as. Y pues los Euangelistas nom... primero
go su hermano, seria qual que año ... mas
que san Iuan.

Por manera q̃ segun este computo los hijos de Maria Cleofe no lleuauan a los de Maria Salome mas de tres a quatro años, y en especial Santiago el menor que fue el primero.

Mas dexando de tratar de los hijos de Maria Cleofe, y su edad, y tratando de la edad de los de Maria Salome, respeto de la de Christo en quanto hombre, de vna tradicion de la Iglesia, y de vn lugar del Euangelio, podemos colegir auer sido Christo en quanto hombre de mas edad que estos dos primos suyos.

in La tradicion, es, que tratando la Iglesia de la edad en
m. que murió el Redentor, dize en el Himno de las Lau-
ne. des de la Dominica in Passione. *Lustris sex qui eam per actus tempus implens corporis, se volente natus ad hoc Passioni deditus, agnus in Cruce leuatur, immolandus stipite.* Que cumpli los seis lustros, que cada vno haze cinco años, y medio lustro de dos y medio, que vienen a hazer treinta y dos años y medio (que es la edad mas varonil) entonces murió en vna Cruz Christo, que nacio para nuestra redencion, y remedio. Esto es de la Iglesia. Y el padre Pi-
p. neda prueua que viuiô Christo treinta y dos años, tres
ap. meses, y diez dias.

El lugar del Euangelio es de san Marcos a los 14. cap.
14. Donde dize que lleuando los Sayones preso al Redentor, auiendo huido los Discipulos, le yua siguiendo vn manceuo cubierto cõ vna sabana. *Tunc Discipuli relinquentes eum, omnes fugerunt ... sequebatur eũ amictus sindone.* Coligo p... era de menos edad que Christo Re... que aunque desta

Faltaza

11ª = 2288

citoi ———— 110 Re

credrer ——— 4 Re 77

gemma fri ——— 1 Re

geoª barrosio ——— 4 Re

Sphera clauio ——— 6 Re

Junti no re bulasion 4 Re

tablas no le rigno 15 Re

tablas Rey alfonso 5 Re

150 Re

Los [illegible] primieros [illegible]
primo [illegible]

~~731.~~

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEmonstrationibus, accuratisq; scholijs illustrati.

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

SERENISSIMO

PRINCIPI,

AC D. D. EMANVELI PHILIBERTO

Sabaudiæ Duci.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS SOCIETATIS IESV S. P. D.

EST profecto (quod te non fugit) Princeps Serenifs. præclara quædã res, ac plane diuina, rerum cognitio, quæ merito in optimo quoq; incredibile sui desideriũ excitat, quo facimus hæc hominũ breuis, & calamitosa uita,

 igno-

ignorantiæ quasi tenebris disiectis, & ad exitum ipsa suum perueniat, & omnia quæ accidere possunt, incommoda leuiora ducat. Ac si ea quæ sunt a summis philosophiæ principibus de liberalium artium dignitate vere ac sapienter scripta, falsa esse non credimus; nemini dubium esse potest, quin & rerum obscuritate, & incerta cognitione, mirum in modum minuatur illa siue uoluptas, siue animi iucunditas appellanda est, quæ ex ipsa alioqui rerum contemplatione percipi solet. Equidem fateor (quod summo uir ingenio dixit Aristoteles) eximiam quandam esse in naturæ peruestigatione positam delectationem, rerumque naturalium scientiam, multis philosophiæ partibus nobilitate præcellere: Sed quis non uideat in tanta opinionum uarietate, quarum (cum sit unica veritas) aut non plus una ueram, aut omnes falsas esse necesse est, multum uel inconstantiæ, uel errori relictum esse loci; quo quidem nihil esse potest a scientia magis alienum? Quod si (ut est apud eundem peripateticæ disciplinæ principem) doctrinarum nobilitas tum ex rerum dignitate, tum ex elaborata probandi ratione pendet; quid de mathematicis disciplinis existimanſtimandũ eſt, quæ ut de rerũ præſtantia nihil dicam, tantam habent ſuis in rationibus firmitatem, ut non tam perſuadere, quam uim quodammodo afferre uideantur. Quotus enim quiſque eſt, qui Archimedis, & Apollonij, cæterorumque Mathematicorum libros legens acutiſſimorum hominum non admiretur ingenia, & menti ſuæ firmiſſimas quaſdam quaſi machinas admoueri non ſentiat, ut ijs quæ illi tradunt, uel inuitus aſſentiri cogatur? Qua quidem ex re dici uix poteſt, quantam animus noſter capiat uoluptatem, dum ita in ſententia perſtat, remque omnem plane percipit, ac tenet, ut neutram in partem dubius inclinet, nuſquam fluctuet, nedum falſis opinionibus imbuatur. Cuius ſane tam certæ tamque accuratæ ſcientiæ, cum ſolum ac fundamentum Euclidis, quæ dicuntur, elementa communi omnium Mathematicorum conſenſu exiſtimentur; Tantam profecto ſummus ille vir apud poſteros laudem meretur, quanta optimo in primis diligentiſſimoque magiſtro, atque ipſi etiam primo artis inuentori iure debetur. Quo magis eorum probanda uidetur induſtria, qui in his ipſis elementis aut explicandis, aut illuſtrandis ſtudium, atque operam collocant, ut quanto hæc mathematicarum diſciplinarum initia aut faciliora, aut firmiora fuerint, tanto quæ conſequuntur omnia planius cognoſcantur. Quæ cum ego multos annos partim publice docendo, partim priuatim commentando, & cum alijs viris doctis communicando diligentius pertractaſſem, collegiſſemque (ut fere fit) in meum priuatum uſum nonnulla, quæ ad eorum cognitionem facere uiderentur; faciendum mihi neceſſario exiſtimaui, præſertim auditorum, amicorumque meorum precibus fatigatus, præterea Laurentij Caſtellani ciuis Romani liberalitate inuitatus, qui oẽs ad id neceſſarios ſumpt⁹ benigne admodũ ſuppeditauit, ad publicã ſtudioſorum utilitatẽ, in lucem manusque hominum exire permitterem. Tibi uero potiſſimũ Princeps Sereniſſ. has meas lucubrationes dicaui, primum quod tibi Mathematicorum omnium eximio patrono hæc noſtra maxime ſtudia cordi eſſe intelligebam; deinde quod pro tua in noſtrũ ordinem uniuerſum ſingulari beneuolentia, atque promeritis aliquod tibi grati animi indicium extare ſocietas noſtra uehementer optabat. Huc accedebat priuatum etiam

ſtudium

ſtudium in te meum, quod ab humanitate tua ſingulari, oratorisque tui Vincentij Parpaleæ viri ampliſſimi beneuolentia prouocatus, nihilo tibi minus ego ſum priuatim obſtrictus, quam publice Societas noſtra vniuerſa. Accipe igitur hoc tenuitatis noſtræ munuſculũ, ſi rem ſpectes, exiguum illud quidem, & meritis tuis longe impar; ſin animum intuearis, amoris & obſeruantiæ pleniſſimum. Quod ſi tibi gratum iucundumq; accidiſſe cognouero, cum ſatis amplam laboris mei mercedem ac præmium me tuliſſe exiſtimabo, tum vero ad alia eiuſdem generis commentanda, & elucubranda, ſi otium & occaſio ſe offeret, efficiar alacrior. Vale.

ROMAE, KALENDIS FEBR.
M. D. LXXIIII.

LECTORI S.

SIQVIS forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi cõmentationes conscripserimus, is facile sibi persuadebit, non temere id a nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa, diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse utilitatem, atque adeo necessitatẽ horum elementorum, ut frustra quisquam se speret ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolomæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; uehementer dolebamus, tam insignem, & illustrem auctorem a plerisque omnino negligi, a perpaucis uero pro dignitate tractari, ita ut uix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulã operã, ac studiũ in perdiscendis his elementis ponant, ob eam potissimum, ut arbitror causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atq; obscuritate deterreantur, nullũq; habeant hac in re ducẽ, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sane eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facile con-

sequen-

sequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, uerbaque propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, ut uerus, germanusque auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maxime in decimo libro perspicitur: Alter (Theonem intelligo) pene innumeris mendis, uitijsque incuria librariorum ita est deprauatus, & propter notas græcas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas, ac male expressas adeo impeditus, ut magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, ut Euclidem sine maximo labore, ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram usque memoriam maius aliquod studium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi uel sex priores tantum libros exposuerunt, uel si qui in uniuersum Euclidem commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, (Federicum tamen Commandinum Vrbinatem Geometram peritissimum excipio, cuius opera, atque diligentia Euclides latine redditus, & in pristinum nitorem, iuxta ueterum interpretum sensum, ac traditionem, restitutus, nunc denuo prodijt in lucem,) proprias alias, ac nouas confixerunt, quæ plerunque non tam firmæ sunt, neque rem ipsam simpliciter, & absolute conficiunt; præsertim, quod modo e propositionibus uoces quasdam perperam detrahũt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, ut merito de uero, proprioque Euclidis sensu dubitare quis possit. Quæ cum ita sint,

resque

resque ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab iis adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt post diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, ut lucubrationes nostras, ac uigilias studiosis harum rerum nonnihil (nisi fallimur,) subsidij allaturas, in publicum ederemus. Accessit editionis causa altera: Nam cum Euclides, *propter singularem utilitatem, instar enchiridij, manibus semper debeat circumgestari, neque unquam deponi ab his, qui fructum aliquem serium ex hoc suaui Matheseos studio capere uolunt, in eoque progredi; id uero in hunc diẽ, exemplaribus omnibus maiore forma impressis, necdum factum uideamus; hoc nostra editio certe, si nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sũt enim hi nostri commentarij in uniuersum* Euclidẽ *conscripti commodiore nunc forma, quam uulgo cæteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) uolumineq; editi, ut facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, uia, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præstitum sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipsius esse* Euclidis, *non leuibus argumentis adducti quidam asseuerant, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatam licuit, uel certe planiores, quando illud non potuimus, delucidioresque reddere conati sumus. Non enim illas nude, ac totidem uerbis, quot erant scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, ut illud accidat, quod ab elegan-*

elegantissimo poeta dictum est. Breuis esse laboro, obscurus fio. Interdum etiam, cum breuius, atq; succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quam satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare utrunque uitantes, eas, uelut παραφραστικῶς, atq; ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & uoluntati, quantum est in nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius a studiosis, ijs praesertim, qui ceu tyrones, haec Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore uoluptate, utilitateque cognoscetur. Praeter haec adiunximus multis in locis uaria problemata, ac theoremata, scitu non iniucunda, neque a scopo Geometriae aliena, quae partim ex Proclo, Campano, alijsque auctoribus decerpsimus, partim proprio (ut aiunt) Marte, assiduisque meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligẽs opera, ut definitiones Euclidis, praesertim obscuriores, & quae aliquid uisae sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam, incidentes, a recto cursu deflexerunt, & in errores uarios, atque absurdos, prorsumque ab instituto disciplinae abhorrentes, dilapsi sunt.) dilucide, atque perspicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facile indicabunt. Quae res cum in ampliorẽ magnitudinẽ excrescerent, quam ut unius libri spatijs, hac praesertim forma, commode includi possent, in duas partes totam tractationem diuisimus. Altera nouem prioribus libris continetur: altera sex reliquos, una cum decimosexto ad comparationes

quinque

quinq; corporũ regulariũ pertinente, quem ex Francisco Flussate Candalla adijcere uoluimus, cõplectitur. Nunc, quia hæc Euclidis elementa ostium; atque aditum ad omnes alias scientias Mathematicas referant ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, unde nam Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint; quæ sit earum diuisio; a quibus primum ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ; quanta sit illarum præstantia, atque utilitas, & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

MATHE-

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE *Mathematicæ, quæ quidē circa quantitatem uersantur omnes, nomen acceperunt à dictione græca μάθημα, siue μάθησις, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, uel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, quâ anima nostra (ut eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, ubi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio responderit, ut puer, gradatim tamen ascendens eo deductus est, ut responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissime perdidicisset Geometriam. Aliis autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi uendicare, quod solæ modum, rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principiis ad conclusiones demonstrandas, quod propriū est munus, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, ut & Aristoteles testatur; neque unquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere uolunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud uero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasue nō semper obseruare uidemus, cum plerunq; in confirmationem eorum, quæ ostendere uolunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratane, adducant.* 1. poster.

DISCI-

DISCIPLINARVM MATHEMAticarum diuisio.

PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes prope modum Mathematici, atq; Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas uniuersas in quatuor partes distribuerunt, Aritmethicam, Musicam, Geometriam, ac Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam uersantur; sit uel discreta, sub qua omnes numeri, uel cõtinua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & utraque tam secundum se, quam comparatione alterius possit considerari; Visum fuit illis consentaneum, quatuor prædictas facultates instituere, quæ utranque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eãdem quantitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniã. Geometria de magnitudine siue quãtitate cõtinua, secundũ se quoq;, ut immobilis existit, disputat. Astronomia deniq; eandẽ magnitudinẽ, ut est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarũ Arithmetica, & Geometria puræ, Musica uero, atq; Astronomia mixtæ dicunt, oẽs aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & ceteræ huiusmodi, uel facile, ut ad capita, a quibus dependent, reduci possunt.

ALIA rõne a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, ut auctor est Proclus in cõmẽtarijs, quos in primũ Euclidis librũ edidit, Mathematicæ disciplinæ diuidunt. Quãquidẽ diuisionẽ, quoniã elegãter, copioseq; docet, ad quen ã sese extẽdãt Mathematicæ disciplinæ, fermę ad uerbũ ex Proclo iuxta interpretationẽ Francisci Barozij Patricij Veneti excerptã hic subijcere statui. Volũt itaq; prædicti auctores, sciẽtiarũ Mathematicarũ quasdã in intellectilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam uero in sensi libus, ita ut attingant materiam sensibus obnoxiam, uersari. Prioris generis statuunt duas longe primas, præcipuasq; scientias, Arithmeticam, & Geometriam: In posteriori uero genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodæsiam, Canonicã siue Musicam; Supputatricẽ, atq; Mecha-

Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis disserit motibus, de corporum cælestium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonũ, exercetur: Metheoroscopica, quæ eleuationum differentias, syderumq; reperit distantias, nec non multa alia, & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumque stellarum distantias huiuscemodi diopticis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt a Geometria gigni, atque uti radijs visorijs, tanquam lineis, et angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub uisum cadunt, alios situs, & distantias, vt parallelarum coincidentiæ, uel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam specularìam, quæ circa uarias, multiplicesque versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc est, vmbrarum designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quę in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesque videantur. Geodæsiam appellant eam scientiam, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos, tanquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassioribus, vt spartis, & perpendiculo. Diuiditur hæc, ut Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes concentuum considerat rationes, sensusque ubique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, ut menti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat, non vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materieque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis ido-

nea,

nea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusis terra, marique obsidentibus resistentia; Quædam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ dicitur, quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur; alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status vero æquilibrium esse causam censendum est, ut Timæus etiam determinauit; alia vero neruis, spartisque animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centropondetantia uocantur, cognitio: Quædam denique sphærarum effectrix, quæ σφαιροποιΐα appellatur, ad cælestium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atque ut vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandasq; pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidã alij voluere, sed uti eam volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæsia, ut in diuidendis, dimetiendisque castrametationis spatijs in campo. Quemadmodum neque Historicam, neque medendi artem Mathematices partem ullam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam Medici Mathematicis utantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, uel urbium magnitudines, & diametros, uel ambitus, circuitusve colligendo: Medici vero, quamplurimas res in arte sua huiuscemodi uijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis tẽporibus, locisque dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam acccommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, paucissimam ostendere multitudinem, castra, suosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum uero ad figuram quadranguli, uel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere sunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum scientiarũ partitione reliquerunt.

INVEN-

INVENTORES MATHEMATICARUM DISCIPLINARUM.

OMNES disciplinas Mathematicas a varijs, & diuersis auctoribus ortum, originemque duxisse, perspicue historiæ testantur: Immo uero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoriæ quoque proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commertia, ut auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq; successores, nec non Aegyptij, Græci denique ac Arabes amplificarunt, varijsque problematis, atque theorematis illustrarunt. Musicam deinde a Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt; quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri, & Lino; Linus uero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra usque tempora manauit. Geometria uero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumque habuit ab agrorum emensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, uastaretque, ut nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, siue γεωμετρέω idem significat, quod, terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria cœpta est expoliri, & non contenta suis finibus, se se ad corpora etiam cœlestia dimetienda conuertit, tradiditq; principia uniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quam plurimis, quæ ex ipsa, veluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi, ac Mathematici plurimis, acutissimisque demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theo *dorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Archytas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam esse autumãt: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse uolunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) syderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij deniq; gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, ut est præstantissima, ita quoque maxime illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterum, præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipsis, tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ sunt, atque deductæ.*

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM *disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque ulla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, ut recte a Proclo probatur. Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si uero nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus utitur, sit iudicanda, haud dubie Mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque*

firmantque, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant; Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorũ sectæ, (ut alios interim philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami e trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnunquam a fonte ipso Aristotele dissident, ut prorsus ignores, quidnam sibi uelit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, ut pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiã esse digniorem, præstantiuremque, quæ magis synceritatis, ueritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ ueritatem adeo expetant, adament, excolantque, ut non solum nihil, quod sit falsum, uerum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEmaticarum disciplinarum.

NON solum vtiles, verumetiam necessariæ admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicã, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemq;

nostri intellectus attollere absque ullo medio tentemus, nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res metaphysicas, quæ sunt ab eadem maxime auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales a Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationẽ exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas recte percipiendas, interpretandasque conferant, multis uerbis pulcherrime nobis exponit B. August. lib. 2. de Doctrina Christ. demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi a multis, quæ translate, ac mystice posita sunt in scripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit; eandemque sententiam longe post pluribus uerbis repetit eodem lib. Hoc idem docet D. Hieron. tomo 1. Epist. 1. asserens, magnam inesse numeris uim ad multa mysteria in scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis utilitatem, perhibet. Rursum B. August. loco, quem paulo ante retuli, testatur, Musicam pernecessariam esse doctori Christiano, subiungens paulo post, Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans D. Gregorius Nazianzenus, summis laudibus D. Basilium præceptorem suum extollit, quod in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque scientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfecte acquirendas, ut perspicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philosophorum, maxime Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos ad bene recteque philosophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimum de causa, ut ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus uidebantur esse, per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quæ proculdubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathematica-

Cap. 16.

Cap. 37.

Cap. 16.

Cap. 19.

maticarum omnino est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (ut copiose scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad remp. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeo, ut etiam si nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidē experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contra uero, eos qui ad hasce facultates idonei minime reperiũtur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Tymæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiusq; animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt enim hæ præcipua ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honestissimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque versari solebant: Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab aliis studiis excæcatur, defoditurque, a Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum philosophorum, quibus harum disciplinarum utilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque præstantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS, ATQVE GEOMEtriæ commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (ut aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq; Geometria uniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, ut testatur uulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit a se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondendoq; (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de uitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quest. Acad. lib. 2. ubi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, a quo iidem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset unum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & aliis auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cœpit imperare, ut Ioannes Lucidus refert. Quod quidem uerius esse crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius

Megarici

Megarici diligentissime enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi uoluminis de Geometricis elemẽtis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monimentis philosophorum exercitatissimum, hoc tam insigne opus uel scientem uoluisse praterire, uel ab Euclide suo esse compositum, ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo philosopho longe alius est, qui, cum in doctrina Academicorum esset summa cũ laude uersatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo uendicarit. Scripsit autem uolumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes, Phanomena, atq; Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item conica elementa, auctore Proclo, qua tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuscula. Maxime uero hoc uolumen elementorum Geometricorum nunquam omnium consensione satis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, ut nullus unquam eorum, qui similia conscripserunt elementa (conscripserunt autem, ut ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, ut summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, qua ad rem Geometricam pertinent, in uulgus edenda, sed ea duntaxat, qua uisa sunt esse necessaria, atque utilia, ad communem omnium utilitatem, argumentis, & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Caterum, quanta sit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde uniuersa Geometria, prastantia, ac utilitas, partim ex ijs, qua ante scripsimus, partim ex ijs, qua nunc dicemus, non obscure perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes siquidem Mathematicarum re rum scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus usurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere uult, elementa literarum discit prius, & illis assiduè repetitis utitur in uocibus omnibus exprimendis; sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene, ac perfecte calleat prius; necesse est. Ex his etenim elementis, ueluti fonte uberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio; omnis in cælo per instrumenta syderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum uis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum uariarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere uarie illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius huius mundanæ est inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuò conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur, atque demonstratur unius huius scientiæ ui cæli uniuersi, syderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, uarietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusque uarij tam expedite cognoscuntur, ut & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis, ac Lunæ defectiones certissime, ante quam fiant, in omne posterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis nostræ oculis munere, ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse uidentur, omniumq; fidem superant, perspicua facere, credibiliaq; esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historiæ. Cum enim Hieron Syracusarum rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum regi mittere statuerat, tantæ esset molis fabricatus, ut eam omnes una Syracusii a loco dimouere minimè ualerent, Archimedes Geometra peritissimus unius Geometriæ uiribus fretus regi promisit, se effecturum, ut ipsam solus rex absque ullo labore subduceret: Quod cum præstitisset, in conspectu omnium rex stupefactus exclamasse perhibetur;

hibetur; Ab hac die, quicquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic uidetur mihi esse pulcherrimũ illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri, & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime offendit. Neque silentio præteriri debet, eundem Archimedem robori, ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumero, iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, e loco se commouere posse. Pari ratione, datis uiribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere: Et alia id genus non solum ab Archimede, uerum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse memoriæ proditũ est. Tantum denique nomen una hac Geometria Archimedi peperit, ut Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam urbem defenderat Archimedes machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnatæ urbis direptione, ac cæde ciuium unius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem ubi contra imperium suum, & uoluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, uehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem uiuo habere non potuit. Cuius sepulchrũ Cicero a se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam, utilitatemq; Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit uis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenue fatetur Galenus insignis philosophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cum scholas Peripateticorum, ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore, studioque arripuisset, nihil fere ab ipsis audiße se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimmo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiã naturali rationi pugnantia reperisse: Ita ut ad Pyrrhoniorum

fere

fere (erant Pyrrhonij philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæq; (quibus artibus ab auis, & patre fuerat institutus) esset cognitione, scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & lineares demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime sit utilis, ut aliæ artes facilius, & rectius percipiantur. Postremo est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis, & inferioribus hisce machinis, a quibus originem traxit, sed euolauit in cælum usque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cælestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem, & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA *diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali uocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria uniuerse sibi hunc scopum proponit, ut plana, aut solida uel constituat, uel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque uero mirum alicui uideri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus extent propriæ contemplationes, ut diximus, non autē de lineis, uel etiam punctis: Non, inquam, debet uideri mirū, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potissimum circa figuras uersatur, quæ in planis duntaxat, uel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, uel lineæ figuram ullam constituūt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus uero, siue planis, & corporibus, solidisue maxime conueniebat, ut proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus*

ribus uero quinque de solidis acutissime disputat, eorumque proprietates maxime illustres peruestigat. Quoniam uero cum res omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absque linearum commensurabilium, atque incommensurabilium notitia; Immo uero quam plurimæ magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absque earundē linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpe numero sint talia, ut ea communis, & nota mensura data metiri nequeat, ut liquido constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atque usum; idcirco ut hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimensionemque requisita, Stereometriæ suæ præposuit decimum librum, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis differit. Intelligens rursum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorum passionibus, easque copiose, & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persecutus. Quamobrem totum hoc uolumen elementorum Geometricorum quindecim libris comprehensum, (quorum quidē priores tredecim sine ulla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus, posteriores uero duo a nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita ut prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes complectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis cōmensurabilibus, incommensurabilibusque disputet; Quarta denique reliquis quinque libris absolutam scientiam solidorum, siue corporum complectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, inuestigando eorum æqualitatem, & inæqualitatem: In quinto uero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto denique proportiones figuraram planarū discutiuntur. Quid uero Euclides in singulis alijs libris pertractet, proprijs in locis exponemus.

QVID

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorũ diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema uocant eam demonstrationem, quæ iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterum constitui, appellabitur huiuscemodi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius utraque pars contradictionis (ut ipsi loquuntur,) est probabilis, qualis hæc est quæstio; An totum distinguatur realiter a suis partibus simul acceptis: Sic etiam quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat, se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Isosceles, uel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi potest in partes non æquales. Est tamen discrimen non paruum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico utrauis pars contradictionis suscepta confirmatur tantum probabiliter, ita ut intellectus cuiusque ambigat, utranam illius pars uera sit: In Mathematico uero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonstratione, ita ut nihil omnino dubij sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineã perpendicularem educere, efficiet utique hoc ipsum ratione cõstanti, & euidenti: Eodem modo dicendum est, si ex eodem puncto uelis educere lineam non perpendicularem. Theorema autẽ appellãt eã demonstrationẽ, quæ solũ passionẽ aliquã, proprietatẽue unius, uel pluriũ simul quantitatũ perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æquales

quales

quales duobus rectis, uocabunt talẽ demõstrationẽ Theorema, quia nõ iubet, aut docet triangulũ, aut quippiã aliud construere, sed contemplatur tantũmodo triãguli cuius libet constituti passionẽ hanc, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde a contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis utraque pars uera ut sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, ut inæquales quoq; sint duobus rectis. Eadem ratio in aliis theorematibus est intelligenda. Itaque ut uno uerbo dicã, quæsitũ illud Mathematicum cõstruere aliquid docẽs, cuius etiã oppositũ potest effici, Problema: Illud uero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo uelle angulum rectũ constituere, irridendus omnino esset, & Geometriæ prorsus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in semicirculo constituti sunt recti, ut demonstrabitur in lib. 3. propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendũ erit. Cæterũ tã problema, quã theorema dici consueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quod utrumque aliquid nobis proponat, ut in exemplis adductis constat. Hæc ideo dixerim, ut studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (ut aliorum interim uolumina taceam,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur, his fere uerbis: Quod faciendum erat: Theorematum uero hisce: Quod ostendendum uel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis utriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur & non una tantum, quamuis ultimus syllogismus demonstratiuus solum concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, ut declarabimus in prima Euclidis propositione, nec non in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM uero ad demonstrationes problematum, atque theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, uel problemata minus principalia, & quæ facile c:

le ex iis, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum a Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, ut brevius demonstrari possint. Vocant autẽ illa Lemmata, propterea quod solum assumantur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituatur, quemadmodum de aliis. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac brevior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisque disciplina ex præexistente gignatur cognitione, ut auctor est Aristoteles, atque ex assumptis, & concessis quibusdã principiis suas demonstret conclusiones; Nulla autẽ scientia ex eiusdẽ Aristotelis, aliorumq; philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt utique & Mathematicæ disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata, ac theoremata confirment. Horum autẽ tria tantũmodo genera apud Mathematicos reperiũtur. In primo reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cũ Aristotele suppositiones, vt vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominũ ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur petitiones, siue Postulata, quæ quidẽ adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertiũ genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ non solũ in scientia proposita, sed etiam in omnibus aliis ita manifesta sunt, & euidentia, ut ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa uocabula recte perceperit. Atque his principiis recte mihi uidetur accõmodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principiis Aristoteles. A ianua quis aberrabit? Vt praclare a Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum elementorum præmittit ante demonstra-

monstrationes suarum conclusionum omnia hæc principia, ut ex ipsis, quæ quidem facile a quouis intelliguntur, deducat admi-, randa theoremata, quibus nemo unquam assensum præberet nisi certa, ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusque seculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs, cuilibet quantumuis rudi & ignaro notissimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusque certissimis ita confirmat, ut nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porro in huiusce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide seruatur, ut in ipso quidem introitu sciẽtiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque uero oĩa principia Geometrica ab Euclide ĩ his elementis sũt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda, quæ tamen ex ijs, quæ tradidit sine magno labore ac studio percipi possunt & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuisse uideamur rerum Mathematicarum studiosis, adiunximus uarijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse.

ERRATA PRIMI TOMI SIC CORRIGITO.

