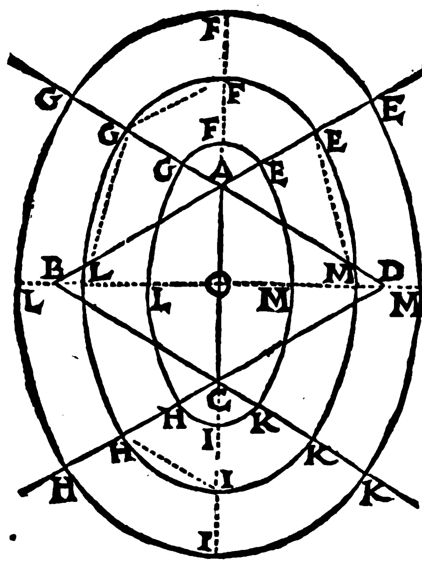
Corporis rotundi, quod sphæroidi simile est, superficiem dimetiri.

1. D*ESCRIBITUR hoc corpus à medietate figuræ planæ Ellipsi simili, quam* Ovatam *dicunt, circa alterutrum axem rotata. Huius autem planæ figuræ descriptio à varijs variè traditur: nam idem quem Propositione præcedenti laudavimus Sebastianus Serlius, in eodem suæ Architecturæ Libro 1, quatuor modos affert, quorum primus & quartus in idem recidunt, idemq; à Clavio etiam in Geometria practica Libro 8. Propos. 47. adducitur, & alijs ob venustatem figuræ præfertur. Primò ergo figuræ planæ descriptionem, deinde dimensionem superficiei solidæ figuræ trademus.*



2. Abscindatur ex quavis recta *FI* recta *AC*, & super ea hinc & inde duo constituantur triangula æquilatera *ABC*, *ADC*, & latera *BA*, *BC*, ut & *DA*, *DC* producantur quantum libet usque in *E*, *K* & *G*, *H*: electo deinde aliquo intervallo *AE* & *BE*, ex quatuor centris *A*, *B*, *C*, *D* describantur quatuor arcus nimirum *GFE* & *HIK* æquales ex *A* & *C*; & *GLH*, *EMK* similiter æquales ex *D* & *B*, absolutaque erit figura Ovata Ellipsi utcunq; similis, centra enim duo *B* & *A*, item *D* & *C*, maioris & minoris arcus, sunt in eadem recta *BE*, *DG*, item *DH*, *BK* & proinde [*ex Scholio Propos. 13. tertij*] tangent sese arcus illi in punctis *G*, *E*, *K*, *H*, nullumque efficient angulum in perimetro figuræ. Hæc ergo figura sive tota sive semissis eius, si rotetur circa axem longiorem *FI*, describet ipsa solidum Sphæroidi Altæ simile, si circa axem minorem *BD* rotetur, fiet solidum simile Sphæroidi Latæ: quorum superficies sic dimetiemur.

3. Arcus *GFE* & *HIK* sunt tertiæ partes sui circuli, arcus verò *GLH*, *EMK* sextæ partes; quod constat ex angulis *GAE*, *HCK* & ex *ABC*, *ADC*, quorum hic est 60, ille 120 Graduum; quare si metiri velimus superficiem figuræ Altæ, & ponatur trianguli æquilateri latus quodvis 100,000, & recta



AG sit exempli gratia ipsius medietas, hoc est 50,000, erit tota *DG* 150,000, ac proinde ex Tabula decima servatis servandis arcus *GLH*, qui est 60, grad: erit partium earundem 157, 079; & determinans centrum gravitatis eiusdem arcus, hoc est recta ex *D* versus *L* numeranda 143,239, à qua si subtrahatur *DO* 86,603, remanebit Radius rotationis ipsius arcus *GLH* 56, 636; ergo vi[illegible]otationis est 355,854, quæ ducta in ipsum arcum 157,079, producit 55,897, 190,466, superficiem quam describit arcus *GLH*; cui si addiderimus duas superficies, quas describunt arcus *FG*, *IH*, hoc est duas superficies circulorum quorum semidiametri rectæ *GF*, *HI* [*ex Propos: 10. Cap. 1. Libri 4. sequentis*] quarum quælibet est 50,000, ac proinde areæ circulorum simul sumptæ faciunt 6,283,185,300, quæ additæ ad superficiem iam inventam, componunt totam superficiem corporis sphæroidi Altæ similis 62,180,375,766.

4. Sphæroidis Latæ superficiem, hoc est si figuræ planæ propositæ perimeter vel totus, vel alterutra medietas *LGFEM* vel *LHIKM* rotetur circa axem minorem *LM*, sic habebimus: Arcus *GFE*, vel *HIK* est 120 graduum, ac propterea earundem partium, quibus ante usi sumus, 104,719; determinans centrum gravitatis eiusdem arcus, hoc est recta ex *A* versus *F* numeranda 41,349, quæ addita ad *AO*, 50,000, facit Radium rotationis 91,349, & via ipsius est 573,962, quæ ducta in ipsum arcum 104,719, producit 60,104, 726,678, superficiem quam describit arcus *GFE*, cui si adiunxerimus duas superficies quas describunt arcus *GL*, *EM*, hoc est, duas superficies circulorum quorum semidiametri sunt rectæ *GL*, *EM* [*ex Propos. 10. Cap. 1. Lib. 4. sequentis*] quarum quælibet est 77,645, & sic areæ duorum circulorum simul sumptæ faciunt 37,880,200,280; quæ additæ ad superficiem ante inventam, complent totam superficiem corporis sphæroidi Latæ similis, nimirum 97,984, 926,958. Et sic de reliquis. Ergo corporis propositi invenimus superficiem rotundam. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Ex his binis superficiebus, quas hac Propositione non ex communi aut unico centro gravitatis invenimus, tanquam ex Potestatibus arcuum compositorum FGBHI *&* LGFED *per Resolutionem capite ultimo Libri secundi traditam, dare possumus eorundem arcuum, pro singulis compositis singula centra gravitatis, Radios, ac vias rotationis, hac ratione: Potestas prior 62,180,375,766 divisa per 261, 798, quantitatem arcus* FGBHI, *qui eam in sui rotatione descripsit, reddit in quoto 237,512 viam rotationis: ex hac habebimus Radium rotationis 37,801, determinantem ex puncto* O *in recta* OL *aliquod punctum, quod erit centrum gravitatis arcus compositi* FGBHI *rotati circa axem* FI.

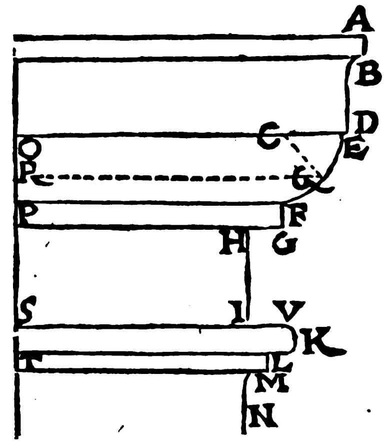
Quod si Potestatem posteriorem 97,984,926,958 per suum arcum LGFED, (*qui*

(*qui priori* FGBHI *æqualis est*) *diviserimus, inveniemus 374, 276 viam rotationis, quæ dat Radium 59,568 proximè, determinantem in recta* OF *ex puncto* O *numerata, punctum quoddam, quod erit centrum gravitatis arcus compositi* LGFED *rotati circa axem* LM.

PROPOSITIO VIII.

Corporum Architectonicorum, quæ rotunditatem induunt, superficies mensurare.

PRO *exemplo huius rei afferemus ex Architectura Iacobi Barozij dicti* Vignolæ *Capitulum sive Capitellum columnæ ordinis* Toscani, *& Basim quam Vitruvius Lib: 3. Cap: 3.* Atticurges, *vel Atticam vocat, ex quibus de cæteris iudicium fieri poterit.*



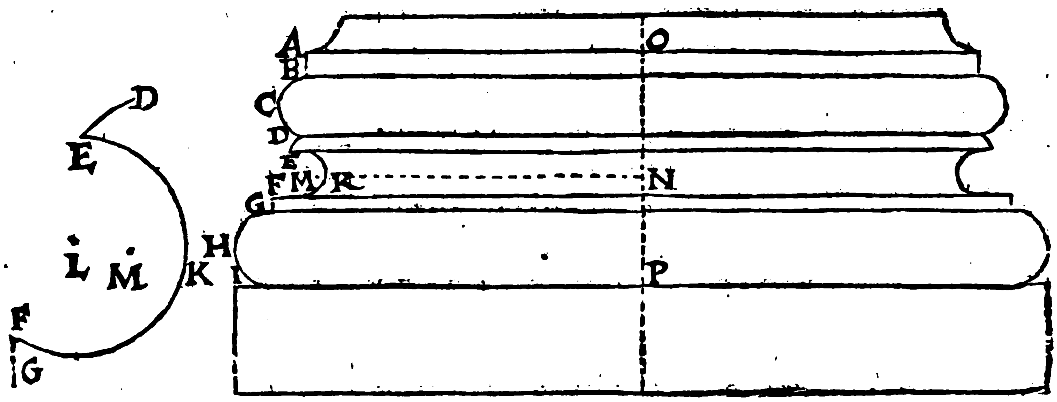
1. In hoc ergo *Capitello* si semidiameter crassitiei columnæ prope basim, quod *Vivum columnæ* vocant, statuatur partium 1,200, erit iuxta mensuras prædicti Barozij semidiameter partis *EFPO*, quam *Echinum* vocant vel *Ovolo* (suprema enim pars *ABD*, quæ *Abacus* vel *Plinthus* dicitur, est quadrata) *OE* quidem 1,350, *PF* verò 1,050: arcus autem *EF* est quadrans sui circuli, cuius centrum *C*, & semidiameter *CE* 300, ac proinde ipse arcus est 471, & determinans centrum gravitatis ipsius *CQ* 270, ergo Radius rotationis *RQ* 1,241, & via rotationis 3,898, quæ ducta in arcum *EF* 471 producit superficiem Echini 1,835,958. Superficies Annulorum verò semidiameter seu Radius rotationis *PF*, & *TM* æquales sunt, quælibet nimirum est 1,050. altitudo verò *GF* 100, *LM* 50. via rotationis 3, 298, quæ ducta in 150 producit superficiem utriusque Annuli 494,300; semidiameter *Hypotrachelij SI* est 950, altitudo *HI* 400, ergo superficies ipsius est 1,593,600. *Tori SKL* superficies, cum fiat ex rotatione & semicirculi *VKL*, & rectæ *IV*, has duas superficies seorsim quæramus: *IV* enim, quæ est 100, describit coronam circularem, cui *IV* æqualis est recta *HG*, similem & æqualem coronam describens, & utriusque Radij rotationis æquales, nimirum 1,000: *SI* enim est 950, & medietas ipsius *IV* vel *HG* 50, ergo una corona est 314,100: vel accuratius 314,159 harum una pertinet ad superficiem Annuli *PFGH*, altera ad *Torum SK*. Porrò semicirculi *VKL* semidiameter est 50, ac proinde ipse arcus 157, Radius verò rotationis 919, ergo superficies *Tori* est 453,259. Hæ omnes superficies quinque prædictorum membrorum rotundorum iunctæ, componunt totam superficiem rotundam *Capitelli*, videlicet 5,005,835.

Superficies	
Echini *ODF*.	1835958.
Annulorum *PG*, *TL*.	494700.
Coronæ complentis annulũ *PG*.	314159.
Hypotrachelij *HIS*.	1593600.
Tori *SK*.	453259.
Coronæ ex *IV*.	314159.
Summa.	5005835.

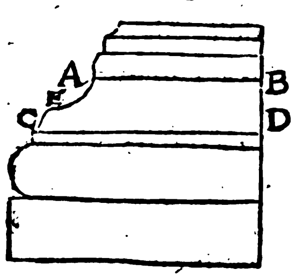
2. Quod si quis has superficies computare voluisset ex unico Centro gravitatis unicoq; Radio rotationis, inquirendum ei fuisset centrum cōmune septē linearum. *EF*, *FG*, *GH*, *HI*, *IV*, *VKL*, & *LM*.

Ex hoc centro ducta perpendicularis ad axem rotationis, dedisset Radium ex quo inquirenda via, eaque ducenda in quantitates septem prædictarum linearum simul sumptarum, & producta fuisset eadem superficies quæsita.

Posset quidem, quemadmodum in Scholio Propositionis præcedentis exemplum attulimus, per Resolutionem inveniri unicus ille Radius rotationis, si tota illa superficies iam inventa, divideretur per summam ex lineis rotatis collectam; quotus enim ostenderet viam rotationis, ex qua deinde ille quem diximus Radius facillime habetur: Centrum tamen commune gravitatis earundem linearum simul sumptarum, ex his nondum in puncto notum esset; cum Radius ille solum manifestaret remotionem lineæ rectæ, axi rotationis parallelæ, in qua centrum illud necessario debet consistere.



3. Non aliter mensurari potest superficies Basis; Annuli nimirum *AB*, *Tori* superioris *BCD*, *Supercilij DE*; sicut ante superficies Echini; Annuli *FG*, & *Tori* inferioris *GHI*. Hoc loco solum ostendendum est, qua ratione mensuræ subijciatur superficies *Scotiæ EKF*, quam in maiori forma adscripsimus: videtur autem arcus *EKF* esse circularis, cuius centrum *L*, & ipse quinque octavarum sui circuli, seu graduum 225, eiusque centrum gravitatis punctum *M*: ducta ergo recta *MN* ad *OP* axem rotationis perpendiculari, erit ea Radius rotationis, cuius peripheria tanquam via rotationis ducta in quantitatem arcus *EKF*, producet superficiem *Scotiæ* quæsitam.



4. Idem dicendum est de hac altera Basi, quam idem Barozius *Stylobatæ* in ordine *Composito* subijcit, partes enim ipsius seu membra si supponamus ea esse rotunda (pro *Stylobata* enim sunt quadrata) ab ante recensitis non differunt, nisi id quod litteris *ABDCEA* notavimus, quam *Gulam inversam* vocant, & videtur esse descripta à duobus quadrantibus circuli *AE* concavo, & *EC* convexo, horum autem superficies invenies quemadmodum *Scotiæ*, secundi verò sicuti *Echini*, de quibus ante diximus [*Num: 1. & 3. huius*].

SCHOLIVM.

EX his paucis à nobis quasi exempli gratia adductis superficierum dimensionibus, rotundorum corporum, quilibet poterit per imitationem infinitarum aliarum super-

superficierum dimensiones, eiusmodi corporum colligere, & Regulas particulares & praecipere & demonstrare, si praeter hac probè intellexerit ea, qua ante scripsimus Cap: 9. & 10. Libri secundi.

CAPUT III.

DIMENSIO SOLIDITATIS Corporum rotundorum, à planis rectilineis descriptorum.

ORDO requirere videtur & methodus ut quorum Corporum iam superficierum dimensionem tradidimus, eorundem etiam demus rationem ac modum mensurandi soliditatem aream & corpoream: & primò quidem eorum corporum à planis illis descriptorum, quorum perimeter rectis constat lineis; deinde verò aliorum qua nascuntur à planis curvis lineis comprehensis. Illud autem faciemus hoc Capite, hoc verò proxime sequenti.

PROPOSITIO I.

Soliditatem Coni Isoscelis, cuius Altitudo sive Axis, una cum semidiametro basis data sint, determinare.

PRODUCTUS numerus, qui fit ex ductu semissis altitudinis datae in semidiametrum basis, ducatur ulterius in peripheriam circuli, cuius semidiameter sit pars tertia datae semidiametri basis, & producetur Soliditas Coni propositi, quae hic quaeritur.

Demonstratio. Ex priori numerorum in se ductu, semissis nimirum altitudinis datae, in semidiametrum basis, nascitur superficies illius trianguli rectanguli, ex cuius rotatione circa altitudinem tanquam axem describitur Conus; quae trianguli superficies ideò iubetur duci in peripheriam circuli, cuius semidiameter sit tertia pars datae semidiametri basis, quod haec pars sit quantitas Radij rotationis supradicti trianguli. Caetera constant ex Propos: 1. Cap: 11. Libri 2.

PROPOSITIO II.

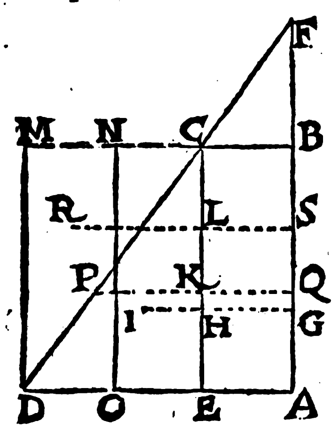
Frusti Conici cuius basium semidiametri, cum altitudine cognita sint, soliditatem reperire.

SUPPONITUR autem bases illas esse parallelas, & ad axem coni rectas.
1. *Posset quidem ex Propositione 9. Cap: 8. Libri 1. qua invenitur centrum gravitatis*

vitatis Trapezij Frustum Coni, circa axem rectum ad basem rotati, describentis, deduci regula pro soliditate Frusti inquirenda; quia verò id operosum iudicamus, duas alias vias præscribemus.

Prima est communis, ut nimirum perficiatur Conus, & utriusque deinde & maioris & minoris Coni inquiratur soliditas, minor enim ex maiore detracta, reliquam facit Frusti propositi soliditatem. Secunda ex principijs nostris desumitur: Inquiratur primò soliditas Cylindri eandem cum Frusto altitudinem & basem minorem habentis; deinde soliditas quam describit triangulum illud, quo Trapezium (quod Frustum Coni descripsit) superat rectangulum quod circa eundem axem Cylindrum descripsit; hæc enim soliditati Cylindri adiecta componit soliditatem Frusti quæsitam. Priori ergo via sic procedemus.

2. Fiat ut differentia radiorum basium, ad altitudinem Frusti Coni datam: ita radius maioris basis, ad aliud; & habebitur altitudo Coni cuius Frustum propositum est: Ex hac altitudine detrahatur altitudo Frusti, & remanebit altitudo Coni, qui basem habet cuius radius minor datus est. Duorum horum Conorum soliditas inventa per præcedentem, & minor ex maiori subtracta, relinquit soliditatem Frusti petitam.



Demonstratio. Esto Trapezium quod Frustum Coni descripsit *ABCD*, circa axem *AB*, quæ est etiam altitudo Frusti, & radij *AD*, *BC*, basium dati sint, si perficiatur triangulum *ADF*, & ducatur recta *CE* parallela ipsi *AB*, erit *DE* differentia inter radios basium *AD*, *BC*: quare si fiat in triangulis similibus *DEC*, *DAF*, ut *DE* ad *EC*, ita *DA* ad aliam erit ea *AF*, altitudo Coni cuius Frustum propositum est: Subtracta ergo ex *AF*, altitudine data *AB*, manet altitudo *BF*, Coni basem habentis circulum cuius radius *BC*. Huius Coni soliditas detracta, ex prioris Coni soliditate reliquam facit soliditatem Frusti propositi. Quod erat demonstrandum.

3. Secunda via in hanc nos deducit Regulam. Altitudo data ducatur in radium basis minoris, & qui fit, in semissem peripheriæ eiusdem radij, noteturque productus. Deinde differentia radiorum ducatur in semissem datæ altitudinis, & qui fit in peripheriam eiusdem radij aucti triente, eius quam diximus differentiæ: nam si hic productus ad productum ante notatum adijciatur componetur soliditas Frusti propositi.

Demonstratio. Sint in eadem figura omnia ut ante, præter triangulum *CBF*, cuius usus non est hoc loco. Itaque per primum ductum altitudinis *AB* in *BC*, fecimus aream rectanguli *CA*, quod describit circa axem *AB* Cylindrum, quam aream deinde duximus in semissem peripheriæ radij eiusdem *CB*, & fecimus [*ut constat ex Propositione sequenti*] soliditatem Cylindri notatam. Deinde ducta est *DE* differentia radiorum basium Frusti in semissem *AB*, hoc est ipsius *CE*, & sic facta est area trianguli *DEC*, quæ ulterius ducta in peripheriam radij *BC*, hoc est *GH* aucti recta *HI* triente ipsius *DE*, hoc est in peripheriam totius *GI*, Radij rotationis trianguli *DEC*, circa axem *AB*; Punctum enim *I*, centrum est gravitatis trianguli *CED* [*ex Propos: 4. Cap: 8. Lib: 1.*] & sic producta est soliditas, quam descripsit idem triangulum circa Cylindrum: ea

ergo

ergo addita ad soliditatem Cylindri, confecit totam totius Frusti Conici propositi soliditatem. Quod faciendum erat.

4. VEL, Inquiratur soliditas Cylindri habentis basem eandem cum maiore basi Coni, quem describit rectangulum *MBAD*, circa axem *BA*, nam si ex ea auferatur soliditas quam describit triangulum *DMC*, per Radium rotationis *SR*, qui æquatur radio maioris basis mulctato triente ipsius *MC*, vel *DE* differentiæ radiorum basium, remanebit eadem propositi Frusti soliditas.

5. Immo si placeat per unicum rotationis Radium eandem Frusti Conici soliditatem indagare, hanc sequemur Regulam. Fiat ut radij basium *DA*, *CB* simul, ad maiorem *DA*; ita *LH* triens altitudinis, ad *LK*: Fiat secundò in triangulo *DEC*, ut *CE* ad *ED*, ita *CK* ad *KP*, quæ addita ad *CB*, hoc est ad æqualem *KQ*, & habebimus totam *PQ*, cuius semissis est Radius rotationis; huius ergo peripheria ducta in aream Trapezij *ABCD*, quod frustum Coni describit, habebitur soliditas quæsita: area autem Trapezij habetur si *NB* (medium arithmeticum inter *DA*, *CB*) ducatur in *BA*.