Folium.	Linea.	Errata.	Correcta.
39. a.	11.	PROPOS.18.18.	PROPOS.18.19.
40. a.	30.	A E C.	A B C.
52. a.	33.	*duo arcus duo arcus.*	*duo arcus*
62. b.	9.	A C D F	B C D F
67. a.	17.	A D	B C
72. a.	17.	4.*primi*	14. *primi*
74. a.	9.	*pronitur*	*proponitur*
79. a.	23.	33.*primi*	30. *primi*
88. a.	24.	F G E	E F G
131. b.	8.	A F	D F
133. a.	15.	*eadem*	*easdem*
185. a.	22.	*figuiras*	*figuras*
229. b.	5.	*eorum*	*earum*

INDEX PROBLEMATVM, AC THEOREMATVM, QVAE præter ea, quæ continentur in Euclidis propositionibus, in his elementorum libris demonſtrantur.

IN PRIMO LIBRO.

Omnes

IN SECVNDO LIBRO.

IN TERTIO LIBRO.

 media;

Segmen-

IN QVARTO LIBRO.

IN QVINTO LIBRO.

sitq;

IN SEXTO LIBRO.

Si fue-ut ar-

IN OCTAVO LIBRO.

IN NONO LIBRO.

nimi

IN DECIMO LIBRO.

Quotcun-

IN VNDECIMO LIBRO.

Si fuerint

IN DVODECIMO LIBRO.

lateris

IN TERTIODECIMO LIBRO.

e 2 segmen-

ductum ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum. 227.a

4 Si in sphæra eadem cubus, et dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris dodecaedri, utraque simul, quintuplum sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum dodecaedri circumscribentis. 228.a

5 Si latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli. 228.a

6 Superficies cuiuslibet dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, et perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. 231.a

7 Si a centro circuli triangulum tetraedri circumscribentis perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum sexies sumptum, superficiei tetraedri æquale. 231.a

8 Si ex centro circuli triangulum octaedri circumscribentis perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum duodecies sumptum, superficiei Octaedri æquale. folio. 231.a

9 Si ex centro circuli quadratum cubi circumscribentis perpendicularis ducatur ad unum latus quadrati; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum duodecies suptum, superficiei cubi æquale. 231.a

10 Rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad unum eius latus ducta, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, æquale pentagono dodecaedri in eadem sphæra constituti. 232.b

11 Quam proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdē sphæra, eandem habent latera cubi, & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum. 234.b

12 Superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habet eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri

drum se habet, ut rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

Vel ut Campanus ait.

Tetraedrum sphæræ impositum ad octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, ut rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partiũ lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimasseptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentũ, ad quadratum diametri sphæræ. 241.a

25 *Linea perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa, tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.* 243.a

26 *Linea perpendicularis ex quolibet angulo triãguli æquilateri ad basim oppositã ducta, sesquialtera est eius, quæ inter centrũ triãguli, & dictũ angulũ interijcitur: Hæc autẽ inter cẽtrũ triãguli, et dictũ angulũ interiecta, dupla est eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad basin eiusdẽ ducitur.* 243.b

27 *Si octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basim quamcunque octaedri deducitur.* 243.b

28 *Duplum quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: perpendicularis autem a centro sphæræ in aliquam basim cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.* 244.a

29 *Solidũ, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictũ cubũ cõprehendẽtis, æquale est cubo. Vel solidũ, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale est cubo.* 244.b

30 *Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuscunq; corporis regularis ad aliquã eius basim ducta, in tertiã partẽ superficiei ipsius corporis, æquale est pposito corpori regulari.* 244.b

31 *Idem circulus comprehendit & cubi quadratum, et octaedri triangulum eiusdem sphæræ.* 245.a

Lineæ perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri in eadem sphæra circumscribunt, æquales sunt. 245.b

32 *Si octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæra inscribantur*

IN QVINTODECIMO LIBRO.

Si in

IN SEXTODECIMO LIBRO.

Minus

Diameter

Angulum

FINIS.

EVCLIDIS
ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.
I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

TOTVS *hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus, proprietatesq́; triangulorum tum iuxta angulos, tum iuxta latera, quæ quidem inter se comparat interdum, interdum vero vnumquodq; per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos consideras, aliquando vero ex*
ıgulis latera secundum æqualitatem, atq; inæqualitatem,
matur. Idemq; varijs rationibus inquirit in duobus quãdoq;
-iangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum
roprietates, parallelogrammorumq́; contemplationem aggre-
ıtur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter eas
m parallelas constitutis conferuntur. Vt autem hæc om-
ia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisio-
em anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, con-
itutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo
iat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq;, vt vno verbo rem totam
omplectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, re-
lilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangu-
a inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Eu-
lides more Mathematicorũ rem propositam exorditur a prin-
ipijs, initio facto a definitionibus, quarum prima punctum
xplicat, docens illud dici punctum in quantitate continua,
quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac

A *facilius*

facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem, altitudinemùe alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam deniq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas n. oïs cõtinuã aut longa solũ est, aut longa simul & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neq; aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, hactenus nondũ est excusus. Itaq; quod in quãtitate cõtinua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum esse cogitetur, id appellatur ab Euclide, & a Geometris punctum. Huius exẽplũ in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum vero indiuiduum prorsus debet existimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

punctum

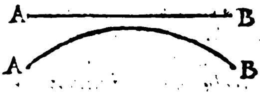
•

II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati.

obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbræ extensa, carens omni latitudine, cum sit limes vtriusq;. Mathematici quoq;, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligamus ex A. in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem, secari, atq; diuidi.



III.

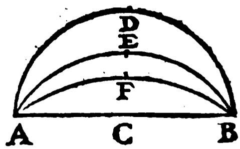
LINEAE autem termini, sunt puncta.

DOCET, quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IIII.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraq;. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atq; illuc deflectendo subsultat; in qua denique, nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines posita progrediuntur. Proclus hanc definitionẽ exponens ait, tunc demũ lineã aliquã ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spacium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tãtum occupat præcise spaciũ, quanta est distantia puncti A, a puncto B: Lineæ vero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spacia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchre sic definit. Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur. Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremũ B, ob interiectum punctum C. quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B. non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ minor di

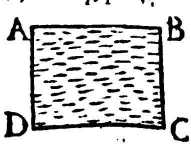


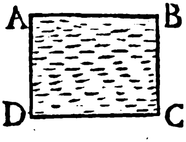
nor diceretur, quam A C B. Campanus describens rectam lineam, vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta. mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus egit copiosissime Apollonius in conicis elementis, linea Conchoideos, de qua Nicomedes, linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & aliæ huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede descripta qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunq; sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libris de cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum. lib. 1. tex. 5.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B,





B C, C D, D A, comprehensa consideratáq; secundum longitudinem A B, vel D C, & secundū latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusq; corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, mouent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum propter longitudinem lineæ, latum quoq;, propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus DC, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem internallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

V I.

SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

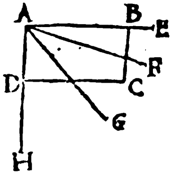
NON dissimilis est hæc definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt lineæ A B, B C, C D, D A; Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

PLA-

VII.

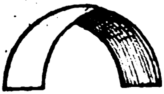
PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HAEC quoq; definitio similitudinem quãdam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumue subsultando, non recedant, appellabitur plana. qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorue, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tunc demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circunducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadẽ, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia



puncta superficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior a linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circunduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaq; vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari posit recta linea secundum A B, & A F, & deniq; secundum omnes partes. Hac autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas conficitur: Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur super-

ficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones; Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cætera omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior

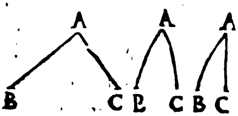


alicuius globi, columnæue rotundæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest: Idemq; dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

VIII.

PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quid nam sit angulus planus, dicens; Quandocunq; duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in



qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ

non

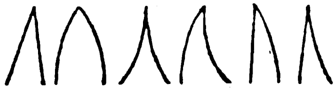
non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo se iungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam, non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere.

Itaq; vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productæ se mutuo secent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo interfecent; sufficit enim, quod se se contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotæ cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neq; anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæræ constituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum a nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum conuexum, & concauũ, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur:



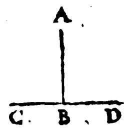
Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisue linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & alijs commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.

X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpẽdicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, pro-

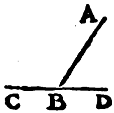
ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quæ nam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum & acutum. Igitur si recta linea A B, rectæ C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadẽ linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed æquabiliter rectæ C D, insistet, vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B vnum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11, & 12. huius primi libri. Itaq; vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quid nam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quem nam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore, hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



OBTV-

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.



QVANDO recta AB, rectæ CD, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.

XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alterã: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniã vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD; quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

TERMI-

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

Tres sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

Non enim quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam Figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ; & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt, vt solida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Superficies quoq; infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest. Figuræ vnico comprehensæ termino sunt. Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus vero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circumscripta, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus. planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinq; propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

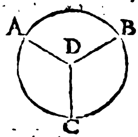
XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub

vna

vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

Definit hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circunscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spacium concludatur vnica linea A B C, habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote a D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circ... is, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertij lib. Adiungit quoq; Euclides, lineam extremam circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circunferentiam. Potest circulus etiã hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur a linea recta finita circa alterum punctum extremũ quiescens circunducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. xi. Vt si intelligatur recta A D, circa punctum D, quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, a quo dimoueri cœpit, describet ipsa recta totum spacium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoq; punctum quiescens D, illud, a quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta A D, circunducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circunscripta, tamen quia in ea non datur punctum, a quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.



HOC

XVI.

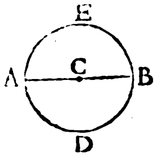
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

Docet, punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, a quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.

XVII.

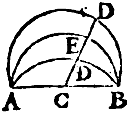
DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraq; parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

Si in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur oīs in circulo recta linea ducta diameter dicetur; sed ea solummodo, quæ per centrum vsq; ad peripheriam vtrinq; extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum



bifariam

bifariam secari a diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinq; æquales circunferentiæ abscindantur. Quod tamen Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B. ita vt diameter A B, communis sit vtriq; portioni: Si igitur circunferentia A D B congruat penitus circunferentiæ A E B, manifestum est duas illas portiones a diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circunferentia A D B, non omni ex parte cadere dicatur super circunferentiam A E B, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro C, secans circunferentiam A D B, in D. & circunferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex centro ad circunferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam; vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideoq; æquales erunt, quod demonstrandum proponebamur.



XVIII.

SEMICIRCVLVS vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI *gratia, in superiori circulo figura A D B, contenta sub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur semicirculus, quia, vt in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, semicirculus. Idem autem punctum C, diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.*

HABENT *nonnulla exemplaria hoc in loco definitionem egmenti circuli: Verum, quia ea repetitur in 3. lib. vbi proprius*

prius est locus &c. Proclus illã non inuenit in antiquis exemplaribus; maluimus hic illam subiicere, eiusq; explicationem in 3. librum, ante quem nulla fit mentio segmentorum circuli, differre.

XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST *definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quæ nam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circunscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.*

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS *Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circunscribuntur, aperte nobis innuit, quo nam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.*

XXI.

QVADRILATERAE vero, quæ sub quatuor.

Eadem ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

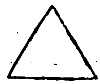
Qvoniam species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciē, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atq; ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circunscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, forte eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes a quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atq; reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterū est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

Descendit iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum,

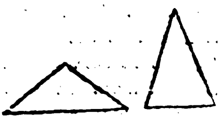
rum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis se se possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, ceu ad quintã propositionem huius libri demonstrabimus.



XXIIII.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

Ex hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet.



XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

Hic deniq; ex inæqualitate omnium laterũ trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorũ ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore,

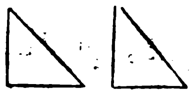
 vel mi-

vel minore existentes, aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum vero Isosceli, tertium deniq; Scaleno respondet triangulo. Cæterum quanam arte construenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, tradémus propos. 1. huius lib.

XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt supra diximus.) fit vt tres quoq; species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti; aut deniq; nullus rectus, nullusq; obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse vel Isosceles, vel scalenum, vt hæ figuræ indicant;



Æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoq;, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

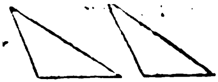
XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod

obtusum

obtusum angulum habet.

Triangvlvm *amblygonium, siue obtusangulum esse quod; potest vel Isosceles, vel scalenum, vt in his figuris cernitur,*



non autem æquilaterum, alias eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quæ ex propos. 5. ostendemus, æquales, ideoq; cum vnus ponatur obtusus; omnes tres obtusi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

Omne *triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, esse necessario Oxygonium: At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel rectangulum, vel amblygonium, vel Oxygonium; Vt vnica sit species trianguli æquilateri tres vero tam Isoscelis, quam Scaleni: atq; in vniuersum septem triangulorum genera, æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isoceles amblygonium, Isosceles oxygonium, scalenum rectangulum, scalenum amblygonium, & scalenum oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum &c. Hoc te breuiter*

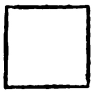
 monere

monere volui, ne putares aliqd latere mysterij in base triāguli, intelligeresq́; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

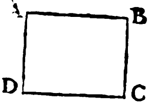
QVADRILATERARVM autē figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq́; anguli recti. Itaq; quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.



XXX.

ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

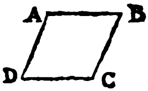


SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter se, & A D, B C, inter se quoq; æqualia sunt, cū A B C D, propter angulorū rectitudinē, parallelogrammū sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

RHOM

XXXI.

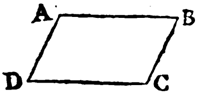
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



Haec figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoq; inter se æquales sunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterũ, parallelogrammũ sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neq; rectangula.

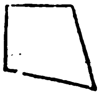


Est hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neq; eius latera omnia æqualia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; sunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

RELIQVAS Omnes figuras quadrilateras, quæ a prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera bina opposita, neq; angulos binos oppositos habeant inter se se æquales, generali vocabulo Trapezia nominant: quæ quidem, cum infinitis modis variari queant rectè irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus; & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale. &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

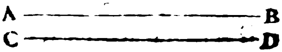


XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraq; parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunq; partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, alteri quoq; accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana rectæ A B, applicetur,

cetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circunducta tangat quoq; omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur huiusmodi rectæ



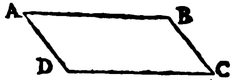
duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Ceterum planius, perfectiusq́; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eodem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide vtramq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandẽ ex vna parte longius protractas in vnũ punctũ conuenturas, quamuis ex altera semp magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunq; ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, ei necesse est concedat, illas in vna, eademq́; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodem existere plano. & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conãtur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant. etiamsi infinite producantur. nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem in libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

PA-

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.



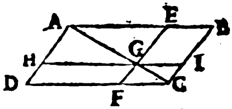
VT figura quadrilatera ABCD, siquidem latus AB, æquidistet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ nō sunt parallela, inter se æqualia, diciturq; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus

parallelæ

parallelæ secantes diametrum in vno eodemq; puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.



SIT parallelogrammũ A B C D, in quo diameter A C; & linea E F, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus A D, B C; Item linea H I, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus A B, D C, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidẽ duo E B I G, G F D H, per quæ diameter A C, non transit, vocantur a Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum A E G H, G I C F, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

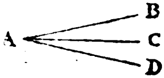
I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si recte consideretur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atq; adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt si

punctum

punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione expostulat Euclides, quemadmodum hic vides a puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeræ aliæ ab eodem puncto educi possunt ad alia atq; alia puncta.



II.

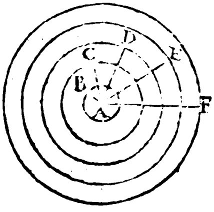
ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam. Sic linea recta A B, producta est primo in continuum ad punctum C, Deinde ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.

IAM vero, si terminatam rectam lineam cuiuscunq; quantitatis mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremum ad quoduis punctum, ipsamq; circa hunc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectumq; quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinq; lineis A B, A C, A D, A E, A F, quæ singulæ circa centrum A, circum-



circumuolutæ singulos circulos descripserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER *hæc tria postulata quibus Euclides cõtentus fuit, sunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.*

IIII.

ITEM quacunq; magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS *enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquã dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.*

COMMVNES NOTIONES, siue Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

FIERI *nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior æqualis fuerit propositæ quantitati, su-*

ti, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoq; esse.

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, procuidubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoq; æquales.

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAM si reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuisset detractum, quam a maiore.

IIII.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint; tota sunt inæqualia.

QVIN &, si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adijciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

SIC

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest. Possunt enim composita quantitates, vel residua, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiam si ex 7. & 5 detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1, ex 7. & 5. remanebunt 4, & 4. quæ æqualia quoq; existunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur; residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

SIMILITER, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c. alicuius quantitatis, deficeret vtiq; minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si cõtra, minus esset duplex, vel triplex. &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate compro-

bari

bari potest, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ; & vtrique tertia illa addatur erunt composita duplices illius tertiæ; sed & inter se æquales, ob idem 2. pron. additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflata triplices eiusdem tertiæ; Cum igitur & æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademque 2. pron. sit ratio in cæteris multiplicibus perspicuum erit Axioma propositum.

VII.

ET quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.

PARI ratione, quæ eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt.

VIII.

ET quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOC est, duæ quantitates, quarum vna superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando vna alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter se inæquales existant.

ECON-

ECONTRARIO, *Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuo congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse æquales secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum &c.*

IX.

ET totum sua parte maius est.

CVM *pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.*

X.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

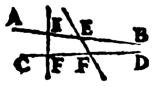
HOC *axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuiue nequeat, sed prorsus sit immutabilis: Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet: Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdũ. Conatur tamẽ Proclus ex 10. definitione id demõstrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F. quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitq́; A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectã D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis est B G, propterea quod angulus D E F, minor ponatur angulo A B C. Producatur C B, in rectum & continuum vsque* 2. petit.

ad H; Cũ igitur angulus A B C sit rectus, erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoq;, quare maior etiam an-
10. def. gulo A B G. Producta autem G B, in rectum & continuũ vsq;
1. petit. ad I, cum angulus A B G, ponatur rectus, fiet angulus ABI,
10. def. illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoq; erit angulo A B I, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademq; est ratio in cæteris.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud nõ posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis, rectus est, cum & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. dicemus. qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

XI.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



VT si in duas lineas rectas A B, C D, incidens alia recta E F, faciat duos angulos internos, & ex eadẽ parte B E F, D F E, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandẽ conuenturas esse ad aliquod punctũ vnũ, versus eam partem, in qua duo anguli minores existũt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniã quãdo duo anguli interni, & ex eadẽ parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partẽ coire possunt, sed æquali semper spatio pretenduntur, vt propos. 28. huius lib. demõstrabitur: Quare si duo anguli interni, & ex eadẽ parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte di-

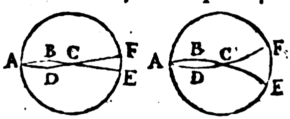
te dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem esse aliquãdo in vnũ punctum. Verum quia hoc axioma a numero principiorũ omnino reijcitur secundũ Geminũ Geometrã, Proclum, & alios, diciq; debet potius Theorema, quam principiũ, cũ nõ facile quiuis ei assensum præbeat, propterea quod reperiantur & aliæ lineæ, quarũ spatiũ licet semper magis, ac magis coangustetur, nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamsi infinite producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij: Idcirco illud post 28. propos. & ante 29. huius libri, vbi primum eius vsus incipit apparere, Geometrice demonstrabimus ex sententia Procli, vt sine vlla dubitatione ad theorematum, atq; problematum demonstrationes possit assumi.

XII.

DVAE rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

NVLLAM *prorsus habet difficultatem hoc principium; Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulũ, necessario ex altera parte semper magis ac magis disiungẽtur si producãtur, vt in exemplo proposito perspicuũ est. Quare vt superficies, spatiumue quodpiam rectilineũ ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarũ rectilinearũ prima.*

Proclus tamen demonstrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri põt vt duæ lineæ rectæ claudãt superficiẽ, cõprehendãt duæ rectæ A B C, A D C, superficiem A B C D, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis A, & C. Facto deinde centro C, describatur circulus interuallo C A, & producantur rectæ A B C, A D C, in rectũ, & cõtinuũ vsq; ad circunferẽtiã, nempe ad pũcta E, & F. Itaq; quia rectæ A C E, A C F, trãseunt per centrũ C, erũt semicirculi A E, A E F, inter se æquales, & idcirco circunferentia quoq; A E, circunferẽtia A E F, æqualis



3. pet.
2. pet.
17. def.

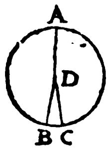
lis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spacium comprehendunt. Quod est propositum.

HVIC *duodenario numero Axiomatum ab Euclide positorum adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cum Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.*

XIII.

DVAE lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

NON *est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D, & interuallo D A, describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C;*



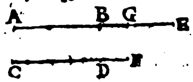
3. pet. *Erunt igitur duæ circunferentiæ A B, A B C,*
17. def. *inter se æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualium, cum A D B, A D C, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.*

POSSVNT *tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in subsequenti figura, rectæ A G, E B, commune habent segmentum B G; quia ambæ vnam rectam constituunt lineam A E. At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere A B, A C, in superiori exemplo, nō possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte a Proclo fuit demonstratum.*

XIIII.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.

Hoc, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaq; quantitatibus A B, C D, addantur inæquales B E, D F, sitq; B E, maior quam D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt sit G E, excessus, quo quantitas addita B E, superat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqualibus A B, C D, addita sunt æqualia B G, D F, erunt tota A G, C F, æqualia. Quare constat, totam quantitatem A E, superare totam C F, eodem excessu G E, quo magnitudo D F, adiuncta a magnitudine adiuncta B E, superatur. Quod est propositũ.



2. pron.

XV.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

In eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F. vt G E, sit excessus, quo quantitas B E, quantitatem D F, superat. Quoniam igitur æqualibus B G, D F, addita sunt æqualia A B, C D, erunt tota A G, C F, æqualia. Quamobrem tota quantitas A E, superabit totam C F, eodem excessu G E, quo maior quantitas proposita B E, minorem D F, superat. Quod est propositum.

2. pron.

XVI.

SI ab æqualibus inæqualia demantur,

erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

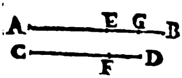
AB æqualibus AB, CD, auferantur inæqualia BE, DF. Sitq; EG, excessus, quo quantitas BE, superat quantitatem DF. ita vt BG, æqualis sit ipsi DF. Quia igitur ab æquali-

3. pron. *bus AB, CD, ablata sunt æqualia BG,*

DF, remanebunt AG, CF, æqualia. Perspicuum ergo est, residuum AE, superari a residuo CF, eodem excessu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatã magnitudinẽ DF, superat. Quod est propositũ.

XVII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui totorum æqualis.



AB inæqualibus AB, CD, auferantur æqualia AE, CF. Sitq; BG, excessus, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD, ita vt AG, æqualis sit ipsi CD. Quoniam igitur ab æqualibus AG, CD,

3. pron. *ablata sunt æqualia AE, CF, remanebunt EG, FD, æqualia. Quare residuum EB, superabit residuum FD, eodem excessu BG, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD. Quod est propositum.*

IN his quoq; quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorũ excessus, excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune demantur, erit residuorum excessus, excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas. 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus

excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorũ excessus 2, idem est, qui ipsorũ 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Deniq; si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

XVIII.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM omnes partes simul sumptæ constituũt totũ, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.

XIX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. ꝓpterea reliquus illius 14. duplus etiã est reliqui huius 7. In vniuersum aũt hoc demõstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirũ. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atq; ablata ablatæ, vt decupla, vel cẽtupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atq; tota totius.

COLLIGI potest ex dictis cũ Proclo, & Gemino hoc discrimẽ inter postulata, & Axiomata, quod cũ vtraq; sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturã sapiũt Problematũ, propterea quod aliquid fieri exposcant; hæc vero, Theoremata imitãtur, cũ nihil fieri petãt, sed solũ sententiã aliquã notissimã proponãt. Differt aũt Postulatũ a ꝓblemate, qđ cõstructio postulati non indigeat vlla demõstratione, problematis aũt constructionẽ cõcedat nemo sine demonstratione, eo qđ difficile aliquid nobis exhibeat cõstruendũ. Idẽ discrimẽ inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud. n. demonstrari nõ debet, hoc vero concedendũ nulla est ratione, nisi demõstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationẽ, vel etiã probationẽ requiret.

Quæ eidem æqualia, inter se quoq; æqualia sunt. **Huius** *autem statim demonstrationem desiderabit quis.* **Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis.** **Idem** *iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq;* **Theorematis**, **nec** *non de postulatis, problematisq;.*

CONSTAT *quoq;, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri.* **Tam enim** *numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, & tertiumdecimū, soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ a magnitudinibus æqualibus, relinquūt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; Ita quoq; numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.*

HAEC *dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipitur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.*

ANTEQVAM *porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam cum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, quoad ordinem propositionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. libris perspicitur; necessarium esse duximus, vt*

vtriusq;

vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si aliquando numerus propositionum a Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in margine, quæ quidem citationes intelligendæ sunt modo infrascripto.

1. def.	Prima definitio, & sic de aliis numeris, vt 4. def. 23. def. &c.
1. pet.	Prima petitio.
1. pron.	Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.
1. primi.	Prima propositio primi libri.
23. Vndec.	Vigesimatertia propositio vndecimi libri.
6. tertijd.	Sexta tertijdecimi libri.
9. sextid.	Nona sextidecimi libri. &c.
13. duod.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quind.	Septima libri quindecimi.
5. quartid.	Quinta libri quartidecimi.

Ex his aliæ citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

PRO

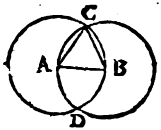
PROBLEMA I.

1\. ## PROPOSITIO. I.

SVPER data recta linea terminata triangulum AEquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunq;, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principijs concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematis perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, ac efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca vero admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant demonstrationem.

SIT igitur proposita recta linea terminata A B, super



quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo re-
3\. pet. ctæ A B, describatur circulus C B D: Itē centro B, & interuallo eiusdē rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum
1\. pet. vtrouis, nempe ex C, ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B,
20\. def. ad puncta A, & B; Eritq; super rectam A B, constitutū triāgulum A B C, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse

rio esse

rio esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quam B C, æqualis est rectæ A B. Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atq; idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat. 15. def. 1. pron.

SCHOLION.

Vt autẽ videas, plures demõstrationes in vna propositione contineri, placuit primã, hanc propositionẽ resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demõstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulũ A B C, constructũ methodo prædicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, est æquilaterum. 23. def.

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Quæ eidem æqualia sunt, inter se quoq; sunt æqualia. 1. pron.

Duo latera A C, B C, æqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia existunt.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ à centro ductæ ad circunferentiam circuli, inter se sunt æquales. 15. def.

Lineæ A B, A C, sunt ductæ à centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter se.

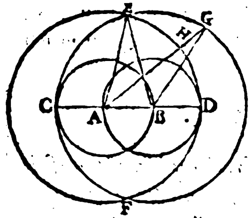
Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur à centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propositiones non solum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

Negligunt

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod breuius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SIQVIS autem super data recta desideret constituere triangulum quoq; Isosceles, & scalenum; id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta



linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. Deinde
3. pet. producatur A B, in vtramq; partem ad circunferentias vsq; ad puncta C, & D. Atq; centro
3. pet. A, interuallo vero A D, describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, ducantur
1. pet. ad puncta A & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit super
20. def. recta A B, triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, & maiora latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e cen-
15. def. tro A, ad circunferentiam E D F, erit A E, æqualis rectæ
15. def. A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad circunferentiam E C F, erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D. B C. æquales inter se, (vtraq; enim A C, & B D, æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circunferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro
1. pron. B, ad circunferentiam quoq; egrediantur: Quare A C, B D,
2. pron. æquales inter se erunt. Addito igitur cõi recta A B, erit tota
1. pron. A D, toti B C, æqualis.) Igitur A E B E æquales quoq; inter se erũt. Quod vero vtraq; A E B E maior sit quã A B. per-
9. pron. spicuũ est, cũ A D, æqualis ostẽsa ipsi A E, maior sit, quã A B;
9. pron. Itẽ B C, æqualis demõstrata ipsi B E, maior quoq; sit, quã A B. Constitutũ igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E, B E æqualia inter se, & maiora latere A B quod faciendum erat. Atq; hæc est demonstratio Procli, aliorumq; interpretum Euclidis.