Demonstratio. Ex Propos: 20. Lib: 1. Lucæ Valerij de Centro gravitatis, est ut *DA* ad *CB*, ita *LK* ad *KH*. Ergo ut haberemus *LK*, fecimus componendo ut *DA*, *CB* simul, ad *DA*; ita *LK*, *KH*, simul, hoc est tota *LH* ad *LK*, quia ergo in medio rectæ *PQ* ante inventæ, ipsi *DA* parallelæ per punctum *K* transeuntis, [*ex eadem 20 primi Valerij*] centrum est gravitatis Trapezij, ideò semissis illius tanquã Radij rotationis, peripheriam iussimus duci in aream Trapezij, quæ æqualis est areæ rectanguli *NR*. Manifestum est igitur propositum.

PROPOSITIO III.

Cylindri recti, dato ipsius axe sive altitudine, & semidiametro basis, soliditatem comprehendere.

SEMIDIAMETER basis ducta in datam altitudinem, & productus numerus iterum in semiperipheriam basis, producit soliditatem quæsitam.

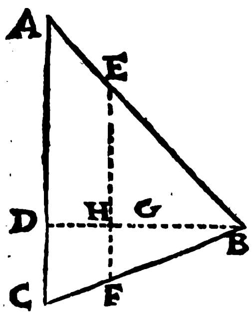
Demonstratio. Priori ductu habetur superficies sive area rectanguli illius, à quo per rotationem circa datam altitudinem instar axis nascitur Cylindrus: quare cum semissis semidiametri basis datæ, sit Radius rotationis, erit semissis peripheriæ basis, via rotationis. Cætera constant ex Propos: 2. Cap: 11. Lib: 2.

PROPOSITIO IV.

Soliditatem Rhombi solidi, datis ipsius altitudine & semidiametro basis communis, cognoscere.

RHOMBUS *proprie dictus videtur esse is, qui constat ex duobus Conis Isoscelibus & æqualibus & eandem basim obtinentibus; quia tamen invenitur etiam apud Archimedem* [*Lib: 1. de Sphæra & Cyl:*] *Corpus hoc nomine vocatum, ex duobus Conis Isoscelibus & inæqualibus & eandem basim habentibus, compositum, utriusq; soliditatem per eandem Regulam invenire hoc loco docebimus.*

Altitudo ducta in semissem semidiametri datæ, & is qui fit numerus ductus in peripheriam, cuius radius sit tertia pars eiusdem semidiametri datæ, producit soliditatem Rhombi propositi.

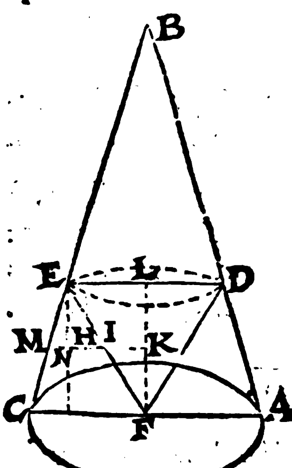


Demonstratio. In priori operatione fecimus aream trianguli *A B C*, illius nimirum qui Rhombum in sui rotatione describit, ducendo *D G*, semissem perpendicularis *D B* ad basim trianguli *A C*, quæ *D B* est semidiameter basis utriusque Coni data, in *A C* altitudinem datam. Deinde iussimus hanc aream duci in peripheriam, cuius radius *D H* sit tertia pars semidiametri *D B* datæ, hic enim radius est æqualis Radio rotationis trianguli *A B C*, circa axem *A C*: ducta enim per *H*, recta *E F* ipsi *A C* parallela, in illa est centrum gravitatis trianguli *A B C*, [*ex Propos: 4. Cap: 8: Libri primi*] ac proinde Radius rotationis æqualis ipsi *D H*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Soliditatem reliquæ figuræ solidæ invenire, quæ relinquitur ablato ex Cono Isosceli Rhombo solido, datæ altitudine Rhombi unà cũ semidiametris & basis maioris, & communis in Rhombo.

HUIUS Solidi superficiem in numeris exhibere docuimus Propos: 9. Cap: 1. huius Libri, in honorem summi Geometræ Archimedis, qui ipso utitur ad suum propositum Lib: 1. de Sphæra & Cyl: idq; in figura proposuimus, quam hic repetimus.



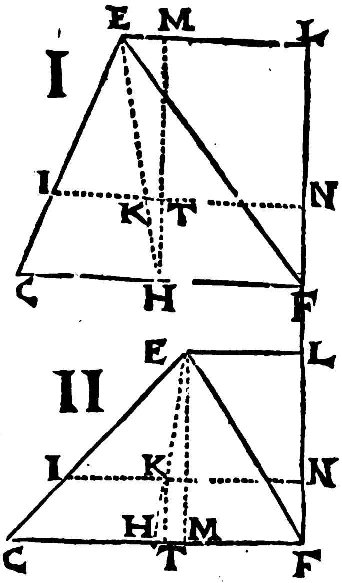
1. Sit ergo data altitudo *B F* Coni maioris *ABC*, quæ eadem est cum altitudine Rhombi solidi *B E F D*, sint etiam datæ semidiametri *C F*, *E L*, utriusque basis, maioris *C A*, & minoris *E D*. Oportet invenire soliditatem reliqui Corporis *C E F D A*, quod relinquitur si ex Cono *A B C* auferatur Rhombus *F E B D*.

Ex Propositione prima huius inveniatur soliditas Coni maioris *A B C*, & ex proxime præcedenti soliditas Rhombi *F E B D*, minor ex maiori subtracta relinquit soliditatem petitam.

Res tota vel ex ipsa figura adiuncta clarior est, quam ut pluribus indigeat. Sed facilius fortassis inveniemus eandem soliditatem, ex unico rotationis Radio, si loco altitudinis Rhombi detur altitudo Coni illius, cuius vertex basi maiori insistit, & cum altero Cono Rhombum constituit.

2. Hæc enim altitudo ducta in semissem datæ semidiametri maioris, & qui inde fit denuò in peripheriam, cuius radius est semissis eadem, aucta tertia parte differentiæ, qua ipsa à semidiametro minore data differt; si quidem ipsa semissis minor fuerit eâdem semidiametro: si verò maior sit, mulctata eadem parte tertia; & producetur utrobique soliditas quæsita.

Demonstratio



Demonstratio. Esto ex proxima Figura desumptum Trapezium *CELF* (triangulo enim *EBD* non indigemus) constans duobus triangulis *CEF*, *EFL*, quorum hoc quidem descripserit Conum illum cuius vertex *F*, basi *CF* insistit, cuiusque altitudo data sit; illud verò figuram illam solidam cuius quæritur soliditas, utrumque circa axem *LF* rotatum. In hoc igitur triangulo *ECF* ex vertice *E*, ad medium punctum *H* basis *CF*, ducatur recta *EH*, agatur etiam ad *LF* perpendicularis *IN* ita, ut pars *EI* ad *IC*, & *LN* ad *NF* dupla sit, secans *EH* in *K* puncto, erit id [*ex Cap:8.Lib:primi*] Centrum gravitatis trianguli *CEF*, & recta *KN* Radius rotationis eiusdem trianguli *CEF*: ducantur etiam rectæ *HM*, *EM* & *KT* ipsi axi *LF* parallelæ. Iussimus ergo primò altitudinem *LF* datam ducere in semissem semidiametri maioris, hoc est, in *HF* medietatem basis *CF*, ut haberemus aream trianguli *CEF*; quam voluimus denuò ductam in peripheriam circuli, cuius radius sit eadem semissis *HF*, sed aucta tertia parte ipsius *EM* differentiæ inter *HF* & *EL*, quæ est *KT*, & unà cum *HF*, hoc est *TN* ipsi æquali, componit Radium rotationis *KN*; & hoc quidem quando *HF* minor est quam *EL*, ut in Figura I: Quando autem *HF* maior est ipsâ *EL*, ut in Figura II, iussimus ex *HF* tertiam partem *HT* differentiæ *HM* auferre, ut remaneret *TF*, hoc est *KN* Radius rotationis. Ipsas verò *KT* & *HT* esse tertias partes ipsarum *EM* & *HM*, constat ex constructione, & ex triangulis *EMH*, in quibus eædem *KT* & *HT* parallelæ sunt basibus *EM*. Si nulla differentia fuerit inter *HF* & *EL*, erunt ipsæ *HF* & *EL* Radio rotationis æquales, & sic nihil addendum vel demendum erit. Docuimus ergo qua ratione soliditas propositæ Figuræ indaganda sit. Quod faciendum erat.

PROPOSITIO VI.

Figuræ solidæ Sphæræ inscriptæ, data multitudine laterum uniusq; quantitate, radio Sphæræ, ac perpendiculari ex centro Sphæræ in unum laterum, soliditatem inquirere.

QVÆNAM *sit hæc figura declaravimus initio Propositionis 10. Capit: 1. huius Libri, ergo ut assequamur propositum.*

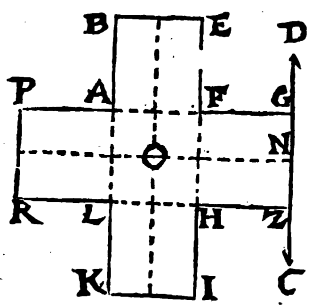
Primò perpendicularis data ducatur in quartam partem quantitatis omnium laterum, & numerus productus notetur. Secundò fiat ut sexta pars quantitatis omnium laterum, ad sextam partem radij sphæræ: vel quod idem est quantitas omnium laterum, ad eundem radium Sphæræ, ita duæ tertiæ datæ perpendicularis, ad quartam. Tertiò hic quartus sit radius, in eiusque peripheriam ducatur numerus primo loco notatus, & nascetur inde soliditas optata.

Demonstratio.

Demonstratio. Primò enim quæsivimus per usitatum modum [*de quo Num: 11 Propos: 3. Cap: 6. Lib: 2.*] aream semissis plani rotati, quæ est figura semicirculo inscripta. Secundò [*ex Propos: 11. Cap: 8. Libri 1.* (*in qua Propos: nominantur tertiæ partes, sed sunt hic semissium, ergo sextæ*] invenimus determinantem centrum gravitatis eiusdem figuræ. Tertiò huius determinantis, tanquam Radij rotationis, peripheriam duximus in aream primo inventam: & sic ex nostra doctrina Universali construximus soliditatem Corporis propositi, Quod faciendum erat.

PROPOSITIO VII.

Figuræ solidæ à plano Crucis regularis descriptæ, soliditatem indagare, dato uno Crucis latere.



QVÆNAM sit Crux hæc alibi diximus [*Propos: 11. Cap: 1. huius Libri*] ubi eam rotavimus circa axem *DC.* quod si hoc loco illam circa eundem axem rotemus, ducenda est peripheria Radij rotationis *ON*, quam in eadem Propositione invenimus 942, 477, posito latere Crucis 100, in superficiem planam Crucis, quæ est 50,000, ut fiat soliditas quæsita. 47,123,850.

Si verò eadem Crux rotetur circa axem medium, in quo est littera *O*, erit Radius rotationis 55, via ipsius 345, 575, quæ ducta in semissem superficiei Crucis, hoc est in 25,000, producit soliditatem 8,639,375.

Atque hæc hoc loco sufficient.

CAPVT IV.

CORPORUM ROTUNDORUM à planis curvilineis efformatorum, soliditatis dimensio.

DIXIMVS Capite præcedenti nos in hoc constituisse mensurare soliditatem Corporum à planis, quorum perimeter curvis lineis constat, descriptorum, quod ut plurimum intelligendum est de planis seu figuris integris; quia vero nos in rotatione non tota figura utimur, sed plerumque eius medietate, cuius etiam centra gravitatis investigare docuimus, quare huius medietatis perimeter non semper meris curvis lineis constare potest, maxime cum axis rotationis, quæ linea recta est, perimetrum figuræ huius claudit.

dit. Cum autem axis rotationis maneat immotus, tota nihilominus figuræ solidæ descriptæ superficies hac ratione curva, hoc est convexa vel concava erit, à meris curvis descripta. Sic Sphæra describitur à semicirculo, cuius perimeter constat ex semiperipheria & diametro, verum diameter nihil neque superficiei neque soliditati addit, præter duos polos qui sunt puncta indivisibilia. Sectorem tamen circuli licet constet binis rectis & una tantum circulari linea, sicut & aliquas alias figuras, quarum perimeter rectis ac curvis lineis mixtim constat, ad hoc potius Caput, quam ad præcedens spectare iudicamus.

PROPOSITIO I.

Soliditatem Sphæræ, cuius diameter vel radius datus sit, manifestare.

1. RADIVS datus in quadrantem peripheriæ maximi circuli Sphæræ ducatur, & numerus productus in quatuor tertias diametri eiusdem circuli, & prodibit soliditas Sphæræ.

Demonstratio constat aliunde [*ex Num: 3. Propos: 2. Cap: 12. Lib: 2.*] ubi ostendimus si semicirculi area ducatur in viam rotationis, prodituram soliditatem Sphæræ. Hic ergo in prima operatione composuimus aream semicirculi, [*ex Corollario Propositionis 1. Cap: 1. Libri huius*] via autem illa rotationis plani semicirculi, ad viam rotationis semiperipheriæ est ut 2 ad 3, (ita enim se habent Radij rotationis, sive determinantes centra gravitatis plani & peripheriæ) [*ex Propos: 1. Cap: 9. Libri primi*] & quia [*ex Num: 2. Scholij Propos: 2. Cap: 12. Libri 2.*] via rotationis semiperipheriæ circuli, est æqualis duplæ diametro, ergo duæ tertiæ ipsius, quæ sunt quatuor tertiæ diametri simplæ, ductæ in planum semicirculi, producunt soliditatem Sphæræ.

2. ALITER. Diameter Sphæræ ducatur in Radium datum, & qui inde fit in trientem peripheriæ circuli maximi, producetur eadem Sphæræ soliditas.

Demonstratio. Per priorem operationem inventa est area plani, quod describit Cylindrum æque altum cum Sphæra, & basim habentem circulum Sphæræ maximum: hæc area si duceretur in semissem peripheriæ basis, produceret soliditatem Cylindri, [*ex Propos: 3. Capitis præcedentis*] quare si ducatur eadem area in trientem tantum eiusdem peripheriæ, producet numerum ad quem soliditas Cylindri sesqui altera est: ergo [*ex Propos: 9. Cap: 1. Libri 4.*] numerus ille est æqualis soliditati Sphæræ. Quod erat demonstrandum.

3. *Demonstratur idem aliter.* Operatio prior dedit aream trianguli Isoscelis describentis Rhombum solidum, cuius altitudo est dupla diameter, & semidiameter basis communis est radius Sphæræ: hæc area ducta in trientem peripheriæ prædicti basis, producit [*per Propos: 4. Cap: 3. Lib: 3.*] soliditatem Rhombi; hic autem Rhombus est quadruplus Coni, basem habentis æqualem maximo circulo Sphæræ, & altitudinem radium eiusdem Sphæræ. Ergo [*per Propos: 8. Cap: 1. Libri 4.*] Rhombus ille solidus æqualis est Sphæræ propositæ. Quod erat demonstrandum.

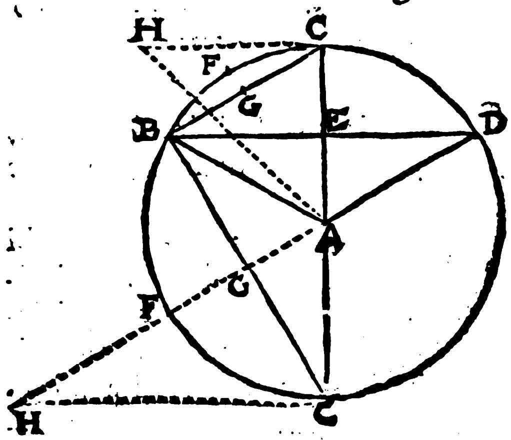
COROLLARIVM.

SEQVITUR ex hoc secundo modo, soliditatem Hemisphærij exurgere, si quadratum radij ducatur in trientem peripheriæ. Producitur enim medietas eius, quod productum est Num: 2. huius.

PROPOSITIO II.

Soliditatem Sectoris Sphæræ cuius radius, & arcus sectoris plani, à quo solidus descriptus est, dati sint, investigare.

SINUS dimidij arcus dati ducatur in Sphæræ radium, & qui fit numerus in peripheriam, cuius radius sit bessis sive duarum tertiarum eius quem diximus sinus, & exurget soliditas Sectoris propositi.



Demonstratio. Esto datus Sector Sphæræ solidus, sive maior sive minor hemisphærio, *ABCD*, cuius soliditas invenienda sit; data sit etiam quantitas arcus *BFC*, Sectoris plani *ABFC* (qui descripsit solidum *ABCD*) & sit *BG* sinus dimidij huius arcus, qui est *BF*: hic sinus ductus in *AC* radium datum, quod fecimus in priori operatione, producit aream trianguli rectanguli, *ACH* cuius basis *CH* æqualis est rectæ *BC*, & perpendiculum radius Sphæræ *AC*, quod triangulum *ACH* rotatum circa axem *AC*, describet quidem basis *HC* circulum, cuius superficies æqualis est superficiei convexæ sectoris dati, [*ex Propos: 10. Cap: 1. Libri 4.*]; ipsum verò planum trianguli seu area describet Conum, æqualem soliditati Sectoris propositi, [*per Propos: 11. Cap: 1. Lib: 4.*]. Hic autem Conus habetur [*ex Propos: 1. Cap: 11. Libri 2;*] si prædicta trianguli area ducatur in peripheriam cuius radius sit triens basis trianguli, hoc est bessis sine duarum tertiarum semissis basis, quæ est æqualis sinui *GC*, & agit vices Radij rotationis: sed hoc fecimus in posteriori operatione. Produximus ergo soliditatem sectoris propositi. Quod faciendum erat.

PROPOSITIO III.

Ex ijsdem datis soliditatem Portionis Sphæræ indagare.

INVENTA ex Propositione præcedenti soliditate Sectoris Sphæræ, ab ea dematur conus eandem habens cum Portione basim, & altitudinem æqualem ei, quæ ex centro Sphæræ ad centrum basis ipsius Portionis ducitur; si quidem data Portio minor est hemisphærio: si maior, idem conus addatur ad soliditatem Sectoris: sic enim remanebit, vel conflabitur soliditas Portionis propositæ. Coni autem soliditas habetur per Propos: 1. Cap: 3. huius Libri.

Ut si data sit Portio *BCD*, conus prædictus erit *ABED*, (cuius diameter basis

basis recta *B D*, altitudo *A E*) minori Sectori subtrahendus, maiori addendus, ut fiat soliditas Portionis propositæ. Cætera suis locis demonstrata sunt.

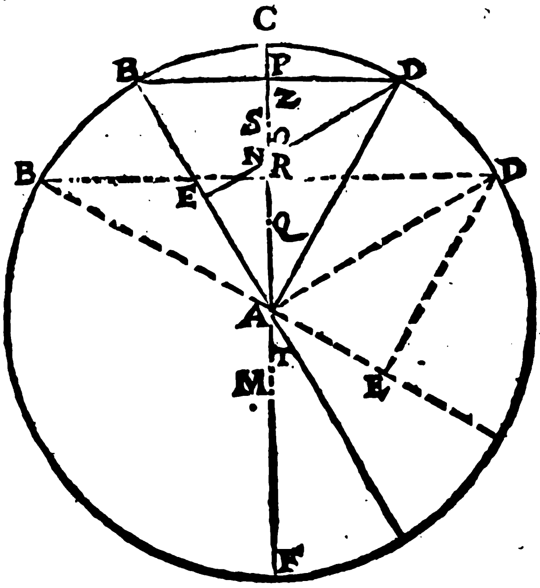
PROPOSITIO IV.

Ex ijsdem datis soliditatem Citrij & Mali invenire.

1. *ETSI maioris laboris indagatio hæc cupiam videri possit, quam sit fructus, vel utilitatis, vel usus ipsius; quia tamen nos magis scientiam & certam cognitionem, quæ propter se ipsam expetibilis est spectamus, & principij nostri universalis, quod ex Centro gravitatis & Rotatione quantitatum deducitur, amplissimam dilatationem; libenter hunc subimus laborem, præceptum nimirum universale casibus particularibus accomodandi. Ergo si soliditatem petitam dare velimus, Regulamq; præscribere quæ uno complexu omnia contineat, erit ea sequens. Diximus verò* Ex ijsdem datis, *per quæ intelligimus arcum plani illius Segmenti circularis quod Citrium vel Malum in sui rotatione describit; & radium circuli maximi, vel Sphæræ, qui idem est: his enim datis, dantur etiam & chorda arcum datum subtendens, & sinus arcus tam totius quam semissis, & sinus quem vocant complementi. In demonstratione verò ne alia esset construenda figura, utemur ea quæ est supra pag: 125 & 126 posita, & infra repetitur, in quâ ex segmentis minoribus* BCD, *pro nostra Regula selegimus minus, & ex maioribus* BFD *maius, quorum centra gravitatis sunt puncta* P *&* T.