BREVIVS tamẽ videtur mihi posse demonstrari, trian-
15. def. gulũ A B E, esse Isosceles, hac ratione. Quoniã A E, æqualis est recta

rectæ A D, & recta A D est dupla rectæ A B propterea quod B A, B D æquales inter se sunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rursus quia B E, æqualis est rectæ B C, & BC, dupla est ipsius A B, propterea quod A B, A C æquales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsi A B. Cum igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdẽ A B, erunt A E, B E, inter se æquales, maioresq; propterea recta A B. Isosceles ergo est triangulum A B E. 15. def. 15. def. 6. pron.

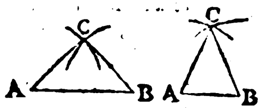
Iam vero, si ex pũcto A, ducatur linea recta A G, ad circumferentiã E G F, quæ nõ sit eadẽ quæ A E, vel A D, secans circumferentiã E H D, in pũcto H, & ex G, ad B, ducatur alia recta G B; constitutũ erit triangulũ A B G super recta A B, quod dico esse scalenũ. Quoniam A G, maior est quam A H: Sunt autem A H, A E, ex centro A, ductæ, inter se æquales; erit & A G, maior quam A E, hoc est, quam B E quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quam B G, cũ B G, sit æqualis ipsi B E. Est autem & B G, maior quam A B, propterea quod tota B C, æqualis ipsi B G maior sit quã A B, pars. Omnia ergo tria latera triãguli A B G, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum. 1. pet. 1. pet. 20. def. 9. pron. 15. def. 15. def. 9. pron.

PRAXIS.

Conabimur in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quãdã facilẽ, & breuẽ, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atq; lineis cõtendit construere; Idq; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorẽ vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.

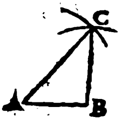
Itaque triangulũ æquilaterũ ita facile construetur sup data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero datæ rectæ A B, describantur duo arcus circulorũ se intersecantes in puncto C, siue hoc infra lineã cõtingat, siue supra. Post hæc ducãtur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; factũq; erit quod proponitur. Cuius rei eadẽ est demonstratio cũ superiori, si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessario per puncta A, & B.

Isosceles ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam A B, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus,



mus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C; constructumq; erit Isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta A B.

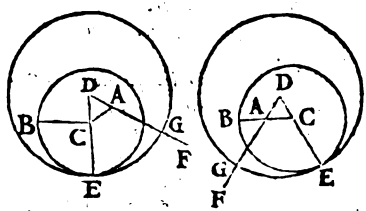
SCALENVM *deniq; hoc modo fabricabitur super data recta A B. Ex centro B. interuallo vero maiore, quam B A, describatur arcus aliquis: Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; constitutumq; erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.*



CAETERVM *quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunq;, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.*

2. ## PROBL. 2. PROPOS. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctũ datum A, & data recta linea B C; cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto altertutro extremo lineæ B C, nempe C, centro, describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. 3. pet.
1. pet. Et ex A, ad centrum C, recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secũda figura indicat.) Super recta vero A C,
1. primi. cõstruatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum

deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo consti-
tuta D A, D C, versus rectam A C, extendantur; D C, qui- 2. pet.
dem opposita puncto dato A, vsque ad circunferentiā in E;
D A, vero opposita centro C, quantumlibet in F. Deinde e
centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrū trāseun- 3. pet.
tis, alter circulus describatur E G, secās rectā D F, in G. Dico
rectam A G, quæ posita est ad punctū datū A, æqualē esse
datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro
D, ad circunferentiā E G, ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis 15. def.
igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri
A C D, remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidē C E, æ- 3. pron.
qualis est recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadāt e cen- 15. def.
tro C, ad circunferentiā B E.) Igitur rectæ A G, & B C, quā-
doquidē vtraq; æqualis est ostēsa rectæ C E, inter se æqua- 1. pron.
les erunt. Ad datum igitur punctū, &c. quod erat faciendū.

QVOD, si punctū datū fuerit in extremo datæ lineæ,
quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C,
& interuallo C B, describatur circulus, ad cuius circunferen- 3. pet.
tiā recta ducatur vtcumq; C E, erit hæc posita ad punctū da- 4. pet.
tū C, æqualis datæ rectæ B C, cum vtraq; & B C, & C E, ex 15. def.
eodem centro egrediatur ad circunferentiam B E.

SCHOLION.

HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut.n. datū punctū in ipsa data recta est positū, aut extra ipsā: Si in ipsa, erit vel alterū extremorū eius, vel inter vtrūq; iacebit extremū. Si vero extra ipsam, erit vel e directo datæ lineæ, ita vt pducta in rectū, & cōtinuū p ipsum pūctū trāseat; vel nō e directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorū quoduis recta linea ducta cū data recta angulū efficiat; Quo modo vel supra datā lineā erit cōstitutū, vel infra, vt manifestū est. In omnibus aūt istis casibus semper eadē est cōstructio, & demōstratio. Quod si in constructione fiat triāgulū A C D, sup recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

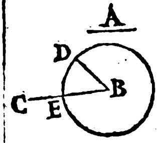
PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqua-

libus,

libus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineã æqualem minori A. Ad alterutrum extremorũ lineæ maioris B C, nempe ad punctũ



2. primi. B, ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo
3. pet. autem B D, circulus describatur secans BC, in E. Dico B E, detractam esse æqualẽ ipsi A. Quoniã B E,
15. def. æqualis est rectæ B D, & eidẽ B D, æqualis est recta A, per
1. pron. constructionem; erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

QVOD si duæ rectæ datæ cõiungãtur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, cõiunctæ in extremo vtriusq; B; describẽdus erit circul⁹ ex B, ad interuallũ minoris B D. Hic.n. auferet B E, æqualẽ ipsi B D, vt cõstat ex definitione circuli.

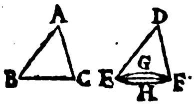
SCHOLION.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alterã cõtingat; vel nõ, sed vel coniungãtur ad vnũ extremũ, vel se mutuo secent, vel certe altera alterũ suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4.
THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habeãt, vtrũq; vtriq; ; habeãt vero & angulũ angulo æqualẽ sub æqualib⁹ rectis lineis cõtentũ: Et basim basi æqualẽ habebũt; eritq; triangulũ triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterq; vtriq; , sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SINT

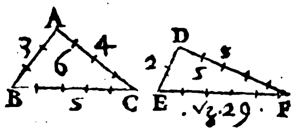


SINT duo triangula ABC, DEF, & unius utrumque latus A B, A C, æquale sit alterius utrique lateri D E, D F, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; angulusque A, contentus lateribus A B, A C, æqualis angulo D, contento lateribus D E, D F. Dico basim B C, æqualem quoque esse basi E F; & triangulum A B C, triangulo D E F; & utrunque angulum B, & C, utrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus A C, D F, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus A B, D E, inter se quoque esse æquales. Quoniam angulus A, æqualis ponitur angulo D, fit, ut si alter alteri intelligatur superponi, neuter alterum excedat, sed linea A B, congruat lineæ D E, & linea A C, lineæ D F. Cum igitur A B, 8. pron. & D E, ponantur esse æquales, neutra etiam alteram excedet, sed punctum B, cadet in punctum E; Eademque ratione punctum C, in punctum F, propter æqualitatem linearum A C, & D F, ex hypothesi. Itaque cum punctum B, 8. pron. congruat puncto E, & punctum C, puncto F, necessario & basis B C, congruet basi E F, (ut mox demonstrabitur) ac propterea illa huic æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D E F, & angu- 8. pron. lus B, angulo E, & angulus C, angulo F, æqualis ob eandem causam existet.

QVOD autē basis B C, cōgruat basi E F, si punctū B, puncto E, & punctū C, pūcto F, cōgruit; facile demōstrabitur. Si nō cōgruere dicatˀ basis B C, basi E F, cadet uel supra, ut efficiat rectam E G F, uel infra, ut cōstituat rectā E H F. Vtrū uis horum concedatur, claudent duæ lineæ rectæ E F, E G F, uel E F, E H F, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quam E H F, rectam esse, cum utraque ponatur eadem esse, quæ recta B C) Quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiē claudere non possunt. Non ergo basis B C, 12. pron. cadit supra, uel infra basim E F, sed illi congruet. Quare ipsæ inter se æquales sunt, &c. Quocirca, si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. quod demonstrandum erat.

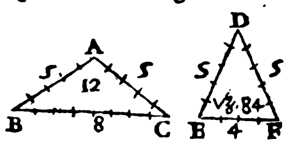
SCHOLION.

RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, ut duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumq; utrique; Secunda, ut angulus etiam unius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia; Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt unquam esse æquales, triãgula uero admodum raro æqualia existent, ut probe hoc loco a Proclo demonstratur. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem utrunque utrique sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitque A B, 3. A C, 4. ut ambo simul efficiant 7. At uero D E, sit 2. & D F, 5. ut ambo quoque simul 7. constituant.



Quibus positis, erit basis B C, 5; & basis E F, radix quadrata huius numeri 29, quæ maior quidem est quam 5, minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area uero trianguli D E F, 5. Anguli denique super basim B C, inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non utrumque latus utrique lateri æquale existat in dictis triangulis A B C, D E F.

RURSUS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia sint lateribus D E, D F, utrumq; utrique, sitq; unumquodq; 5; anguli uero A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sitque A, maior, quã D.



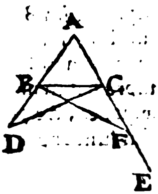
Quibus concessis, erit basis BC maior base EF ut propos. 24. huius libri ostẽdetur. Quod si basim B C, ponamus esse 8. basim autẽ E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area uero trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est quam 9. minor uero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt

igitur

igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triā gula ipsa aequalia inter se sint, necesse est, ut utrumque latus unius aequale sit utriq; lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti aequales existant, ut optime dixit Euclides.

THEOR. 2. PROPOS. 5. 5.

ISOSCELIUM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt aequales: Et productis aequalibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se aequales erunt.



SIT triangulum Isosceles A B C, in quo duo latera A B A C, inter se sint aequalia: Dico angulos A B C, A C B, super basim B C, aequales inter se esse: Item si latera aequalia A B, A C, producantur quātum libuerit, usque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra basim eandem B C, esse aequales. Ex linea enim A E, producta infinite abscindatur A F, aequalis ipsi A D, & ducantur rectae B F, C D. Considerentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B A F, trianguli A B F, aequalia sunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, utrumque utrique, nempe A B ipsi A C, ex hypothesi, & A F, ipsi A D ex constructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F aequalis est angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A communis est utrique triangulo: Erit basis B F aequalis basi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & posteriores, opponantur aequalibus lateribus in dictis triangulis ut patet. Rursus cōsiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam uero rectae A D, A F, aequales sunt per constructionem, sit ut, si auferantur ex ipsis aequales A B A C, & reliquae B D, & C F, sint aequales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, aequalia sunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, utrumque utrique, uidelicet B D, ipsi C F, & D C, ipsi F B, ut probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, cō-

3. primi.

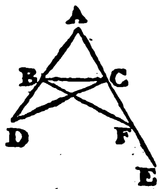
1. pet.

4. primi.

3. pron.

tenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut ostensum etiam fuit. Igitur erit angulus D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D angulo C B F. Tam enim priores duo, quã posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntq; supra communem basim B C, utriusque trianguli B D C, C F B. Quod si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales esse iam demõstrauimus in prioribus triangulis) detrahãtur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in posterioribus triangulis modo probauimus esse æquales) remanebũt anguli A B C, A C B, supra basim B C, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandem basim B C, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & infra eandem, inter se quoque sunt æquales; Ac propterea Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi



3. pron.

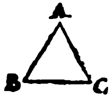
SCHOLION.

H A E C *propositio uera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis uideatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, æqualibus, siue reliquum latus B C, ipsis quoque sit æquale, ut contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, ut in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, ut constat ex demonstratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum uideri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum sunt assueti. Veruntamen, si diligenter theorematis præcedentis uis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, si modo memor sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponũtur. Quod quidem quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, ut confusa esse uideatur, & subobscura eius demonstratio.*

CORO-

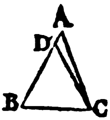
COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia, erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat. 5. prim.



THEOR. 3. PROPOS. 6. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

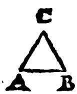


IN triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: Et ex A B, abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, (quæ minor dicitur esse quam A B,) ducaturq; recta C D. 3. primi Considerentur iam duo triangula A C B, D B C In quibus cum duo latera A C C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, triãguli D B C, utrumq; utrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, æqualem D B,) & C B, ipsi B C, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: Erunt triãgula A C B, D B C, æqualia, totum, & pars, quod fieri nõ potest. 4. primi Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, si anguli B, & C, super latus B C, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

CONVERTIT hoc theorema primam partem praecedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se aequalia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque aequales: Hic uero si anguli ad basim sint aequales, latera quoque angulis illis opposita esse aequalia. Non autem mirum alicui debet uideri, si Mathematici aliquando conuertunt propositiones, ita ut nunc ex antecedente quopiam concesso colligant per demonstrationem consequens aliquod, nunc uero rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, ut ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus: Non debet, inquam, uideri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens; Cuius ego rei unum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis unum latus producatur, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocantur. Non enim sequitur, si figurae cuiusuis rectilineae uno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis figuram illam esse triangulum, cũ possit etiam esse quadrilatera figura, ut ad propos. 16. huius lib. ostendemus. Eodemque modo multae aliae propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, ut prius demonstret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens & consequens illius reciprocari antequam ex consequẽte concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones, quae conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, ut fere omnes illas conuertamus, quae aliquam uidebuntur afferre utilitatem.

COROLLARIVM.



SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum aequiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt aequales, esse aequilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quintae propositionis, ut liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli aequales. Dico ipsum esse aequilaterum. cum enim duo anguli B, & C, sint aequales, erunt latera

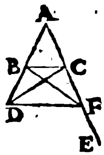
A B

A B, AC, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat. 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo:

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.



Triãguli enim A B C, productis lateribus AB, AC, ad D, & E, fiant anguli D B C, B C E, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, DC. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, utrumque utrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit unum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim: erunt & bases C D, B F, æquales, & anguli B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, CF, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin æqualibus, remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia sunt lateribus F C, C D, utrumque utrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B F, ipsi C D, ut modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus, D B F, F C D, æquales, ut etiam fuit nuper demonstratum: Erit angulus B D F, super basim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, super eandem basim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, sint æquales, ut nunc ostendimus, erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus si rectæ B D, C F, æquales, per cõstructionem, demantur, remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat ostendendum.

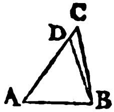
3. primi. 4. primi. 3. pron. 4. primi 6. primi 3 pron.

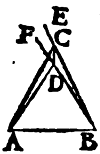
THEOR. 4. PROPOS. 7. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non constituentur, ad

aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

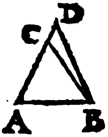
SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, uersus partem eandem C, nō posse ad aliud punctum, ut ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, utraque utrique, nempe A C, ipsi A D, quę eundem habent finem A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiā terminum possidēt B. Sint enim, si fieri potest, rectæ A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiā æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita ut recta A D, in ipsam rectam A C, uel B D in ipsam B C, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctū D, in altera rectarū A C, B C, nempe in A C, ut A D, sit pars ipsius A C. Quoniā igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales; Erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non potest. Sit secundo punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, usque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia, erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto. Igitur & angulus A D C, minor erit eodē angulo D C E: Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, erunt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo sit minor angulo D C E. Idē ergo angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem ęqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea super alteram cadat, ut in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus

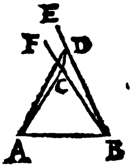


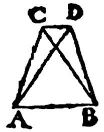


5. primi
9. pron.
5. primi

sus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum: Aut in tali erit loco, ut posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C; Quo posito, in idem absurdũ incidemus, nempe angulũ D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqualem, ut perspicuum est: Aut denique punctum D, ita erit extra triangulũ A B C, ut altera linearũ posteriorum, nempe A D, secet alteram priorum, ut ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cũ in triãgulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, erunt anguli A C D, A D C, supra basim C D, æquales: Ac proinde cum angulus A D C, minor sit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rursus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, erunt anguli B C D, B D C, super basim C D, æquales: Est autem iam ostensum, angulum B C D, multo esse minorem angulo B D C: Idem igitur angulus B C D, & minor est angulo B D C, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se A C, A D, & inter se quoque B C, B D. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis &c. Quod erat demonstrandum.







5. primi

9. pron.

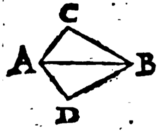
5. primi

SCHOLION.

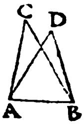
FIERI potest, ut duæ lineæ A D, B D, æquales sint duabus A C, B C, utraque utrique, ut A D, ipsi B C, & B D, ipsi A C, ut ultima figura indicat; Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, ut constat. Solæ enim A C, A D, eundem limitem possident A; Itẽ B C, B D, eundem B; optimeq; demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, ut A C, A D, inter se sint æquales, ita ut B C, B D, quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione apposita sunt hæc uerba: eosdemq; terminos cum duabus

duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse duæ lineæ simul sumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, BC, simul sumptis ut in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse utramque utrique esse æqualem &c.

Eadem ratione possunt ex A, & B, infra A B, basim trianguli A B C, hoc est ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita ut A D, exiens e puncto A, æqualis sit ipsi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipsi B C, vt perspicuum est in apposita figura.



Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad easdem partes. Deniq; esse poterunt duæ lineæ A C, A D, æquales inter se, eundem terminum A, possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, ut reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter se quoque sint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratũ.



Apposite igitur dictũ est in propositione: duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane scopus Euclidi in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.

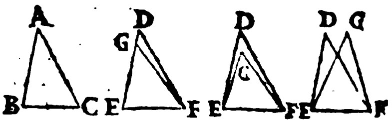
8.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebũt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, utrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; sit autem & basis B C, basi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum uidelicet vterque dictis lateribus cõtinetur.

tinetur. Nam si mente intelligatur basis B C, superponi basi E F, neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum A B C, cogitetur cadere super triangulum D E F, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, 8. pron.



aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cũ ponantur æqualia; Ac propterea angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterũ excedat. Quod si punctũ A, alio dicatur cadere, ut ad G, quomodocunq; id cõtingat, hoc est, siue in latus E D, siue intra triangulum E D F, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadem est, quæ B A) æqualis ipsi E D; & F G, (quæ eadem est, quæ C A) æqualis ipsi F D, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus alterius: Hoc autem fieri non posse, iamdudum demonstratum est, cum tam rectæ E G, E D, terminũ eundem E, quam rectæ F G, F D, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet alio quam in punctũ D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triãgula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum. 8. pron. 7. primi.

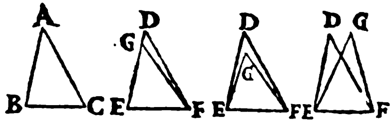
SCHOLION.

VT vides, hæc propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita ut theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos

angulos super bases constitutos ęquales, utrunque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrunque utrique, quæ uidelicet æquali bus lateribus subtendũtur, angulosq; reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

SIT enim basis BC æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusq; C, angulo DFE; Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumq; A, angulo D.



8. pron. *Nã si basis basi superponatur, congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, proptereaq; omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere uidetur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26, ut eo loco monebimus.*

COROLLARIVM.

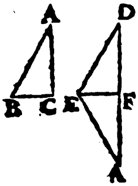
PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, uerum etiam reliquos angulos, qui ad bases cõstituuntur, utrumq; utrique, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totũ triangulum toti triangulo, ut constat ex eadem superpositione unius trianguli super alterum; Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut perspicuũ est. Quod etiã ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cũ latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, ut in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.

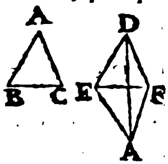
PHILONIS familiares conãtur hoc idẽ theorema ostẽdere demõstratione affirmatiua hac ratione. Posito .n eodẽ antecedẽte, supponi intelligatur basis BC, basi EF: ita ut triangulum ABC, cadat in diuersas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulũ AEF. Aut igitur duo latera, nẽpe DF, FA, constituunt unã lineã

rectam

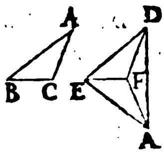
rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si cõstituant unam lineam rectam, ueluti D A, ita propositum cõcludetur. Quoniam in triangulo A B D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia (est enim nunc A E, recta eadem quę A B, quæ per hypothesin rectæ D E, æqualis est) erunt anguli A, & D, super basin AD, ęquales, quod erat ostendendum. 5. primi. Si uero neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ uel cadet intra triangula, uel extra.



Cadat primo intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, erunt duo anguli E A D, E D A, æquales ad basim D A. 5. primi. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. Si igitur hi ęquales illis ęqualibus addãtur, fient toti anguli E A F, E D F, ęquales. Quod erat ostendendum. 2. pron.



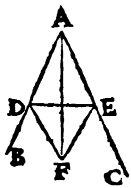
Cadat secundo recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia, erunt anguli E A D, E D A, æquales super basin D A. 5. primi. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo A F D, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. His ergo a prioribus ablatis, remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur. 3. pron.



PROBL. 4. PROPOS. 9. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

Sit diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta A B, sumatur quodcunq; punctũ D, & rectæ A D, secetur ex A C, recta A E, æqualis, 3. primi ducaturque recta D E. Deinde super D E, constituatur triangulum æquilaterum D F E, 1. primi & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos



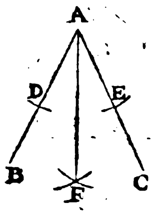
angulos inter se esse æquales. Cum enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia sint lateribus E A, A F, trianguli E A F, utrumque utrique, quod D A, ipsi E A, per constructionem sit æquale, & A F, commune; Sit autē & basis D F, basi E F, æqualis, propterea quod triangulum D F E, constructum sit æquilaterum. Erit angulus D A F, angu-
8. primi lo E A F, æqualis, ideoque angulus B A C, diuisus bifariam, quod erat faciendum.

SCHOLION.

Quod si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilo minus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

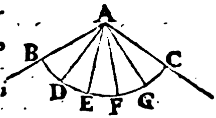
Dicto citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, bifariā secabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abscindantur rectæ æquales A D, A E cuiuscunque magnitudinis. Et circino non uariato (posses tamen ipsum uariare, si velles) ex centris D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta igitur ducta A F, secabit angulum B A C, bifariam. Si enim ducerentur rectæ D F, E F, essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum D A F, æqualem esse angulo E A F. Non descripsimus autem dictas lineas, ut nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatq; confusionem.



SCHOLION.

Hinc aperte colligitur, angulū rectilineū quemuis diuidi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32 in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum uterque iterum bifariam secetur, habebi-

habebimus 4. angulos æquales; Quod si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides usquam, neque ab ullo hactenus fuit demonstratum, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales possit diuidi. Si quis tamen id desideret, uti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunque interuallum, secans rectas AB, AC, in B & C. Deinde hic arcus officio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam; quoniam huius rei demonstratio adhuc desideratur) diuidatur in tot partes æquales in quot angulus propositus est diuidendus, vt iuxta exemplum propositum in quinque, in punctis scilicet D, E, F G. Si namque ad hæc puncta ex A rectæ ducantur lineæ diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cũ enim circino sumpta sint æqualia interualla B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D D E &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia duobus lateribus E A, A D trianguli E A D, utrumque vtrique, cũ omnia ex centro egrediantur ad circumferentiã usque; Basis autẽ BD basi quoque DE, vt dictũ fuit, æqualis est: Angulus igitur B A D, angulo E A D æqualis existet; Eademq; ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertii lib. propterea quod circunferentiæ B D, D E, &c. acceptæ sint omnes æquales inter se se. Nemo uero miretur, quod praxes exhibeamus interdum quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus dependent Hoc enim eo consilio facimus, vt singula propriis in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales; Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, ubi eandẽ diuidit Euclides bifariã, & ita de singulis. Neq; enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes



15. def.

8. primi

tiones, sed solum, ut probetur recte esse per ipsas effectum, quod imperabatur Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationē requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum et in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.

10. ## PROBL. 5. PROPOS. 10.

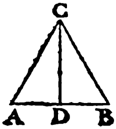
DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

SIT recta finita A B, diudenda bifariam, idest, in duas partes æquales. Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, diuidatur bifariam in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, utrumque utrique, nempe A C, ipsi B C, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per constructionem: Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.

1. primi

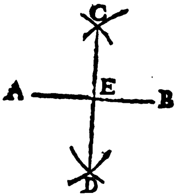
9. primi

4. primi



P R A X I S.

Ex centro A, ad quoduis interuallū, quod tamen dimidiū lineæ A B, excedat, describātur duo arcus, unus superne, alter inferne; Et ex cētro B, ad idē interuallū omnino alij duo arcus delineentur, q priores secēt in C, & D. Recta igitur ducta C D, secabit rectā A B in E, bifariā. Si.n. ex A, & B, ad C, & D, ducanī quatuor rectæ, erūt hæ oēs inter se æquales, cū ex cētris ad circūferentias æqualiū circulorū cadāt; Nā arcus circulorū descripti sūt eodē interuallo. Quoniā igiī latera AC, CD, æqualia sunt lateribus



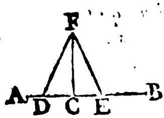
teribus B C, C D, vtrumq; vtriq;, & basis A D, basi B D, erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera A C, C E, æqualia sunt lateribus B C, C E, vtrumq; vtriq;, & angulus A C E, angulo B C E, vt ostensum fuit; erit basis A E, basi B E, æqualis. 8.primi. 4.primi.

SCHOLION.

PERSPICVVM *est, eodem modo diuidi posse eandem lineã rectã A B, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quæuis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, vberrime trademus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, et nõ iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes linearum proportiones expostulant. Neq; vero indigebimus vnquam diuisione lineæ in quotlibet partes æquales, ad eum locum vsq;.*

PROBL. 6. PROPOS. 11. 11.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectã lineam ad angulos rectos excitare.

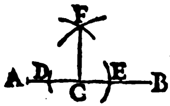


RECTA linea data sit A B, & in ea punctũ C, a quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D, cui æqualis auferatur C E. Deinde super D E, constituatur triangulum æquilaterum D E F, atq; ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumq; vtriq;, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, commune; Est vero & basis D F, basi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. Quare dicetur vterq; rectus, atq; adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data igitur 3.primi. 1.primi. 8.primi. 10. def.

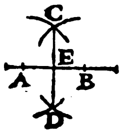
igitur recta linea a pũcto in ea dato &c. quod faciendũ erat.

II

PRAXIS.

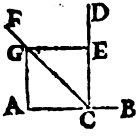


Ex puncto C, abscindantur vtrinq; lineæ æquales C D, C E. Et ex D, & E, describantur duo arcus secantes se se in F. Recta namq; ducta F C, erit perpendicularis : Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ D F, E F, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit A C, & punctũ datũ C, extremũ; protrahenda erit A C, in B, & sumendæ æquales C D, C E, &c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcumq;, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuscunq; lineæ propositæ describantur tam superne, quam inferne duo arcus se se intersecantes in C, & D. Nam recta ducta C D, erit perpendicularis ad A B. hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra praxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases A E, B E, consistunt, opponunturq; æqualibus lateribus A C, B C.



EX PROCLO.

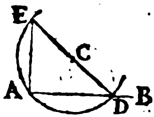
Si punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis C D, vt docuit Euclides; & abscinda-
3.primi. tur C E, æqualis ipsi A C: Deinde diuidatur an-
9.primi. gulus C, bifariam, ducta recta C F; Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur E G. perpendicularis



dicularis ad C D, secans rectā C F, in G. Ducta igitur recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam cum latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia sint lateribus E C, C G, triāguli E C G, vtrumque vtrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri C G, æquales; Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, ideoq; A G, ad A B, perpendicularis. 4. primi. 10. def.

SCHOLION.

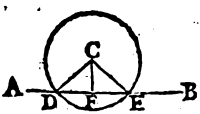
Brevius *lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea* A B, *punctumq; in ea* A. *Ex centro* C, *extra lineā assumpto, vbi libuerit, (dūmodo recta* A B *producta cum ipso non cōueniat) interuallo vero accepto vsq; ad* A, *describatur arcus circuli secās* A B, *in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta igitur ducta E A, erit perpendicularis ad* A B. *Nam angulus* A, *est rectus, cum sit in semicirculo D A E, vt ostendemus propositione* 31. *lib.* 3.



PROBL. 7. PROPOS. 12. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

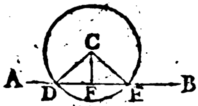
Sit recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Cētro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam A B; alias eam non secaret.) Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularē esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, 10. primi.



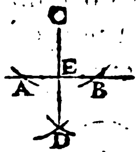
F G, trianguli, E F C. vtrumq; vtriq;, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, æqualis, cum hæ sint ex
8. primi. centro C, ad circunferentiam: Quare erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterq; rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

SCHOLION.

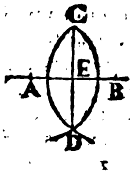
PROPTEREA apposuit Euclides hãc particulam: infinitam. *Si enim linea esset finita, non posset semper a puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset* B E. *& punctum C, non posset ex C, describi circulus secans* B E, *in duobus punctis, quare neq; ex C, perpendicularis duci ad* B E *Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si* B E, *producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totam* B A, *productam in D, & E, &c.*



PRAXIS.



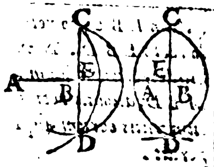
CENTRO *C, & interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in* A, *&* B. *Deinde ex* A, *&* B, *eodemq; interuallo, vel alio si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta C D, secans* A B, *in F, erit perpendicularis ad* A B. *Demonstratio huius operationis non differt a demonstratione tradita in praxi proposi-*
4. primi. *tionis* 10. *Nam anguli ad E, erũt recti, nempe inter se æquales.*



IDEM *efficiemus hoc modo. Ex quouis pũcto A, in linea data, & interuallo vsq; ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto* B, *interualloq; vsq; ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D; Eritq; ducta recta C D, secans* A B, *in E, perpendicularis ad* A B.

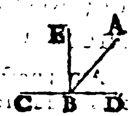
Demon-

Demonstratio eadem est quæ prior. Non est autem necesse, vt interuallum B C, æquale sit interuallo A C, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio si idem semper interuallum accipiatur.



THEOR. 6. PROPOS. 13. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineã angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA A B, cõsistens super rectam CD, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, erũt dicti anguli duo recti. Si vero A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero duo anguli D B A, A B E, æquales sunt angulo recto E B D; apposito communi angulo recto E B C, erunt tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales duo recti E B D, E B C; Rursus quia duo anguli A B E, E B C, æquales sunt angulo A B C; apposito communi angulo A B D, erunt tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales duo anguli A B C, A B D; sed illis tribus ostensum fuit esse etiam æquales duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, inter se sunt æqualia: Duo igitur anguli ABC, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cum ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

10. def. — 11. primi. — 18. pron. — 2. pron. — 18. pron. — 2. pron. — 1. pron.

SCHOLION.

VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, *superat rectum angulum*

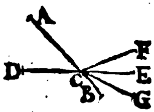
gulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angu lo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur, si quidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

14.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

AD punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes edu ctæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A C, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse constitutas in directum, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim nõ est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit supra, cũ A C, consistat super rectam D C F, fient duo anguli



13. primi. A C D, A C F, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo angulo A C D, A C E, æquales duobus rectis; & omnes recti sunt inter se æquales: Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt æquales. Ablato igi-

3. pron. tur communi angulo A C D, remanebunt anguli A C F, A C E, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdũ. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, æquales. Igitur D C, producta eadem efficietur, quæ C E, propterea q;, si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, &c.

Quod demonstrandum erat.

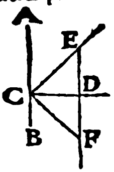
SCHO-

SCHOLION.

EST *hæc propoſitio præcedentis conuerſa. In ea enim probatum fuit, ſi D C E. ſit recta, angulos A C D, A C E, duobus eſſe rectis æquales; In hac vero demonſtratum eſt, ſi dicti anguli ſint duobus rectis æquales, rectas D C, E C, eſſe vnam lineam rectam.*

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propoſitione hac: & non ad eaſdem partes. Quoniam vt ait Porphyrius, fieri poteſt, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad eaſdem partes duæ lineę ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non conſtituant vnam lineam, eo quod non ad diuerſas ſint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Ducatur C D, perpendicularis ad A B, diuidaturq; rectus angulus A C D, bifariam per rectam C E. *11.primi.* *9.primi.* Deinde ex D, quolibet puncto rectæ C D, ducatur D F, perpendicularis ad C D, ſecans rectam C E, *11.primi.* in E. Producta autem E D, ad partes D, ſumatur D F, æqualis rectæ D E, & ducatur recta F C. *3.primi.* Quoniam igitur latera E D, D C, trianguli EDC, æqualia ſunt lateribus F D, D C, trianguli F D C, vtrumq; vtriq;, & anguli D, ipſis contenti æquales, nempe recti; erit baſis E C, baſi C F, æqualis, & angulus E C D, angulo F C D. *4.primi.* Sed angulus E C D, dimidium eſt recti: (Eſt enim rectus A C D, diuiſus bifariam.) Igitur & F C D, dimidium erit recti. Quare C F, cum A C, facit angulum A C F, conſtantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem C E, cum eadem A C, angulum A C E, dimidium etiam recti: Duo igitur anguli A C F, A C E, quos ad eaſdem partes faciunt rectæ C F, C E, cum A B; æquales ſunt duobus rectis: Et tamen C F, C E, non ſunt vna linea recta, propterea quod non ſunt ductæ ad diuerſas partes, ſed ad eaſdem.



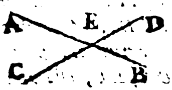
THEOR. 8. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticẽ æquales inter ſe efficiẽt.

SECENT ſe duæ rectæ A B, C D, in puncto E, vtcũq;. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter ſe eſſe æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C,

 & an-

& angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E,
13. primi consistit super rectam A B, erunt duo anguli A E D, D E B,
æquales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam



C D, consistit, erunt eadem ratione duo
10. pron. anguli C E B, B E D, duobus rectis æquales. Cum igitur omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli
3. pron. A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æquales. Dempto igitur cõmuni angulo D E B, remanebit angulus A E D, angulo B E C, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se æquales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, (qui duobus sunt rectis æquales per præcedentem) æquales erunt duobus angulis D E B, B E C, (qui per eandem præcedentem duobus rectis sunt æquales.)
3. pron. Ablato igitur angulo communi B E C, remanebunt anguli A E C, B E D, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM. I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent). duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos A E D, D E B, quam duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti, æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM. II.

EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor ad E, constituti in plu-
18. pron. rimas partes, quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circunstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores afferunt, quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX PRO

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusq; signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erũt.

Ex puncto C, rectæ A B, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter se æquales: Vel etiam duos A C D, B C E. Dico duas C D, C E, efficere vnã lineam rectam. Quoniam cum angulus A C E, æqualis sit angulo B C D, addito communi angulo B C E, erunt duo anguli A C E, B C E, duobus angulis D C B, B C E, æquales: Sed anguli A C E, B C E, sunt æquales duobus rectis; Igitur & duo D C B, B C E, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem C D, C E, erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæ quintæ.

2. pron.
13. primi
14. primi.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.

EX puncto A, quatuor lineæ eductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppositos B A E, C A D, inter se æquales: Item duos B A C, D A E, inter se æquales. Dico tam B A, A D, facere vnã lineam rectam, quam C A, A E. Quoniam æquales sunt anguli B A E, C A D, si æquales illis addantur anguli B A C, D A E, erunt duo anguli B A E, B A C, æquales duobus angulis C A D, D A E. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli B A E, B A C, æquales sunt duobus rectis; atque adeo C A, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli B A E, E A D, æquales duo

2. pron.
4. primi

les duo

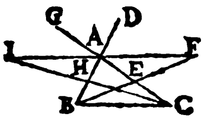
les duobus angulis D A C, C A B; Quare vt prius, concludetur propositum. Pelecarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.

16.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D; Dico angulum externum D A C, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemq; maiorem interno, & opposito
10 primi. A B C. Diuidatur enim A C, bifariam in E; & ex B, per E,
3. primi. extendatur recta B E F, ita vt E F, abscissa sit æqualis rectæ E B; ducaturq; recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli C E B, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumq; vtriq;,



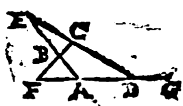
15. primi. per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis la-
4. primi. teribus comprehensi, inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit basis C B, æqualis basi A F, & angulus E C B, angulo E A F; Est autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus D A C, maior erit interno, & opposito angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; & A B, diuidatur bifariam in H; extendaturq; recta C H I, vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum G A B, maiorem esse interno angulo, & opposito A B C: Est au-
15. primi. tem angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cũ lineæ B D, C G, se mutuo secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo A B C. Est autem idem angulus D A C, maior quoq; ostensus angulo interno, & opposito A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHO-

SCHOLION.

Non dixit Euclides angulum externum D A C, maiorē esse angulo B A C, interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtrumlibet A C B, A B C, internorum, sibiq; oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoq; erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit: Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. Nam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

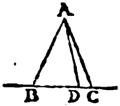
Id vero, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; cū & vno latere figuræ quadrilateræ producto, extern⁹ angul⁹ quolibet interno, & opposito possit esse maior; hac rōne absoluem⁹.



Sit figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtusus, & A B C, rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ A B, D C, productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ D A, C B, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Dico, si A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem esse tribus internis B A D, A B C, B C D, sibi oppositis. Cū enim A D E, triangulum sit, erit angulus externus E D G, maior interno opposito D A E. Rursus cum D A B, obtusus maior sit recto A B C, maior quoq; multo erit E D G, ipso A B C. Postremo, quia & in triangulo C D F, angulus externus C D G, maior est interno, & opposito F C D; manifestum est, in quadrilatero A B C D, externum angulum C D G, maiorem esse internis, & oppositis B A D, A B C, B C D. Quā ob rem propositio hæc 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est. 16. primi. 16. primi.

EX PROCLO.

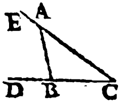
Seqvitvr ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemq; lineā rectā non posse duci plures lineas rectas, quā duas inter

inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam

B C, tres lineæ rectæ æquales A B, A C, A D.
Quoniam igitur latera A B, A C, sunt æqualia,
5. primi. erunt anguli A C B, & A B C, æquales super basim B C: Rursus quia latera A B, A D, sunt æqua-
5. primi. lia, erunt anguli A D B, & A B C, super basim B D, æquales. Quare cum vterq; angulus A C D,
1. pron. & A D B, æqualis sit angulo A B C, erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad B C, possunt duci. Quod est propositum.

17.

THEOR. 10. PROPOS. 17.

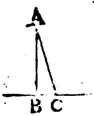
CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



SIT triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores esse duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemq; duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D,
16. primi. & E. Quoniam igitur angulus A B D, externus maior est interno & opposito angulo A C B, si addatur communis
4. pron. angulus A B C, erunt duo anguli A B D, A B C, maiores
13. primi. duobus angulis A B C, A C B; sed A B D, A B C, æquales sunt duobus rectis; Igitur A B C, A C B, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis: Item duo B A C, & B C A. Cuiuscunq; igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

EX PROCLO.

HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quã vnã.



Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdũ.
17. primi. Sunt enim quilibet duo anguli in triãgulo quocunq; ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendicu-

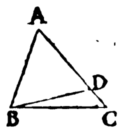
pendiculares, quam vna, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.

COROLLARIVM.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunq; reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

THEOR. 11. PROPOS. 18. 18.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



IN triangulo A B C, sit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, subtensum a maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui a minori latere A B, subtenditur. Nã ex A C, auferatur A D, æqualis ipsi A B, 3. primi.
& ducatur recta B D. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia sunt per constructionẽ, erunt angu-
guli A B D, A D B, æquales: Est autem angulus A D B, ma- 5. primi.
ior angulo A C B; Igitur & angulus A B D, maior erit an- 16. primi.
gulo A C B. Quamobrem cum angulus totus A B C, ma- 9. pron.
ior adhuc sit angulo A B D; Erit angulus A B C, multo maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendes angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

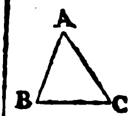
COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum A B C, cuius maximum quidẽ latus A C, minimũ autem B C; & medium locum habens A B. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit, per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior

erit an-erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus uero A; & C, mediū locū inter vtrunq; tenē.

18. THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus A C, subtendens maiorem angulū B, maius esse latere A B, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus A C, maius non est latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale esse ipsi A B,
5.primi. erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si vero A C, minus esse dicatur
18.primi. latere A B, erit angulus B, subtensus a minori latere A C, minor angulo C, subtenso a maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis est absurdū. Cū igitur A C, latus neq; æquale sit lateri A B, neq; minus eo, erit maius. Eadē ratione probabitur, latus A C, maius esse latere B C, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

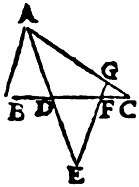
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idē theorema ostēdere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc subsequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansq́, angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cū minori.

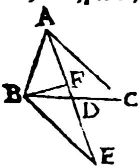
TRIANGVLI A B C, angulus BAC, diuidatur bifariā per rectā A D, quę secet basin B C, in partes inequales, maiusq; segmentum tri sit D C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Producatur enim A D, ad E, vt sit D E, æqualis ipsi A D; Deinde ex maiori segmēto D C, auferatur recta D F, æqualis minori segmēto D B, & p F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, triāguli A D B, æqualia sūt lateribus E D, D F, triāguli E D F, vtrūq; vtriq;, per cōstructionē; sunt aūt & anguli A D B, E D F, dictis lateribus cōtenti æquales; Erunt bases A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, æqualis: Est vero & angulus C A D, angulo B A D, æqualis, p hypothesin; Igitur anguli G A D, G E A, trianguli A G E, æquales erūt, ideoq; latera A G, E G, æqualia erūt. Est aūt recta A C, maior quā A G; quare & A C, maior erit, quā E G; Et qa E G, maior est, quam E F, erit & A C, multo maior, quam E F. Cum igitur demonstratum sit rectam E F, æqualem esse rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat ostendendum.

3. primi · 15. primi. · 4. primi. · 1. pron. · 6. primi.



Hoc ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior sit angulo C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Diuisa enim recta B C, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales,) bifariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E, vt sit D E, æqualis ipsi A D; ducaturq; recta B E. Quoniam igitur latera A D, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrūq; vtriq;, per constructionem; sunt autē & anguli A D C, E D B, dictis comprehensi lateribus æquales: Erūt bases A C, & B E, æquales, angulusq; A C D, angulo E B D, æqualis: Et quia angulus A C D, ponitur esse minor angulo A B C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoq; angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam B F, cadet B F, supra B D, eo quod angulus A B D, maior sit angulo E B D. Quia vero E F, maior est, quam E D, & E D, posita est æqualis ipsi A D, erit E F, maior, quā A D; Sed adhuc A D, maior est, quā A F; Multo igitur maior erit E F, quam A F. Itaq; quia recta B F, diuidens angulum A B E, bifariā, secat basin A E, inæqualiter in F, estq; maius segmentum E F, minus aūt A F, erit per theorema a Proclo proxime demōstratū, latus B E, maius latere A B. Ostēsum est aūt B E, æquale esse lateri A C; Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Qđ erat demonstrandū.

3. primi. · 15. primi. · 4. primi. · 9. pron. · 9. pron.



SCHOLION.

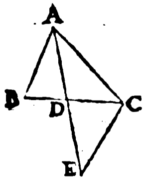
HAEC propositio 19 cōuersa est propositionis 18, vt perspicuum est. Campanus autem duarū istarū propositionū ordinē prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id,

cuoi

quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.

POTERIMVS *quoque Theorema a Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.*

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmentum erit prope maius latus.



DVO *latera AB, AC, trianguli ABC, sint inæqualia; AC, maius, & AB minus. Recta autem AD, diuidens angulum BAC, bifariam, secet basin BC, in D. Dico segmentum DC maius esse segmento DB. Si enim non est maius, erit vel æquale vel minus. Si dicatur esse æquale; producatur AD, ad E,*
3. primi. *vt DE, æqualis sit ipsi DA, ducaturq; recta EC. Quoniam igitur latera AD, DB, æqualia sunt lateribus ED, DC, vtrunq; vtriq; AD, videlicet ipsi ED per constructionem, & DB ipsi DC, per hypothesin aduersarii; Sunt autem & an-*
15. primi. *guli ad D, dictis lateribus contenti æquales: Erit basis AB,*
4. primi. *basi EC, æqualis; & angulo BAD, angulus CED. Positus autem est & angulo BAD, angulus CAD, æqualis; Igitur &*
6. primi. *anguli CED, CAD æquales erunt; Ideoq; latus AC lateri EC, æquale. Cum igitur ostensum sit, lateri EC, æquale esse quoq;*
1. pron. *latus AB, erunt latera AC, AB, æqualia; quod est absurdum, quia AC, maius ponebatur, quam AB. Non igitur erit segmentum DC, segmento DB, æquale. Quod si DC, dicatur esse minus, & DB, maius; erit, per theorema Procli, latus AB, maius latere AC; Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit DC, quam DB. Quare erit necessario maius.*

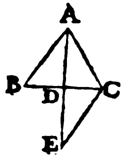
EODEM *modo demonstrari poterit hoc theorema.*

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoq; secet, erunt duo

latera

latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

Primo recta A D, secans angulum B A C, bifariam, diuidat quoque basin B C, in D, bifariam; Dico latera A B, A C, inter se aequalia esse. Hoc autem demonstrabis eadem ratione, qua in praecedenti theoremate ostensum fuit, latus A C, aequale esse lateri A B, si D C, segmentum segmento D B aequale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera A D, D B, aequalia sint lateribus E D, D C; & anguli ad D, dictis lateribus contenti aequales; erunt bases A B, E C, aequales, & angulus C E D, angulo B A D, hoc est, angulo C A D, aequalis: Quare A C, aequale erit ipsi E C, hoc est, ipsi A B.



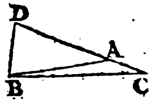
15. primi.
4. primi
6. primi

Secundo sint latera A B, A C, aequalia, & recta A D, secans basin B C, in D, diuidat angulum B A C, bifariam; Dico segmentum D C, aequale esse segmento D B. Cum enim latera A D, A B, aequalia sint lateribus A D, A C, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus aequales per hypothesin; erũt bases B D, D C, aequales. 4. primi

THEOR. 13. PROPOS. 20. 20.

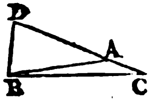
OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

Sit triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur vnum ex illis, ut C A, usque ad D, sitque recta A D, æqualis alteri lateri A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter se sunt, per hypothesin,



3. primi

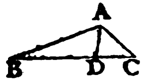
5. primi thesin, erunt anguli A B D, A D B, æquales inter se: Est au-
9. pron. tem angulo A B D, maior angulus C B D; Igitur & angu-



lus C B D, maior erit angulo A D B. In triangulo ergo C B D, latus C D, oppo-
19. primi situm maiori angulo C B D, maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cum igitur duo latera A B, A C, simul æqualia sint ipsi C D, (si enim
2. pron. æqualibus A B, A D, commune addatur A C, fient tota æqualia; nimirum linea composita ex A B, A C, & linea cõposita ex A D, A C,) erunt quoque latera A B, A C, simul maiora latere B C. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLO.

Aliter hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora esse latere B C. Diuidatur angulus B A C,



9. primi illis lateribus contentus bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum est ad B, erit angulus externus
16. primi B D A, maior interno & opposito C A D; igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B,
19. primi oppositum maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus A C, maius esse, quam
16. primi C D, quia angulus C D A, maior est angulo B A D, hoc est, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademque est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.

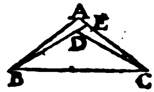
21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI super trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maio-

maiorem uero angulum continebunt.

In triangulo A B C, super extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulũ cõstituãtur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes: Dico B D, C D, simul minores esse duobus lateribus B A, C A, simul; At uero angulũ B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triangulo B A E, duo latera B A, A E, maiora sunt latere B E, si addatur commune E C, erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rursus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, maiora sunt latere C D; si commune apponatur D B, erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. Ostensum uero iam fuit B A, C A, maiora esse, quam B E, E C; Multo igitur maiora erunt B A, C A, quã B D, C D. quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus B D C, maior est angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque est eandem ob causam; Erit angulus B D C, multo maior angulo B A C; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.



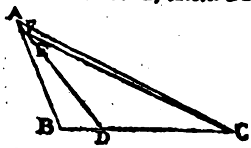
20. primi.
4. pron.
20. primi.
4. pron.
16. primi.

SCHOLION.

Quam recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus unius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis uidelicet rectangulis, uel etiam amblygoniis, intra triangulum constitui posse duas lineas super unum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem una ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, ita vt hæ constitutæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

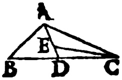
EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A BC, obtusum. Dico ab extremo C, & a quouis puncto, nempe a D, prope aliud extremum B, lateris BC, duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus B A, AC.



Ducatur enim recta D A: Et quoniã in triangulo A B D, duo anguli
17. primi. A B D, A D B, minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtusus; erit ADB,
19. primi minor recto, ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, maius erit latere A B. Ex D A, abscindatur recta D E, æqualis rectæ
3. primi
10. primi A B; Et reliqua linea A E, bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duę lineę rectæ constitutę C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam in triangulo A F C, duo latera A F, F C, maiora sunt
20. primi latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, ęqualis, per constructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur
4. pron. ęqualia addantur E D, & A B, fient rectę C F, F D, maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duæ rectę constitutę C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, ut Euclides demonstrauit.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximũ
3. primi BC, minimum A B. Ex B C, auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, ut ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constitutę igitur erunt intra triangulum duę lineę C E, D E, quę minorem angulum comprehendũt eo, quẽ efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim



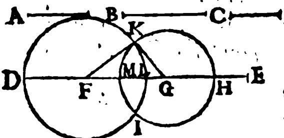
5. primi duo latera B A, B D, ęqualia sint, erunt duo anguli B A D, B D A,
16. primi ęquales: Sed B D A, angulus maior est angulo C E D; Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis unius lateris, ut minores quidẽ sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem uero complectantur angulum. Alias enim propositio uera non esset, ut iam est demonstratum.

22. PROBL. 8. PROPOS. 22.

EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere

stituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam uniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, ut constat ex propos. 20, in qua ostensum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis abscindatur recta D F, æqualis rectæ A; Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo uero F D, circulus describatur D I K: Item centro G, interuallo autem G H, alius circulus describatur H I K, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (cum enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; si ex F E, sumatur recta F L, æqualis ipsi F D; & ex G D, recta G M, æqualis ipsi G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namq; M, caderet in L, punctum, essent G L, F L, hoc est, G H, & F D, æquales rectæ F G: Si vero M, caderet inter G, & L, essent eædem duæ minores recta F G; quorum utrumq; est contra hypothesin.) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducatur ad puncta F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A, B, & C. Cum enim recta F K, æqualis sit rectæ F D, & recta A, per constructionem eidem F D, æqualis; erit latus F K, rectæ A, æquale: Rursus quia G K, æqualis est ipsi G H, & recta C, eidem G H; erit quoq; latus G K, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Cōstituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.



3. primi.

15. def.

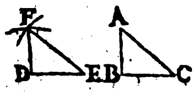
1. pron.

PRAXIS.

SVMATVR recta D E, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin: Deinde ex D ad internallũ rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad internallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus D F, æquale rectæ A, propter internallum ipsius A, assumptum: & latus E F, ipsi C, propter assumptum internallum C; D E, vero latus, acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.

SCHOLION.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq́; & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque A B C, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, BC, CA,



20.primi quarum qualibet duæ maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam D E, æqualem uni lateri, nempe B C; & ex D, internallo lateris A B, arcum describo; item aliũ ex E, internallo reliqui lateris C A, qui priorẽ secet in F, &c.

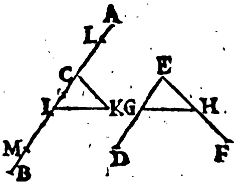
23. PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumq́; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta utcunque G, H, quæ recta
22.primi G H, connectantur: Deinde constituatur triangulum C I K,

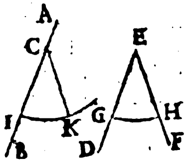
habens

habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita ut C I. æquale sit ipsi E G; & C K, ipsi E H; & I K, ipsi G H. (Quod facile fiet, si C I. sumatur æqualis ipsi EG; & C L, ipsi EH; & I M, ipsi G H; Deinde ex centris C, & I, interuallis vero C L, & I M, circuli describantur secantes se se in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E Quoniam duo latera C I, C K, æqualia sunt duobus lateribus E G, E H, vtrumq; vtrique, & basis I K, basi G H, per constructionem; erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. 8.primi.



PRAXIS.

Non differt huius problematis praxis ab illa, quam in precedente problemate tradidimus; propterea quod triangulũ constituere oporteat æquale alteri triangulo, ut angulus dato angulo æqualis exhibeatur, ut perspicuũ est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumq; in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq; officio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quod circino non variato vtramque distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, æqualia sint duobus G E, EH, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; erunt anguli I C K, G E H, æquales. 8.primi.



THEOR. 15. PROPOS. 24. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, angulum, vero angulo maiorem sub æqua libus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, utrumque utrique, nẽpe A B, ipsi D E; & A C, ipsi D F; Angulus uero A, maior si angulo E D F. Dico basin B C, maiorem esse base E F. Ad lineam enim D E, ad eiusque punctũ D, constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus E D F, minor ponatur angulo A) ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F, aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primo supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G utrumq; utrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionem; Erit basis B C, basi E G, æqualis. Rursus quia duo latera D F, D G, inter se sunt æqualia; erunt anguli D F G, D G F, æquales: Est autem angulus D G F, maior angulo E G F: Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo E G F. In triangulo igitur E F G, maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, quam E F. Quod est propositum.

23. primi

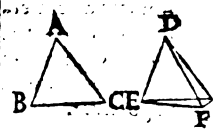
3. primi

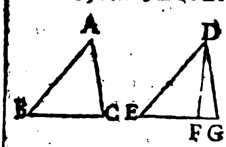
4. primi

5. primi

9. pron.

19. primi





CADAT secundo E G, in ipsam E F. Et quia rursus, ut prius, basis E G, æqualis est basi B C: Et E G, maior quam E F: erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum.

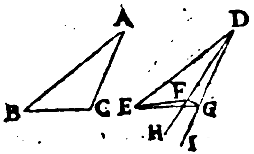
4. primi.

9. pron.

CADAT tertio E G, infra E F; producanturque rectæ D F, D G, usque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rursus, ut prius, basis E G, basi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia sunt inter se, per constructionem

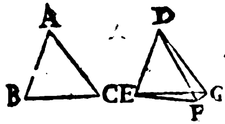
4. primi.

ctionem, erũt anguli G F H, F G I, infra basin F G, æquales: Est autem angulus F G I, maior angulo E G E; Igitur & angulus G F H, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo F G E. In triangulo ergo E F G, maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, basis, basi E F. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum. 5. primi 9. primi 19. primi



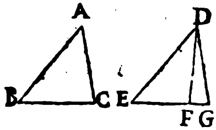
SCHOLION.

Si quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrunque vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorũ angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum: Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius trianguli, cuius angulus minor existit, ut demonstratum est; Non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37 huius primi libri, Triangulũ maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando uero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in uniuersum inferri, ex eo, quod angulus unius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo æquale sit, modo minus & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus A B C, minor



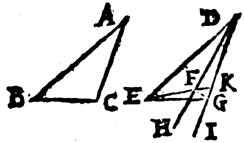
nor est semper angulo D E F; cum angulus D E G, (qui æqualis est, per 4. propos. angulo A B C,) minor sit eodem angulo D E F, pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus A B C, angulo D E F, æqualis, per 4. propos. At vero angulus A C B, minor est angulo D F E, cum angulus D F E, maior sit angulo D G F, externus interno, & opposito; & angulus D G F, æqualis sit angulo A C B. In tertia denique figura angulus A B C, maior quidem est angulo D E F propterea quod angulus D E G. (æqualis existens per 4. propos. angulo A B C,) maior sit eodem angulo D E F, totum parte: Sed angulus A C B, minor est angulo D F E. Nam si recta E F, producatur secans rectam D G, in K, fiet angulus D F E, maior angulo D K E, externus interno; Est autem & angulus D K F, maior adhuc angulo D G E, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus D F E, angulo D G E, qui per 4. propos. æqualis est angulo A C B. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.