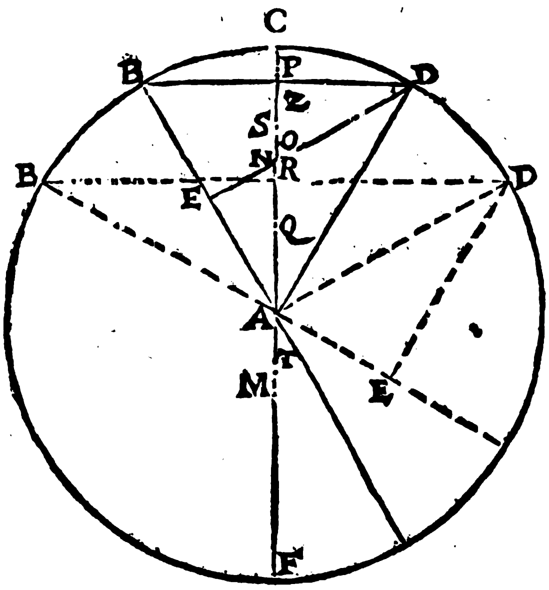
2. Fiat ut semiarcus datus ad suum sinum; ita duæ tertiæ radij dati, ad quartum, qui notetur primò. Ab hoc subtrahantur pro Citrio duæ tertiæ sinus complementi eiusdem arcus, pro Malo addantur; & qui remanet vel componitur numerus notetur secundò loco. Fiat deinde pro Citrio, ut media differentia, qua totus arcus datus, & sinus ipsius differunt; pro Malo verò ut media summa, quæ ex toto arcu dato eiusque sinu componitur; ad medietatem eiusdem sinus (vel quod idem est loco medietatum accipiantur integri numeri) ita numerus secundo loco notatus, ad quartum. Hic pro Citrio erit addendus, pro Malo subtrahendus à numero primo loco notato; & fiet numerus tertiò loco notandus.

3. Porrò eæ quarum iam fecimus mentionem, media videlicet differentia pro Citrio, & media summa pro Malo, ducantur in sinum totum, & numeri hinc nati notentur quarto loco.



4. Sinus complementi deniq; semiarcus dati pro Citrio auferatur à numero tertiò notato, pro Malo eidem addatur: Residuus deinde & compositus sint instar Radiorum, eorundemq; peripheriæ ducatur in numeros quartò notatos, & prodibunt tandē soliditates Citrij & Mali, hucusq; quæsitæ.

5. *Demonstratio.* Quæcunque præcepimus Num: 2. hui⁹, demonstrata sunt Libro 2. Cap: 7. Propos: 7. Numerus enim primo loco notatus est quantitas determinantis centrum *AO*, & *AM*, sectorum *BCD* & *BFD*; quare ab



re ab *AO* subtraximus, & ipsi *AM* addidimus determinantem *AN* centrum gravitatis *N*, trianguli *ABD*; ut fierent connectentes centra sectoris & trianguli rectæ *NO*, *NM*. Deinde fecimus ut media differentia &c. & composita &c. ad semissem ipsius *DE* sinus, hoc est, ut segmentum *BCD*, *BFD*, ad triangulum *BAD*; ita rectæ *NO*, *NM* ad quartas quæ sunt *OP* & *MT*, [*ex Propos: 8, 7, vel 6. Cap: 2. Libri 1.*] Hos pro Citrio addidimus ad *AO*, & pro Malo subtraximus ex *AM*, ut fierent determinantes ex *A*, centra gravitatis *P* & *T*, segmentorum *BCD*, *BFD*, rectæ nimirum *AP*, & *AT*: hos numeros iussimus notari tertiò loco.

Num: 3. invenimus areas segmentorum *BCD*, *BFD*, [*per Propos: 5. Cap: 6. Libri 2.*] & sunt numeri quarto loco notati.

Num: 4. denique sinus complementi arcus *BC*, vel *BF*, qui est pro utroq; segmento eadem recta *AZ*, pro Citrio iubetur auferri ab *AP*, pro Malo addi ad *AT*, ut fiant Radij rotationis *ZP*, *ZT*, axis rotationis *BD* minor, quorum peripheriæ ductæ in areas segmentorum, produxerunt soliditates petitas. Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

COMPENDIOSIOR *erit operatio, si uti velimus Tabula Decima. Binos alios modos Malum metiendi, vide Lib: 4. Cap: 4. Propos: 8. Num: 5. & 6.*

PROPOSITIO V.

Annulorum tam Stricti, quam Absoluti, data circumferentia circuli illius qui Annulum descripsit, & radio eius circuli quem Annulus ambit, soliditatem determinare.

1. AREA circuli quem diximus (quæ habetur ex ductu semicircumferentiæ in radium) ducatur in totam circumferentiam datam, & prodibit soliditas Annuli Stricti.

Hæc enim circumferentia data, est via rotationis eiusque semidiameter Radius rotationis; ergo ducta in aream circuli producit soliditatem prædictam.

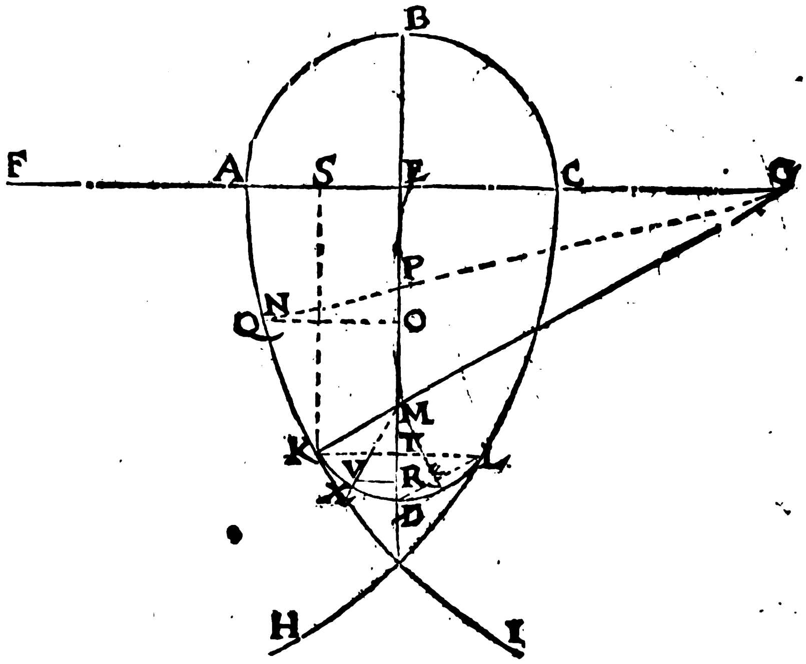
2. Annuli verò Absoluti soliditas habetur, si eadem circuli area ducatur in circumferentiam, cuius radius est recta composita ex radijs & circuli dati, & illius, quem Annulus ambit, sive in medio sui complectitur.

Hæc enim composita est Radius rotationis. Cætera constant ex Propos: 1. Cap: 12. Libri 2.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

Soliditatem Corporis quod Ovo gallinaceo assimilatur definire.



H*ANC figuram efformare, eiusque superficiem invenire docuimus Propos: 6, Cap: 2. Libri huius, quam per idem schema, quo ibi usi sumus hic proponimus. Pro dimensione autem soliditatis datus sit radius, tam arcus* ABC, *quam* KDL, *hoc est recta* BE, MD (*ex his enim habentur ipsi arcus, cum* ABC *sit semiperipheria sui circuli,* & KDL *triens sui itidem circuli*) *una cum arcu* AQK, & *rectis* ET *vel* SK, SE *vel* KT.

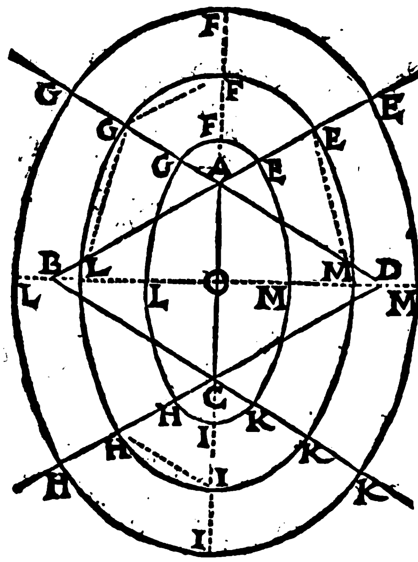
Soliditas igitur hemisphærij *ABC* habetur ex Corollario Propos: 1. huius Capitis, & segmenti *KDL* ex Propos: 3. Restat solum ut inquiratur soliditas à Trapezio mixtilineo *AETK*, circa axem *ET*, descripta; quod fiet sat commode si investigetur soliditas tam Cylindri, quem describit parallelogrammum rectangulum *SETK*, circa eundem axem *ET*, quam figuræ solidæ descriptæ à circuli semisegmento *ASK*: Rectius autem inquiremus soliditatem quam describit totum segmentum (quod perficeretur si produceretur & recta *KS*, & arcus *KQA* ex centro *G*, versus partes *B*, donec sibi mutuo occurrerent) cuius centrum gravitatis consistit in recta *GA*, inter puncta *A* & *S*, & invenitur per Propos: 7. Cap: 7. Libri 2: facto igitur Radio rotationis, ea recta quæ ex hoc centro perpendiculariter ducitur, ad axem rotationis *ET*, inveniemus per regulam generalem totius segmenti soliditatem; cuius medietas adiuncta summæ trium ante inventarum soliditatum, componet totam Ovi gallinacei soliditatem quæ quærebatur.

Attendendum autem diligenter est, ut adhibeantur pro colligenda summa partes eiusdem radij, & quæ tales non sunt, ea ad easdem reducantur: Exemplum quod hac in re imiteris habes Propos: 6. Cap: 2. huius Libri.

PROPOSITIO VII.

Corporis Sphæroidem mentientis, datis radijs arcuum figuræ planæ corpus describentis, soliditatem inquirere.

CORPORIS *huius genesin & subdivisionem, in Sphæroidem nimirum Altam & Latam tradidimus Propos: 7. Cap: 2. huius Libri. Soliditatem autem ipsius ut habeamus, figuræ prius planæ, à qua corpus per rotationem efformatur, aream oportet indagare, quod fiet hac ratione.*



Esto figura quam dicunt *Ovatam FLIM*, per rectam *FI*, vel *LM* bisecta, medietatis (hæc enim circa axes *FI* vel *LM* rotata describit Sphæroidem) aream habebimus, verbi gratia ipsius *FLIOF*, si prius quæsiverimus areas trium sectorum *FAG, ICH, DGH*, quorum radij *AF* vel *CI*, (sunt enim æquales) & *DG*, & ex area *DGH* subtraxerimus aream trianguli *ADC*; hæ namque tres areæ constituunt totum planum *FLIOF*. Sunt autem, ut habetur Propos: 7. Cap: 2. huius Libri, arcus *GF, HI, GLH* sextantes suorum circulorum.

Deinde per Propos: 2. huius inquiratur soliditas quam describit unius æqualium sectorum *GAF*, vel *HCI*, circa axem *FI*, eaque duplicetur; inveniatur etiam soliditas quam describit figura *GAOCHL*, circa eundem axem, addaturque ad duplam illam soliditatem, & consurget tota soliditas quæsita, & erit Sphæroidis Altæ.

Centrum verò gravitatis figuræ *GAOCHL* dabitur per Propos: 8. Capit: 2. Libri 1. ex centris gravitatis totius sectoris *GLHD*, & trianguli *ADC*, quod necessario erit in recta *LO*, ac proinde pars ipsius inter hoc centrum & punctum *O*, erit Radius rotationis, in cuius peripheriam ducta area figuræ *GAOCHL*, producit eam quam diximus addendam soliditatem.

Ut habeatur soliditas Sphæroidis Latæ, rotandum est circa axem *LM* planum *LFM*, cuius aream iam invenimus, æqualis enim est areæ plani *FLI*. Centra deinde gravitatis quærendæ sunt, & sectoris *GFEA* [*ex Propos: 1. Cap: 9. Libri 1.*] quod erit in recta *FO*, eiusque pars inter centrum hoc inventum & punctum *O* intercepta, Radius rotationis; & unius ex duabus figuris *LGAO*, vel *MEAO*; quod invenitur ut ante, per sectorem *DGL*, & triangulum *DAO*: ex hoc centro ducatur perpendicularis ad axem rotationis *LM*, erit illa Radius rotationis, pro una ex æqualibus figuris. Ex his, ne longior sim, habebitur tota soliditas quæsita. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

QUOD si mavis ex unico centro pro Sphæroide Lata rem perficere, ex invento illo figuræ LGAO *gravitatis centro, ducatur perpendicularis ad rectam* FO, *in qua pars eius interiecta inter hanc perpendicularem, & centrum gravitatis, Sectoris* GFEA, *dividatur [per 6 vel 7 Propos. Cap: 2. Lib: 1.] in proportionem partium, id est Sectoris, & utriusque rotatarum figurarum simul sumptarum, & dabitur unicus Radius rotationis, in cuius peripheriam si ducatur area figuræ planæ* FM, *conficietur soliditas Sphæroidis Latæ. Sic etiam ad unicum rotationis Radium vocari posset figura* FLI, *&c.*

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Rotundorum Corporum Architectonicorum soliditatem inquirere.

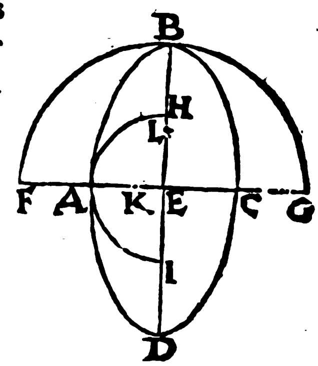
DE his satis diximus Propos: 8. Cap: 2. Libri huius. Quæ autem ibi dicta sunt de superficie inquirenda, intelligantur hic de soliditate: inquisitionis media fuerunt partium propositi corporis extremæ lineæ, quarum loco sint hic superficies planæ earundem partium; fuerunt centra gravitatis illarum linearum, quæ hic esse debent centra gravitatis superficierum planarum; ex quibus oriuntur deinde Radij rotationis & viæ; & ubi viæ illæ, in ea quam diximus Propositione, ductæ sunt in lineas, ut efficerent superficies rotundas quæsitas, hoc loco viæ hic inventæ duci debent in superficies planas illas, quarum centra inventa sunt, & prodibunt soliditates quæsitæ. Quod faciendum erat.

PROPOSITIO IX.

Soliditatem Sphæroidis veræ, cuius axes dati sint, invenire.

1\. SEMIAXIS maior instar circuli radius, ducatur in quadrantem suæ peripheriæ: secundò fiat ut maior axis datus ad minorem, ita numerus ante productus ad alium: tertiò hic alius ducatur in quatuor tertias axis minoris, & efficietur soliditas Sphæroidis Altæ, cuius axes dati sunt.

Demonstratio. Sit proposita Ellipsis *ABCD*, cuius centrum *E*, axis maior *BD*, minor *AC*, cogniti, per primam operationem invenimus aream semicirculi *FBG*, [*ex Corollario Propositionis 1. Cap: 1. huius Libri*] cuius radius est *EB* semiaxis maior. Secundò invenimus aream semiellipsis *BAD*, circa *BD* axem rotandæ, [*ex Propos: 7. Cap: 6. Libri 2.*]. Tertiò duximus hanc aream in viam rotationis cuius Radius *KE*, idem est cum Radio rotationis semicirculi *HAI*, semiellipsi ex centro *E* inscripti, ad intervallum *EA* semiaxis minoris: habent enim idem centrum gravitatis punctum *K*, semicirculus *HAI*, & semiellipsis *BAD*, [*per Propos: 6. Cap: 9. Libri primi.*]. Cum ergo [*per ea quæ diximus in fine Num: 1. Propos: 1. huius Capitis*] quatuor tertiæ ipsius *AC* axis minoris æquentur viæ rotationis Radij *KE*, in hanc si ducatur area semiellipsis *BAD*, per Regulam nostram universalem, exurget soliditas Sphæroidis Altæ. Quod faciendum erat.



2\. Pro Sphæroide Lata. Factis duabus prioribus operationibus, ut ante pro Alta, numerus secundo loco inventus ducatur in quatuor tertias axis maioris, & producetur soliditas Sphæroidis Latæ.

Demonstratio constat ex priori: rotatur enim semiellipsis *ABC*, circa axem minorem *AC*; semicirculus verò *FBG*, & semiellipsis *ABC* habent idem centrum gravitatis punctum *L*, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

1. INVENTA alterutrius Altæ vel Latæ Sphæroidis soliditate, & Radijs rotationis utriusq;, fiat [per Corollarium primum Propos: 3. Cap: 8. Lib: 2.] ut Radius rotationis, verbi gratia Sphæroidis Altæ, ad Radium rotationis Latæ, ita soliditas Altæ ad quartum, quartus hic numerabit soliditatem Sphæroidis Latæ.

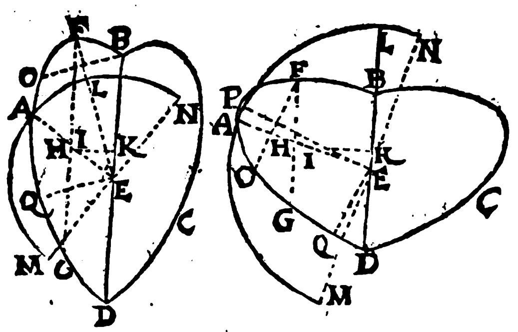
2. Quod si cupias soliditatem Portionis Sphæroidis, cuius basis sit ad alterutrum axem recta, nec velis eam immediate ex proprijs principijs indagare, sic facere poteris: & si quidem data Portio sit Sphæroidis Altæ, inquire per Propos: 3. soliditatem Portionis Sphæræ cuius altitudo eadem sit cum Portione Sphæroidis, & longior axis æqualis axi Sphæræ: Deinde fiat ut quadratum axis maioris, ad quadratum axis minoris, ita soliditas Portionis Sphæræ, ad quartum, numerabit hic soliditatem Portionis Sphæroidis propositæ.

Si verò data sit Portio Sphæroidis Latæ, inquiratur soliditas Portionis Sphæræ, cuius altitudo quidem sit eadem cum Portione Sphæroidis, sed brevior axis æqualis sit axi Sphæræ. Deinde fiat ut quadratum axis minoris, ad quadratum axis maioris, ita soliditas Portionis Sphæræ, ad quartum, indicabit is soliditatem quæsitam Portionis Sphæroidis.

Demonstratio constabit ex Propos: 23, 24 & 25 Cap: 6. huius Libri.

PROPOSITIO X.

Soliditatem Pyri notam facere.



SOLIDUM quod describitur à semiellipsi rotata, non circa alterutram axem, sed circa aliam obliquam diametrum à Keplero Pyri nomen accepit, quod nostro approbamus calculo. Ut si semiellipsis ABED rotetur circa diametrum BED, describet illa solidum quod aliquo modo formam induit Pyri. Nam si medietatem suæ rotationis semiellipsis ABD perfecerit, & ad idem planum in quo ab initio fuit, redierit, relinquet ipsa in eodem plano vestigium alterius semiellipsis CBD, & tota figura plana ABCD, speciem habebit cordis; corpus verò totum rotundum Pyri. Quo propius autem diameter BED, ad axem maiorem (cuius semissis est PE vel FE) accesserit, eo Pyrum fit Altius, quo longius autem ab eodem maiori axi recesserit, atque minori EQ appropinquaverit, hoc Latius forma Pyri figurabitur, ut apparet ex adiecto schemate. Huius autem Pyri soliditatem sic venabimur.

2. In primis inquirendum est centrum gravitatis semiellipsis *BAD*, quod sic fiet; ducta intra figuram recta quacunque *FG*, ipsi *BD* parallela, & bisecta in puncto *H*, ex *E* centro ellipsis (quod est in medio diametri *BD*) per *H* ducatur recta *EA* secans perimetrum ellipsis in *A*, ad quam perpendiculariter per *E* agatur alia recta *MN*, factoque centro *E*, ad intervallum *EA* describatur semicirculus *MAN*, & huius inquiratur [*ex Lib: 1. Cap: 9. Propos: 1.*] centrum

trum gravitatis *I*, erit illud etiam centrum gravitatis ſemiellipſis *BAD* [*per Propoſ: 6. Cap: eiuſdem & Libri*] ducatur denique ex *I*, ad axem rotationis *BD* perpendicularis *IK*, erit ea Radius rotationis, cuius peripheria ducta in aream ſemiellipſis, producet ſoliditatem Pyri deſideratam.

3. Quantitas Radij rotationis conſtabit ex triangulo *IKE*, cuius præter rectum ad *K*, angulus *IEK* cognoſcetur ex circuli arcu *AL*; datur etiam latus *EI*, nam qualium *AE* ſemidiameter eſt 100,000, talium eſt *EI*, centrum gravitatis ſemicirculi determinans 42,441 [*ex Propoſ: 5. Cap: 12. Libri primi*]: ſed ut habeamus aream ſemiellipſis, inveniendi ſunt illius ſemiaxes: accipiendo nimirum duo puncta [*per Propoſ: 4. Cap: 4. Lib: 2.*] quæcunque in ellipſis perimetro æqualiter à centro *E* remota, ut in figura Alta ſunt *B* & *O*, in Lata *F* & *O*; nam ſi per medium punctum rectæ *BO* & *FO*, ducantur ex *E* centro Ellipſis rectæ *EF*, *EP*, erunt ipſæ ſemiaxes maiores; ad quos ſi ex eodem centro *E* ducantur perpendiculares *EQ*, fient ſemiaxes minores; ex his [*per Propoſ: 7. Cap: 6. Lib: 2.*] conſtabit area ſemiellipſis ducenda in viam rotationis. Debent autem earundem partium eſſe ſemiaxes & Radius *AE*, quod ſi aliunde non conſtet, fieri id poterit per Propoſit: 1. Cap: 1. Libri ſecundi.

PROPOSITIO XI.

Soliditatem Citrij ac Mali Elliptici invenire.

IN Schemate quod pagina 195 in conſpectum dedimus videnda ſunt duo Citria elliptica *EDC*, Altum in figura VIII, Latum verò in figura VII: medietates item Mali *EDC*, Lati quidem in figura V, Alti verò in figura VI.