9. pron.



6. primi.

9. pron.



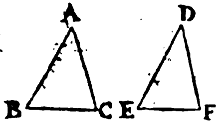
16. primi

25. THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

Dvo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus

duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, utrumque utrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Basis autem B C, maior sit base E F. Dico angulum A, maiorem esse angulo D Si enim non est angulus A maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus lateribus circa D, utrumque utrique, per hypothesin; erit & basis B C, æqualis basi E F; quod est absurdum; Ponitur enim basis B C, base E F, maior: Si uero angulus A dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis E F, maior basi B C; quod magis est absurdum, cum E F ponatur esse minor quam B C. Quare cum angulus A neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint &c. Quod erat ostendendum.

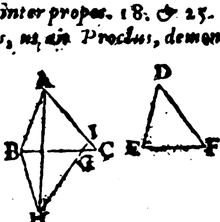


4. primi.
24. primi

SCHOLION.

THEOREMA hoc conuersum est præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est basin illi respondentem, esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostensum fuit angulũ illi respondentem, maiorem esse. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata sunt in propos. 18, & 19. Nam in 19 demonstratum est, in uno eodemq́; triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera unius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq́; discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

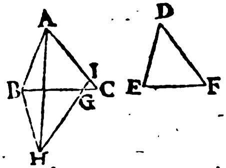
MENELAVS Alexandrinus, ut ait Proclus, demonstrat hoc idem theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex base maiore B C, abscindatur recta B G, æqualis basi minori E F. Fiat quoque angulus G B H æqualis angulo D E F, & sit B H, æqualis ipsi B A, atque adeo ipsi D E,



3. primi.
23. primi.
3. primi.

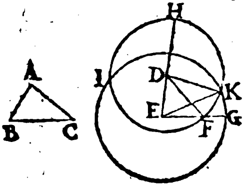
duca-

ducaturq; recta per G, ex H, secans A C, in I. Quoniã igitur
5. primi duo latera B A, B H, æqualia sunt, erunt anguli B A H, B H A, æquales. Rursus quia latera B G, B H, æqualia sunt lateribus E F, E D, vtrumque vtrique, & angulus G B H, æqualis angulo D E F, per constructionem; erit basis H G, basi D F, atque adeo ipsi A C, æqualis, angulusque G H B,



4. primi angulo E D F. Et quoniam recta H I, maior est quam H G, quæ est æqualis ipsi A C, erit quoque maior H I, quam A C; Sed A C, maior est adhuc, quam A I; Multo ergo maior erit
9. pron. H I, quam A I. Quare angulus I A H, maior erit angulo
18. primi I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui ostensi sunt æquales, fiet totus angulus B A C, toto angulo
4. pron. B H G, maior: Sed angulus B H G, demonstratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod est propositum.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor E F,
3. primi ad G, ut sit E G, æqualis basi maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, describatur circulus, producaturque E D, ad H, in circunferentiam.
15. def. Quoniam igitur D H, est æqualis ipsi D F, erit quoque D H, æqualis
2. pron. ipsi A C. Additis igitur æqualibus D E, A B, fient A C, A B, simul æquales toti H E: Sed A C,
20. prim A B, simul maiores sunt quam B C, atque adeo quam E G; Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo E G, intersecabit rectam E H atque adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, æqualia sunt duobus lateribus D E, D K, utrumq; vtrique, (est enim D K æquale ipsi D F, per definitionem circuli; D F, autem positum est æquale lateri A C.) & basis B C, basi E K, æqualis; (cum E K æqualis sit ipsi E G, per definitionem circuli; E G, vero recta per constructionem facta sit



æqualis

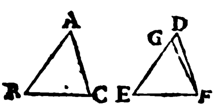
æqualis basi B C.) Erit angulus B A C, angulo E D K, æqualis: Sed angulus E D K, maior est angulo E D F. Quare & angulus A, angulo E D F, maior existet. Quod est propositum. 8 primi 9. pron.

THEOR. 17. PROPOS. 26.

26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumq; latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, uterque vtrique, hoc est B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est A B, ipsi D E & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B non est æquale lateri D E, sit D E, maius. a quo abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin; Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D; Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale. Quamobrem,



3. primi

4. primi

cum

cũ latera A B, B C æqualia sint lateribus D E, E F, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; erunt & bases
4. primi A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

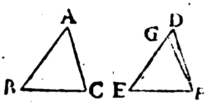
SINT secundo latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, utrumque utrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C,

3. primi

ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E,
4. primi æquales, per hypothesin; Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum.
16. primi Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium B C, E F, & angulorum super has bases, demonstratũ est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus alterius, æqualia esse, reliquumque angulum reliquo angulo &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.

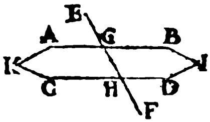


THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 27. 27.

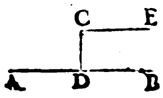
SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erũt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico lineas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum A B, recta continuata sit, item recta C D, usque ad punctum I,) & angulus A G H, positus est æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & opposito D H G; quod est absurdum; quoniam externus interno maior est. 16. primi Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & opposito A G H. quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D; Quare parallelæ erũt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonstrabitur, lineas A B, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens &c. Quod erat ostendendum.

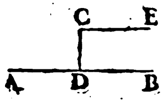


SCHOLION.

NECESSE est, ut lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existant plano, ut ex definitione constat: Quare non satis est duos angulos alternos æquales inter se esse, ut duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in uno, eodemque existere plano. Fieri enim potest, ut linea recta incidẽs in duas rectas nõ in eodẽ plano existentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim CD, perpendicularis ad AB, rectam, quæ in subiecto plano existit; &



ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita ut punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito perspicuum est, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B, facere duos angulos E C D, A D C, alternos æquales, cum sint recti; & tamen C E, A B, non sunt parallelæ, quod non in eodem existant plano.

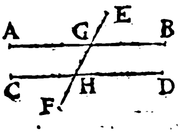


Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, ut supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In vndecimo vero libro & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris differitur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.

28. THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erũt inter se ipsæ rectæ lineæ.

In duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniã angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C, & eidẽ angulo E G A, æqualis est angulus *15. primi.* H G B; erunt anguli alterni G H C, *1. pron.* H G B, æquales: Quare lineæ A B C D, *27. primi* parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.



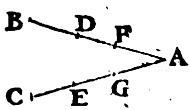
SECVN-

SECVNDO faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus, rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, duobus rectis æquales; 13. primi. Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdem partes, æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelę. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

IAMDVDVM pronunciatum vndecimum a principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propositio 29. illi innitatur, ita vt absq; eo demonstrari non possit, necesse est, vt illud ex hactenus demonstratis theorematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, cum Proclo confirmemus, vt antea polliciti sumus. Hoc autem facile præstabimus, si prius duo explicemus, quorum primum hoc sit.

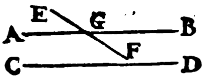
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT a puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quã D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectæ lineæ A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & lineæ ipsæ

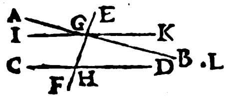
ultra produci, quod est absurdum: cum ponantur infinite iam esse producta. Quare si dictæ lineæ A B, A C. producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam.
tex. 35. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cælo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum. Secundum, quod debet explicari, ita se habet.

SI duarum parallelarum rectarum linearũ alteram secet quædam recta linea, reliquam quoq; productam secabit.



SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta EF, secet ipsã A B, in G. Dico rectam E F, si producatur, secturam esse quoq; ipsam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G, angulum faciunt, si producantur infinite, excedunt omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela A B a parallela C D, distat, cum hæc distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia G B, a G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam G F, productam secuisse rectam C D. Nam quandiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia a G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, vndecimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



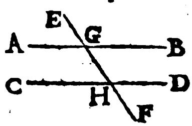
IN rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico re-to rectas A B, CD, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, duobus rectis aequales; Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H. Ablato ergo communi angulo DHG remanebit angulus D H F, maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, constituatur angulus K G H, aequalis angulo D H F, cadet G K supra G B, secabitq; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, aequalem interno, & opposito K G H; Erunt rectae I K, C D, parallelae. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G; Producta igitur secabit quoque ipsam C D, vt demonstratum est. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum. | 13. primi. 5. pron. 23. primi. 28. primi.

QVAMVIS autem optime a Proclo demonstratum sit vndecimum hoc pronunciatum, vt iure inter theoremata possit referri; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato, praesertim cum facile ei assensus praeberi queat, intellecta prius recte propositione 28. Si enim lineae rectae propositae parallelae sunt, ita vt nũquam coeant, sed semper aequali inter se distantia progrediantur, etiamsi infinite producantur, quando recta in eas incidens facit duos angulos internos, ad easdem partes duobus rectis aequales, vt demonstratum fuit; quis non videt, si eadem recta incidens in duas rectas faciat angulos internos ad easdem partes duobus rectis minores, alteram alteri appropinquare, ad eas partes, ad quas sunt interni anguli duobus rectis minores; quandoquidem aequali distantia procederent, si iidem anguli paulo maiores essent, duobus videlicet rectis aequales, vt haec propositio 28. demonstrauit? | 28. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 29. | 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidẽs linea; Et alternatim angulos inter se aequales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

In parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primũ, angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam



igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur communis angulus B G H, erunt duo A G H,
4. pron. B G H, maiores duobus D H G, B G H:
13. primi. At duo A G H, B G H, æquales sunt duobus rectis; Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint inter-
11. pron. ni, & ad easdem partes B, & D, coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes. quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neq; minor; Eadem enim ratione ostenderetur rectas coire ad partes A, & C: Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eadẽq; est ratio de angulis alternis B G H, C H G.

Dico secundo, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniam angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum
15. primi. est; & eidem B G H, æqualis est angulus A G E; Erunt an-
1. pron. guli A G E, C H G, inter se quoq; æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G.

Dico tertio, angulos internos ad easdem partes, A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniã ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angu-
2. pron. lo C H G, interno; si addatur communis A G H, erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: sed duo
13. primi. A G E, A G H, æquales sunt duobus rectis; Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alter-

& alternatim angulos &c. Quod erat demonstrandum.

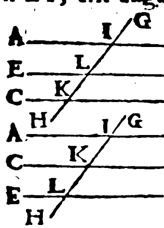
SCHOLION.

CONVERTIT *autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.*

THEOR. 21. PROPOS. 30. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

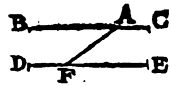
SINT rectæ A B, C D, eidem rectæ E F, parallelæ; Dico & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducatur recta G H, secans A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F, erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. *29.primi.* Rursus quia C D, ponitur etiam parallela ipsi E F, erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. *29. prim.* Quare anguli A I L, D K I, æquales inter se quoq; erunt. *1. pron.* Cum igitur sint alterni, erunt rectæ A B, C D, parallelæ inter se. *27.primi.* Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



SCHOLION.

QVOD *si quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas esse rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendũ est, duas A I, B I, non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Cõstat aũt A I, productã coincidere cum B I. Quamobrem, quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, &*

inter se sunt parallelæ; Vel certe vnam, & eandem lineam constituunt, quando inter se coeunt. Quod ita demonstrabitur. Sint duæ rectæ A B. A C, *coeuntes in* A, *parallelæ ipsi* D E. *Dico il-*



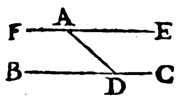
las in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, *ducatur recta* A F, *secans* D E, *in* F, *vtcunq;. Quoniam igitur* A B, D E,
29.primi. *sunt parallelæ, erũt anguli alterni* B A F, A F E, *æquales; Addito ergo communi angulo* C A F, *erunt duo*
2. pron. *anguli ad* A, *æquales duobus angulis* C A F, A F E. *Sed hi duo*
29.primi. *æquales sunt duobus rectis cũ sint interni inter duas parallelas; Igitur & duo anguli ad* A, *duobus erũt rectis æquales; ac pro-*
14.primi. *pterea in rectũ erũt cõstitutæ ipsæ* A B, A C. *Qđ est propositũ.*

31.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

ADATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunq; faciens angulum
23.primi. quemcunq; A D B; Cui ad A, æqualis constituatur E A D.



Dico igitur rectã E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi B C. Cum enim anguli alterni A D B, D A E, æquales sint, per constructionẽ; Erunt
27.primi. rectæ B C, E F, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

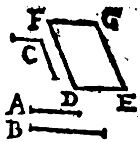
SCHOLION.

DEBET *autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 7. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quã vna, duci nequeunt. Si n. duæ ducerent, cõuenirẽt ipsæ*

ipsæ in puncto eodem quod est absurdum, cum sint parallelæ.

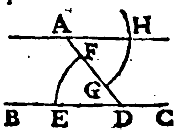
Ex hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo. Lateraq; angulū illū cōprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

Sint enim datæ rectæ A, B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C. lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ rectæ A, sit æqualis, fiat angulus E D F, angulo C, & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E, agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E. parallela secans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela sunt, ex constructione; parallelogrammū erit D E G F. Quod cū ex cōstructione, habeat angulū D, angulo dato C, æqualē, & latera D E, D F, circa dictū angulū D, datis rectis A, B, æqualia; factū erit, qđ proponitur.

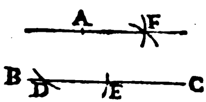


PRAXIS.

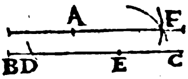
Sit ducenda parallela ipsi B C per punctum A. Ducatur recta A D, vtcunq; ad B C & ex D & A ad idē internallū quodlibet describātur duo arcus ad diuersas partes; vnus ad partes B alter ad partes C: Deinde officio circini arcui E F, abscindatur ex arcu altero arcus G H æqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, erit hæc parallela ipsi B C. Nā anguli E D F, H A G sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c. 27. primi.



Alio modo ducetur per idē punctū A, datū linea parallela lineæ datæ BC hac arte. Ex cētro A, ad quoduis interuallū describatur arcus secās B C in pūcto D; & eodē interuallo ex D sumatur punctū E, in eadē recta B C: Deinde eodē interuallo ex A, & E, describantur duo arcus duo arcus secātes se se in F. Nā ducta recta A F, erit parallela rectæ BC. Quoniā propter idē interuallum aßumptū recta A F æqualis est rectæ D F; & recta A D, rectæ E F si ducerentur hæ lineæ; erit A F, opposita D E, parallela.



vt postea demonstrabimus propos. 34. Quod si punctum A, vicinum fuerit rectæ B C, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in B C, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ B C, nempe E, quod tamen aliquantulum distet a puncto D. *(Quo enim maior fuerit distantia inter* D, *&* E, *eo rectius parallela ducetur) Eodem interuallo arcus describatur ad partes A : Deinde ex A, interuallo* D E. *alter arcus descriptus secet priorem arcum in F. Recta igitur ducta A F, erit parallela rectæ B C, vt prius; quia recta A F, æqualis est rectæ* D *E, ob idem interuallum; & recta A* D, *rectæ E F, si hæ rectæ ductæ essent, &c.*



32. THEOR. 22. PROPOS. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto : Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

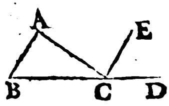
PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C, ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B.

31. primi. Quoniam igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E, erunt anguli alterni A, & A C E, æquales. Rursus, quia recta B D, in easdem parallelas incidit, erit angulus externus D C E, æqualis interno B; Additis igitur æqualibus A C E, & A, fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B æqualis. Quod est propositum.

29. primi.

29. primi.

2. pron.



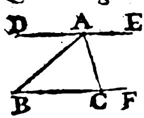
DICO secundo, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & A C B, duobus esse rectis æquales. Cũ enim exter-

externus angulus A C D, ut ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis A C B, erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: 2. pron.
Sed duo A C D, A C B, æquales sunt duobus rectis; Igitur 13. primi.
& tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

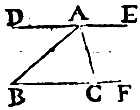
CVM demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse utrolibet interno, & opposito; Hic autem, eundem externum eisdem internis esse æqualem; perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo. Vt in triangulo proposito angulus A, superatur ab angulo A C D, angulo B; Et angulus B, superatur ab eodem angulo A C D, angulo A, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli, quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores; Hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos a duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt, angulo A C B, &c.

OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, ducatur rectæ B C, parallela D E. Quoniam igitur 31. primi.
anguli alterni D A B, & A B C, æquales 29. primi.
sunt; si addantur æquales E A C, & A C B, (sunt enim & hi alterni) erunt duo anguli 2. pron.
D A B, E A C, duobus A B C, A C B æquales. Addito ergo communi angulo B A C,



erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales. quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protra-

ctũ, æqualẽ esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam anguli ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit; Sunt autem, & anguli ACF, ACB,
13. primi.
duobus rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC ACB. angulis ACF, ACB, æquales. Dempto igitur communi angulo ACB,
3. pron.
remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.



FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis; Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CF, recta, sitq; angulus ACF, æqualis duobus angulis ABC, BAC: Dico, rectas BC, CF, in directum iacere. Cũ.n. angulus ACF, æqualis sit angulis ABC, BAC; si addatur communis angulus ACB, erunt anguli
2. pron.
ACF ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC,
32. primi.
BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACF, ACB; duobus erunt rectis æquales. Quare BC, CF,
14. primi.
vnam lineam rectam constituunt.

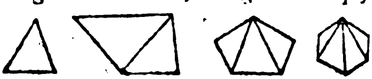
QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quot nam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli vero secundæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autẽ tertiæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis tri-

bis tribus rectis, sex videlicet rectis; Et sic de reliquis. Eum autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam dua linea recta superficiem non concludunt, unde neq; figuram constituunt, sed cum minimum tres recta linea ad figura constitutionem requiruntur; Atq; ita triangulum, quia habet tria latera, totidemq; angulos, erit prima inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus relinquitur vnum; sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus a 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaq; figura contenta 20. lateribus, cum sit decima octaua, habebit 20. angulos æquivalentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictũ est. Ita quoq; omnes 10. anguli figura 10. lateribus contenta, æquiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam a quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt linea recta, & solum ad duos propinquos angulos non possunt duci: Quare in tot triangula distribuetur quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrãgulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulum in quatuor. &c. Cum igitur anguli horũ triangulorũ constituãt oẽs angulos rectilinea figura propositæ, & oẽs anguli cuiuslibet triãguli æquales sint duobus rectis; perspicuũ est omnes angulos figura cuiusuis rectilinea æquales esse bis tot rectis, in quot triãgula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras; Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris.



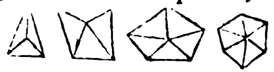
32. primi.

Secundus modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figura rectilinea, hic est,

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis

ptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

Hoc est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis: Ita etiã anguli figuræ continentis 20. latera, æquiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.

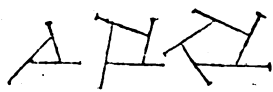


Demonstratio autẽ huius rei talis est. Si ab aliquo puncto intra figurã assumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosùe, figura ipsa continet: Cum igitur anguli cuiuscunq; trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt: At anguli circa punctum intra figuram asumptum non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum assumptum, quot latera, vel angulos continet figura: Sunt autem illi anguli circa dictũ punctũ æquales 4. rectis, vt collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cuiusq; figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor quot ipsa figura continet angulos, seu latera. quod est propositum.

32. primi.

Ex hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producantur versus eandem partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur cũ duob⁹ rectis, atq; adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosùe figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonstrauimus: Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni, & externi simul bis tot rectus conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt.

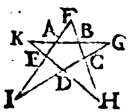
13. primi.



Exemplum In triangulo quouis, anguli interni & externi simul æquales sunt sex rectis; Cum igitur interni duobus sint *bus sint rectis æquales, erunt soli externi æquales quatuor rectis. In quadrilatero, anguli externi, & interni simul æquales sunt octo rectis: Cum igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, erunt & soli externi quatuor rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni, & externi sunt æquales 10. rectis; quoniam vero interni adæquantur sex rectis, remanebunt externi æquales quatuor rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur; Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.*

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quælibet duo extra coeant; efficientur quinq; anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis.



IN pentagono ABCDE, latera in vtraq; partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinq; angulos F, G, H, I, K. æquales esse duobus rectis. In triangulo enim BHK, cum latus HB, sit protractum ad F, erit externus angulus FBK, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis: *32. primi.* Eadem ratione in triangulo AIG, erit externus angulus FAG, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli FBA, FAB, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, erunt tres anguli A, B, F, trianguli ABF, æquales quinq; angulis F, G, H, I, K. *2. pron.* Sed anguli A, B, F, trianguli ABF, æquales sunt duobus rectis. *32. primi.* Igitur & quinq; anguli F, G, H, I, K, duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum.

COROLLARIVM. I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusq; alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, *3. pron.* æquiangulaq; erunt ipsa triangula.

COR-

COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum; Nam reliqui duo simul conficient vnum rectum. Quod si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet alterum esse semirecto minorem; Nel qui enim duo simul minores erunt vno recto. Si deniq; dictus angulus extiterit acutus, vtrumq; reliquorum maiorem esse semirecto; Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto.

COROLLARIVM. III.

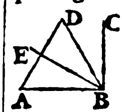
PERSPICVVM quoq; est, quemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti; Vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

COROLLARIVM. IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum, prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum deniq; tertiam partem vnius recti.

SCHOLION.

PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit

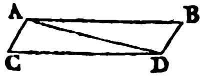


enim angulus rectus A B C. Super rectam A B,
1.primi. *constituatur triangulum æquilaterum A B D: Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiusdem recti. Di-*
9.primi. *uiso igitur angulo A B D, bifariam, per rectam B E, erit vterque angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.*

THEO-

THEOR. 23. PROPOS. 33. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungũt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales; Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia sint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq;, & anguli quoq; dictis lateribus inclusi ęquales; erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

29. primi.
4. primi.
27. primi.

SCHOLION.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, vt coniungentes sint & æquales & parallelæ. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, & D; Item ad B & C, neque coniungentes essent parallelæ vnquam, sed perpetuo se mutuo secarent, neq; essent æquales, nisi raro admodum, vt ex sequenti propositione constabit.

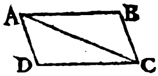
THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex

aduerso

aduerso & latera, & anguli; atq; illa bifariã secat diamteer.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita A B, D C, inter se esse æqualia, nec non latera opposita A D, B C: Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non angulos oppositos D A B, & D C B: Deniq; ducta diametro A C, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim A B, D C, sint parallelę, erunt anguli alterni B A C, D C A, ęquales. Rursº qa A D, B C, sunt parallelę, erũt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaq; cum duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterq; vtriq; & latus A C, dictis angulis adiacens commune vtriq; triangulo; erit recta A B, æqualis oppositæ rectę D C, & recta B C, oppositæ rectę A D. quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, ęqualis. Et quia si ęqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli B C A, D A C, toti quoq; anguli B A D, B C D, fiunt ęquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera A B, B C, trianguli A B C æqualia sunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq; & angulus B, angulo D, ęqualis, vt iam ostendimus; erunt triangula A B C, C D A, ęqualia, ideoq; parallelogrammũ A B C D, diuisum bifariam a diametro A C, quod tertio proponebatur. Parallelogrammorum igitur spaciorum ęqualia sunt inter se, quę ex aduerso &c. Quod ostendendum erat.



29. primi.

29. primi.

26. primi.

2. pron.

4. primi.

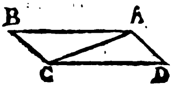
SCHOLION.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogrammum à diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat, anguli etiam bifariam diuiduntur a diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erũt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera

Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT *in quadrilatero ABCD, latera opposita AB, DC, æqualia; Item opposita latera AD, BC. Dico ABCD, esse parallelogrammum; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Itemq; lineas AD, BC. Ducta enim diametro AC, erunt duo latera* A B, B C *trianguli* A B C, *æqualia duobus lateribus* C D, D A, *trianguli* C D A, *utrumque utrique, & basis* A C, *communis; igitur erit angulus* B, *angulo D, æqualis. Rursus quia latera* A B, B C, *æqualia sunt lateribus* C D, D A, *vtrumque vtrique, & anguli* B, D, *ostensi æquales; erit angulus* B A C, *angulo* D C A, *alterno æqualis, & angulus* B C A *alterno angulo* D A C. *Quare erunt* A B, *&* D C, *parallelæ; Item* A D, *&* B C, *quod est propositum.* 8. primi 4. primi 27. primi

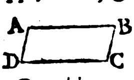


HINC *constat, Rhombum, & Rhomboidē esse parallelogramma; quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, ut manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34 ut patet.*

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

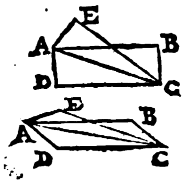
SINT *in quadrilatero* A B C D, *anguli oppositi* A, *&* C, *æquales; Item oppositi anguli* B, *&* D. *Dico* A B C D, *esse parallelogrammum; hoc est, lineas* AB DC *esse parallelas; Itemq; lineas* A D, B C. *Nam si æqualibus angulis* A, *&* C, *addantur æquales anguli* B, *&* D; *erunt duo anguli A, &* B, *duobus angulis* D, *&* C *æquales, & idcirco anguli* A, *&* B, *dimidium facient quatuor angulorum* A, B, C, *&* D. *Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, ut ad propos. 32. demonstrauimus,* 2. pron.



H

ſtrauimus, erunt duo A, & B. duobus rectis æquales. Quare
28. prim. A D, B C, parallelæ ſunt. Eadẽ ratione erunt A B, D C, paral lelæ. Erunt.n.duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, et C, æquales, &c. Quod eſt propoſitum. Ex hoc etiã manifeſtum eſt, Rhomboidem eſſe parallelogrãmum, cum eius anguli oppo ſiti æquales ſint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppoſiti æquales, cum ſint recti, ex eorum definitionibus.

HOC theorema conuertit ſecundam partem propoſitionis 34. ut conſtat. Tertia autem pars non poteſt conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam ſecari poteſt a diametro, & tamen non eſt parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, uel Rhomboides A B C D, quod parallelogrammum eſſe oſtenſum eſt; in quo ducta diametro A C, conſtituatur ſuper A C, triangulo A B C, æquale triangulũ A E C, inuerſo ordine, ita ut latus C E, ſit æquale lateri A B, & A E, ipſi C B, fiatq; trapezium A E C D. Quoniã vero triãgulũ A B C, triãgulo A D C, æquale eſt,



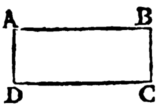
34. primi quod diameter A C, bifariã ſecet parallelogrãmũ D B: Erit et triangulũ A E C, triangulo A D C, æquale: Ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuidetur a diametro A C.

QVOD ſi quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab utraque diametro, illud parallelogramum erit, ut oſtendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri poteſt.

Tertium Theorema huiuſmodi eſt.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti; Dico ipſum eſſe parallelogrammum; hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas; Itemque A D, B C. Quoniam duo anguli A, & B, æquales ſunt duobus rectis. cum

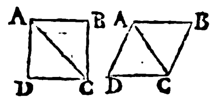


28 primi ſint duo recti; erunt A D, B C parallelæ: Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo A B C D, parallelogrammum. quod eſt propoſitum.

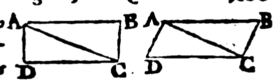
HINC rurſum conſtat, Quadratũ, & Altera parte longius

gius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, ut liquet ex eorum definitionibus.

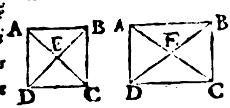
HIS in hunc modum demonstratis Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma, facile ostendemus angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro; Angulos uero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, ut paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, uel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniã igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, utrumque utrique, & basis B C, basi D C; (sunt enim hæ figuræ æquilateræ) erũt anguli B A C, D A C, æquales; Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. 8. primi Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro.



SIT rursus, Altera parte longius, uel Rhomboides A B C D, in quo diameter A C, sitq́; maius latus A B. Quoniam igitur in triangulo A B C, latus A B, maius est latere B C, erit angulus B C A, maior angulo B A C: 18. primi Est autem angulus B C A, æqualis angulo D A C, alternos quod B C, A D parallelæ sint. 29. primi (Est enim ABCD, ostensum esse parallelogrammũ.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur a diametro A C. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos.