Soliditas autem non aliter invenitur quam Sphæroidis Propoſitione 9 huius, dummodo loco plani ſemiellipſis intelligatur planum ſegmenti. Legantur etiam ea quæ habentur Num: 4. Propoſ: 5 Cap: 12. Lib: 2.

Sic ſi aſſumantur ſegmenta ſemiellipſis obliquæ, loco ſemiellipſis qua uſi ſumus Propoſitione præcedenti, diverſa fient Pyra, quæ eadem ratione, ſub menſuram cadunt, &c.

PROPOSITIO XII.

Annulorum ellipticorum Strictorum & Abſolutorum ſoliditatem dare, datis axibus ellipſeos ipſos deſcribentis.

IN eodem ante nominato Schemate, apparent ſemiſſes Annulorum Strictorum, Lati quidem & Alti in figuris I & II; Abſolutorum verò Alti & Lati in figuris III & IV.

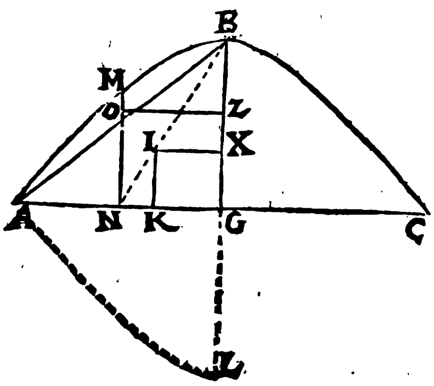
Soliditates illorum habebuntur ſi operatio inſtituatur ad imitationem Propoſitionis 5 huius, accipiendo nimirum pro area circuli, aream ellipſis. Cætera eadem ſunt.

PROPOSITIO XIII.

1. *Conoidis Parabolicæ, data eius altitudine, & semisse baseos Parabolæ Conoidem describentis, soliditatem explorare.*

1. NUMERUS qui fit ex ductu datæ altitudinis in semibasem, ducatur ulterius in peripheriam circuli, cuius semidiameter sit triens eiusdem semibasis datæ, & productus augeatur sui ipsius medietate, & conflabitur soliditas Conoidis propositæ optata.

Demonstratio. Per priores operationes fecimus [*ex Propos: 1. Cap: 3. Libri huius*] soliditatem Coni, eiusdem altitudinis & basis cum conoide: & quia Conois ad huiusmodi conum est ut 3 ad 2 [*ut demonstrabimus Propos: 2. Cap: 2. Libri 4.*] idcirco iussimus soliditati coni addi sui ipsius medietatem, ut efficeretur soliditas conoidis. Quod erat faciendum.



2. Alio modo inveniemus soliditatem Conoidis acuminatæ, quæ fit quando semiparabola *AMBG* rotatur circa axem *AG*: mutantur enim hîc Radij rotationis, qui erunt bini, trianguli quippe *ABG*, recta *IK*, segmenti verò parabolici *AMBA*, recta *ON*. Hæ duæ Potestates additæ, componunt eam quam diximus Conoidem acuminatam.

3. Si autem duplicaretur soliditas Num: 1. inventa, fieret soliditas Rhombi solidi Parabolici, qui nasceretur si figura *ABL* rotaretur circa axem *BL*.

SCHOLIVM.

1. *REPETIMUS ea quæ diximus in fine Capitis 2 huius, nos nimirum adduxisse & hoc & præcedenti Capite, paucas tantummodo Propositiones, quæ exemplo sint ad infinita alia corpora rotunda mensuranda, & ex Universali doctrina Regulas particulares instituendas; ad quem finem iuvabit legisse Capita 11 & 12 Libri secundi.*

2. *Possunt etiam areæ superficierum, & soliditates corporum, alijs modis quam ijs, quos nos tam hoc quam priori Capite, præscripsimus, haberi ex proxime sequentibus Capitibus 5 & 6. Exemplum dedimus Num: 1. huius Propos: & Num: 2. Scholij Propos: 9 huius Capitis, de soliditate Portionis Sphæroidicæ, per Portionem Sphæricam inquirenda: idem ergo fieri poterit in alijs, quæ data opera omittimus.*

CAPVT V.

DE PROPORTIONE inter se Superficierum Rotundarum.

CVM

CUM ex nostra Rotationis arte, qua & Superficies & Corpora efformavimus, varia sese ac multiplices manifestent Proportiones ac habitudines, & Superficierum inter se, & Corporum: Quæ omnes ex solis & unicis ferè nostris Principijs directè, affirmativè & facili modo demonstrari possunt; quasq; alij ante nos vel omnino non notârunt inveneruntve, vel inventas difficulter demonstrârunt. Selegimus nos ex multis & quasi infinitis huiuscemodi Proportionibus paucas tantum, eum in finem ut Lector avidus pluraq; desiderans exempla habeat quæ imitetur; & ex ijsdem nostris Principijs plura talia inveniat ac demonstret. Hoc ergo Capite agemus de Superficiebus; de Corporibus verò seu Solidis in proxime sequenti.

PROPOSITIO I.

Circuli inter se sunt, ut à semidiametris, diametris, &c. semicircumferentijs, circumferentijs, &c. quadrata.

EX compositione enim circuli [*per Propos: 2. Cap: 9. Lib: 2. & Propos: 1. Cap: 1. Lib: 3.*] habetur circulum æqualem esse rectangulo sub semidiametro & semiperipheria: itaque circulus ad circulum est, ut rectangulum ad rectangulum: componitur autem proportio rectangulorum ex proportionibus laterum: [*per 23. sexti*] sed proportio laterum est eadem; nam ut semidiameter ad semidiametrum, ita est semiperipheria ad semiperipheriam: ergo proportio rectangulorum, est proportio duplicata laterum. Ergo ut quadratum semidiametri unius circuli, ad quadratum semidiametri alterius circuli; ita circulus ad circulum. Quod idem est de diametris, semicircumferentijs, & circumferentijs, &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER.

BREVIUS sic: Rectangula illa quæ diximus sunt similia: ergo [*per Propos: 20. sexti*] sunt in duplicata ratione laterum homologorum, &c.

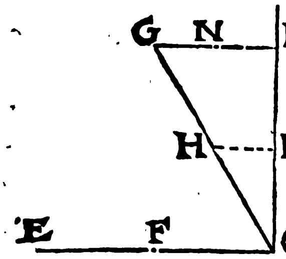
COROLLARIUM.

EX hac Propositione & ex 15 quinti sequitur, etiam semicirculos, Quadrantes &c. circulorum, in eadem esse proportione, duplicata nimirum diametrorum, semidiametrorum, &c.

PROPOSITIO II.

Superficies omnium Conorum Isoscelium, basibus exceptis, quorum latera sunt æqualia, inter se sunt ut semidiametri, vel diametri basium.

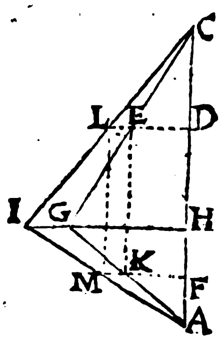
ESTO



ESTO recta CG ſuperficiem conicam circa axem CI deſcribens, & Radius rotationis recta HK. Illa igitur recta CG, in quocunq; ſitu obliquo ponatur, manente puncto C fixo, cum ſemper eadem permaneat, varientur autem, tam ſuperficies conicæ, quam rotationis & Radij & viæ: aſſumpta pro communi altitudine recta CG, erunt rectangula ſub illa, & varijs illis rotationum vijs, æqualia varijs ex rotatione natis ſuperficiebus conicis; ac proinde [*ex prima Sexti*] inter ſe ſunt ut viæ rotationis, hoc eſt ut Radij rotationum, hoc eſt, ut ſemidiametri baſium, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Superficies omnium Conorum Iſoſcelium, baſibus exceptis, quorum radij baſium ſint æquales, inter ſe ſunt ut latera.



SINT duo Coni deſcripti per triangula CGH, & AGH, circa axem rotationis CA, quorum radij baſium ſint vel æquales, vel idem GH: ſint & ſuperficies Conicæ deſcriptæ à lateribus CG, AG circa eundem axem. Dico has ſuperficies Conicas ad invicem eſſe ut latera, CG ad AG. Habent enim Radios rotationis ED, KF æquales; ergo ſuperficies deſcriptæ [*ex Coroll: 1. Propoſit: 3. Cap: 8. Libri 2.*] ſunt ad invicem ut quantitates rotatæ, hoc eſt, ut latera CG ad AG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

Omnium Conorum Iſoſcelium quorum eadem eſt altitudo, proportio ſuperficierum (ſine baſibus) compoſita eſt ex proportione laterum, & ex proportione radiorum baſium.

CONSTAT: [*ex Corollario 3. Propoſ: 3. Cap: 8. Libri 2.*] Latera enim deſcribentia illas ſuperficies, ſunt quantitates rotatæ, & radij baſium ſunt dupli Radiorum rotationis [*ex Propoſ: 2. Cap: 9. Libri 2.*] qui eandem inter ſe rationem habent, quam ſemiſſes. Ergo, &c.

SCHOLIVM.

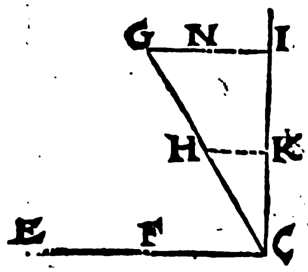
I. *QVOD ſi quis cupiat harum Conicarum ſuperficierum habere proportionem in duobus tantum terminis: ut ſi ſint duo latera duorum conorum* CI, *&* CG, *quorum radij baſium* HI *&* HG, *ex Propoſitione hac erit proportio ſuperficierum Conicarum maioris ad minorem, compoſita ex proportione laterum* CI *ad* CG, *& ex proportione radiorum baſium* HI, *ad* HG. *Ergo* [*iuxta ductum Propoſitionis 23 Sexti*] *fiat ut* HI *ad* HG *ita* CG *ad quartam*: *Erit ergo* [*ex eiuſdem Propoſitionis*

tionis demonstratione] superficies Conica lateris CI, *ad superficiem Conicam lateris* CG, *ut latus* CI, *ad quartam inventam. Quod faciendum erat.*

2. *Cum Propositiones ferè omnes huius Capitis scripta essent venit in mentem alia Propositio huc spectans, sed ne turbaremus ordinem Propositionum iam factum, & numerum earundem, qui in alijs citatus est, ei in hoc Propositionis quarta huius Scholio locum dare voluimus, ut citari possit, ac nominari* Prima Propositio Scholij Propositionis quartæ Capitis 5. Libri 3. *Est autem ista.*

I.

OMNIUM Conorum Isoscelium quorum anguli ad verticem æquales sunt, superficies sine basi inter se sunt ut quadrata, & laterum, & axium, & radiorum basium.



Sint duo Coni descripti à triangulis CGI, CHK *circa axem rotationis* CI, *quorum anguli ad verticem* GCI, HCK *aquales sint, vel idem, & latera* CG, CH *descripserint Conicas superficies. Dico has superficies esse inter se, ut quadrata laterum* CG, CH: *Item ut quadrata axium* CI, CK: *Item ut quadrata radiorum* GI, HK. *Superficies enim ha aquales sunt rectangulis sub dictis lateribus* CG, CH, *& vijs rotationum, quorum Radij* HK, LM, *proportionales ijsdem lateribus. Ergo [ex 20 sexti] sunt in duplicata ratione laterum, hoc est, ut quadratum* CG, *ad quadratum* CH: *& in similibus triangulis* CGI, CHK, *ut quadratum axis* CI, *ad quadratum axis* CK: *item ut quadratum radij* GI, *ad quadratum radij* HK. *Quod erat demonstrandum.*

Rectius fortassis hac Propositio sic enunciaretur.

Omnium similium Conorum Isoscelium superficies sine basi, in duplicata sunt ratione, & laterum, & altitudinum, & semidiametrorum basium.

Demonstratio verò erit eadem: qua cum applicari possit etiam Cylindris rectis, pronuncietur sanè hoc modo:

II.

OMNIUM similium Conorum Isoscelium, & Cylindrorum rectorum superficies sine basibus, in duplicata sunt ratione, & laterum, & altitudinum, & radiorum basium.

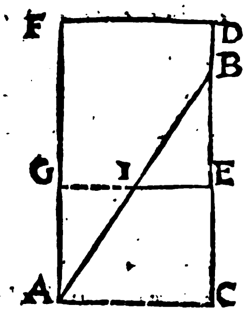
3. *Fuisset etiam interserenda intra Propositiones 17, & 18, alia quam demonstrat Villalpandus noster in Apparatu &c. Libro Demonstrationum Mathematicarum primo, Cap: 6. Propos: 17. quam, ob caussas quas suprà diximus* Tertiam huius Scholij, *si ea opus fuerit vocabimus, & iam nostro modo demonstrabimus.*

III.

SUPERFICIES Cylindri recti, demptis basibus, dupla est superficiei Coni æquicruris, dempta basi, qui eandem cum Cylindro basim, vel æqualem habeat, & latus lateri Cylindri æquale.

Cum quantitates rotata, qua sunt latera Cylindri & Coni aquales sint, & radius circuli basem Cylindri constituentis, qui est Radius rotationis pro Cylindro, duplus sit

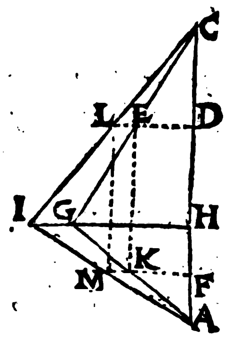
Radij rotationis, pro Cono; Ergo [ex Coroll: 1. Propositionis 3. Cap: 8. Lib: 2] Superficies Cylindrica dupla est Conica. Quod erat demonstrandum.



Quod verò Radius rotationis pro Cylindro, duplus sit Radij rotationis pro Cono, sic habetur. Esto superficies Cylindri descripta à latere *AF*, circa axem *DC*: sit & alia Conica descripta à latere *AB*, quod æquale sit ipsi *AF*, circa eundem axem *DC*; Est ergo Radius rotationis pro superficie Cylindrica æqualis ipsi *AC* vel *FD*, pro Conica verò est Radius *EI*. Dico illum huius esse duplum. Producta enim recta *EI* usque in *G*, ut *EG* etiam æqualis sit Radio rotationis superficiei Cylindricæ: Sed hæc *EG*, dupla est ipsius *EI*, propter triangula similia & æqualia *BEI*, & *AGI*, cum *AB* bisecta sit in *I*. Ergo, &c.

PROPOSITIO V.

Omnium Rhomborum solidorum, quorum eadem est altitudo, superficierum proportio composita est ex proportione laterum simul sumptorum, & ex proportione radiorum basiũ communium.



ESTO Rhombus solidus descriptus à triangulo *AIC*, cuius latera *AI*, *IC*, descripserint circa axem *AC*, superficies conicas Rhombi: sit & aliud triangulum *AGC*, quod descripserit alium Rhombum eiusdem altitudinis *AC* cum priore, & per sua latera *AG*, *GC* circa eundem axem, superficies Conicas. Dico has duas superficies compositas esse, ex proportione laterum *AI*, *IC* simul, ad *AG*, *GC* simul, & ex proportione radiorum basis communis *HI* ad *HG*. Nam [*ex Num: 5. Proposi: 3. Cap: 9. Lib: 2.*] latera *AI*, *IC* simul, habent eundem Radium rotationis *LD* vel *MF*; & alia duo latera *AG*, *GC* simul, habent eundem Radium rotationis *ED* vel *KF*: Ergo [*per Coroll: 3. Propos: 3. Cap: 8. Lib: 2.*] proportio superficierum Conicarum composita est ex proportione laterum *AI*, *IC* simul, ad *AG*, *GC* simul, & ex proportione *MF* ad *KF*, hoc est, ex proportione *IH* ad *GH*, radiorum basis communis. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VI.

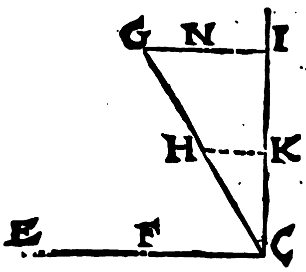
Omnium Rhomborum solidorum quorum eadem est altitudo, superficierum proportio composita est ex proportione laterum seorsim sumptorum.

SINT Rhombi eorumque latera & superficies ut ante. Dico has duas superficies compositas esse ex proportione laterum *AI* ad *IC*, & ex proportione *AG*, ad *GC*, Nam [*ex Propos: 4. huius*] superficies Conicæ laterum

terum AI & AG, compositæ sunt ex proportione AI ad AG, & ex proportione HI ad HG: & superficies Conicæ laterum CI & CG, ex proportione CI ad CG, & ex proportione earundem HI ad HG, dempta ergo utrinq; hac proportione æquali HI ad HG, manet proportio superficierũ dictarum cõposita ex proportione AI ad AG, & ex proportione CI ad CG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Superficies Coni Isoscelis cuius latus æquale est diametro basis, dupla est circuli basim constituentis.



ESTO recta CG superficiem Conicam circa axem CI rotata describens dupla ipsius GI, semidiametro basis Coni, æqualis videlicet diametro eiusdem basis. Dico superficiem Coni duplam esse circuli basim constituentis. Recta enim GI circulum basis describens, cum habeat Radium rotationis NI æqualem Radio HK; sit autem rotata GC dupla ipsius GI; sequitur [*ex Coroll: 1. Propos: 3. Cap: 8. Lib: 2.*] superficiem Coni descriptam à recta GC, duplam esse circuli descripti à recta GI. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

SEQVITUR hinc superficiem curvam Coni Isoscelis cuius latus æquale est semidiametro basis, æqualem esse circulo basem constituenti. Sed quis est ille Conus?

PROPOSITIO VIII.

Superficies Coni Isoscelis sine base, æqualis est circulo, cuius radius medius est proportionalis inter latus Coni, & radium circuli, qui est Coni basis.

HANC demonstrabimus Libro 4. Cap: 1. Propos: 3.

PROPOSITIO IX.

Cuiuscunque Coni Isoscelis superficies, ad basim eam habet rationem, quam latus Coni ad radium circuli, qui basis est Coni.

HÆC Propositio demonstratur Lib: 4. Cap: 1. Propos: 4.

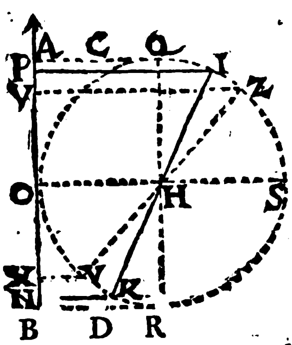
PROPOSITIO X.

Superficies frusti Conici sine basibus, æqualis est circulo, *cuius radius medius est proportionalis inter latus Frusti, & lineam æqualem duobus radijs basium.*

HOC demonstrabimus Libro 4. Cap: 1. Propos: 5.

PROPOSITIO XI.

Omnium Frustorum Conicorum superficies demptis basibus, quorum & latera æqualia; & radij utriusq; basis simul sumpti æquales quoque sunt; etiam ipsæ æquales sunt. Existentibus autem radijs simul sumptis inæqualibus; etiam ipsæ superficies Conicæ inæquales erunt; & eandem ad se invicem proportionem habebunt, quam ijdem radij simul sumpti.



ESTO Frustum Conicum cuius latus *KI*, radij basium, maioris *PI*, minoris *NK*, descriptum à Trapezio *PIKN*, circa axem rotationis *PN*: Sit & aliud Frustum descriptum à Trapezio *VZTX*, cuius latus *ZT* æquale sit lateri *KI*, & radij basium *VZ* & *XT* simul sumpti; sint æquales radijs *PI*, *NK* simul sumptis. Dico superficies Conicas quas describunt rectæ *KI*, *TZ* rotatæ circa axem *PN*, æquales esse; ut & aliorum Frustorum Conicorum; quorum latera & bases; eas quas diximus servant conditiones. Fingatur enim recta *IK* fixa in centro suæ gravitatis *H*, & circa illud circumducta, in eodem plano in quo est circulus *OQSR*, obtinebit ipsa varios situs & inclinationes ad axem rotationis *PN*; & in quovis situ, duobus exceptis, (de quibus Propos: 12. huius) describet illa superficies conicas; ut quando ipsa eadem erit cum recta *ZT*, describet superficiem Conicam Frusti; cuius basium semidiametri sunt *VZ* & *XT*; quæ superficies omnes ideò inter se æquales erunt, quod describantur ab æqualibus lineis rotatis, eundem habentibus Radium rotationis *OH*, qui semper medio loco Arithmeticè proportionalis est inter bases *PI* & *NK*, item inter *VZ* & *XT*, &c. quæ binæ extremæ simul sumptæ, semper æquales sunt alijs binis sibi mutuo correspondentibus simul sumptis: quod pluribus probare superfluum esset. Ergo superficies Conicæ; de quibus in Propositione, omnes inter se æquales sunt. Quod primo loco demonstrandum erat.

Dico secundò si radij duarum basium simul sumpti, non sint æquales duobus alijs radijs similiter simul sumptis: etiam superficies Conicas ab æqualibus lateribus descriptas fore inæquales. Cum enim Radij rotationis sint semisses prædictorum radiorum basium simul sumptorum, etiam ipsi inæquales erunt; ac proinde etiamsi quantitates rotatæ, quæ sunt latera Frustorũ Conicorum æquales sint, existant autem Radij rotationis inæquales, etiam Potestates factæ [*ex Coroll: 1. Propos: 3. Cap: 8. Lib: 2.*] quæ sunt superficies Conicæ, inæquales erunt, & eam inter se rationem habebunt quam Radij rotationis. Quod secundo loco erat demonstrandum.

PROPO-

PROPOSITIO XII.

Superficies Frusti Conici, sine basibus, æqualis est circulo, cuius radius æqualis est lateri Frusti. Eadem Conica superficies æqualis est superficiei Cylindri, cuius altitudo æqualis est lateri Frusti, & radius basis Cylindri Arithmeticè proportionalis inter radios basium Frusti.

IN eadem enim figura in qua finximus latus Frusti sive rectam *IK*, superficiem describentem Conicam, circumferri circa suum centrum *H*, in plano circuli *OQSR*, quando ea situm obtinebit quem habet recta *OS*, hoc est, recta erit ad *PN* axem rotationis, describet ipsa circa eundem axem *PN* rotata circulum, cuius radius *OS* æqualis est ipsi *IK*, & Radius rotationis eadem recta *OH*. Ergo [*per Coroll: 1. Propos: 3, Capitis 8. Lib: 2.*] superficies Conica æqualis est ei quem diximus circulo. Quod primo erat demonstrandum.

Eadem deinde recta *IK*, quando situm obtinebit eum quem habet recta *QR*, hoc est, parallela sit ipsi *PN* axi rotationis, describet ipsa circa eundem axem rotata superficiem Cylindricam, cuius Radius rotationis est recta *OH*, media proportionalis Arithmeticè inter *PI* & *NK* radios basium Frusti. Ergo [*per idem Corollarium*] hæc superficies Cylindrica æqualis est superficiei Conicæ. Quod secundò demonstrandum erat.

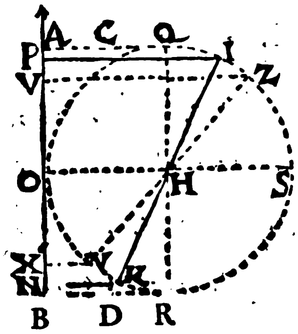
PROPOSITIO XIII.

Omnium Cylindrorum rectorum superficies, sine basibus, quorum latera sive altitudines æquales sunt, inter se eam rationem habent, quam radij basium. Et contra, si altitudines sint inæquales, & radij basium æquales, superficies Cylindricæ, inter se erunt ut altitudines.

CONSTAT utrunque ex Corollario 1. Propos: 3. Cap: 8. Lib: 2. Est enim eadem quantitas rotata, latera nimirum Cylindrorum æqualia vel inæqualia, quorum Radij rotationis æquales sunt radijs circulorum bases constituentium. Ergo superficies Cylindricæ inter se sunt, ut radij basium, vel altitudines. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Superficies cuiusvis Cylindri recti, cuius latus sive altitudo æqualis est diametro basis, æqualis est ipsis basibus simul sumptis; sive circulo cuius radius æqualis est altitudini.



ESTO rectangulum *AQRB* Cylindrum describens circa axem rotationis *AB*, cuius latus *QR* sit æqualis diametro basis, hoc est dupla ipsius *AQ* vel *BR*. Dico superficiem Cylindricam æqualem esse utrique basi simul, vel circulo cuius radius *OS* æqualis est ipsi *QR*. Cum enim Radius rotationis *OH* lateris *QR*, quod circa *AB* rotata superficiem Cylindricam describit, æqualis sit radijs *AC*, *BD*, basium *AQ*, *BR*, quæ circa eundem axem circulos basium describunt, simul sumptis, sint etiam quantitates rotatæ *AQ*, *BR* simul sumptæ æquales quantitati rotatæ *QR*. Ergo [*per Coroll: 1. Propos: 3. Cap: 8. Lib: 2.*] quantitates factæ, hoc est, duæ bases simul æquales sunt superficiei Cylindricæ. Quod primò demonstrandum erat.

Secundum ex eodem Corollario constat. Sunt enim quantitates rotatæ *QR* & *OS* æquales, & Radius rotationis utriusque idem *OH*. Ergo, &c. Quod secundò demonstrandum erat.

PROPOSITIO XV.

Omnis Cylindri recti superficies ad basim eam habet rationem, quam latus Cylindri ad semissem radij basis.

ESTO in eadē figura Cylindrus ut ante. Dico superficiem Cylindricam descriptam à latere *QR*, Radio rotationis *OH*, ad superficiem basis descriptam ab *AQ*, Radio rotationis *AC*, (semisse ipsius *AQ*) esse ut *QR* ad *AC*. Superficierum enim illarum proportio componitur [*ex Coroll: 3. Propos: 3. Cap: 8. Lib: 2.*] ex proportione *QR* ad *OH*, & ex proportione *AQ*, hoc est, eadem *OH* ad *AC*; Ergo [*per Coroll: 4.*] superficies Cylindrica ad basim est ut *QR* ad *AC*, hoc est, ut latus Cylindri ad semissem radij basis. Quod erat demonstrandum.

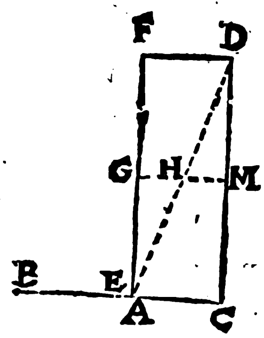
PROPOSITIO XVI.

Omnis Cylindri recti superficies sine basibus, æqualis est circulo cuius radius est medio loco proportionalis, inter latus & diametrum basis Cylindri.

HOC demonstrabimus Propos: 2. Cap: 1. Lib: 4.

PROPOSITIO XVII.

Superficies Cylindri recti ad superficiem Coni, eandem habentis altitudinem & basim cum Cylindro, est ut dupla altitudo ad latus Coni.



SIT Cylindrus descriptus à rectangulo *AFDC*, circa axem rotationis *DC*: sit & Conus descriptus à triangulo *ADC*, habente eandem altitudinem *DC* cum Cylindro, circa eundem axem. Dico superficiem Cylindricam descriptam à latere *FA*. Radio rotationis *MG*, ad superficiem Conicam (excipiuntur enim bases) descriptam à latere *AD* esse, ut dupla altitudo *CD*, ad latus Coni *AD*. Harum enim superficierum quantitas componitur, Cylindri quidem ex ductu [*per Propos. 6. Cap. 1. huius Libri*] ipsius *FA*, in circumferentiam basis; vel quod idem est, ex ductu duplæ ipsius *FA*, in semicircumferentiam: Coni autem [*per Propos. 3. eiusdem*] ex ductu ipsius lateris *AD*, in eandem semicircumferentiam. Ergo [*per 1. Sexti*] superficies Cylindrica, ad Conicam est, ut dupla altitudo *FA*, ad latus Coni *AD*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis Sphæræ superficies, æqualis est circulo maximo quater sumpto.

HOC demonstrabimus Propos: 7. & aliter in Scholio Propositionis 10, & aliter etiam in Corollario Propositionis 11. Cap: 1. Libri 4.

PROPOSITIO XIX.

Superficies Cylindri recti Sphæram stringentis unà cum basibus, sesquialtera est superficiei Sphæræ.

HANC demonstrabimus Propos: 9. Cap: 1. Lib: 4.

COROLLARIVM.

EX binis proxime præcedentibus Propositionibus sequitur superficiem Cylindri recti Sphæram stringentis, sine basibus, æqualem esse superficiei Sphæræ. Ex 18 enim Sphæræ superficies est æqualis circulo maximo quater sumpto; ex 19. verò superficiem Cylindri unà cum basibus esse sesquialteram superficiei Sphæræ, sive circulo maximo quater sumpto, demptis ergo ex Cylindro ipsius basibus, hoc est, binis circulis maximis, manet superficies Cylindrica æqualis superficiei Sphæræ. Sed Propositionem hanc nos nostro modo sic demonstrabimus.

PROPOSITIO XX.

Superficies Cylindri Sphæram stringentis, sine basibus, æqualis est superficiei Sphæræ.

SUPERFICIES Sphæræ [*ex Propos. 1. Cap. 2. Libri huius*] componitur ex ductu duplæ diametri Sphæræ in semicircumferentiam circuli maximi

ximi eiusdem Sphæræ; sive quod idem est, ex ductu diametri in totam circumferentiam: Sed & superficies Cylindrica [*ex Propos. 6. Cap. 1. Libri huius*] componitur ex ductu eiusdem diametri in eandem totam circumferentiam. Ergo hæ productæ superficies Sphærica & Cylindrica inter se æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

SEQVITUR hinc manifeste superficiem Cylindri hemisphærium stringentis, sine basibus, æqualem esse superficiei hemisphærij; cum utriusque duplæ sint æquales.

PROPOSITIO XXI.

Portionis Sphæræ superficies æqualis est circulo, cuius radius adæquat rectam à vertice portionis ad circumferentiam basis ductam.

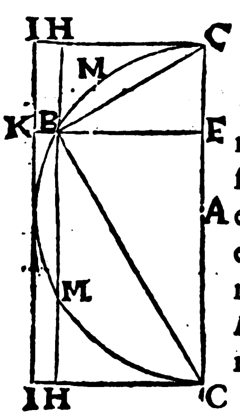
PROPOSITIO hæc demonstrabitur Lib: 4. Cap: 1. Propos: 10.

COROLLARIUM.

EX hac & prima Propositione huius Capitis sequitur, superficies convexas Portionum quarumvis, eiusdem Sphæræ, inter se esse ut quadrata rectarum illarum ductarum à verticibus Portionum ad circumferentias basium.

PROPOSITIO XXII.

Superficies binarum Portionum Sphæram componentium, inter se sunt ut altitudinum quadrata.



SINT duo semisegmenta circuli *CMB*, alterum maius alterum minus semicirculo, quæ circa axem *CEAC* rotata describant duas Portiones sphæricas integram sphæram componentes; & consequenter arcus *CMB* describant superficies convexas Portionum. Dico has superficies inter se esse ut altitudinum *CE*, *EAC* quadrata. Hæ enim superficies [*ex 21. & 1. Propositionibus huius*] inter se sunt, ut rectarum *CB*, *BC* quadrata, hoc est, in triangulis similibus *CBE*, *BEC* ut rectarum *CE*, *EAC*, (quæ sunt altitudines Portionum) quadrata. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Portionis Sphæræ superficies æqualis est superficiei Cylindri recti (exceptis basibus) qui eandem cum Portione habuerit altitudinē, & basim circulo maximo Sphæræ æqualem.

ESTO

ESTO semisegmentum circuli *BMCE*, quod Portionem Sphæræ hemisphærio sive maiorem sive minorem descripsit, circa axem *CEC*, sit & rectangulum *CIKE*, quod circa eundem axem rotatum descripsit Cylindrum, cuius altitudo *CE* eadem quæ Portionis, & semidiameter basis *KE* semidiametro Sphæræ *AC* æqualis. Dico superficiem Cylindricam quam latus *KI* describit, superficiei convexæ quam arcus *BMC* describit æqualem esse. Superficies enim Cylindrica [*ex Propos: 16. huius*] æqualis est circulo cuius radius medio loco proportionalis est, inter latus & diametrum basis Cylindri. Sed talis radius est recta ducta *BC*; est enim in triangulo rectangulo *CBC* latus *BC* media proportionalis [*ex Coroll: 8. Sexti*] inter *CE* altitudinem Cylindri, & diametrum *CEC* basis. Ergo superficies Cylindrica æqualis est huic circulo. Sed huic circulo æqualis etiam est [*per Propos: 21. huius*] superficies convexa Portionis: Ergo hæc æqualis est superficiei Cylindricæ. Quod erat demonstrandum.

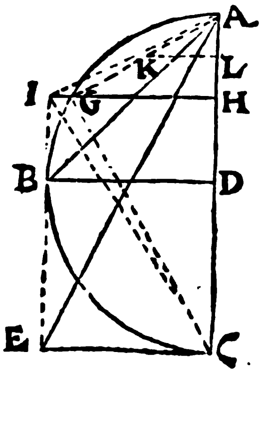
PROPOSITIO XXIV.

Portionis Sphæræ superficies convexa, ad superficiem convexam sive curvam Cylindri, qui eandem cum Portione habet altitudinem, & basim æqualem, proportionem habet quam semidiameter circuli maximi Sphæræ, ad semidiametrum basis.

SINT omnia ut ante in eadem figura; & sit insuper rectangulum *CHBE* describens circa axem *CE* rotatum Cylindrum, cuius altitudo *CE* eadem cum Portione, & semidiameter basis eadem *BE*. Dico superficiem Portionis ad superficiem Cylindri, quam describit latus *HB*, habere eam proportionem, quam habet semidiameter *AC* vel *KE* circuli maximi Sphæræ, ad semidiametrum *BE* utriusq; basis, & Portionis & Cylindri. Superficies enim Portionis est [*per præcedentem*] æqualis superficiei Cylindricæ cuius semidiameter basis *KE*; sed hæc ad superficiem Cylindricam cuius basis *BE* [*per Propos: 13. huius*] est ut *KE* ad *BE*. Constat ergo propositum.

PROPOSITIO XXV.

Superficies Sphæræ ad superficiem Coni (sine base) cuius altitudo æqualis est diametro Sphæræ, & basis circulo maximo, est ut dupla diameter circuli maximi, ad latus Coni.



ESTO *ABC* semicircumferentia circuli maximi, quæ descripsit superficiem Sphæricam rotata circa axem *AC*, & sit triangulum rectangulum *ACE* quod Conum descripsit, cuius altitudo diameter *AC*, & radius basis *EC* semidiametro *BD* æqualis, latusque quæ Conicam superficiem descripsit *AE*. Dico superficiem Sphæricam ad Conicam esse, ut dupla diameter *AC*, ad latus Coni *AE*. Superficies enim Sphærica [*per Propos: 1. Cap: 2. huius Libri*] fit ex ductu duplæ diametri in semicircumferentiam circuli maximi: Superficies verò Conica [*ex Propos: 3. Cap: 1. huius Libri*] fit ex ductu eiusdem semicircumferentiæ in latus Coni. Ergo [*per 1. Sexti*] superficies Sphærica ad Conicam est, ut dupla diameter maximi circuli Sphæræ, ad latus Coni. Quod demonstrandum erat.

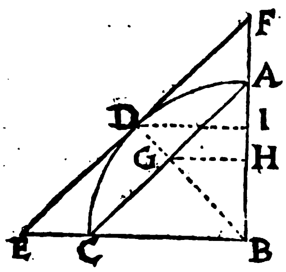
PROPOSITIO XXVI.

Hemisphærij superficies, ad superficiem Coni (sine base) cuius altitudo æqualis est semidiametro Sphæræ, & basis circulo maximo, est ut diameter Sphæræ ad latus Coni.

DEMONSTRATUR ut præcedens adhibito loco Propositionis 1. Cap: 2. huius Libri, eiusdem Corollario.

SCHOLIVM.

SIC comparari potest Hemisphærij superficies, cum superficiebus Conicis Hemisphærio inscripti & circumscripti, & ipsæ hæ superficies & inter se, & cum circulis basium: id quod breviter sic faciemus.



1. *Esto enim quadrans* ADC *peripheria circuli maximi sphæræ, superficiem hemisphærij circa axem* AB *rotatus, describens: Coni inscripti latus* AC; *circumscripti* FE, *describentia circa eundem axem superficies Conicas, existentibus Radijs rotationis* GH *&* DI. *Dico primò superficiem Conicam circumscriptam, ad superficiem inscriptam esse duplam. Circumscriptæ enim superficiei ad inscriptam proportio componitur* [*per Coroll: 3. Propos: 3. Cap: 8. Lib. 2.*] *ex ratione* EF *ad* CA, *hoc est, ex ratione medietatum* DF *ad* GA, *& ex ratione* DI, *hoc est, eiusdem* GA (DI *enim &* GA *sunt sinus eiusdem arcus* DA, *ac proinde æquales*) *ad* GH. *Ergo* [*per Coroll. 4. eiusdem Propositionis*] *Proportio Conicæ superficiei circumscriptæ, ad Conicam superficiem inscriptam est ut* DF *ad* GH, *hoc est, in proportione dupla*: GH *enim est semissis ipsius* CB *semidiametri sphæræ, cui æqualis est* DF, *semilatus quadrati circulo circumscripti. Constat ergo assertum.*

2. *VEL sic: Proportio Conicæ superficiei circumscriptæ, ad Conicam inscriptam (per Propos. 2. Scholij Propositionis 4. huius Capitis) est in duplicata proportione laterum* EF, CA: *Sed hæc proportio duplicata, hoc est quadrati ipsius* EF *ad quadratum* CA, *laterum videlicet quadratorum circulo circumscriptorum & inscriptorum, est dupla. Manifestum est ergo propositum.*

3. *Dico secundò superficiem Conicam hemisphærio circumscriptam, ad superficiem hemisphærij esse ut duplum latus* CA *circulo inscriptum, ad latus* EF *circulo circumscriptum, quod æquale est diametro Circuli. Nam* [*ex Propos. hac 26*] *hemisphærij superficies ad Conicam sibi inscriptam est ut* EF, *ad* CA *Coni latus: superficies autem Conica inscripta, ut iam probavimus, est subdupla superficiei Conicæ circumscriptæ: Ergo superficies Conica circumscripta, ad superficiem hemisphærij est ut dupla* CA *ad* EF. *Quod est propositum.*

4. *Dico*

4. *Dico tertiò superficies Conica inscripta hemisphærio, ad suam basem sive circulum maximum, est ut latus Coni ad radium circuli. Demonstrabitur hoc Libro 4. Cap. 1. Propositionis 4.*

5. *Dico quartò Superficiem Conicam inscriptam hemisphærio, ad circulum qui est basis Coni circumscripti, eam habere proportionem quam* CB *radius circuli maximi habet, ad* EB *radium basis Coni circumscripti. Latus enim Coni inscripti* AC, *quod describit Conicam superficiem, per Radium rotationis* GH, *æqualis est radio* EB *qui describit superficiem Circuli, per Radium rotationis qui est semissis ipsius* EB. *Ducta enim recta* DB, *triangula rectangula* CBA, EDB, *sunt similia & æqualia, ergo* AC *æquatur ipsi* EB: *quare superficies descriptæ inter se sunt* [*per Coroll. 1. Propos. 3. Cap. 8. Lib. 2.*] *ut Radij rotationis, sive dupla illorum, quæ sunt* CB *&* EB. *Quod erat demonstrandum.*

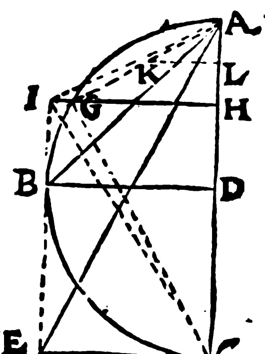
PROPOSITIO XXVII.

Portionis Sphæræ superficies ad superficiem Coni sine base, qui eandem cum Portione habuerit altitudinem, & basim circulo maximo Sphæræ æqualem, eam habet proportionem quam dupla altitudo ad latus Coni.

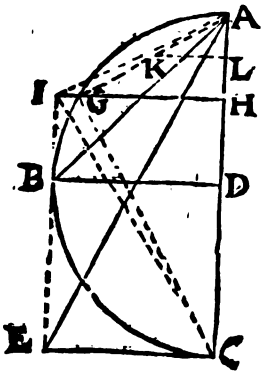
SUPERFICIES Portionis [*ex Propos. 23. huius*] æqualis est Cylindricæ superficiei cuius altitudo eadem est quæ Portionis; & basis æqualis circulo maximo Sphæræ: Sed hæc Cylindrica Superficies [*ex Propos. 17 huius*] ad superficiem Coni in Propositione descripti, est ut dupla altitudo ad latus Coni: Ergo etiam superficies Portionis Sphæræ ad eandem Conicam superficiem, est ut dupla altitudo ad latus Coni. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Omnis Portionis Sphæræ superficies ad superficiem Coni, basi excepta, qui eandem cum Portione altitudinem habet, & basim eandem vel æqualem, proportionem habet eam quam latus Coni ad radium basis communis, vel æqualis.



ESTO Portio Sphæræ descripta à semisegmento circuli *AGH*, vel *CBGH*; & Conus à triangulo *AGH* vel *CGH*, superficies verò Conicæ à latere *AG*, vel *CG*, omnia circa eundem rotationis axem *AC*. Dico superficiem Portionis Sphæræ ad superficiem Conicam esse, ut latus Coni ad radium *GH* basis communis. Superficies enim Portionis cum [*per Propos. 21. huius*] æqualis sit circulo cuius radius æquatur lateri Coni *AG* exempli gratia, hic autem circulus componatur [*per*



Num. 1. Propos. 2. Cap. 9. Lib. 2.] ex ductu ipsius AG, in peripheriam Radij rotationis AK, semissis ipsius AG; superficies verò Coni [*ex eadem proxime citata Propositione*] ex ductu eiusdem AG, in peripheriam cuius radius KL: Ergo hæc superficies Sphærica nimirum ad Conicam erit ut peripheria illa ad hanc, hoc est, ut radius AK ad KL, hoc est, ut eorundem dupli, latus scilicet AG Coni, ad radium GH basis communis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Superficies Annuli stricti æqualis est superficiei Cylindri, (sine basibus) cuius altitudo est recta æqualis peripheriæ circuli Annulum describentis, & basis eidem circulo æqualis.

SUPERFICIES Annuli stricti [*per Num. 1. Propos. 5. Cap. 2. huius Libri*] componitur ex ductu circumferentiæ circuli in Propositione nominati in se ipsam: Sed etiam superficies Cylindri hoc loco descripti componitur [*per Propos. 6. Cap. 1. Libri huius*] ex ductu altitudinis quæ æqualis est eidem circumferentiæ, in circumferentiam basis, quæ est ipsa eadem circumferentia. Ergo hæ productæ superficies Annuli stricti, & Cylindrica æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex prædictis utramque superficiem, & Annuli stricti, & Cylindri nominati, quamlibet seorsim sumptam, æqualem esse quadrato peripheriæ circuli illius qui Annuli superficiem descripsit, vel Cylindri basis est.