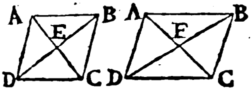


EODEM fere pacto ostendemus [illegible]s diametros in Quadrato, & Altera parte lõgiore æquales esse; At uero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorẽ quidem eam quæ angulos acutos, minorem uero eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit.n. quadratũ, uel altera parte lõgius A B C D, in quo diametri A C, B D, quas dico esse æquales. Cũ.n. duo latera A B, B C, triãguli ABC, æqualia sint duobus laterib⁹ AB, AD triãguli



B A D, *utrumque utrique, & angulus* A B C, *angulo* B A D,
4. primi *quia uterqe rectus; Erit basis* A C. *basi* B D, *æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt.*

SIT *rursus Rhombus, vel Rhomboides,* A.B.C D. *in quo diametri* A C, B D; *sitq́; angulus* B A D, *maior,* A B C, *minor.*



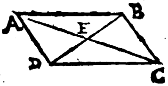
Non enim æquales sunt, quia alias uterque esset rectus, cum
29. primi *ambo æquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum* B D, *maiorem esse diametro* A C. *Quoniam duo latera* A B, A D, *trianguli* B A D, *æqualia sunt duobus lateribus* A B, B C, *trianguli* A B C, *utrumque utrique, & angulus* B A D, *an-*
24. primi *gulo* A B C, *maior existit; erit basis* B D, *maior base* A C. *quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, ut ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ* A C, B D, *inæquales sunt, licet coniungant parallelas* A B, D C, *quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, ut perspicuum est.*

IN *omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli* E A D, E D A, *trian-*
29. primi *guli* A E D, *æquales sint alternis angulis* E C B, E B C, *trian-*
34. primi *guli* B E C, *uterque utrique; & latus* A D, *æquale lateri* B C,
26. primi *opposito; Erit, & A E recta rectæ C E, & recta D E, rectæ B E, æqualis. Quare utraque diameter bifariam diuiditur in puncto* E.

HVIVS *autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nim[illegible].*

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariã diuidunt, parallelogrammũ est.

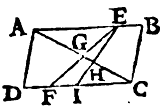
IN *quadrilatero enim* A B C D, *diametri* A C, B D, *se mutuo bifariam diuidant in* E. *Dico* A B C D, *parallelogrãmum esse. Cum enim latera* A E, E B *trianguli* A E B, *æqualia sint lateribus* C E, E D, *trianguli* C E D; *& anguli contenti* *senti ad uerticem E, aequales quoque: Erunt & bases A B C D, aequales, & angulus A B E, angulo alterno C D E, aequalis. Quare rectae A B, C D, parallelae sunt. Eadem ratione parallela ostendentur A D, C B. Parallelogrammum ergo est A B C D.* 15 primi 4. primi 27. primi



H V C quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammmi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariá quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

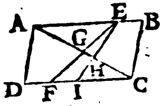
IN parallelogrammo A B C D, diametrum A C bifariã secet recta E F, in puncto G; Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam angulus E A G, aequalis est angulo alterno F C G, & angulus E G A, angulo F G C; Est autem & latus A G, lateri C G, aequale per hypothesin; Erunt & latera E G, F G, aequalia. Quare cum latera A G, G E, aequalia sint lateribus C G, G F, & anguli quoque contenti aequales; erunt triangula A G E, C G F, aequalia. Addita igitur communi quantitate B C G E, erit triangulum A B C, trapezio B C F E, aequale; Sed triangulum A B C, dimidium est parallelogrammi A B C D, Igitur & trapezium B C F E, dimidium erit eiusdem parallegrammi, ideoque recta E F parallelogramum bifariã secat. 29. primi 15. primi 26. primi 4. primi 2. pron. 34 primi



SECET iam E F, parallelogrammum bifariam; Dico, & diametrum A C, bifariam secari in G. Si enim non bifariam diuiditur in G, diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta E H I; Eritque, vt iam demonstrauimus, E I C B, trapezium dimidium parallelogrammi A B C D, atque adeo aequale trapezio E F C B quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur A C, bifariam in G, & non in alio puncto. quod erat propositum. 10. primi

HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrãmi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrã-

mũ, vel extra, quod tamẽ non ſit in diametro, niſi ipſum ſecet dia

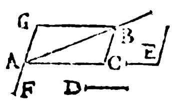


metrũ bifariã; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, q̃ parallelogrãmũ bifariã ſecet Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt ſi punctum ſit E, in latere A B, *ducenda eſt recta* E F, *per* G *punctum, in quo diameter* A C, *bifariam diuiditur; & ſic de alijs punctis.*

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non iniucundum. videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarũ faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem eſſe duobus rectis.

DVAE rectæ infinitæ AB, A C *contineant angulũ* BAC, *ſitq́; data recta finita quæcunque D, & angulus datus F, hac lege, ut duo anguli F, & B A C, minores ſint duobus rectis:*



Oportet igitur inter rectas A B, A C, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cũ alterutra uero illarum, nimirũ cum A C, *facientem angulum æqualem angulo dato*
23.primi. *E. Fiat angulus C A F, æqualis angulo E,*
3. primi *& producta F A, ad G, ſit A G, æqualis rectæ D; & per G,*
31. primi *ducatur* G B, *parallela ipſi* A C, *ſecans* A B, *in* B: *Deinde per* B, *ducatur* B C, *parallela ipſi* A G, *ſecans* A C, *in C. Dico rectam* B C, *collocatam inter rectas* A B, A C, *æqualem eſſe rectæ D, angulumq́;* B C *A, angulo E. Cum enim parallelogrammum ſit, per conſtructionem,* A C B G, *erit recta* BC,
34.primi. *rectæ* G A, *æqualis; At* G A, *æqualis eſt, per conſtructionẽ,*
32. primi *rectæ D; Igitur & B C, rectæ D, æqualis erit. Rurſus quia*
29.primi. *angulus* B C A, *angulo alterno* C A F, *æqualis eſt; & eidem angulo* C A F, *æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E; erunt anguli E, &* B C A, *æquales. Quod eſt propoſitum.*

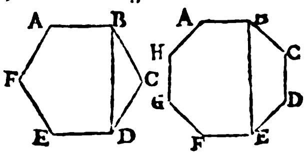
Cæterum

Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulū A B C, si anguli B A C, *&* B C A *æquales essent duobus rectis, vel maiores, ut constat ex propos. 17. uel 32.*

EX PROCLO.

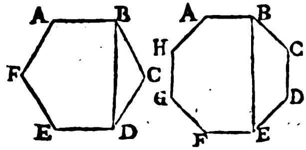
IN omni figura rectilinea latera habens numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æqui angula; erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quę ex utraque parte latera habent ęqualia numero; ut in hexagono A B C D E F, latera opposita erunt A B, E D; quoniam tam ad partes A, & E. duo sunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono uero A B C D- E F G H, latera opposita erũt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quam ad partes B, & E. Et sic in alijs figuris ęquilateris parium laterum, ex utraque parte oppositorum laterum, erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minus uno. Vt in quadrangulo erit unum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur duo quęlibet latera opposita esse parallela; A B, nimirum ipsi E D, in hexagono; & A B, ipsi F E, in octogono, & sic de cęteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, ut in 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni ęquales sunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiusdem hexagoni ęquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur ęquales: Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, duobus rectis ęquales; Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis æquales erunt; Quare parallelæ erunt A B, & E D. Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis ęquales. Sunt autẽ quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis; Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erũt rectis æquales, atq; adeo A B, F E, parallelæ erũt. Eodẽ modo demõstrabitur, in cęteris al-



32. primi
28. primi
28. primi

figuris huiusmodi angulos duos ad lineã rectã extrema oppositorũ laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam in decagono autem ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis; At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis: Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum, eadem linea abscindet hexagonũ, cuius anguli sunt octo rectis æquales; At sex anguli totius figuræ æquales sunt decẽ rectis; demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.



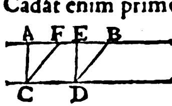
QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, ut ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici consueuit. propterea que in definitionibus, Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

35.

THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

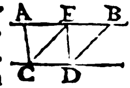
INTER duas parallelas A B, C D, super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F; (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad areã, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam



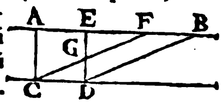
igitur in parallelogrammo C D E A, recta A E æqualis est rectæ C D opposi-
34. primi tæ; & eidem C D æqualis est F B, in parallelogrammo C D B F; Erunt A E,
1. pron. F B, inter se æquales: Dempta igitur communi F E, rema-
3. pron. nebit A F, ipsi E B, æqualis: Est autem & A C, ipsi E D,
34. primi æqualis in parallelogrammo C D E A, & angulus B E D,
29. primi angulo F A C, externus interno. Quare trianguiũ FAC,
4. primi triangulo B E D, æquale erit: Addito igitur communi trapezio

pezio C D E F, fiet totum parallelogrãmum C D E A, toti parallelogrammo C D B F æquale. Quod est propositum. 2. pron.

CADAT secundo punctum F, in punctum E; Dico rursus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia esse. Erunt enim ut prius, rectæ A E, E B, æquales, atque adeo triangula E A C, B E D, æqualia. Adduto igitur cõmuni triangulo C D E, fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia. 4 primi 2. pron.



CADAT tertio punctum F vltra E, ita vt recta C F, secet rectam D E, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectæ A E, F B, sunt æquales; si communis addatur E F, erit tota A F, toti E B, æqualis, atque adeo triangulũ F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo cõmuni triãgulo E G F, remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum. 2. pron. 4. primi 3. pron. 2. pron.

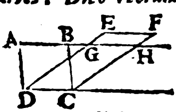


SCHOLION.

CONVERTEMUS facile hanc propositionem, hoc modo.

PARALLELOGRAMMA æqualia; super eandem basin, ad easdemque partes cõstituta, erunt inter easdem parallelas.

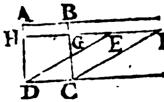
SINT duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, *super eandem basin* C D, *& ad easdem partes. Dico rectam* A B *productam, in directũ iacere ipsi* EF, *& propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias enim* A B, *producta uel cadet infra* E F, *uel supra; Cadat primo infra, qualis est* A H. *Erit igitur parallelogrammum* C D G H, *æquale parallelogrammo* A B C D: *Ponitur* 35. primi



autem

autem eidem parallelogrammo A B C D, *æquale parallelogrā-*
1. pron. *mum* C D E F; *Quare parallelogrāma* C D E F, CDGH,
æqualia erunt, totum, & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet A B, *infra* E F.

CADAT *secundo* A B, *producta supra* E F. *Cadet igitur* F E, *protracta infra* A B: *Quare, ut prius erunt parallelogramma* A B CD CDHG *æqualia, totum et pars, quod est absurdum. Idem absurdū consequeretur, si* C F, D E, *producerentur usq; ad* A B,



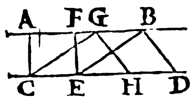
protractam. Eademq; demonstratio conueniet omnibus casibus, qui occurrere possunt. hoc est, siue punctum E, *sit ultra* B, *siue non, ut perspicuum est. Non ergo cadet* A B, *supra* E F; *sed nec infra, ut demonstratum est: ergo producta, in directum iacet ipsi* E F *ac proinde parallelogramma* A B C D, C D E F, *in eisdem sunt parallelis.*

36.

THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma A C E F, G H D B, super æquales bases C E, H D, inter easdem parallelas A B, C D, Dico ea esse æqualia. Connectantur enim extrema rectarū C E, G B, ad easdem partes lineis rectis C G, E B. Quoniam igitur recta C E, æqualis ponitur rectæ H D, &



34. primi eidem H D, æqualis est G B. Erunt
1. pron. C E, G B, æquales inter se; sunt autem & parallelæ, per hy-
33. primi. pothesin: Quare & C G, E B, ipsas coniungentes parallelæ erunt, & æquales, ideoq; C E B G, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma A C E F, G C E B, sint inter easdē parallelas, & super eandem basin C E, erit parallelogrammū
35. primi. A C E F, parallelogrammo G C E B, æquale. Rursus quia parallelogramma G C E B, G H D B, sunt inter easdē parallelas, & super eandem basin G B, erit quoq; parallelogrāmum G H D B,

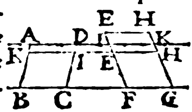
G H D B, eidem parallelogrammo G C E B, æquale. Quare & parallelogramma A C E F, G H D B, inter se æqualia erũt. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, &c. Quod ostendendum erat. 35. primi. 1. pron.

SCHOLION.

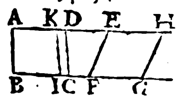
CONVERSUM huius theorematis duplex est, ad hũc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia sup bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.

SINT primo duo parallelogramma æqualia A B C D, E F G H, *super bases æquales* B C, F G, *& ad easdem partes constituta; Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est,* A D, *protractam coire in directum cum* E H. *Nam alias cadet aut infra* E H, *aut supra. Quo posito sequitur, totum et partem esse æqualia, quẽadmodum in conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facile commonstrat. Intelligendæ sunt autem bases æquales datæ in eadem linea recta* B G.



SINT secundo eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas A H, B G. *Dico bases* B C, F G, *esse æquales. Si enim altera, nempe* B C, *dicatur maior, abscindatur* B I, *æqualis rectæ* F G, *& ducatur* I K, *parallela ipsi* C D: *Eritq; parallelogrãmum* A B I K, *æquale parallelogrammo* E F G H; *& ideo parallelogrammo* A B C D, *pars toti. quod est absurdum. Non ergo* B C, *maior est, quam* F G. *Eadem ratione neque minor erit. Quare bases* B C, F G, *æquales sunt.* 3. primi 31. primi. 36. primi

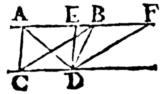


THEOR. 27. PROPOS. 37. 37.

TRIANGVLA super eadẽ basi cõstituta,

tuta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

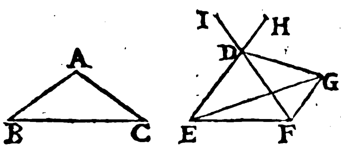
INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D (Dicitur autẽ triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars unius, & angulus oppositus alteram tangit.) Dico
31. primi. ea esse æqualia. Per D, enim ducatur D F, parallela rectæ



A C, & D F, parallela rectæ B C. Erunt
35. primi igitur parallelogrãma A C D E, A C D F, æqualia; Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed ho-
34. primi rum dimidia sunt triangula A C D, B C D; quod A D, BD, diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F.
7. pron. Igitur & triangula A C D, B C D, æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula quorũ duo latera unius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia; Id, quod in propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula A B C, D E F, *&* *latera* A B, A C *æqualia lateribus* D E, D F, *& angulus* A, *maior angulo* E D F,

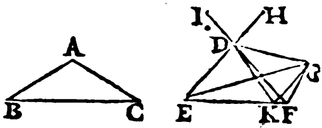


sintque primo hi duo anguli duobus rectis æquales: Dico triangula esse æqualia. Producatur enim E D. *ad* H, *&* F D, *ad* I. *fiatq́;*
23. primi *angulus* E D G, *æqualis angulo* A, *& recta* D G, *rectæ* DF, *seu* A C; *ducanturque rectæ* E G, G F. *Quoniam igitur duo anguli* A, *&* E D F, *ponuntur æquales duobus rectis; & angulus* E D G, *æqualis est angulo* A; *erunt & anguli* E D G, E D F, *duobus rectis æquales: Sunt autem & an-*

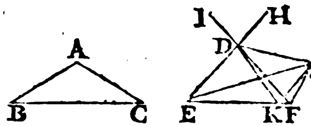
guli

guli E D G G D H, duobus rectis æquales; Igitur anguli E D G, E D F, angulis E D G, G D H, æquales erunt: Quare ablato communi angulo E D G, remanebit angulo E D F, æqualis angulus G D H: Est autem eidem angulo E D F, æqualis angulus H D I; Igitur & anguli G D H, H D I, æquales erunt, atque adeo angulus G D H, dimidium erit totius anguli G D I. Rursus quia latera D F, D G, sunt æqualia in triangulo D F G; erunt anguli D F G, D G F, æquales; qui cum æquales sint externo angulo G D I, erit uterlibet eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I: Ostensum est autem, angulum G D H, dimidium quoque esse eiusdem anguli G D I: Quare anguli G D H, D G F, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter E H, F G; erunt E H, F G, parallelæ. Quamobrem triangula D E G, D E F, æqualia erunt, cum habeant eandem basin D E, sintque inter easdem parallelas D E, F G. Quoniam uero triangulum D E G, æquale est triangulo A B C, propterea quod latera D E, DG, æqualia sunt lateribus A B, A C, & angulo A, angulus E D G; erit & triangulum A B C, triangulo D E F, æquale, quod est propositum. | 13. primi | 3. pron. | 15. primi | 5. primi | 32. primi | 27. primi | 37. primi | 4. primi

Sint secundo anguli A, & E D F, duobus rectis maiores; Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulũ, minus esse triãgulo DEF. Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I, fiatq; angulus E D G, æqualis angulo A, & recta D G, rectæ D F, seu A C, æqualis, ducanturque rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli A, & E D F, ponuntur maiores duobus rectis, erũt & anguli E D G, E D F, duobus rectis maiores; Sunt autẽ anguli E D G, G D H, æquales duobus rectis; Igitur anguli E D G, E D F, maiores sunt angulis E D G, G D H; Quare ablato communi E D G, remanebit angulus E D F, maior angulo G D H. Quoniam uero angulus E D F, angulo H D I, æqualis est, erit quoque H D I, maior quã G D H; atque adeo G D H minor quam dimidium anguli G D I. Rursus quia latera D G, DF, æqualia sunt, erunt anguli D F G, DGF, æquales; qui cum sint æquales externo G D I, erit uteruis eorum, | 23. primi | 3. primi | 13. primi | 15. primi | 5. primi | 32. primi

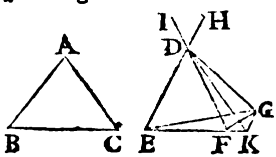


eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I: Ostensum est
autem, angulum G D H, minorem esse dimidio eiusdē G D I;



Quare D G F, maior erit,
quam G D H. Abscinda-
tur ex angulo D G F, an-
23. primi. gulus D G K, æqualis an-
gulo alterno G D H: Erit
27. primi. ergo G K, parallela ipsi
D E, secabitq́; G K, rectā E F. Ducatur ex D, ad K, ubi G K,
secat rectam E F, recta D K. Erit igitur triangulum D E G,
37. primi æquale triangulo D E K. Quoniam autem triangulum D E G,
4. primi æquale est triangulo A B C, propterea quod latera D E, D G
æqualia sunt lateribus A B, A C, & angulo A, angulus E D G;
erit & triangulum A B C, triangulo D E K, æquale. Cum
9. pron. igitur D E K, minus sit triangulo D E F, erit quoque A B C
triangulum triangulo D E F, minus: Quod est propositum.

S I N T tertio anguli A, & E D F, duobus rectis minores:
Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulum, maius
esse triangulo D E F. Producatur E D, ad H, & F D, ad I,



23. primi fiatq́; angulus E D G, æqualis
angulo A, & recta D G, rectæ
D F, seu A C; ducanturq́; re-
ctæ E G, G F. Quoniam igitur
anguli A, & E D F, ponuntur
minores duobus rectis, erunt
quoque anguli E D G, E D F,
13. primi duobus rectis minores. Sunt autem anguli E D G, G D H, duo-
bus rectis æquales; Igitur E D G, E D F minores sunt, quam
E D G, G D H; demptoq́; communi E D G, remanebit E D F,
15. primi minor, quam G D H; Est uero E D F, æqualis ipsi H D I. Quare
& H D I, minor erit quam G D H, atque adeo G D H, maior
est dimidio anguli G D I. Quoniam autem D G F, dimidium
est eiusdē anguli G D I, ut iam supra ostensum fuit; erit G D H,
maior, quam D G F: Fiat igitur angulus D G K, æqualis an-
gulo G D H, ducta recta G K, q̄ secabit rectam E F, protractā
27. primi in K, & ducatur recta D K: Eritque, ut prius, G K, paral-
37. primi lela ipsi D E, triangulumq́; D E G, triangulo D E K, æquale:
4. primi Est autem iterum D E G, æquale ipsi A B C. Igitur &
9. pron. A B C, æquale est ipsi D E K; Quocirca cum D E K, ma-

ius

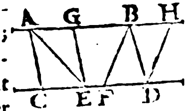
ius sit quam DEF; erit & ABC, maius, quam DEF; Quod demonstrandum erat.

Ex his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, ut ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38. 38.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

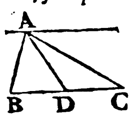
INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. Ducatur. n. EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF; Eruntq; parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia. Cum igitur horum dimidia sint triangula ACE, BFD; erunt hæc inter inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum. 31. primi 36. primi 34. primi 7. prim.



SCHOLION.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si a quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo ABC, ex angulo A, recta AD, diuidens bifariam latus BC, in D; Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi BC, erunt duo triangula ABD, ADC, inter easdem parallelas, et super æquales bases; Quare æqualia erunt. 38. primi.

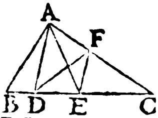


EX

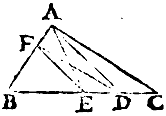
EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in uno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quę bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, ut est ostensum: Si uero D, non diuidat



10. primi B C, bifariam, secetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, duca-
31. primi tur recta D A, & per per E, parallela E F, ipsi D A, secans A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuisum bifariam a linea D F. Nam ducta re-
37. primi cta E A, erunt triangula E F A, E F D, æqualia, cum sint super eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Addito igi-
2. pron. tur communi C F E, erunt tota triangula A E C, C D F, æqualia: Est autem A E C, dimidium totius A B C, ut iam fuit ostensum; Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C. quod erat probandum.



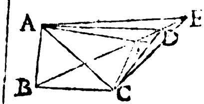
QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate E C, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium uero ad partes C, ut figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo nos uniuersalius proponemus ad finem sexti libri.

39.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia A B C, D B C, super eandem basin B C, & ad easdē partes; Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta. hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi B C. Si enim non



31. primi est, ducatur ex A, parallela ipsi B C,

quæ

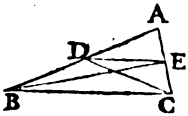
quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primo supra, qualis est A E, coeatq; cum B D, protracta, in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, B C, erit triangulo A B C, triangulum E B C, æquale: Est autem per hypothesin triãgulum quoq; D B C, æquale eidem triangulo A B C; Igitur erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erũt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat. 37. primi. 1. pron.

SCHOLION.

Ex his infert Campanus sequens hoc theorema.

Linea recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

Secet linea D F, latera A B, A C, trianguli A B C bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cũ enim triangula A D E, B D E, sint super æquales bases A D, D B, & inter easdem parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi A B) erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidem triangulo A D E, æquale; Igitur triangula D B E, C E D, æqualia erunt: Habent autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta: Quare inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E, B C, parallelæ erunt; Quod est propositum. 38. primi. 1. pron. 39. primi.

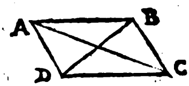


Id autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

Omne quadrilaterum quod ab vtraq; diametro bifariã diuiditur, parallelogrammũ est.

I Nam

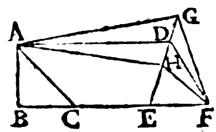
Nam quadrilaterum A B C D, diuidatur bifariam ab vtraq; diametro A C, B D. Dico ipsum esse parallelogrammũ. Cum enim triangula A D C, B D C, *dimidia sint eiusdem quadrilateri* A B C D, *ipsa inter se æqualia erunt. Quare cum eandem habeant basin* D C, *ad easdemq; partes sint, ipsa*



39. primi. *in eisdem parallelis erunt: Atq; idcirco A B, D C, parallelæ sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. Parallelogrammum igitur est A B C D. Quod est propositum.*

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia sup æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



Sint duo triangula æqualia A B C, D E F, super bases æquales B C, E F, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ B F. Si enim non est, cadet parallela ipsi B F, per A, ducta vel supra A D, vel infra. Cadat primo supra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniã igitur parallelæ sunt A G,
38. primi. B F, erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale; Ponitur autem, & triangulum D E F, eidem triangulo A B C,
1. pron. æquale: Igitur triangula D E F, G E F, æqualia erunt, pars & totum; Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A H; ducta recta H F, erũt eadẽ argumẽtatione triãgula H E F, D E F, æqualia, pars & totũ; qđ est absurdũ. Erit igit̃ A D, parallela ipsi B F. Quare triãgula æqualia sup æqualib⁹ basibus, &c. Qđ erat demonstrandũ.

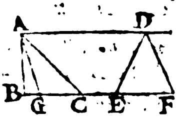
SCHOLION.

Eodem modo demonstrari poterit hoc theorema.

TRI-

TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.

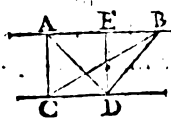
SINT triangula æqualia ABC, DEF, inter parallelas AD, BF, & super bases BC, EF, quas dico esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit BC, maior. Abscissa ergo recta CG, æquali ipsi EF, & ducta recta GA, erit triangulum AGC triangulo DEF, æquale. 38.primi. *Ponitur autem & triangulum ABC, eidem triangulo DEF, æquale; Igitur triangula AGC, ABC, æqualia erũt,* 1.pron. *pars & totum; quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC, EF, sed æquales. Quod est propositum.*



THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemq; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

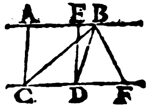
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt triangula ACD, BCD, æqualia; 37.primi. At parallelogrammum ACDE, duplum est trianguli ACD; 34.primi. Igitur & trianguli BCD, duplum erit idẽ parallelogrammũ ACDE. Quamobrem, si parallelogrammum cũ triangulo, &c. Quod erat demonstrãdũ.



SCHOLION.

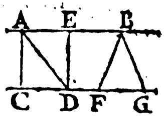
HINC sequitũ, si triangulũ duplã habuerit basin, fueritq;

in eiſdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam ſi baſis



C D producatur ad F, vt ſit D F, æqualis ipſi C D, ducaturq́; recta F B, erit triangulum B C F, duplum trianguli B C D, quod
38. primi. triangula B C D, B D F æqualia ſint: Eſt au-
41. primi. tem & parallelogrammum A C D E, duplum eiuſdem trian-
6. pron. guli B C D: Igitur æqualia erunt triangulum B C F, & parallelogrammum A C D E.

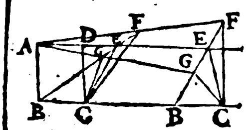
IDEM hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodem modo, ſi parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem, fuerintq́; in eiſdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo A C D E, & triangulo B F G, quorum baſes C D, F G, æquales ſunt. Du-



38. primi. cta enim diametro A D, in parallelogrammo, erunt triangula A C D, B F G, æqualia; Cum igitur parallelogrammum
34. primi. A C D E, duplum ſit trianguli A C D: erit quoque idem trianguli B F G, duplum. Eadem ratione ſi baſis F G, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc eſ-
38. primi. ſet duplum etiam trianguli B F G, &c.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq́; habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemq́; parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.

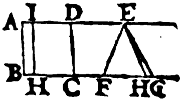


SIT parallelogrammũ A B C D, duplum trianguli E B C ſiue eandem habeant baſin, ſiue æquales; Dico rectam ductam A E, parallelam eſſe rectæ BC. Nam alias ducta parallela ex A, cadet aut

ſupra

supra A E, aut infra. Vnde vt in 39. vel 40. propos. ostendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. Quod est absurdum.

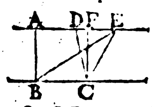
Sit deinde parallelogrammum A B C D, duplum trianguli E F G, in eisdemq; parallelis: Dico bases B C, F G, esse æquales. Nam si altera, nempe B C, sit maior, abscissa æquali C H, & ducta H I, parallela ipsi A B, demonstrabimus parallelogramma A B C D, I H C D, esse æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum est trianguli E F G; illud quidem per hypothesin; hoc vero per 41. propos.) Quod est absurdum. Idem ostendemus, si basis F G, maior dicatur. Si enim abscindatur ipsi B C, æqualis F H ducaturq; recta H E, erunt triangula E F H, E F G, æqualia, pars & totum; (nam vtrumq; dimidium est parallelogrammi A B C D; Illud quidē per propos. 41. hoc vero per hypothesin.) Quod est absurdum.



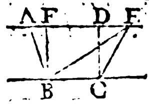
EX PROCLO.

Si triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.