PROPOSITIO XXX.

Annuli absoluti superficies æqualis est superficiei Cylindri, (sine basibus) cuius altitudo æquatur viæ rotationis, per quam Annulus descriptus est.

SUPERFICIES Annuli absoluti [*per Num. 2. Propos. 5. Cap. 2. huius Libri*] componitur ex ductu viæ rotationis in circumferentiam circuli, qui rotatione sua Annulum descripsit: Sed & superficies Cylindri componitur ex ductu altitudinis Cylindri, quæ hoc loco æqualis est viæ rotationis, in eandem circumferentiam. Ergo productæ superficies Annuli & Cylindri æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLI-

SCHOLIUM.

ET ut tandem rumpamus glaciem superficies omnium Annulorum & Strictorum & Absolutorum à perimetro cuiuscunq; figuræ planæ descriptæ, sive rectilineo, sive curvilineo, sive mixto, à Lunularum vel quavis alia figurarum planarum, earundemq; segmentorum seu portionum quarumcumq;, æquales sunt superficiebus eorum corporum, quæ ad modum Cylindri recti, vel columnæ, vel parallelepipedi, vel prismatis &c. perpendiculariter insistunt figuræ illi planæ cuius perimeter rotatus circa axem superficiem Annuli descripsit; quod ipsum, & quænam sit horum corporum altitudo, peculiari eaq; universali Propositione hoc loco in conspectum dare, eandemq; demonstrare volumus.

PROPOSITIO XXXI.

Annuli omnes Stricti & Absoluti, à quacunq; plana figura rotata descripti, superficies habent æquales, superficiebus sive Cylindri, sive prismatis, sive cuiuscunq; alterius corporis columnaris recti sine basibus, quorum corporum bases sunt eædem figuræ à quibus Annuli descripti sunt, & altitudo eorum æqualis Viæ rotationis, hoc est, circuli peripheriæ æqualis, cuius radius ad axem rotationis rectus est, ex centro gravitatis perimetri figuræ planæ, quæ Annulum descripsit, ad eundem axem eductus.

DEMONSTRATUR plane eodem modo quo præcedentes. Annuli enim superficies habetur, si ducatur perimeter figuræ Annulum describentis, in viam rotationis: Sed & corporis illius erecti cuius altitudo adæquat viam eandem rotationis, si ipsa ducatur in eandem basis, seu figuræ rotatæ perimetrum, producit corporis ipsius superficiem. Ergo hæ superficies Annuli & corporis columnaris recti inter se æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

1. *QVI plura pro hac re desiderat legat ea quæ scripsimus Libro secundo, à Propositione quarta Capitis noni, usque ad finem Capitis decimi.*
2. *Colligi hinc potest modus mensurandi superficies omnium Annulorum, ad sua loca referendus Cap. 1. & 2. Libri huius, modo constet quantitas perimetri figuræ planæ superficies Annulorum describentis, & centri gravitatis illius remotio ab axe rotationis.*
3. *Sed & plures aliæ rationes pro aliis superficiebus dimetiendis, quam eæ fuerunt quas Cap. 1. & 2. huius Libri tradidimus, ex Propositionibus huius Capitis derivari commode potuissent: Immo & plures pro hoc Capite superficierum corporum inter se comparari; & quarundam ex Propositionibus traditis Conversas demonstrari:*

ſed laborem hunc alijs committimus, nobis ſatis fuerit fontes aperuiſſe, unde rivuli infiniti, quorum non paucos nos ipſi quaſi animi cauſſa deduximus, ſcatent: ſi tamen in his etiam nimij fuimus, hoc ipſum à Lectore deprecamur. Ad fontes autem maxime ſpectat ſequens Propoſitio, hoc loco non ommittenda.

PROPOSITIO XXXII.

Superficies cuiuſcunq; corporis Rotundi, æqualis eſt parallelogrammo rectangulo, cuius alterum latus æquale eſt ei lineæ quæ rotata ſuperficiem deſcripſit, alterum verò via rotationis.

HÆC Propoſitio ſatis ſuperque demonſtrata eſt Propoſitione 3. Capitis 8. Libri 2. ita ut non opus ſit hic plura verba facere.

CAPVT VI.

DE VARIA ROTUNDORUM Corporum inter ſe Comparatione.

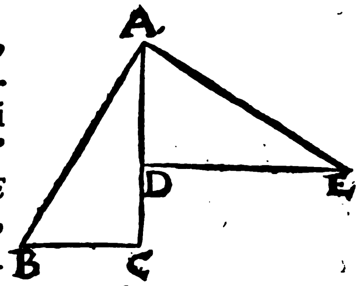
ETSI longe ſpacioſior campus ſeſe offerat Corporum inter ſe digladiantium, concurrentium, immo & ſeſe unientium inſpiciendi, & ad certam normam dirigendi, quam ſuperficierum eorundem; cauſſa quidem in promptu eſt, ignoratio nimirum quantitatis linearum quæ ſuperficies deſcribunt, arearum verò figurarum planarum unde Corpora oriuntur cognitio amplior; unde & plurium Corporum proportiones liceret afferre in medium quam Superficierum: quia tamen quilibet Geometra noſtra aſſecutus principia, quamplurimas excogitare ac demonſtrare nullo quaſi negocio poterit; idcircò modum imponemus, & aliquas tantum, quemadmodum etiam Capite præcedenti de Superficiebus monuimus, ſeligemus, & quaſi exempli gratia demonſtrabimus. Comparationes autem Conorum & Cylindrorum, ubi id quidem commode fieri poterit, in eaſdem conijciemus Propoſitiones, cum utræq; ex noſtris principijs eodem modo demonſtrentur; imitantes hac in rè Euclidem qui idem præſtitit in Elementis Libro 12, ut videbimus infrà Libro 4. Capite 3. Cætera hic monenda ſuis locis patebunt.

PROPOSITIO I.

Coni quorum latera æqualia, & altitudo unius ſit æqualis

radio

radio basis alterius, inter se sunt ut radij basium, & reciprocè ut altitudines.



SINT duo Coni descripti à triangulis *A C B*, *A D E* circa axem rotationis *A C*, quorum latera *A B*, *A E* sint æqualia, & altitudo *A C* Coni unius *A B C*, æqualis radio *D E* basis Coni alterius *A D E*. Dico hos Conos, *A C B* nimirum ad *A D E* esse, ut radij *B C* ad radium *D E*; vel reciprocè ut altitudo *A D* coni alterius, ad altitudinem *A C*, Coni unius. Duo enim triangula Conos describentia sunt æqualia, propter latera æqualia ex hypothesi, *A B* ipsi *A E*, & *A C* ipsi *D E*; *B C* verò ipsi *A D* [*ex penultima Primi*] Ergo triangula quæ sunt quantitates rotatæ [*per Coroll. 1. Propos. 3. Cap. 8. Lib. 2*] sunt æquales; Ergo Coni facti sunt inter se ut Radij rotationum, sed hi sunt trientes basium. Ergo Coni inter se sunt ut *B C*, *D E* radij basium. Quod primò erat demonstrandum.

Possunt autem hi duo Coni mutari altitudines in bases, & sic ex demonstratis proportio illorum nihilominus erit ut radiorum basium, hoc est reciprocè ut altitudines *A D*, ad *A C*. Quod secundò erat demonstrandum.

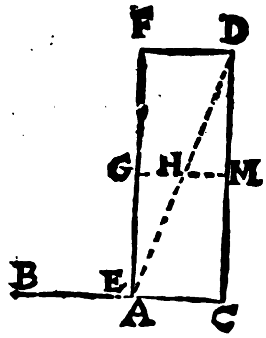
PROPOSITIO II.

Omnis Cylindrus rectus habens æqualem basem & altitudinem cum Cono, ipsius est triplus.

HANC demonstrabimus infrà Lib: 4. Cap: 3. Propos: 2.

PROPOSITIO III.

Cylindrus, cuius parallelogrammum rectangulum quod ipsum descripsit, æquatur basi eius Parallelepipedi, cuius altitudo adæquat semissem circumferentiæ basis Cylindri, æqualis est ipsi Parallelepipedo.



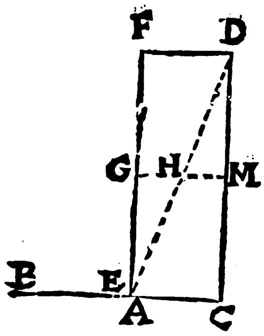
ESTO parallelogrammum rectangulum *A C D F* quod descripserit Cylindrum, cuius circuli qui basim constituit radius sit *A C*. Sit & aliquod Parallelepipedum cuius basis sit æqualis rectangulo *A C D F*, & altitudo ipsius adæquet semicircumferentiam circuli cuius radius *A C*. Dico Cylindrum hunc æqualem esse Parallelepipedo.

Corpus enim Cylindricum componitur ex ductu semicircumferentiæ basis, quæ est æqualis viæ rotationis, in rectangulum *A C D F*: Sed & corpus Parallelepipedi efficitur

efficitur si ipsius altitudo, quæ æqualis ponitur eidem semicircumferentiæ, ducatur in ipsius basem; quæ est idem rectangulum *ACDF.* [*utrumq; constat ex Propos. 3. Cap. 8. Lib. 2.*] Ergo duo illa corpora sunt inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Conus, cuius triangulum rectangulum quod ipsum descripsit, æquatur basi eius Prismatis cuius altitudo adæquat semissem circumferentiæ basis Coni, æqualis est ipsi Prismati.



DEMONSTRATUR eodem prorsus modo, quo antecedens demonstrata est, dummodo loco rectanguli *ACDF*, intelligatur triangulum *ADC*.

SCHOLIUM.

NON est autem necesse ut bases tam Parallelepipedi quam Prismatis, sint similes; illis quas diximus rectangulo & triangulo, sufficit ut sint tantum quo ad aream æquales, ut Propositio utraq; verificetur: idem enim fit productus. Quod idem dici potest etiam de Propositione sequenti.

PROPOSITIO V.

Sphæra, cuius semissis circuli maximi qui ipsam descripsit, æquatur basi eius Parallelepipedi, cuius altitudo adæquat quatuor tertias diametri Sphæræ, æqualis est ipsi Parallelepipedo.

CORPUS Sphæræ componitur ex ductu areæ semicirculi maximi qui Sphæram descripsit, in quatuor tertias diametri Sphæræ [*per Propos. 1. Cap. 4. huius Libri*] Sed & Parallelepipedum, cuius basis adæquat aream semicirculi maximi; componitur ex ductu basis in altitudinem [*per Propos. 3. Cap. 8. Libri 2.*] quæ cum æqualis ponatur quatuor tertijs diametri Sphæræ, constat propositum.

COROLLARIUM I.

MANIFESTUM est hinc Cylindrum, cuius basis æqualis est semissi circuli maximi Sphæræ, sive, quod in idem recidit, cuius radius basis ad radium Sphæræ, est ut costa quadrati ad diametrum; altitudo verò adæquat quatuor tertias diametri, ipsi Sphæræ æqualem esse.

COROLLARIUM II.

SEQUITUR ulterius ex his, & ex Scholio Propositionis sequentis, Sphæram æqualem esse lem esse cuicunque Corpori Columnari, habenti basem æqualem semissi circuli maximi, & altitudinem quatuor tertiarum diametri Sphæræ.

PROPOSITIO VI.

Cylindri & Parallelepipeda, quorum bases & altitudines æquales sunt, & ipsa corpora æqualia sunt.

VTRUMQVE enim corpus componitur ex ductu altitudinis in basem [*ex Propos: 3. Cap: 8. Libri 2.*] cum ergo tam bases quam altitudines ponantur æquales, constat propositum. Æqualitatem autem intelligimus non tantum Cylindrorum inter se, & Parallepipedorum inter se, sed eam etiam extendimus ad Cylindros & Parallelepipeda inter se, ut æqualis dicatur Cylindrus Parallelepipedo, & contra.

COROLLARIVM. I.

HINC colligitur manifeste Cylindros & Parallelepipeda æqualium basium & inæqualium altitudinum, esse inter se ut altitudines. Et si sint inæqualium basium & æqualium altitudinum esse inter se ut bases.

COROLLARIVM. II.

QVIA vero basis Cubi stringens æque altum Cylindrum, ad huius Cylindri basim est, [*per Coroll: 2. Propos: 4. Cap: 6. Lib: 2.*] ut dupla diameter ad semicircumferentiam; Ergo corpus Cubi ad corpus Cylindri, erit etiam ut dupla diameter ad semicircumferentiam: sive ut tripla diameter, ad tres quadrantes circumferentiæ.

COROLLARIVM III.

SED Cylindrus idem ad Sphæram quam stringit [*ex Propos: 16. huius*] est ut 3 ad 2, hoc est ut tres quadrantes circumferentiæ ad duos. Ergo Cubus ad Sphæram quam stringit, ex præcedenti Corollario est ut tripla diameter ad duos quadrantes, sive semissem circumferentiæ.

Hanc proportionem pluribus demonstrat noster Villalpandus Lib: 1. Cap: 4. Propos: 9.

SCHOLIVM.

1. *PROPOSITIO hæc extendi potest ad omnia Corpora Columnaria, cuiuscunque figuræ bases habeant, dummodo illæ quo ad aream inter se sint æquales: Hæc enim corpora omnia componuntur ex ductu areæ basis in altitudinem.*

2. *Et quia inter hæc Corpora connumerantur etiam Cylindri, sequitur & hinc, & ex Propositionibus 9 & 10 proxime sequentibus: Omnia Corpora Columnaria sub eadem altitudine existentia, inter se esse ut bases: Et super æqualibus basibus existentia Corpora Columnaria, inter se esse ut altitudines.*

3. *Immo cum ex Corollario 1. Propositionis 5 præcedentis Sphæra æquetur ei Cylindro, cuius basis æqualis est semissi circuli maximi in Sphæra, & altitudo quatuor tertiarum diametri, etiam ipsa Sphæra comparari potest, cum quocunque Corpore Columnari, ex Coroll: 2.*

PROPOSITIO VII.

Omnis Conus habens æqualem basem & altitudinem cum Parallelepipedo, ipsius est subtriplus.

EX Propositione 2. huius, Conus est subtriplus Cylindri; Ergo per præcedentem est etiam subtriplus Parallelepipedi. Constat igitur propositum.

COROLLARIUM.

IDEM sequitur de Conis quod ante de Cylindris; Conos nimirum æqualium basium & inæqualium altitudinum, inter se esse ut altitudines; & si sint inæqualium basium & æqualium altitudinum, inter se esse ut bases.

PROPOSITIO VIII.

Æqualium Conorum & Cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum Conorum & Cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: illi sunt æquales.

CONSTAT hoc ex binis præcedentibus, & ex 34 undecimi. quare plura non addimus.

PROPOSITIO IX.

Sub eadem altitudine existentes Coni & Cylindri, inter se sunt, ut bases.

CONSTAT hoc ex Corollarijs binis præcedentibus. Propositionem tamen hanc demonstrabimus aliter Lib: 4. Cap: 3. Propos: 3.

PROPOSITIO X.

Super æqualibus basibus existentes Coni & Cylindri, inter se sunt ut altitudines.

PROPOSITIONIS huius quemadmodum præcedentis veritas ex ijsdem, quæ diximus Corollarijs, constat; eam tamen aliter demonstrabimus Libro 4. Cap: 3. Propos: 5.

COROLLARIUM.

EX binis præcedentibus Propositionibus manifeste sequitur proportionem Coni ad Conum, & Cylindri ad Cylindrum, componi ex proportione basium, & ex proportione altitudinum. Nam si bases sunt æquales, per 10, ipsi sunt ut altitudines: Si verò

verò altitudines sunt æquales, per 9, ipsi sunt ut bases: Sublatis ergo proportionibus æqualitatis, ipsi inter se manent compositi ex proportione basium, & ex proportione altitudinum, qualescunque tandem sint bases, vel altitudines.

PROPOSITIO XI.

Similes Coni & Cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum basium.

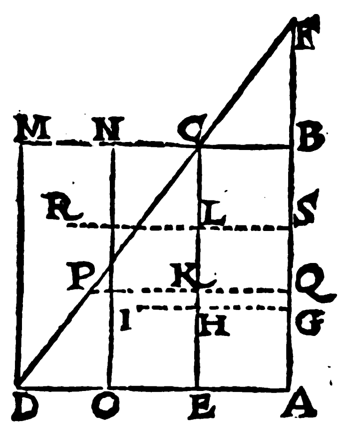
SED & hanc in honorem Euclidis demonstrabimus infrà Lib: 4. Cap: 3. Propos: 4.

SCHOLIVM.

OMNIA quæ hactenus proposuimus de Conis, Propositionibus nimirum quarta, 7, 8, 9, 10, & undecima applicari etiam suo modo possunt Rhombis solidis, id quod brevitatis caussa omittimus, cum satis sit hoc ipsum verbo indicasse.

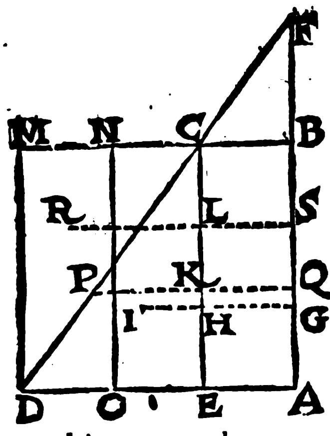
PROPOSITIO XII.

Omne Frustum Conicum ad Cylindrum, cuius eadem est altitudo quæ Frusti, & basis eadem cum basi maiori, est ut rectangulum cuius latus unum, est recta inter radios basium Arithmeticè media proportionalis, alterum verò quod habetur, quando fit, ut radij basium Frusti simul, ad radium maiorem, ita triens altitudinis eiusdem ad quartam; & ut eadem altitudo ad differentiam radiorum basium, ita quarta inventa ad aliam, & hæc alia minori radio adijcitur: ad quadratum radij maioris. Ad Cylindrum verò eiusdem altitudinis & basem minorem habentis, ut idem rectangulum, ad quadratum radij minoris.



ESTO Frustum Conicum descriptum circa axem *AB*, quæ ipsius est altitudo, à Trapezio *ABCD*, radij basium maioris *AD*, minoris *BC*. Sint etiam Cylindri descripti à rectangulis *MA*, *CA*. Dico Frustum Conicum ad maiorem Cylindrum esse, ut rectangulum sub *AO*, quæ est inter *CB*, *DA* media proportionalis Arithmeticè, & sub *QP*; ad quadratum *AD*: ad minorem verò Cylindrum ut idem rectangulum, ad quadratum *CB*. Latus autem *QP* haberi si fiat primo ut *DA*, *CB* simul ad *AD*, ita *LH* triens altitudinis ad *LK*, deinde ut *CE* ad *ED*, ita *CK* ad

 KP, &



KP, & hæc *PK*, adijciatur ipsi *CB*, hoc est ipsi *KQ*, ut fiat *PQ*. In primis constat ex nostra compositione Potestatum rotundarum, Cylindri & Frusti Conici, Frustum quidē Coni haberi si Radij rotationis (quem demonstravimus [*Num: 5. Propos: 2. Cap: 3. huius Libri*] esse semissem ipsius *PQ*) peripheria, ducatur in Trapezium *ABCD*, vel quod idem est, in rectangulum ipsi æquale *NA*: Cylindrorum verò si Radiorum rotationis, qui sunt æquales semissib⁹ ipsarum *BM*, *BC*, peripheriæ ducantur in rectangula *MA*, *CA*; accipiamus ergo loco peripheriarum ipsos Radios, & loco Radiorum ipsorum duplas, rectas scilicet *PQ*, *MB*, *CB*, manebit ergo eadem proportio Frusti & Cylindrorum inter se, in productis ipsius *PQ* in *NA*, ipsius *MB* in *MA*, & ipsius *CB* in *CA*: Sed rectangula *NA*, *MA*, *CA* cum habeant eandem basem *AB*, inter se sunt ut altitudines *NB*, *MB*, *CB*, vel *OA*, *DA*, *EA*: Ergo *PQ* in *AO*, & *AD* in *AD*, & *AE* in *AE*, sunt proportiones Frusti, & duorum Cylindrorum maioris & minoris: hoc est Frustum ad Conum maiorem est ut rectangulum sub *AO* & *PQ*, ad quadratum radij basis maioris *AD*; & ad Conum minorem, ut idem rectangulum, ad quadratum radij basis minoris *AE*. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

CUM ex secundo modo inveniendi soliditatem Frusti Conici, quem præscripsimus Num: 2. & 3. Propositionis 2. Cap: 3. huius Libri, haberi possit in alijs terminis proportio Conici Frusti ad Cylindros quos diximus; eam in sequenti sic proponimus.

PROPOSITIO XIII.

Omne Frustum Conicum ad Cylindrum sibi circumscriptum, eam proportionem habet, quam quadratum radij basis communis, imminutum rectangulo sub maiori, ex binis medijs inter radios basium Frusti Arithmeticè proportionalibus, & differentia eorundem radiorum comprehensum; ad illud ipsum quadratum: Ad Cylindrum verò inscriptum, ut quadratum radij basis Cylindricæ, auctum rectangulo sub minori ex illis binis quas diximus proportionalibus, & sub eadem radiorum differentia contento; ad hoc ipsum quadratum.

SINT in eadem figura omnia ut proxime. Dico Frustum Coni descriptum à Trapezio *ABCD*, ad Cylindrum circumscriptum, nimirum à rectangulo *MA* descriptum esse, ut quadratum radij *AD*, minus rectangulo sub *RS* & *MC*, ad idem quadratum radij *AD*: Ad Cylindrum verò inscriptum

scriptum, descriptum videlicet à rectangulo *CA*, ut quadratum *BC* vel *AE*, plus rectangulo sub *IG*, *DE*, ad ipsum quadratum ipsius *AE*. Radius enim rotationis *SR*, trianguli *DMC* quod descripsit excessum Cylindri maioris circa Frustum, est maior ex binis *RS*, *IG* inter radios basium *DA*, *CB* Arithmeticè proportionalibus: excessus enim quo maior proxime minorem superat, æqualis est trienti differentiæ *DE*, inter radios *DA*, *CB* basium Frusti, ut constat ex constructione illarum, [*de qua Num: 2. & 3. Propos: 2. Cap: 3. huius Libri*]. Radius autem rotationis *IG* trianguli *DEC*, quod descripsit excessum Frusti circa Cylindrum minorem, sive inscriptum, est minor binarum proportionalium. Sunt autem duo illi solidi excessus inter se, cum triangula *DMC*, *DEC*, sint æqualia [*per Coroll: 1. Propositionis 3. Cap: 8. Libri 2.*] ut Radij *RS*, *IG*, vel quod idem est, assumendo eandem altitudinem *DE*, vel *MC*, ut rectangula sub *RS* & *MC*, & sub *IG* & *DE*. Cylindri autem [*per Propos: 9. huius Capitis*] inter se sunt ut bases, hoc est [*per Proposit: 1. Cap: 5. huius Libri*] ut quadrata radiorum *DA*, *EA*. Ergo loco excessuum solidorum, & Cylindrorum, sunt ea quæ diximus rectangula & quadrata: Et quia Frustum solidum fit si maior excessus subtrahatur ex maiori Cylindro, hoc est ipsorum proportionalia, rectangulum maius ex maiori quadrato: Vel, si excessus minor additur minori Cylindro, hoc est ipsorum proportionalia, rectangulum minus, minori quadrato. Sequitur necessario Frustum Conicum ad Cylindrum maiorem, esse ut quadratum maius, minus maiori rectangulo, ad maius quadratum: Et ad Cylindrum minorem, ut quadratum minus, plus minore rectangulo, ad minus quadratum. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

1. Ex hac & præcedenti Propositione sequitur rectangulum illud, quod in Propositione 12. diximus contineri sub recta *PQ*, dupla Radij rotationis Trapezij *ABCD* & recta *AD*, æquale esse, & reliquo quod remanet ex quadrato *AD*, quando ab ipso aufertur rectangulum sub *RS* & *MC*; & composito quod fit quando quadrato *CB* adijcitur rectangulum sub *IG*, & eadem *MC* vel *DE*: ostensum enim est Propositione 12. illud rectangulum sub *PQ* & *AO*, ad quadratum *AD* esse, ut Frustum ad Cylindrum maiorem, & ad quadratum *CB*, ut Frustum ad Cylindrum minorem: sed eandem proportionem demonstravimus in hac Propositione de illo reliquo & composito, ergo hæc seorsim sumpta, æqualia sunt illi rectangulo sub *PQ* & *AO*.

Sequitur secundo Radium rotationis Frusti Conici haberi posse, ex illo residuo quadrati maioris, vel composito quod fit ad quadratum minus. Nam si ad hanc aream, relictam vel compositam applicetur illa *AO*, quæ est inter *DA*, *CB* Arithmetice media proportionalis, orietur latitudo *PQ*, cuius semissis est Radius rotationis, quem habere voluimus.

SCHOLIVM.

CÆTERAS comparationes Frusti Conici, cum Cylindro, Conoq, aut alio Corpore omittimus ob caussam in principio Capitis huius dictam. Ex Corollarijs enim Propositionis 3. Capitis 8. Lib: 2. multa deducentur. Exempli gratia ex primo Corollario habetur Frustum Conicum, ad Cylindrum æque altum cuius radius basis NB *vel* OA, *est Arithmetice media proportionalis inter radios* CB, DA *basium Frusti, esse ut semissis rectæ* PQ, *ad semissem rectæ* NB.

Item ex Corollario secundo habetur si sit Frustum Conicum, & Cylindrus illi & æqualis, & æque altus, reciprocari Trapezium & Rectangulum, quæ Frustum & Cylindrum in rotatione describunt, cum Radijs rotationis. Est enim ut Trapezium ad Rectangulum, ita Radius rotationis describens Cylindrum, ad Radium rotationis describentem Frustum. Relictis ergo hisce & similibus, ad alia pergimus.

PROPOSITIO XIV.

Omnis Sphæra quadrupla est Coni, basem habentis circulum maximum Sphæræ, & altitudinem æqualem radio eiusdem Sphæræ.

HOC demonstrabimus Libro 4. Cap: 1. Propos: 8.

PROPOSITIO XV.

Omnis Sphæra dupla est Coni, basem habentis circulum maximum Sphæræ, & altitudinem diametrum Sphæræ eiusdem.

NAM ex præcedenti Sphæra est quadrupla Coni basem habentis circulum maximum, & altitudinem radio æqualem; sed hic Conus est subduplus Coni in hac Propositione descripti; [*ex Propositione 10. huius.*] Ergo Sphæra dupla tantùm est huius eiusdē Coni. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITUR hinc Conum, habentem basem æqualem circulo maximo, & altitudinem duplam diametro Sphæræ, esse æqualem Sphæræ. Hic enim Conus [*per 10 huius*] duplus est Coni, in hac Propositione descripti; & quia etiam Sphæra dupla est eiusdem Coni: Ergo Sphæra & prior Conus sunt inter se æquales.

PROPOSITIO XVI.

Omnis Cylindrus Sphæram stringens ad ipsam est sesquialter.

HOC demonstrabitur Libro 4. Cap: 1. Propos: 9. Interim tamen aliter idem sic demonstrabimus: Proportio enim Cylindri Sphæram stringentis, ad Cylindrum Sphæræ æqualem (de quo nos Corollario 1. Propos. 5. huius Cap:) componitur, [*per Coroll: Propositionis 10. huius*] ex proportione basium, & ex proportione altitudinum. Proportio autem basis maioris Cylindri, ad basem minoris, [*ex eodem Coroll: Propos: 5.*] est ut 2 ad 1, hoc est, ut 6 ad 3: & proportio altitudinis ad altitudinem est ut 3 ad 4. [*per idem Coroll:*] Ergo [*per Coroll: 4. Propositionis 3. Cap: 8. Libri 2.*] proportio Cylindri maioris ad minorem est ut 6 ad 4, hoc est ut 3 ad 2. Quare etiam proportio Cylindri maioris ad Sphæram quam stringit est ut 3 ad 2, quæ est sesquialtera. Quod erat demonstrandum.

Ex hac autem & 14 Propositione, hanc aliam deducemus.

PROPO-

PROPOSITIO XVII.

Cylindri hemisphærium stringentis, dempto hemisphærio, reliquum æquale est Cono, eandem cum hemisphærio basem & altitudinem habenti.

DEMONSTRATUR quidem hoc operosè à Luca Valerio Lib: 3. de Centro gravitatis solidorum Propos: 13. id quod ex binis, quas iam diximus propositionibus, clare & sine ullo negocio deducitur; quia tamen ipse ex operosa demonstratione, facillimam deducit Propositionis huius 16. quæ per se operosa demonstratione indigebat, non solum non vituperandus est Valerius, sed insuper laudandus, qui & sine Archimedis, & sine nostris principijs Propositionem illam vere & Geometrice demonstraverit, & alteram alteri præposuerit, immo & hemisphæroidi accomodaverit. Deductio autem nostra sic habet.

Ex Propositione 14 huius Sphæra est quadrupla Coni hic descripti, ergo hemisphærium est duplum eiusdem Coni: Ex Propositione verò 16 huius deducitur Cylindrum stringentem hemisphærium, ad ipsum esse ut 3 ad 2: Posito ergo hemisphærio 2, erit Conus 1, & Cylindrus stringens 3: Quare ablato hemisphærio 2, ex Cylindro 3, remanet Conus 1, æqualis reliquo illi de quo diximus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Sphæræ Portio quæ æqualem habet basim cum Cono, cuius altitudo ad altitudinem Portionis est, ut semidiameter Sphæræ unà cum altitudine reliquæ Portionis, quæ cum hac data Sphæram complet; ad hanc ipsam reliquæ Portionis altitudinem; ipsi Cono æqualis est.

HÆC est Propositio secunda Libri 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro quam ipse ostensive demonstrat, quare sicut hunc locum inter nostras Propositiones iure merito postulare videtur, ita nihil ei addendum, vel in ea mutandum esse censuimus; Sequens tamen hinc deducimus.

COROLLARIUM.

SEQUITUR hinc duas Portiones Sphæram componentes maior ad minorem eam proportionem habere, quam altitudo maioris Coni, ad altitudinem minoris, cum ex ipsa Propositione constet Conos illos æquales esse Sphæræ Portionibus, Coni verò [*ex Propos: 10. huius*] sint inter se ut altitudines, manifestum est propositum.

PROPOSITIO XIX.

Omnis Sphæræ Portio ad Conum, habentem eandem cum

Portione

Portione basem & altitudinem, est ut composita ex radio Sphæræ, & altitudine reliquæ Portionis quæ cum priore Sphæram complet, ad hanc ipsam reliquæ Portionis altitudinem.

EX præcedenti habetur Conum, qui Portioni Sphæræ æqualis est, eam habere altitudinem quæ sit ad altitudinem Portionis, ut composita ex radio Sphæræ, & altitudine reliquæ Portionis, ad hanc ipsam reliquæ Portionis altitudinem. Ergo ille idem Conus ad Conum Portioni inscriptum, proportionem habet quam dicta composita, ad altitudinem reliquæ Portionis, cum Conus inscriptus cum Portione cui alter Conus æqualis est, eandem habeat altitudinem, & Coni habentes eandem basem [*per Propos: 10. huius*] inter se sint ut altitudines. Manifestum est ergo propositum.

COROLLARIVM.

SEQVITUR ex hac Propositione & ex secunda huius, ex qua habetur Conum esse subtriplum Cylindri eandem cum Cono basem habentes & altitudinem, Portionem Sphæræ ad Cylindrum eiusdem basis & altitudinis, esse ut composita ex radio Sphæræ & altitudine reliquæ Portionis, ad triplam reliquæ Portionis altitudinem.

SCHOLIVM.

SED & hoc loco missas facimus comparationes Portionum Sphæræ cum aliis corporibus, Sphæroide excepta: cum enim illæ reductæ sint ad Conos, & hos nos iam comparaverimus cum Cylindro &c. superfluum esset plura de his verba facere.

PROPOSITIO XX.

Omnis Annulus sive Strictus sive Absolutus, à quacunque figura plana sive rectilinea, sive curvilinea, sive mixtilinea descriptus, æqualis est vel Prismati, vel Cylindro, vel cuicunque alteri corpori Columnari, cuius basis æqualis sit figuræ illi quæ Annulum descripsit, & altitudo Viæ rotationis, hoc est, peripheriæ circuli, cuius radius ad axem rotationis rectus est, ex centro gravitatis eiusdem figuræ planæ, ad eundem axem eductus.

ANNULI enim cuiusvis soliditas componitur, ex ductu prædictæ peripheriæ in superficiem figuræ quæ Annulum descripsit; sed & cuiuscunque corporis Columnaris soliditas componitur, ex ductu altitudinis in superficiem basis: cum igitur ponatur hæc basis æqualis figuræ planæ rotatæ, & altitudo æqualis Viæ rotationis, producentur soliditates inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SCHOLIUM.

Ex hac Propositione, & ex Corollariis Propositionis 3. Cap: 8. Lib: 2. permultæ ac diversæ comparationes ac proprietates institui atque deduci possunt, Annulorum inter se, & Strictorum cum Strictis, & Absolutorum cum Absolutis, & horum cum illis, & illorum cum his. Item Cylindrorum, Prismatum, aliorumq; corporum Columnarium, tam inter se mutuo, quam cum Annulis: quæ omnia brevitatis caussa omittimus, & aliis deducenda permittimus.

PROPOSITIO XXI.

Omnis Conois Parabolica sesquialtera est Coni, basem habentis eandem cum Conoide, & axem.

HANC Propositionem demonstrabimus Lib: 4. Cap: 2. Propos: 2.

PROPOSITIO XXII.

Omnis Sphæra eandem habens cum Conoide Parabolica axem, & circulum maximum basi Conoidis æqualem, sesquitertia est eiusdem Conoidis.

NAM ex Propositione 15. huius Sphæra ad Conum, habentem axem eundem cum Sphæra, & basem circulo maximo æqualem, est ut 4 ad 2: hic Conus autem ad Conoidem, ex Propositione præcedenti est ut 2 ad 3. Ergo Sphæra ad Conoidem est ut 4 ad 3, quæ est proportio sesquitertia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

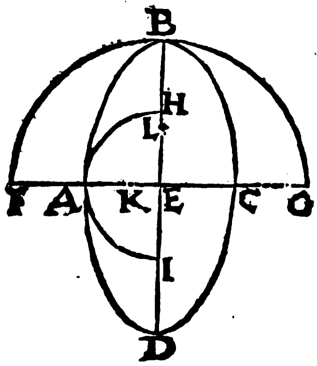
Omnis Conois Parabolica subdupla est Cylindri, basem habentis eandem cum Conoide, & axem.

NAM ex Propositione 21 huius, Conus ad Conoidem æquealtam & eiusdem basis, est ut 2 ad 3; ad Cylindrum verò æquealtum & eiusdem basis, per Propositionem 2 huius, est ut 2 ad 6: Ergo Conois ad Cylindrum est ut 3 ad 6, quæ est proportio subdupla. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Omnis Sphæra ad Sphæroidem Altam, habentem nimirum axem maiorem æqualem axi Sphæræ, est ut quadratum axis maioris, ad quadratum axis minoris.

Nn ESTO.



ESTO Sphæra descripta à semicirculo *FBG*, circa axem *FG*, Radio rotationis *EL*: Et sit Sphærois descripta à semiellipsi *BAD*, circa maiorem axem *BD*, qui axis æqualis sit ipsi *FG*, Radio rotationis *EK*. Dico Sphæram ad Sphæroidem esse, ut quadratum *DB* axis maioris, ad quadratum *AC* axis minoris. Nam Sphæræ proportio ad Spæroidem [*ex Corollario 3. Propos: 3. Cap: 8. Lib: 2.*] composita est ex ratione plani semicirculi rotati *FBG*, ad planum semiellipsis *BAD*, rotatum, & ex ratione Radiorum rotationis *LE* ad *KE*, nimirum ipsius *EB*, hoc est *BD* axis maioris, ad *EK*, hoc est *AC* axem minorem. Nam sicut se habet *EL* ad *EB*, vel *BD*, ita se habet *EK* ad *EA*, vel *AC*, quod facile colligitur ex Libro primo [*Propos: 6. Cap: 9.*] ex quo constat punctum *L*, esse centrum gravitatis & semicirculi *FBG*, & semiellipsis *ABC*; quemadmodum punctum *K*, commune est centrum gravitatis semicirculi *HAI*, & semiellipsis *BAD*. Sed ratio plani semicirculi ad planum semiellipsis, [*ex Propos: 5. Archimedis de Conoidibus & Sphæroidibus*] est rursus ea quæ *BD* ad *AC*, axis maioris ad minorem. Ergo proportio Sphæræ ad Sphæroidem composita est, ex ratione *BD* ad *AC*, & rursus ex eadem ratione eiusdem *BD* ad eandem *AC*: hoc est, proportio Sphæræ ad Sphæroidem est duplicata proportionis *BD* ad *AC*, hoc est, ut quadratum axis maioris, ad quadratum axis minoris. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

Omnis Sphæra ad Sphæroidem Latam, habentem videlicet axem minorem æqualem axi Sphæræ, est ut quadratum axis minoris, ad quadratum axis maioris.

DEMONSTRATUR ijsdem plane medijs, quibus præcedentem demonstravimus.

PROPOSITIO XXVI.

Sphæra ad Malum eam habet proportionem, quam rectangulum sub recta quadranti circumferentiæ circuli maximi æquali, & quatuor tertijs diametri habet, ad rectangulum sub recta, quæ æqualis sit dimidiæ compositæ, ex recta arcui segmenti quo gignitur Malum æquali, & ex sinu ipsius arcus; & sub via rotationis. Eadem verò Sphæra ad Citrium proportionem habet, quam idem prius rectangulum habet, ad rectangulum sub recta, quæ æqualis sit dimidiæ differentiæ inter rectam arcui segmenti quo

gignitur

gignitur Citrium æquali, & sinum ipsius arcus; & sub via rotationis.

SPHÆRA enim componitur ex ductu Viæ rotationis, quæ est [*ex demonstratione 1. Propositionis 1. Cap: 4. huius Lib:*] quatuor tertiarum diametri, in aream semicirculi; quæ area componitur [*per Num: 1. Coroll: 1. Propos: 5. Cap: 6. Lib: 2.*] ex ductu quadrantis circumferentiæ, in radium ipsius: sed & Malum componitur ex ductu Viæ rotationis, in aream segmenti Malum describentis, quæ area componitur [*per Propos: 5. Cap: 6. Lib: 2.*] ex ductu dimidiæ compositæ ex arcu & sinu ipsius, in eundem radium Circuli: Ergo area semicirculi ad aream segmenti, est ut quadrans circumferentiæ, ad dimidiam compositæ ex arcu & sinu [*per 1. Sexti.*] Quare Corpus Sphæræ, ad Corpus Mali, est ut rectangulum sub quadrante peripheriæ, & Via rotationis sphæræ, quæ est quatuor tertiarum diametri; ad rectangulum sub dimidiæ compositæ ex arcu segmenti & sinu ipsius, & sub Via rotationis Mali.

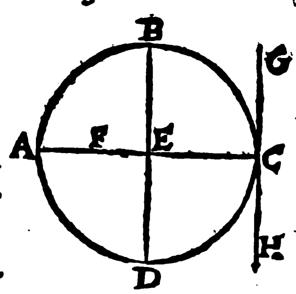
Eodem modo Propositio demonstratur de Citrio, hoc solum mutato, ut quod hic dictum est de dimidia compositæ pro Malo, pro Citrio dicatur de dimidia differentiæ. Et sic manifesta erit tota Propositio.

COROLLARIUM.

SEQUITUR hinc Malum ad Citrium se habere, sicuti rectangulum quod respondet Malo, ad rectangulum quod respondet Citrio; cum hæc rectangula, quoad proportionem, subeant vices corporum.

PROPOSITIO XXVII.

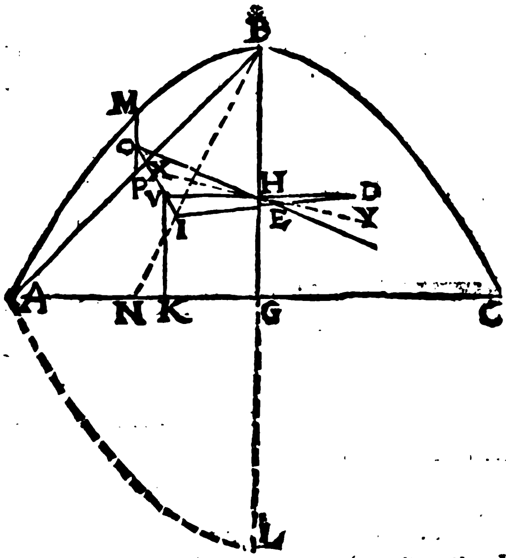
Sphæra ad Annulum Strictum, cuius circulus maximus æqualis est circulo maximo Sphæræ, eam habet proportionem, quam quatuor tertiæ diametri habent, ad duplam circumferentiam circuli maximi: sive ut duæ tertiæ diametri ad circumferentiam.



ESTO circulus *ABCD*, cuius centrum *E*, circa axem *GH* rotatus Annulum Strictum describens, per Radium rotationis *EC*; sit & semicirculus *BAD*, circa axem *BD* Sphæram describens, per Radium rotationis *EF*. Dico Sphæram ad Annulum esse, ut quatuor tertiæ diametri *AC*, ad duplam circumferentiam *ABCD*. Sphæra enim ad semiannulum quem describit semicirculus *ABC* (circa axem *GH*) cui æquatur *BAD* [*per Coroll: 1. Propos: 3. Cap: 8 Lib: 2.*] est ut via rotationis Sphæræ, quæ [*ut alibi demonstravimus*] est æqualis quatuor tertijs diametri; ad Viam rotationis semiannuli, quæ est eadem cum circumferentia *ABCD*: Ergo Sphæra ad totum Annulum est, ut quatuor tertiæ diametri ad duplam circumferentiam; sive ut duæ tertiæ diametri ad simplam circumferentiam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Conois obtusa ad Conoidem acuminatam, eadem semiparabola descriptam, eam proportionem habet, quam 15. ad 16.