Inter lineas parallelas A D, B C, sint constituta trapezium ABCD, & triangulum E B C, super basi B C, eandem, quæ sit tamen maior quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus esse duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam B C, sumatur A F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta C F, quæ erit parallela ipsi A B; Atq; adeo parallelogrammum erit A B C F, 33. primi quod duplum est trianguli E B C. Quare trapezium A B C D, cum 41. primi sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli E B C, quod est propositum.



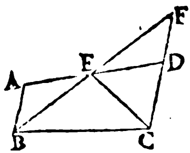
Sint rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis



B C. sit minor quã reliqua linea parallela A D, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, quam B C, abscindatur D F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta B F, quæ erit paralle-
33. primi. la ipsi C D, atq; adeo parallelogrammum erit BCDF, quod duplũ
41. primi. est trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod superat parallelogrammum B C D F, maius erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.



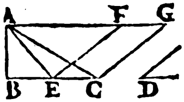
SIT trapezium ABCD, cuius duo latera opposita A B, D C, sint parallela, & super basin B C, constituatur triangulum E B C, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD: Dico trapezium ABCD, duplum esse trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe B E, donec coeat cum C D, pro-
29. primi. tracto in F. Et quia parallelæ sunt A B, C F, erunt anguli alterni,
15. primi. B A E, F D E, æquales: Sunt autem & anguli A E B, D E F, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli A B E, lateri D E, trianguli D F E, æquale, per hypotesin: Igitur & reli-
26. primi. qua latera A B, B E, reliquis lateribus, D F, F E, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales. atq;
4. primi. idcirco triangula A B E, D F E, æqualia erunt. Quare addito com-
2. pron. muni triangulo C D E, erunt triangulo C E F, æqualia triangula
38. primi. A B E, C D E: Est autem & triangulum B C E, eidem triangulo C E F, æquale, quod bases B E, E F, ostensæ sint æquales, & ipsa triangula inter easdẽ sint parallelas, si p C, duceretur parallela ipsi B F. Igitur triangulum C B E, æquale erit triangulis A B E, C D E; & propterea C B E, triangulum dimidiũ erit trapezii A B C D, quod est propositum.

42. PROBL. 11. PROPOS. 42.

DATO triangulo æquale parallelo-

gram-

grammum constituere in dato angulo rectilineo.



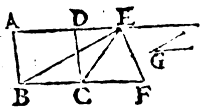
DATVM triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur construere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habẽs angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, bifariam in E, & fiat angulus C E F, æqualis angulo D: Ducatur itẽ per A, recta A F, parallela ipsi B C; quæ secet E F, in F. Rursus per C, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritq; constitutum parallelogrammũ CEFG, quod dico esse æquale triangulo A B C. Ducta enim recta E A; quoniam parallelogrammum C E F G, duplum est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eiusdem trianguli A E C, quod triangula A E C, A B E, super æquales bases BE, EC, & in eisdem parallelis, sint æqualia: Erunt parallelogrammum CEFG, & triangulum ABC, æqualia inter se. Cum igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo, æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo; Quod erat faciendum.

10. primi. 23. primi. 31. primi. 41. primi. 38. primi. 6. pron.

SCHOLION.

SVBIVNGIT *hoc loco Peletarius subsequens problema.*

DATO parallelogrammo æquale triangulũ constituere, in dato angulo rectilineo.



SIT *datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G æqualis, seceto; recta BE rectã AD, productã in E: Extendat quoq; B C, ad F, sitq; CF, æqualis rectæ BC. Dico triãgulũ BEF, habẽs angulũ EBF,*

23. primi.

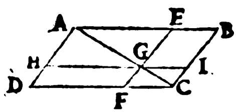
angulo dato G æqualem, æquale esse parallelogrammo A B C D. Ducta enim recta C E, erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E; Item triangulum B E F, eiusdem trianguli B C F, duplum; quod æqualia sint triangula E B C, E B F. Quare æqualia inter se erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F.

41. primi. 38. primi. 6. pron.

43.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

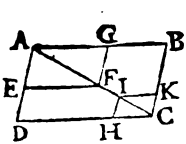
IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



IN parallelogrāmo ABCD, sint circa diametrum A C, parallelogrāma AEGH, C F G I, & complementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum enim triangula A B C, C D A, æqualia sint; Itemq; triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: Sunt autem & triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapezijs, remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.

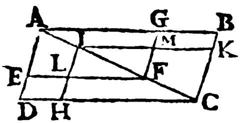
34. primi. 3. pron. 34. primi. 3. pron.

SCHOLION.



EODEM modo hoc theorema demonstratur a Proclo, etiam si duo parallelogramma circa diametrū nō coniungantur in puncto G, sed vel vnum ab altero sit semotum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim primo vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo A B C D, circa diametrum A C, consistā consistant parallelogramma AEFG, CHIK: Dico complementa DEFIH, BKIFG, esse aequalia. Cum enim triangula ABC, CDA, aequalia inter se sint; Item triangula AEF, CHI, aequalia triangulis AGF, CKI; erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, aequalia. Quod est propositum. 34. primi. 3. pron.

SECENT se iam mutuo parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum, ita vt communem partem habeant ILFM; Dico adhuc cõplementa DELH, BGMK, esse aequalia. Cum enim

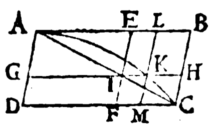


aequalia sint triangula ABC, CDA; Item triangula AFG, AFE; erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, aequalia; Sunt autem rursus aequalia triangula IFM, IFL; Igitur si haec addãtur dictis quadrilateris, erũt figurae BCIMG, DCILE, aequales: Cum igitur & aequalia sint triangula CIK, CIH, erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam aequalia. Quod est propositum. 34 primi. 3. pron. 34. primi. 2. pron. 34 primi. 3. pron.

CONVERSUM quoq; huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

Si parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelográma, ita vt ex illis duo aduersa sint aequalia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis EF, GH, quae sint parallelae rectis BC, CD, seq; secent in I, diuidatur parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorũ aduersa duo BEIH, DFIG sint aequalia: Dico reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim non transit, secet diameter CKA, rectam GH, in K, si fieri potest, & per K, ducatur LM, parallela ipsi BC. Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, aequa- 31. primi. 43. primi.



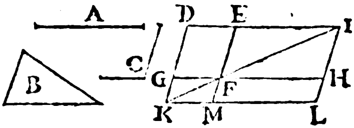
9 pron. *æqualia: Est autem DGKM, maius quã DGIF; Quare & maius erit BHKL, quã DGIF. Cum ergo DGIF, æquale ponatur ipsi BEIH, erit etiam BHKI, maius quam BEIH, pars quam totũ; Quod est absurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.*

44. PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. oportet igitur constituere parallelogrammum ęquale triangulo B, angulum habens ęqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Cõstituatur trian-

42. primi. gulo B, æquale parallelogrãmũ DEFG, habens angulũ EFG, angulo C, æqualem, producaturq; GF, ad H, vt



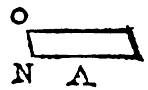
31. primi. FH, sit æqualis rectæ A; & per H, ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectę DG, productæ in K; & per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturq; EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur; Habet enim latus FH, ęquale datæ rectæ A. & angulum HFM, angulo dato C, æqualẽ,

15. primi. cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Deniq; parallelogrãmmum LMFH, æ-

43. primi. quale est triangulo B, cũ æquale sit cõplemento DEFG, qđ factũ est æquale triangulo B. Ad datã igitur rectã lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

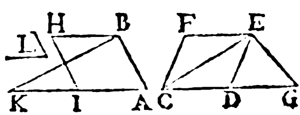
QVOD si quis optet, lineam ipsam A, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammũ FMLH, *F M I H, ad rectam A, ex iis quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq́; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditũ fuit, effectum erit, quod quæritur.*



ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.

SIT data recta AB; datũ parallelogrãmũ CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, vt DG, æqualis sit ipsi CD, &

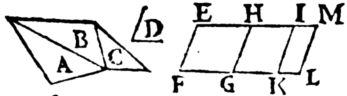


iungatur GE, recta: Eritq́; triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale: vt demonstrauim⁹ scholio propos. 41. Fiat iã super data recta A B, parallelogrammum ABHI, æquale triã- 44. primi. *gulo CEG hoc est, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, vt sit I K, æqualis ipsi AI, iungaturq́; recta BK. Dico triangulum ABK, constitutum super datam rectam AB, habensq́; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale esse dato parallelogrammo CDEF. Cum enim triangulum A B K, æquale sit parallelogrammo ABHI, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo CDEF, constat propositum.*

PROBL. 13. PROPOS. 45.

DATO rectilineo æquale parallelogrãmum cõstituere, in dato angulo rectilineo.

DATUM rectilineum sit A B C, & datus angulus D: oportet igitur cõstruere parallelogrammũ æquale rectilineo A B C, quod habeat angulũ æqualẽ angulo D. Resoluatur rectilineũ in triãgula A, B, & C. Deinde triãgulo A, æquale paralle- 42. primi. logram-



logrammum cõstituatur E F G H, habens angulum F, angulo D, æqualem.

44. primi. Item super rectam G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo, factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnũ parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, inter se sunt æquales, cum vterq; æqualis sit angulo D. Addito igitur cõmuni angulo F G H, erunt duo

29. primi. anguli E F G, F G H, qui duobus rectis æquiualent, æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus

14. primi. etiam rectis æquales erunt. Quare F G, G K, vnam rectã lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnã rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sint, (cum sint æquales oppositis an

34. primi. gulis æqualibus E F G, H G K.) & duo anguli H I K, I H G,

29. primi. duobus sint rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint

30. primi. parallelæ; Itemq; E F, I K, quod vtraq; parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Dato ergo rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendũ.

SCHOLION.

QVAMVIS in hoc problemate Euclides absolute, & simpliciter docuerit, quanam arte parallelogrammum constituatur æquale rectilineæ figuræ datæ, non astringendo nos ad certam aliquam lineam rectam datam, vt in propos. 44. fecerat: Tamen eodem modo, quod iubetur, efficiemus, si recta aliqua linea nobis fuerit assignata. Nam si detur recta linea

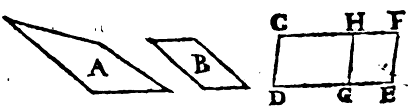
E F,

EF, super ipsam construemus parallelogrammum E F G H, 44. primi.
æquale triangulo A. *Et eodem modo super* G H, *constituemus aliud* G H I K, *æquale triangulo* B, *&c. Quibus peractis, constitutum erit super datam rectam* E F, *parallelogrammum* E F L M, *æquale rectilineo dato, in dato angulo* F, *qui æqualis est angulo* D, *proposito.*

PARI *ratione, propositis quotcunq; rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos 42. & 44. ceu factum est ab Euclide in hoc problemate. Nam cũ omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, veluti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita* A B, *&* C; *Atq;* A B, *resoluatur in triangula* A, *&* B, *singulisq; triangulis* A, B, C, *singula parallelogramma* E G, G I, I L, *iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propos. 42. & 44. erit constructũ parallelogrammũ totum* EFLM, *æquale duobus rectilineis* A B *&* C. *Et sic de pluribus.*

HVC *referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, qđ nos tamẽ alio modo, et breuiori demõstrabim⁹, in hũc modũ.*

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.

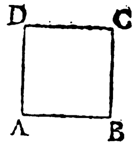


SINT *data rectilinea* A, *&* B, *sitq;* A, *maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum* A, *superet rectilineum* B. *Fiat parallelogrammum* C D E F *in quocũq; angulo* D, *æquale maiori rectilineo* A. *Et super rectam* C D 45. primi.
parallelogrammum C D G H, *in eodem angulo* D. *æquale rectilineo minori* B. *Quoniam igitur parallelogrammum* C D E F, *superat parallelogrammum* C D G H, *parallelogrammo* E F H G; *superabit quoq; figura* A, *figurã* B, *eodẽ parallelogrãmo* EFHG. *Quod est propositum.*

PRO-

45. PROBL. 14. PROPOS. 46.

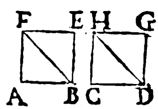
A DATA recta linea quadratum describere.



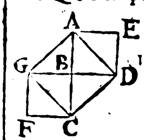
Sit data recta A B, sup quã oporteat quadratũ describere. Ex A, & B, educantur A D,
11. primi. BC, perpendiculares ad A B, sintq; ipsi A B, æquales, & cõnectatur recta CD. Dico A B-CD, esse quadratũ. Cum. n. anguli A, & B,
28. primi. sint recti, erunt A D, BC, parallelæ: Sunt aũt & æquales, quod vtraq; æqualis sit ipsi A B; Igitur & A B,
33. primi. DC parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammũ est ABCD; in quo, cũ A D, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existũt; Sunt aũt & oẽs quatuor
34. primi. anguli recti, cũ C, & D, æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratũ igitur est A B C D, ex definitione; Ac proinde a data recta linea quadratũ descripsimus; Quod faciendũ erat.

EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorũ æqualiũ æquales sũt lineæ.



Sint primo rectæ AB, CD, æquales; Dico earũ quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoq; esse. Ductis enim diametris BF, DH, erũt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus laterib° DC, CH, trianguli DCH, æqualia, vtrumq; vtriq; ; cũ ex definitione quadrati rectæ A F, CH, æquales sint rectis AB, CD: Sunt autem, & anguli A, & C, æ-
4. primi. quales, nempe recti: Igitur triangula BAF, D C H, æqualia erunt.
34. primi. Quæ cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.



Sint secundo quadrata ABDE, BCFG, æqualia; Dico lineas quoq; ipsorũ A B, B C, æquales esse. Cõiungantur. n. quadrata ad angulum B, vt rectæ AB, BC, in directũ cõstituantur. Et quoniã anguli
14. primi. ABG, ABD, sunt recti, erũt & rectæ GB, BD, in directũ cõstituta. Ducãtur diametri AD, CG, iungãturq; rectæ AG, CD. Quoniã igitur quadrata A B-DE, BCFG, æqualia sunt, erũt & triãgula ABD, BCG, eorũ dimidia, æqualia. Addito ergo cõi triãgulo BCD, fiet totũ triangulũ ACD, toti triãgulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cũ eandem

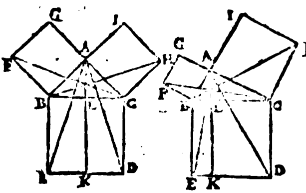
dem habeāt basin CD, ad easdēq; sint partes, in eisdē sunt paralle- 39 primi.
lis, ideoq; parallelæ sunt AG, CD. Et qui, vt in scholio propos. 34.
ostē dimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariā,
erūt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoq; æquales. Quāobrē & parallelæ sunt AD, CG, igitur parallelogramū est ADCG, ac 27. primi.
propterea rectæ AD, CG, æquales: Quoniā ergo in triangulis ABD, 34. primi.
BCG latera AD, CG, æqualia sūt, & anguli, quib⁹ ea latera adiacēt,
inter se etiā æquales, cū sint semirecti, vt i scholio ppos. 34. ostēsum
fuit; erūt etiā reliqua latera æqualia, nēpe AB, ipsi BC, &c. Qđ e ppositū. 26. primi.

SCHOLION.

Possent hæc omnia multo breuius probari per superpositionē quadrati vnius super aliud. Nā si lineæ sunt æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsæ inter se; Cū ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoq; ipsi inter se, ideoq; totū quadratū toti quadrato congruet. Quod si quadrata sunt æqualia, cōgruent ipsa inter se, propter æqualitatē angulorū; Igitur & lineæ; alias vnū quadratū alio maius esset.

THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

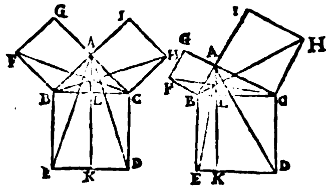
IN rectāgulis triāgulis, quadratū, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus.



In triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, describāturq; super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE: Dico quadratū BCDE, descriptū super latus BC, quod 46. primi.
angulo recto opponit̃, æquale esse duob⁹ quadratis ABFG, ACHI, quę sup alia duo latera sunt descripta, siue hęc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L 31. primi.
& iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia du anguli BAC, & BAG, sunt recti, erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodēq; modo IA, AB, vna recta linea 14. primi.
erunt.

erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cũ sint recti, si addatur communis angulus A B C, fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterq; totus angul' B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur latera A B, B E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumq; vtriq; , vt constat ex definitione quadrati;
2. pron.
Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; Erunt triãgula A B E, F B C, æqualia. Est autẽ quadratum, seu parallelogrãmũ A B F G, duplũ trianguli F BC, cum sint inter parallelas B F, C G, & super eandem basin B F; Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quod sint inter parallelas B E, A K, & super eandẽ basin B E. Quare æqualia erunt quadratũ A B F G, & parallelogrammum B E K L; Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum A C H I, & parallelogrammum C D K L. Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoq; eorum dupla, parallelogrammũ videlicet CDKL, & quadratum ACHI. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrammis B E K L, C D K L, æquale est duobus quadratis A B F G, A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonstrandum erat.

4. primi.
41. primi.



6. pron.

SCHOLION.

INVENTIO huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quod se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues; si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidissetq; quadratum numerum maioris æqualem esse quadratis numeris reliquorum, composuit

cap. 2.

posuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes aequales, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum esse rectum; Idque in quamplurimis alijs numeris, vt in 6, 8, 10. & in 9. 12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis aequale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant unum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi uoluptate adinuenit, firmaq; ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, aequale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figurã quãlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulũ, siue quadrangulum, siue quinquangulum, &c. aequalem esse duabus figuris, quae super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq; descriptae, ut ibidem ostendemus.

CAETERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum aequale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duae regulae, quibus inueniuntur praedicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagorae, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, ut 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, ut hic ex 25. reijce vnitatem; Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum aequale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula

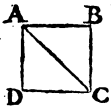
K tribuitur

tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6; Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros. 8. & 10. primus .n. est 6. nimirū numerus par accept⁹. Hac regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. et 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quā problemata, e quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

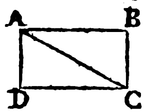
I. SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplū erit prædicti quadrati.

IN quadrato A B C D, ducatur diameter A C; Dico quadratum A C, duplum esse quadrati A B C D. Cum enim in



47. primi triangulo A B C, angulus B rectus sit, erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cum igitur quadrata linearū A B, B C, æqualia sint, quod lineæ A B, B C, sint æquales; erit quadratum lineæ A C, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ A B, hoc est, quadrati AB-C D. Quod est propositum.

II. QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.



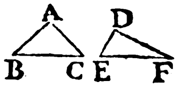
IN altera parte longiori A B C D, ducatur diameter A C; & quia in triangulo A B C, angulus B, est rectus, erit quadratū

47. primi lateris A C, æquale duob⁹ quadratis laterū inæqualiū AB BC. Quod est propositū.

III. SI fuerint duo triangula rectangula, quorū latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterū vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorū duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, anguli, A, & D, sint

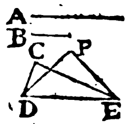
sint recti, lateraq́; opposita B C, E F, *æqualia: Dico duo quadrata laterum* A B, A C, *simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum* D E, DF,



simul sumptis. Nam quadrata linearũ B C, E F, *æqualia inter se sunt, cum & ipsæ inter se ponantur æquales; Quadrato autẽ lineæ* BC, *æqualia sunt quadrata linearum* A B, A C; *Et quadrato lineæ* EF, *æqualia sunt quadrata linearum* D E, D F: *Perspicuum ergo est, quod proponitur.* 47. primi 47. primi

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis. IIII.

SINT A, & B *latera duorum quadratorũ inæqualiũ; Fiat angulus rectus* D C E, *sitq́;* D C, *recta æqualis rectæ* B, *& recta* C E, *rectæ* A. *Ducta deinde recta* D E, *coniungente puncta* D, E, *super ipsam constituantur duo anguli semirecti* D E F, E D F, *coeantq́; rectæ* DF, EF, *in* F. *Quoniã igitur in triangulo* F D E *anguli* FDE, F E D *æquales sunt, erunt & latera* D F, E F, *æqualia, ideoq́; et quadrata eorundẽ laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearũ* D F, E F, *æqualia esse quadratis linearũ* A, & B, *hoc est linearũ* CE & CD. *Nam cum in triãgulo* DEF, *anguli* FDE, FED *faciant vnũ rectũ, erit reliquus angulus* F, *rectus. Quamobrẽ erunt quadrata linearum* DF, EF, *æqualia quadrato lineæ* DE; *sed eidẽ quadrato lineæ* DE, *æqualia sunt quoque quadrata* C D, C E; *igitur quadrata linearum* DF, EF, *æqualia sunt quadratis linearum* D C, E C. *Quod est propositum.* 11. pron. 6. primi 32. primi 47. primi 1. pron.

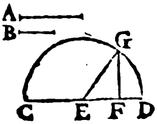


PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. V.

POTENTIA *lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantũ enim quæuis recta linea posse dicitur, quantũ est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales* A, & B, *oporteatq́; cognoscere, quãto maius sit quadratũ maioris lineæ* A, *quã minoris* B. *Ex quauis linea recta* CD, *sumatur* CE, *æqualis rectæ* A,

 & E F,

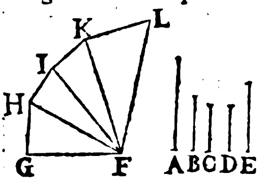
et EF. æqualis rectæ B. Deinde cētro E, & interuallo EC, semicirculus describatur CGD; & ex F, ducatur FG ꝑpendicularis ad CD. Dico quadratum rectæ A, hoc est, recta CE, sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ B, hoc est, rectæ EF, sibi æqualis, quadrato rectæ FG. Ducta enim recta EG, erit eius quadratum æquale quadratis rectarum EF,



47. primi FG. Quocirca quadratum rectæ EG, hoc est, quadratum rectæ EC, illi æquale, superabit quadratum rectæ EF, quadrato rectæ FG. Quod est propositum.

VI. PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis ęquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. oportet igitur inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque.



Fiat angulus rectus FGH, sitq; recta FG, æqualis rectæ A, & recta GH, rectæ B; Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitq; HI, æqualis rectæ C: Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitque IK, æqualis rectæ D: Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitque KL, æqualis rectæ E. Si igitur ducatur recta FL; Dico quadratum rectæ FL, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ FH, æquale est quadratis rectarum FG, GH, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ FI, æquale est quadratis rectarum FH, HI, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ FK, æquale est quadratis rectarū FI, IK, ideoque quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ FL, æquale est quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarū A, B, C, D, & E, Quod est propositum.

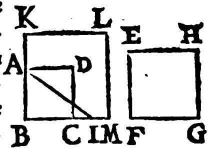
47. primi.

VII. PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram,

quæ

quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita ut tota figura compoſita ſit etiam quadrata.

SINT *duo quadrata* A B C D, E F G H, *propoſitumque ſit quadrato* A B C D, *apponere figuram, quæ ſit æqualis quadrato* E F G H, *&c. Sumatur recta* B I, *æqualis rectæ* F G, *lateri quadrati* E F G H. *Ducta autem recta* A I, *& producta recta* B A, *ad partes* A, *accipiatur* B K, *æqualis rectæ* A I, *perficiaturque quadratum* B K I M. *Dico figuram* A D C M L K, *quadrato* A B C D, *adiunctam, æquale eſſe quadrato* E F G H. *Quoniam quadratum rectæ* A I, *hoc eſt, quadratum* B K L M *æquale eſt quadratis rectarum* A B, B I, *hoc eſt, quadratis* A B C D, E F G H; *ſi auferatur commune quadratum* A B C D, *remanebit figura* A D C M L K, *æqualis quadrato* E F G H. *Quod eſt propoſitum.*

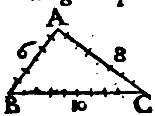


47. primi

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuſcunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

SIT *angulus* A, *rectus in triangulo* A B C. *ſintque primo cognita latera* A B, A C, *circa angulum rectum, quorum* A B, *ponatur* 6 *palmorum, &* A C, 8. *Quoniam igitur quadrata rectarum* A B, A C, *nempe palmi* 36. *&* 64. *æqualia ſunt quadrato rectæ* BC; *ſi illa coniungantur ſimul, efficietur hoc palmorum* 100. *Latus ergo* BC, *continebit* 10. *palmos. Tantum enim eſt latus, ſeu radix quadrata* 100. *palmorum, vt perſpicuum eſt apud Arithmeticos. Sint ſecundo cognita latera* A B, B C, *ſitque* A B, 6. *palmorum, &* B C, 10. *Quoniam igitur quadrata rectarũ* A B, A C, *æqualia ſunt quadrato rectæ* B C; *ſi quadratum rectæ* A B, *quod continet palmos* 36. *detrahatur ex quadrato rectæ* B C, *quod eſt palmorum* 100, *remanebit quadratum rectæ* A C, 64. *palmorum. Latus ergo* A C, *continebit* 8. *palmos. Tanta enim eſt radix quadrata, ſeu latus* 64. *palmorum. Quod*



47. primi

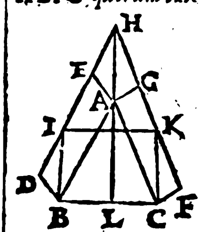
47. primi.

est propositum. Cæterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnes numeri habent latus, radicemve quadratam, vt notum est apud Arithmeticos; Vnde latus inuentum sæpe numero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his alias.

THEOREMATE *vero hoc Pythagoreo multo vniuersalius est illud, quod a Pappo demonstratur in omni triangulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunq; parallelogrammis super latera trianguli constructis, tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius.*

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrāmo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelū rectæ ductæ ab angulo, quē duo illa latera cōprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorū lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli dicti producantur.

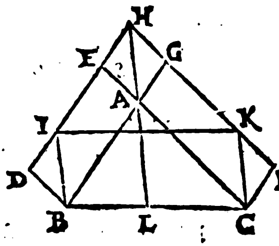
SIT *triangulum quodcunque* ABC, *constituanturq; super latera* AB, AC, *parallelogramma quæcunque* ABDE, ACFG, *quorum latera* DE, FG, *quæ lateribus* AB, AC, *assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli* A, *dictis lateribus* AB, AC, *cōprehensi, conueniant in* H, *ducaturq; recta* AH. *Dico parallelogrāma* AD, AF, *æqualia esse parallelogrāmo super latus* BC *descripto, cuius alterū latus æquale sit, & parallelū rectæ* AH. *Producta enim* HA, *secet* BC, *in* L; *& per* B, C, *agantur* BI, CK *parallelæ ipsi* AH; *iungaturq; recta* IK. *Quoniā igitur parallelogramma sunt* BIHA, CKHA, *erit vtraq;* BI, CK, *ipsi* AH, *æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt* BI, CK, *quæ cū sint etiā parallelæ, quod eidem* AH, *parallelæ sint; erunt quoq;* BC, IK *parallelæ, & æquales. Quare parallelogrāmum est* BCKI *sup*



34. primi
30. primi
33. primi

latus BC *habēs alterū latus* BI, *recta* A H, *æquale, & parallelū: Cui quidē æqualia ostendēda sunt parallelogrāma* A D, A F. *Quia æqualia sunt parallelogrāma* AD, ABIH *quod eādē habeant basin* AB, *in eisdemq; sint parallelis* AB, HD; *Est autē* ABIH, *parallelogrāmo* I L, *æquale, quod illud cum hoc etiā eandē habeat basin* B I, *in eisdemq; sit parallelis* BI, *LH*: *Erit quoque* A D, *eidem* I L, *æquale. Non aliter ostendemus,* AF, *ipsi* K L, *esse æquale. Quare parallelogramma* AD, AF, *parallelogramo* BK, *æqualia sunt. Quod est propositum.* 35. primi 35. primi

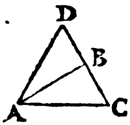
PAPPVS *cōstruit figurā aliter. Nam sumit rectas* AC, AE; *et* AB, AG, *in directū positas, ita vt parallelogrāma* AD, AF, *sint æquiangula, habētia angulos* AED, AGF, *angulo* BAC, *īternos externo, æquales ceu hæc eius figura īdicat. Sed nos vniuersalius rē pposuim⁹, vt manifestū est.*



THEOR. 34. PROPOS. 48. 47.