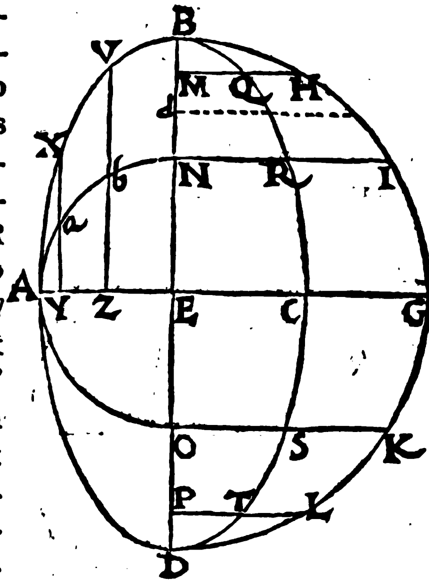


SIT Conois obtusa *ABC*, descripta à semiparabola *AMBG*, circa axem *BG*; sit & Conois acuminata *BAL*, ab eadem semiparabola *AMBG*, circa axem *AG* descripta. Dico Conoidem illam, ad hanc esse; ut 15 ad 16. Nam [*ex Coroll: 1. Propositionis 3. Cap: 8. Libri 2.*] obtusa ad acuminatam est ut Radius rotationis *HV*, ad Radium rotationis *KV*; sed ille ad hunc est [*ex Num: 3. Scholij Propositionis 8. Capitis 7. Libri 2.*] ut 15 ad 16. Manifestum ergo est propositum.

PROPOSITIO XXIX.

Omnis Sphæræ Portio ad Portionem Sphæroidis Altæ, habentis nimirum eandem altitudinem cum Sphærica Portione, & axem maiorem æqualem axi Sphæræ, est ut quadratum maioris axis, ad quadratum axis minoris; vel quod in idem recidit, ut quadratum radij basis Portionis Sphæricæ, ad quadratum radij basis, Portionis Sphæroidicæ: Si verò Portio sit Sphæroidis Latæ; hoc est, minor axis Sphæroidis sit æqualis axi Sphæræ, & altitudo Portionum, ut ante, æqualis; Portio Sphæræ ad Portionem Sphæroidis erit, ut quadratum minoris axis, ad quadratum maioris, vel quod idem est, ut quadratum radij basis Portionis Sphæricæ, ad quadratum radij basis Portionis Sphæroidicæ.

LOQVIMUR hic de Portionibus Sphæroidicis abscissis plano ad utrumvis axium recto. Sit Sphærois Alta descripta à semiellipsi *BCD*, cuius axis maior *BD* sit eadem cum axe *BD*, Sphæræ descriptæ à semicirculo *BGD*: Sit etiam Portio Sphæræ minor descripta à circuli semisegmento *BHIN*, habens eandem altitudinem *BN*, cum Portione Sphæroidis descriptæ à semisegmento elliptico *BQRN*: vel sit Portio Sphæræ maior descripta à circulari semise-



ſemiſegmento *BGKO*, habens eandem altitudinem *BO*, cum Portione Sphæroidis deſcriptæ à ſemiſegmento elliptico *BCSO*. Dico Portionem Sphæræ ad Portionem Sphæroidis eſſe, ut quadratum axis maioris *BD*, ad quadratum axis minoris; Vel, ut quadratum radij baſis *NI* vel *OK*, ad quadratum radij *NR* vel *OS*. Nam qualem proportionem habet axis maior ad minorem, eam habet recta *IN* ad *RN*, & recta *KO* ad *SO*, ut colligitur ex demonſtratione Propoſitionis 5 Archimedis de Conoid: & Sphæroid: & demonſtratur à Clavio Lemmate 51. Lib: 1. de Aſtrolabio: Ex eadem etiam demonſtratione Archimedis colligitur non ſolum de partibus, Trapezijs ſcilicet & triangulis ſed etiam de totis figuris, (quarum medietates *BHIGKLD* & *BQRCSTD*) circulo & ellipſi inſcriptis, eas eſſe inter ſe ut axis maior ad minorem, de quibus Rivaltus Propoſ: 6. Archimedis Corollarium adnectit; Figuram inſcriptam Circulo eſſe ad Figuram inſcriptam Ellipſi, ut eſt Circulus ad Ellipſim: Ergo etiam partes Trapezia ſcilicet *NIGE* ad *NRCE*, & *MHIN* ad *MQRN*, & triangula *BHM* ad *BQM*, inter ſe ſunt ut axes; ac proinde etiam partes Circuli & Ellipſis *NIGE* ad *NRCE*, &c. inter ſe erunt, ut axes: Quare iiſdem prorſus argumentis quibus demonſtravimus totam Sphæram ad totam Ellipſim eſſe ut quadratum axis maioris, ad quadratum axis minoris demonſtrabitur, Portiones ſphæricas ad Sphæroidicas eſſe ut quadratum axis maioris, ad quadratum axis minoris. Manifeſtum eſt ergo propoſitum.

Idem dicendum de Sphæroide Lata habente videlicet axem minorem æqualem axi Sphæræ, partes nimirum Circuli *ENbZ*, *ZbaY*, *AYa*, ad partes Ellipſis *EBVZ*, *ZVXY*, *YXA*, eſſe ut minorem axem ad maiorem, ac proinde Portiones Sphæricas ab his Circuli partibus deſcriptas, ad Portiones Spæroidicas à partibus Ellipſis eſſe ut quadratum axis minoris, ad quadratum axis maioris, vel ut quadrata radiorum baſium *EN*, *Zb*, *Ya*, ad quadrata radiorum *EB*, *ZV*, *YX*. Quod erat demonſtrandum.

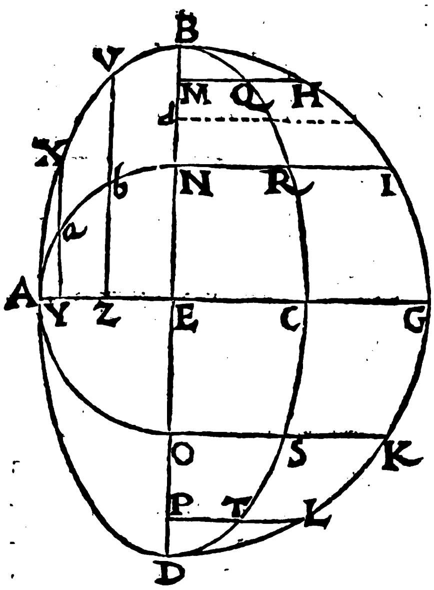
COROLLARIUM.

SEQUITUR hinc Radios rotationis quo Portiones Sphæræ, & Sphæroidis deſcribuntur, inter ſe eſſe ut axes Sphæroidis; (quod quidem Propoſ: 24. huius demonſtravimus.) Sunt enim ut in demonſtratione huius Propoſitionis vidimus, ea in proportione ſegmenta circuli & Ellipſis. Ergo ut tales Portiones componantur, quæ inter ſe ſint ut axes, componi debent à vijs ſive Radijs rotationum, qui eandem proportionem habeant, quam ij quos diximus axes.

PROPOSITIO XXX.

Citrium Sphæricum ad Citrium Sphæroidis Altæ, à ſegmentis eiuſdem

eiusdem altitudinis descripta; est ut axis maior ad minorem: ad Citrium verò Sphæroidis Latæ, est ut axis minor ad maiorem.



ESTO semisegmentum ellipticum *BQRN*, abscissum à recta *NR*, perpendiculari ad axem maiorem *BD*, cui axi æqualis sit diameter Sphæræ à semicirculo *BGD*, circa axem *BD* descriptæ: & per eandem rectam *NR* productam, abscissum sit semisegmentum circuli *BHIN*, ita ut semisegmenta eiusdem sint altitudinis *BN*. Rotetur autem utrumque semisegmentum circa axem *NI*, ut fiant Semicitria Sphæricum & Sphæroidicum. Dico illud ad hoc proportionem habere, quam *BD* axis maior ad *AC* minorem; quæ proportio etiam est integrorum Citriorum. Segmenta enim integra circuli & ellipsis, idem habent gravitatis centrum, verbi gratia *d* [*per Propos. 6. Cap. 9. Libri primi*] eundemque Radium rotationis *dN*: Ergo Citria inter se sunt [*ex Corollario 1. Propositionis 3. Cap. 8. Libri 2.*] ut segmenta rotata, hoc est [*per demonstrationem Propositionis 29 huius Capitis*] ut *IN* ad *RN*, hoc est [*per eandem*] ut axis maior ad minorem. Quod primò erat demonstrandum.

Si verò Sphæræ diameter *NO*, æqualis fuerit minori axi *AC*, & sint semisegmenta ellipsis quidem *AXVZ*, circuli verò *AabZ*, quæ rotata circa axem *VZ* describant Semicitria Sphæroidicum Altum & Sphæricum. Dico hoc ad illud proportionem habere eam, quam habet axis minor *AC* ad maiorem *BD*; & hæc est etiam proportio integrorum Citriorum. Demonstratur eadem ratione qua prior pars: semisegmenta enim integra ellipsis & circuli, idem habent gravitatis centrum, eundemque Radium rotationis: Ergo Sphæricum ad Sphæroidicum est, ut axis minor ad maiorem. Quod secundò erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITUR ex binis præcedentibus Propositionibus Portionum Sphæræ & Sphæroidis proportionem ad invicem, esse duplicatam eius proportionis quam habent inter se Citria iisdem segmentis descripta. Nam Propositione 29. demonstratum est proportionem Portionis Sphæræ à segmento circuli *BHIN* descriptæ, ad Portionem Sphæroidis à segmento ellipsis *BQRN* descriptam esse ut quadratum *IN*, ad quadratum *RN*; Propositione verò 30 demonstravimus Citrium à segmento circuli, cuius semissis idem segmentum *BHIN*, descriptum, ad Citrium descriptum à segmento, cuius semissis *BQRN*, esse ut recta *IN* ad rectam *RN*; sed illa proportio Portionum, est duplicata huius Citriorum. Quare constat Propositum.

Sic etiam de Portionibus & Citrijs descriptis à segmentis ellipsis *AXVZ*, & circuli cuius semissis *AabZ*, argumentari licebit.

CAPVT

CAPVT VII.

DE INVENTIONE CENTRI gravitatis quarundam magnitudinum, ex Resolutione Potestatum Rotundarum desumpta.

HACTENUS decerpsimus & degustavimus Fructus, ex sylva Compositionis Potestatum Rotundarum collectos: libare libet quosdam etiam qui ex arbore habentur Resolutionis earundem Potestatum. Quamvis autem hæc Resolutionis arbor, fructuum tam ferax non sit, quam illa Compositionis sive sylva, sive campus: ut vidimus Capite ultimo Libri Secundi: maluimus tamen rem alioquin amplificandam constringere quam sine necessitate aut fructu singulari fuse tradere, aut omninò non attingere. Hoc certum habemus per hanc Resolutionem nos posse, omnium planorum quæ Rotunda corpora per sui rotationem describunt, invenire centra gravitatis, vel in puncto, vel in certa recta linea; dummodo data sit soliditas corporis, & area plani corpus describentis. Id quod cum de Sphæra & Sphæroide, earundemq; Portionibus, in numeris ad verum (ipsum enim verum non nisi per quadraturam habetur circuli) proxime accedentibus, & ab alijs & à nobis datum sit: dabitur etiam per nostrum Inventum in ijsdem numeris, quantitas certæ lineæ rectæ, quæ Centrum gravitatis & semicirculi, & semiellipsis, earundemq; partium, Sphæram, Sphæroidem earundemq; Portiones describentium, determinet: & hoc quidem independenter à Libro Primo nostrorum Centrobarycorum, in quo hæc centra absolute & per lineas, & per numeros docuimus assignare. Sic ubi dantur in numeris quantitates superficierum rotundarum, ipsæq; lineæ superficies per rotationem describentes, dantur etiam centra gravitatis earundem linearum. Quem quidem huius arboris fructum minime vilipendendum existimo. Hinc enim fortassis plurium magnitudinum, quæ adhuc incognita sunt, eruent centra gravitatis ij, qui hac in re totaq; Mathesi, instructiores sunt quam nos. Potuisset ergo hoc Caput non incommode omitti hoc loco, cum ea quæ hic tractantur, ut ante monuimus, à doctrina Capitis 13 Libri Secundi haud multum differat: Ponitur autem ut ordo servetur, doctrinaq; eodem Capite tradita confirmetur, & quædam quæ ibi omissa sunt compleantur.

PROPO-

PROPOSITIO I.

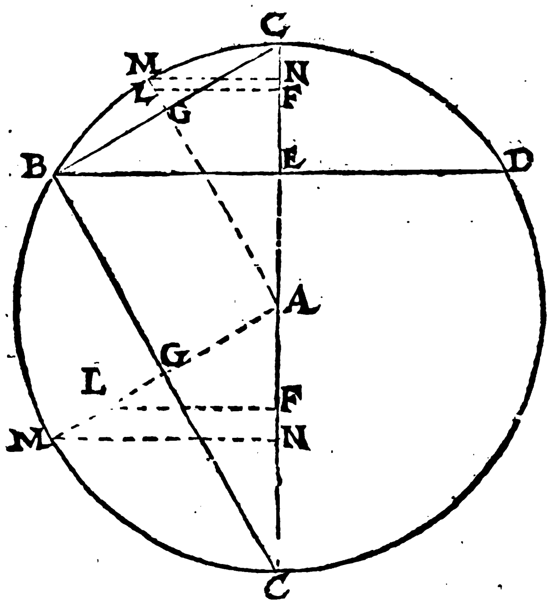
De magnitudinibus rotundis à lineis rectis descriptis.

QVÆ hæ sint magnitudines diximus Num: 1. Propos: 2. Cap: 13. Lib: 2. Cum ergo illæ describantur à lineis rectis, in quarum medio consistit ipsarum gravitatis centrum, à quovis designandum, plura hoc loco de ipsius inventione dicenda non sunt. Cætera enim hic tractanda habentur in eadem quam diximus Propositione secunda.

PROPOSITIO II.

Ex superficiebus rotundis descriptis à lineis curvis, ipsarum curvarum Centrum gravitatis invenire.

1. PROPOSITIONE 3. Capitis 13. Libri Secundi, ex data superficie Sphærica & via rotationis invenimus quantitatem semiperipheriæ circuli maximi. Item ex eadem superficie sphærica, & data quantitate eiusdem semiperipheriæ, elicuimus viam rotationis, quæ sumpta ut peripheria circuli dat radium, qui in radio sphæræ ad medium semiperipheriæ circuli maximi punctum ducto, ex circuli centro determinat centrum gravitatis eiusdem semiperipheriæ circuli maximi.



2. Quod si detur superficies Portionis sphæræ, unà cum arcu circulari, qui Portionis superficiem descripsit; si data hæc superficies dividatur per arcum datum, habebitur in Quoto via rotationis, cuius radius determinat centrum gravitatis dati arcus circuli. Ut si data sit superficies Portionis Sphæræ descripta ab arcu circuli *BMC*, circa axem rotationis *CE*; per eam quam diximus divisionem invenietur peripheria, cuius radius recta *FL* determinat punctum *L*, centrum gravitatis arcus *BMC*, consistens in radio *AM*: quare ut habeamus *AL*, determinantem idem centrum, ex centro sphæræ sive circuli maximi, fiat in triangulo rectangulo *ANM* ut sinus *MN*, anguli *MAN* dati, eum enim metitur arcus *MC*, ad sinum totum *AM*, ita inventa *LF* ad quæsitam *AL*.

3. Si autem data sit superficies Citrij vel Mali, unà cum arcu qui eam descripsit, dividatur eodem modo superficies per arcum datum, ut eliciatur via, & ex hac Radius rotationis, & ex hoc denique determinans Centrum gravitatis arcus dati. Ut si datus sit arcus *BCD* minor, qui describat circa axem *BD* superficiem Citrij; aut maior, qui circa eundem describat superficiem Mali;

per eam

per eam quam diximus divisionem, invenietur peripheria circuli cuius radius est *EF*, minor pro Citrio, maior pro Malo: ille minor radius si addatur ad sinum complementi *EA*, arcus *CMB*, qui est semissis dati, habebitur recta *AF* determinans ex centro circuli *A*, centrum gravitatis *F*, arcus minoris qui Citrij superficiem descripsit: si verò eadem *EA* subtrahatur ex maiori radio *EF*, relinquetur *AF* determinans ex centro circuli, centrum gravitatis *F* arcus maioris, qui superficiem Mali descripsit.

4. Propositione 7. Cap: 2. huius Libri indagavimus superficies Corporum Sphæroidi Altæ & Latæ similium, descriptas ab arcubus compositis, quorum arcuum unicum centrum per Resolutionem invenire docuimus, in Scholio eiusdem Propositionis. Quare plura hic non addimus.

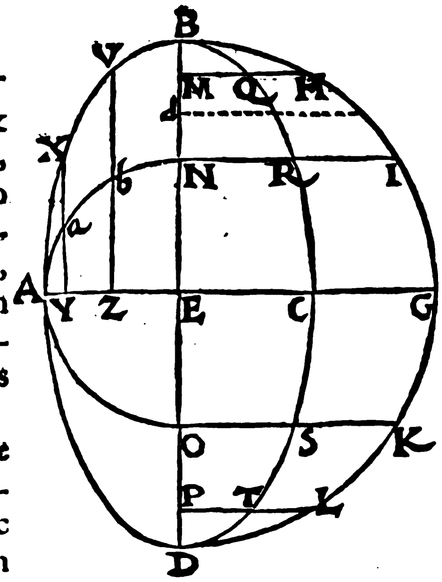
PROPOSITIO III.

De Corporibus descriptis à planis rectilineis.

CUM centra gravitatis planorum rectilineorum, ex doctrina à nobis Capite 8. Libri primi tradita, sat commode haberi possint, non iudicavi operæ precium esse ea per Resolutionem inquirere. Qui tamen id desiderat is soliditatem corporis datam, per aream sive datam sive inquirendam plani illius, quod per rotationem corpus solidum descripsit, dividat, & in Quoto divisionis inveniet viam rotationis, cuius radius in perpendiculari ad axem ducta, ex ipso axe centrum gravitatis plani determinat. Ex quo puncto verò axis perpendicularis ista educenda sit, colligere oportet & ex specie plani atque figuræ, & ex eius varia ad axem applicatione seu remotione; vel ex alia etiam soliditate, sive data, sive invenienda, &c.

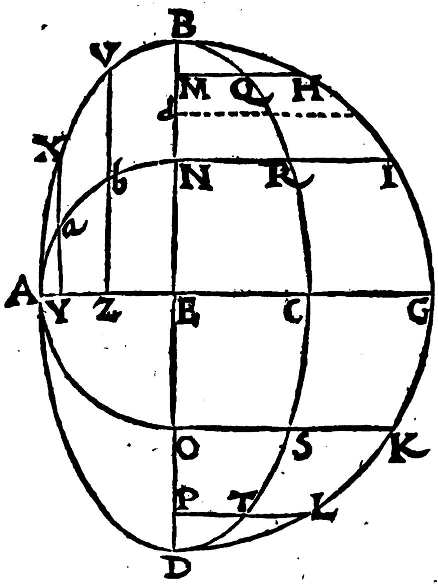
PROPOSITIO IV.

Centrum gravitatis Planorum curvilineorum vel mixtilineorum, data area tam illorum, quam corporum ab ipsis planis descriptorum, determinare.



1. LIBRO secundo Cap: 13. Propos: 5. invenimus ex data soliditate Sphæræ, & ex data area plani semicirculi maximi, determinantem eiusdem semicirculi, in radio ex centro Sphæræ ad medium punctum peripheriæ semicirculi educto, centrum gravitatis, ita ut hic opus non sit idem repetere. Eodem autem modo invenietur centrum gravitatis semiellipsis, si data sit ipsius area, & sphæroidis soliditas.

2. Sit iam data soliditas Portionis Sphæræ descriptæ à semisegmento *BHIN*, unà cum eiusdem area; divisa ergo soliditate per hanc



areā, habebitur quidē in quoto via rotationis, & ex hac Radius rotationis, ducendꝰ perpendiculariter ad rectam *BN*; sed non constat ex quo, vel ad quod ipsius punctum: ideò requiritur etiam soliditas Semicitrij, quod idem semisegmentum *BHIN* describit, non ut ante circa axem *BN*, sed circa axem *IN* rotatum, hæc enim divisa per eandem eiusdem semisegmenti aream, dat viam rotationis quæ nobis exhibebit quantitatem Radij rotationis *dN*; hæc enim nobis determinat illud, quod diximus, ignotum punctum *d*, ex quo radius ante inventus in perpendiculari ex *d* eductus, determinat nobis punctum Centri gravitatis semisegmenti *BHIN* quæsitum: si quidem procedere volumus independenter à Libro primo, id quod nobis hic propositum erat; alias essent faciliores modi hoc centrum inveniendi.

3. Quod verò diximus tanquam exempli gratia de Portione sphærica descripta à semisegmento circuli *BHIN*, semicirculo minore & suo Citrio, idem intelligendum est de Portione descripta à semisegmento *IKDN*, semicirculo maiore, & suo Malo. Item de Portionibus Sphæroidicis, suisque & Citrijs & Malis: est enim ubique eadem ratio inveniendi Centrum gravitatis per Resolutionis modum, semisegmentorum & segmentorum Circuli & Ellipsis.

4. Eadem etiam est ratio de Conoidibus, ut ex data ipsorum soliditate ac plani eas describentis area, invenietur eiusdem plani gravitatis Centrum. Pro Conoide Parabolica, ut exemplum habeas, converte operationem factam Num: 3. Propos: 6. Capitis 12. Libri 2. & invenies Radium rotationis 750 determinantem quidem centrum gravitatis in perpendiculari ad axem ductam; sed quemadmodum suprà de semisegmentis circuli diximus, deest punctum in axe certum; id autem invenitur per eandem semiparabolam & soliditatem Conoidis acuminatæ: Et sic de infinitis alijs Corporibus quorum soliditates & areæ planorum ea describentium, cognita sunt, eorundem planorum determinabis centra. Quod erat faciendum.

Pluribus ergo Lectorem & hoc Capite, & hoc Libro non detinebimus, sed utrique simul hîc finem imponimus.

FINIS LIBRI TERTII.

PAVLI