SI quadratū, quod ab uno laterū trianguli describitur, æquale sit eis, quæ a reliqs trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum A B C, sitq; quadratū latetis AC, æquale quadratis reliquorū laterū BA, BC: Dico angulū ABC, esse rectū. Ducatr namq; B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C, connectaturq; recta A D. Quoniā igitur in triāgulo ABD, angulus A B D, rectus est, erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarū BA, BD: Est autē quadratū rectæ B D, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearū æqualitatem: 47. primi



tatẽ: Quare quadratũ rectę A D quadratis rectarũ B A, B C, æquale erit. Cũ ergo quadratũ rectę A C, eisdẽ quadratis rectarũ B A, B C, ęquale ponatᷣ, erũt quadrata rectaru A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectę ipsę A D, A C, æquales. Quoniã igitur latera B A, B D, triãguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A B C; & basis A D, ostensa est
8. primi æqualis basi A C; erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus: Quare & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS
ELEMENTVM II.

DEFINITIONES.

I.

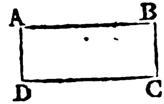
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulũ.

AGIT Euclides in secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partiũ cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectãgula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis cõtineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum; Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti; Cuius quidem duo tantum sunt genera, Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo

lelogrammo ABCD, angulus A, rectus: Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint

29. primi



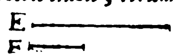
A D, BC, erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur et B, rectus erit. Quoniam vero quilibet suo opposito

34. primi

est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ vnū eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D; vel sub A D, DC; vel sub DC, CB, vel deniq; sub AB, BC; quoniam qualibet huiusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt A B, vel D C, eius longitudinem; altera vero, ut A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam A D, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogramum rectangulum.

ITAQVE parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum re-

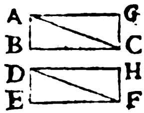


ctangulum sub rectis F, & F, contentū, erit idem, quod parallelogrāmū ABCD; quoniam latus A B, æquale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.

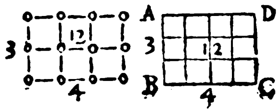
PERSPICVVM est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum; Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis sit

sit lineæ oppositæ, erũt oĩa quatuor parallelogrãmi rectãguli latera æqualia: Quare ex definitione quadrati quadratum erit. 34. primi

Item manifestũ est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque vtrique, rectangulũ parallelogrãmum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posteriobus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiã ratione demonstrari potest. Sint rectæ AB BC, æquales rectis DE, EF. vtraq; vtriq;; Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentũ sub AB, BC æquale esse parallelogrammo rectãgulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF. cũ latera AB, BC, trianguli ABC. æqualia sint lateribus DE. EF, triãguli DEF; & anguli B & E, æquales, nempe recti, erunt triangula ABC, DEF, æqualia; Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF: Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt. 4. primi

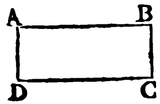


Habet autem cõprehensio hæc parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectũ continentibus, magnam affinitatẽ cum multiplicatione vnius numeri in alterũ. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formã parallelogrãmi cõstituitur, vnde et contineri dicitur sub 3. & 4: Ita quoq; parallelogrãmũ rectangulũ ABCD, cõprehẽsum sub duabus rectis AB, BC quarũ illa sit 3. palmorũ, hæc autẽ 4 cõstat 12. palmis quadratis, q quidẽ ex ductu lineæ AB. 3. palmorũ in lineã BC, 4. palmorũ pducuntur vt figura indicat notumq; est Arithmeticis, atq; Geometris. Demõstratur autẽ a Ioan. Regiomont. lib. 1, de triãgulis propos. 16. Hinc fit, vt nõnulli dicãt, parallelogrãmũ rectãgulũ gigni ex ductu duarũ linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ AB, in lineã BC, vel (quod idem est) ex ductu lineæ BC, in lineam AB. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur



producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4, quam ex 4. in 3 producitur hic numerus 12.

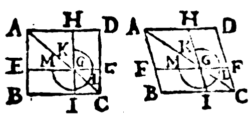
OBITER *quoque monendus mihi lector uidetur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eædem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur; Vt superius parallelogrammum appellant* A C, *vel* B D.



II.

IN omni parallelogrammo spatio, unũquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon uocetur.

In Parallelogrammo A B C D, *siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter* A C, *ex cuius puncto quolibet* G, *ducantur rectæ* E F, H I, *parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo* E H, I F, *dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo* B G, G D, *complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, ut ex* I F, *vna cum duobus complementis* B G G D, *qualis est figura* E B C D H G E, *quam complectitur circunferentia* K L M, *dicitur Gnomon. Eadem ratione figura* F D A B I G F, *composita ex parallelogrammo* E H, *circa diametrum, & duobus*

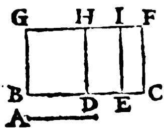


bus complementis B G, G D, *Gnomon appellabitur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

Sint duæ rectæ A, & B C. quarum B C, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C: Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.



Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A; Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duæ perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturq; recta F G. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, uel C F. Itaque D H, E I, cum parallelæ sint ipsi B G, inter se quoque parallelæ erũt: Rursus eædem, cum ex cõstructione parallelogramma sint B H, B I, æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B D; Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E; Item rectangulum E F sub A, & segmento E C. Quare cum rectangula B H, D I, E F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, et segmentis B D, D E, E C, compre-

33. primi

34 primi

comprehẽduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

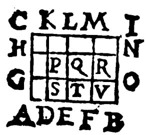
SCHOLION.

QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, ut lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus uerbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq;, vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur, id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Cõmandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum cõprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis unius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, *rectum angulum* A. *continentes, quæ secentur in partes* AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. *Dico rectangulum sub rectis* AB, AC, *cõprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub* AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB GH; FB, HC, *continentur. Cõpleatur rectangulũ* AI, *ducanturq;* DK, EL, FM *parallelæ ipsi* AC, *vel* BI: *Item* HN, GO, *parallelæ ipsi* A B, *vel* CI; *quæ secent priores in* P, Q, R, S, T, V. *Quoniã igitur rectangulum* AS, *cõtinetur sub* AD, AG; *&* GP *sub* AD, GH; *&* HK, *sub*

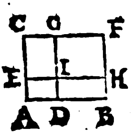


34. primi AD, HC; (*quod rectæ* GS, HP, *ipsi* AD, *sint æquales:*) *Item*

Item rectangula DT, SQ, PI, continentur sub DE, AG; DE, GH; DE, HC; *(quod DS, SP, PK, ipsis* AG, GH, HC, *aequales sint, & ST, PQ, ipsi* DE) *Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur sub* EF, AG; EF, GH, EF, HC; *Nec non rectangula FO, VN, RI, sub* FB, AG; FB, GH; FB, HC; *perspicuum est, rectangulum sub* AB, AC, *aequale esse rectangulis sub singulis partibus* AD, DE, EF, FB, *& quolibet segmentorum* AG, GH, HC, *comprehensis. Quod est propositum.* 34. primi

SI sint duę rectę lineę, secenturque ambae utcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo sub una parte unius, & una parte alterius comprehenso, aequale est eis, quae sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, una cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT *duae rectae* AB, AC, *angulum continentes rectum* A, *quae secentur utcunque in* D, & E; *Dico rectangulum comprehensum sub* AB, AC, *una cum rectangulo comprehenso sub partibus* AD, EC, *aequale esse rectangulis contentis sub* AB, EC; AC, AD; *una cum rectangulo sub* DB, AE, *comprehenso. Compleatur rectangulum* AF, *agaturque per* D, *recta* DG, *ipsi* AC, *vel* BF, *parallela; nec non & per* E, *recta* EH, *secans* DG, *in* I, *parallela ipsi* AB, *vel* CF. *Quoniam igitur rectangulum* AF, *aequale est rectangulis* EF, DH, AI; *si addatur commune* EG, *erunt rectangula* AF, EG, *nempe sub totis* AB, AC, & *partibus* AD, EC, *comprehensa, aequalia rectangulis* EF, AG, DH, *sub* AB, EC; AC, AD; DB, AE, *comprehensis aequalia. Quod est propositum.*



IN *numeris etiam haec eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus hisce numeris* 10. & 8. *quorum prior in tres partes*

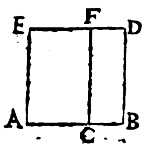
partes. 2. 3. 5. posterior vero in duas. 3. 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; simul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, si iidem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoq; est 80. numerum productũ ex 10 in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea secta sit utcunque, Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

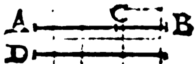
RECTA linea A B, diuidatur utcunque in C, duas in partes; Dico duo rectangula comprehensa sub tota A B, & segmentis A C, C B. simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ A B. Describatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F parallela rectæ A E, vel B D, quæ



34. primi æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B. Quoniam igitur recta A E, æqualis est rectæ A B, ex definitione quadrati, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C; similiter erit rectangulum C D, comprehensum sub A B. & segmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est rectangula comprehensa sub A B, & segmentis A C, C B, æqualia esse quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea secta sit utcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B, Quoniam

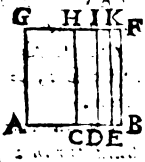
Quoniam igitur A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub infecta D, & recta A B, nempe quadratum rectæ A B, æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, infecta; hoc est; sub A B, &, singulis segmentis A C, C B, quod est propositum.

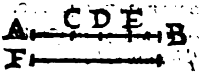


1. secundi.

SCHOLION.

QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunq; idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.

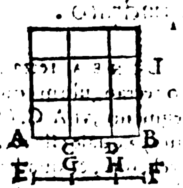


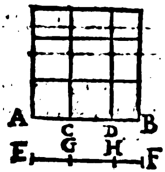


SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta secetur in quotcumq; segmenta: quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta A B. diuisa in partes quotcunq; A C, C D, D B. Dico quadratũ ex A B, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus A C, C D, D B, & quolibet segmentorũ A C, C D, D B, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D,





DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehensis. Sumpta enim recta EF, quae aequalis sit ipsi AB, diuisaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, aequales; Erit ex iis, quae ad propos. 1 huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB aequale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB partibus EG, GH, HF, sint aequales; Erit quoque quadratum ex AB, aequale rectangulis sub AC, AC; AC CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod est propositum.

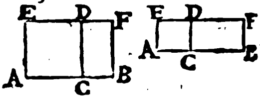
IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius aequalis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

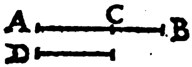
SI recta linea secta sit vtcunq; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum aequale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a praedicto segmento describitur, quadrato.

LINEA recta AB, diuisa sit vtcunq; in puncto C: Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtrouis segmento, vt AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) aequale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratũ dicti segmenti AC, quod sit AD, & ex

& ex B, educatur B F, parallela ipsi A E, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectę A C, æqualis est ex quadrati definitione, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C. Rursus, quia recta C D, eadem ratione æqualis est rectæ A C, erit rectangulum C F, comprehensum sub segmētis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F, æquale sit quadrato A D, & rectangulo C F; liquido constat, rectangulum sub A B, tota, & segmento A C, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis A C, C B, & quadrato prædicti segmenti A C. Itaq; si recta linea secta sit vtcunq;, &c. Quod erat ostendendum.



Aliter. Accipiatur recta D, æqualis segmento A C. Quoniam recta A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & A B; hoc est, sub A B, & A C, æquale rectangulo sub D, & C B, *1. secundi.* hoc est, sub A C, C B, & rectangulo sub D, & A C, hoc est, quadrato segmenti A C; quod est propositum.



SCHOLION.

Vt hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico *numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.*

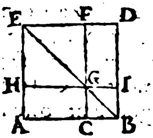
THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI recta linea secta sit vtcunq;; Quadratum, quod a tota describitur, æquale est

 & illis,

& illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA A B, diuisa sit vtcumq; in C. Dico quadratum totius rectæ A B, æquale esse quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis A C, CB. Describatur super A B, quadratum A D, ducaturq; diameter B E. Deinde ex C, agatur, C F, parallela rectæ B D, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ A B; Eritq; quadratum A D, diuisum in quatuor parallelogramma.



Quoniam igitur trianguli A B E, duo latera
5. primi. tera A B, A E, æqualia sunt; erunt duo anguli A B E, A E B,
32. primi. æquales: Atqui tres anguli A B E, A E B, B A E, trianguli A B E, duobus rectis sunt æquales; & B A E, rectus est: reliqui ergo anguli A B E, A E B, semirecti erunt. Eadē ratione ostendes, angulos D B E, D E B, semirectos esse. Quod etiam constat ex iis, quæ ad 4. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter B E, diuidit angulos rectos A B D,
32. primi. A E D, bifariam. Quia ergo anguli tres trianguli E F G, æquales sunt duobus rectis; & angulus E F G, rectus est, cum sit
29. primi æqualis recto D, externus interno; nec nō F E G, semirectus; erit & reliquus E G F, semirectus, ideoq; æqualis angulo F E G.
6 primi. Quare æqualia erunt latera E F, & F G; quæ cum sint æqua
34. primi. lia oppositis lateribus G H, H E, erit parallelogrammū F H, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti. Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata sunt segmentorum A C, C B, quod
34. primi. H G, recta æqualis sit rectæ A C; & rectāgula A G, D G, comprehensa erunt sub segmētis A C, C B, propterea quod C G, G I, æquales sint rectæ C B; & F G, æqualis rectæ G H, hoc est rectæ A C. Quocirca cum quadratum A D, æquale sit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; constat quadratū A D, totius lineæ A B, æquale esse quadratis segmentorum A C C B, & rectāgulo cōprehēso sub eisdē segmētis A C, C B, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcūq;, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

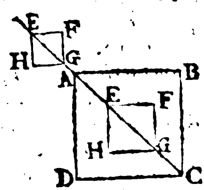
A L I-

ALITER. Quoniam recta A B, diuisa est in C, erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quæ sub tota A B, & segmentis A C, C B, comprehēduntur: Rectangulum autem sub A B, & A C, comprehensum, æquale est rectangulo comprehenso sub A C, C B, & quadrato segmenti A C; Item rectangulum sub A B, C B, comprehensum, æquale est rectangulo sub C B, A C, comprehenso, & quadrato segmēti C B. Igitur quadratum rectæ A B, æquale est quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulis sub A C, C B, & sub C B, A C. quod *est propositum*. 2. *secundi.* 3. *secundi.*

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

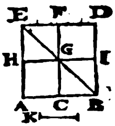
CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demōstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrū B E, esse quadrata, In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H; Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilo minus verum est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, consistat parallelogrammum F H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamē habeat latera lateribus quadrati B D, parallela; Dico F H, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint A B, E F, erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus & externus; atq; eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erūt: Sunt autem anguli B A C, B C A, semirecti, vt ostensum iam fuit; Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt, proptereaq; latera E F, F G, illis opposita, æqualia, & angulus F, rectus. Quare cū E F, F G, latera æqualia sint oppositis lateribus G H, H E; erit F H, quadratum. Quod est propositum. 29. *primi.* 32. *primi* 6. *primi* 34. *primi*



SCHOLION.

In numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus vtcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

Perfacile autem ex hoc theoremate demonstrabimus; Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum esse quadrati ex hac descripti. Sit enim linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa A B, bifariam in C, si fiat constructio, vt in theoremate 3 erunt quatuor parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. omnesq; anguli recti. Quare cum quadratum A D, æquale sit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi A C. Est .n. vtraq; dimidia lineæ A B.



Brevius. Ex hac propositione, quadratum rectæ A B, æquale est quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo sub rectis lineis A C, C B, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium A C, C B, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus A C, C B, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ A C; Constat quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ A C. cum æquale sit quatuor quadratis æqualibus quadrato rectæ A C.

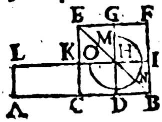
E contrario ostendemus; Si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum esse lateris huius. Sit enim quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum esse lateris K. Nam diuisa recta A B, bifariam in C, vt A B, dupla sit ipsius A C; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C; Erat autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia sunt quadrata rectarum K, & A C, & ipsæ rectæ K, & A C, æquales. Est autem A B, ex constructione, ipsius A C, dupla: Dupla igitur etiam erit ipsius K. Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectãgulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cũ quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

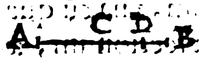
DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia recta sit C D, qua dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit: Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela I K; Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium præcedentis propos. D I, K G, quadrata, idcoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaq; est rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo complementa C H. F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale; Est autem & A K, eidem C I, æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint: Igitur D F, A K, æqualia inter se erunt; quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F, erit & rectangulum



34. primi. *43. primi.* *36. primi.*

A H, vna cum quadrato A G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.



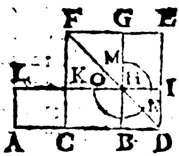
ALITER hoc theorema ex Francisco Maurolyco demonstrabimus, hoc modo. Quia quadratum ex C B æquale est quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis sub C D, D B: Et rectangulo sub C D, D B vna cum quadrato ex D B, 4. secundi.
æquale est rectangulum sub C B, B D; Erit quadratum ex C B, 3. secundi.
æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo sub C D, D B, & rectangulo sub C B, B D, vel sub A C, B D. Atqui rectangulis sub A C, B D, & sub C D, D B, æquale est rectangulum sub tota A D, D B. Igitur quadratum ex C B, 1. secundi.
æquale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo sub A D, D B; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C D æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.

IDEM in numeris est manifestum: Diuidatur enim numerus 10 æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Videtis igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI Recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tū ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectũ addatur B D: Dico rectangulum comprehensum sub tota cõposita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namq; C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D; Item ex A, ducatur rectæ C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 4. propos. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectæ D B, æqualis; Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehendetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaq; est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, æquale est parallelogrãmo C H, quod bases A C, C B, æquales sint; Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaq; si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædã linea in rectũ adijciatur, &c. Quod erat demonstrandũ.



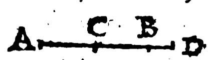
34. primi.

36. primi.

43. primi.

SCHOLION.

ALITER idem ostendemus ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex C D, æquale est quadratis ex C B, B D, vna cum rectangulo bis sub C B, B D; hoc est, vna cum rectangulis sub C B, B D, & sub A C, B D. Est autem rectangulis sub A C, D B; C B, D B; & sub D B, D B, hoc est, quadrato ex D B, æquale rectangulum sub A D, D B. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B vna cũ rectan-



4. secundi.

1. secundi.

rectangulo sub A D, D B: Hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

SECETVR *iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero composito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.*

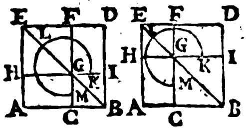
Ex hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, superet C D, magnitudine A C, hoc est, C B; & C D, superet B D, eadem magnitudine C B: habebunt lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7. SI recta linea secetur vtcunq; Quod a tota, quodq; ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

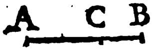
RECTA

RECTA AB, secetur vtcunq; in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cũ quadrato reliqui segmẽti CB. Describatur. n. super AB, quadratũ AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secãs diametrũ in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollariũ 4. propos. huius lib. CI, HF, quadrata, & quia recta GH, æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, ęqualis est ipsi AB, erit rectangulũ AF, cõprehensum sub tota AB, & segmẽto AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehensum erit sub eisdẽ rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, ęquale est quadratũ AD; si apponatur cõmune quadratũ HF, erũt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quę comprehenduntur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod erat demonstrandum. 34. primi.



SCHOLION.

ALITER ex Francisco Maurolyco idem demonstrabimus. Quia quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; si addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadratis ex AC, CB, AC, vna cum rectangulo bis sub AC, CB. Sed rectangulo sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, æquale est rectangulum sub AB, AC; Et proinde rectangulo bis sub AC CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat. 4. secundi. 3. secundi.



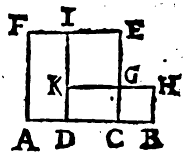
IN

In numeris autem, diuidatur numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cũ 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

Si recta linea in partes inæquales secetur: earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, quà maior pars superat minorem.

Secetur recta A B, in partes inæquales A C, C B, sitq; maior pars A C; ponatur autem minori parti C B, æqualis linea AD; vt D C, sit excessus, quo pars A C, superat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub A C, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur quadrata AE, CH; & agatur D I, ipsi C E, parallela, producaturq; H G, ad K. Itaq; quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc est C E, toti DB, æqualis; Est autẽ & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit CH: Igitur & reliqua GE, reliquæ DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E,



34. primi. ipsi DC, sit æqualis; erunt GE, IE, æquales: ideoq; IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est.n. AC, vtriq; lineæ AF, DB; & CB, vtriq; AD, BH, æqualis:) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus A C, C B, vna cum quadrato I G, excessus D C. Quod est propositum.

SCHOLION.

In numeris. Secetur numerus 10. inequaliter in 4. & 6. ita

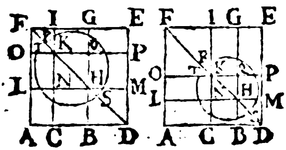
ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui fit ex 4. in 6. bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI recta linea secetur vtcunq; Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorũ, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuisa vtcunq;. Dico rectangulum quater comprehensum sub A B, & segmento siue maiore, siue minore C B, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto segmento C B, componitur. Producatur A B, versus dictum segmentum C B, ad D, sitq; B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E; Ducta autem diametro



D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipsi D E, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium propos. 4. huius lib. O I, N Q, B M, quadrata. Et quia O K, æqualis est rectæ A C, erit O I, quadratum segmenti A C: Rursus quia N H, æqualis est rectæ C B, erit N Q, quadratũ segmenti C B, ideoq; quadrato B M, æquale, cũ rectæ C B, B D, æquales sint. Quare rectæ B H, H Q, æquales sunt segmento C B; Atq; adeo duo rectangula A H, L Q, comprehensa erunt sub A B, & segmento C B, cum L H, sit æqualis rectæ A B. Eadẽ rõne erũt duo rectan-

34. primi.
34. primi.
34. primi.

rectangula NG, HB, comprehensa sub AB, & CB; cũ NH,
34. primi. HM, rectæ æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ LH, hoc est, rectæ AB: Et quia quadratum NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erũt BM, KG simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinq; rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quãobrem, si recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod demonstrãdum erat.

SCHOLION.

Aliter idem ex Francisco Maurolyco demonstrabimus.
4. secundi. *Quia quadratũ ex* AD *æquale est quadratis ex AB, BD, vna cũ rectangulo sub A*B, BD, *bis; hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: Et quadrata ex AB, BC, æqualia sunt rectangulo bis*
7. secundi. *sub* AB, BC, *vna cum quadrato ex* AC; *Erit quadratũ ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.*

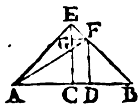
Secetur iam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

9.
THEOR. 9. PROPOS. 9.

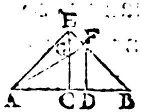
SI recta linea secetur in æqualia, & nõ æqua-

æqualia; Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. *Dico*, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, *dupla* esse quadratorum, quę fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B; Ducanturq; rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoq; ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturq; A F. Quoniam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt; erunt anguli C A E, C E A, æquales. Est autem angulus A C E, rectus; reliqui igitur anguli alium rectum conficient, ideoq; A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, semirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rursus, quia trianguli F G E, angulus E G F, æqualis est recto E C B, externus interno; erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum; igitur & E F G, semirectus erit, propterea que cum anguli F E G, F G E, æquales sint, erunt & latera E G, G F, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, esse æqualia; nam angulus F D B, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo A C E, angulus C, rectus sit, erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E; Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia; quod & lineæ A C, C E, æquales sint; Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus, quia in triangulo E G F, angulus G, rectus est, erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F; At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum E G, G F; Igitur



5. primi.
32. primi.
29. primi.
32. primi.
6. primi.
47. primi.
47. primi.



Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris F G, hoc est, quadrati lineæ C D; Est enim C D, recta rectæ F G, æqualis, cum C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, E F dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum A C, C D.

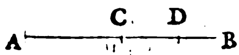
34. primi.

47. primi. Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale

47. primi. duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla sunt duorum quadratorum rectarum A C, C D. Atqui quadratum rectæ D F, æquale est quadrato rectæ D B; ostensum enim est, rectas D F, D B, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoque A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis vna cum quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorũ ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo sub A C, C D, bis, est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.



4. secundi.

ALITER ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum æquale est quadratis descriptis ex A C, C D, vna cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune ponatur quadratum ex D B, erunt quadrata ex A D, D B, æqualia quadratis ex A C, C D, D B, vna cum rectangulo bis sub A C, C D, vel

4. secundi.

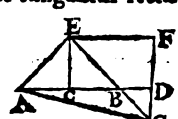
vel sub B C, CD, Atqui quadrato ex D B, *vna cum rectangulo, bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex* B C, *seu* A C, *& ex C D. Quadrata igitur ex* A D, D B, *æqualia sunt bis quadratis ex* A C, C D; *Ac propterea quadrata ex* A D, DB, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D; *Quod ostendendum erat.* 7. secundi.

IAM *vero rursus numerus,* 10. *diuidatur æqualiter in* 5. *&* 5. *Item inæqualiter in* 7. *&* 3. *vt sit intermedia sectio numerus* 2. *ceu in propos.* 5. *est dictum. Quadrati numeri igitur* 49. *&* 9. *partium inæqualium* 7. *&* 3. *dupli sunt quadratorum* 25. *&* 4. *dimidij numeri* 5. *& numeri* 2. *inter duas sectiones, vt manifestum est.*

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectũ quæpiam recta linea: Quod a tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquã ab vna, descriptum sit, quadrati.

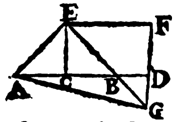
SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D: Dico duo quadrata rectarum A D, BD, dupla esse quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, uel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur DF, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iã, angulum A E B, esse rectum, ut in præcedenti propos. & C E B, semirectum; ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque: Est autem angulus F, rectus, cum in paral- 29. primi 34. primi



M lelogrammo

lelogrammo C F, recto angulo C, opponatur; Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, æqualis. Quare rectæ E F, F G, & angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G esse æquales, propterea quod angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E, erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C.

32. primi
6. primi
47. primi



47. primi

Rursus quia quadratū rectæ E G, quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplū quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, cum C D, recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum: Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale est quadratum rectæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis æqualibus A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

34. primi
47. primi

SCHOLION.

ALITER *ex Federico Commandino. Quoniam* A C, *ipsi* C B, *est æqualis, & superat* C D, *ipsam* C B, *recta* B D; *superabit quoque* C D, *ipsam* A C, *eadem recta* B D. *Quare, vt ad 7. ppos. huius lib. ostēdimus, quadrata ex* A C, C D, *æqualia sunt rectangulo sub* A C, C D, *bis, vna cum quadrato rectæ* B D; *Ac propterea quadrata rectarū* A C, C D, *& rectangulum sub* A C, C D, *bis, vna cum quadrato rectæ* B D, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D; *Atqui quadratis rectarū* A C, C D, *vna cū rectangulo sub* A C, C D, *bis, æquale est quadratum rectæ* A D. *Igitur & quadrata rectarū* A D, B D, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D.

4. secundi

ALITER

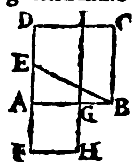
ALITER ex Francisco Maurolyco. Quia quadratũ ex AD, *æquale est quadratis ex* A C, C D, *vna cũ rectangulo bis sub* A C, C D, *vel sub* B C, C D; *si commune addatur quadratũ ex* B D, *erunt quadrata ex* AD, BD, *æqualia quadratis ex* A C, CD, BD, *vna cũ rectangulo bis sub* BC, CD. *Sed quadrato ex* B D, *vna cũ rectangulo bis sub* B C, C D, *æqualia sunt quadrata ex* C D, BC, *hoc est, quadrata ex* A C, CD. *Igitur quadrata ex* A D, B D, *æqualia sunt quadratis ex* A C, C D, *bis; Ac proinde quadrata ex* AD, BD, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D; *Quod erat demonstrandum.* 4. secundi 7. secundi

NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quiuis 3. vt totus numerus cõpositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorũ 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, ut perspicuum est.

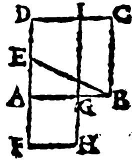
PROBL. I. PROPOS. II. 11.

DATAM rectam lineam secare, ut cõprehensum sub tota, & altero segmentorũ rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta A B, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum cõprehensum sub tota A B, & minori eius segmento, æquale sit quadrato reliqui segmenti maioris. Describatur ex A B, quadratũ A C, & diuiso latere A D, quod cũ linea data A B, angulũ rectũ efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis sumatur E F; & ipsi A F, abscindatur ex recta A B, data æqualis A G. Dico rectam A B, sectã esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub A B, & B G, æquale sit quadrato rectæ A G.



Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrãmum A H, quadratum segmenti A G, cum omnia eius quatuor latera sint 34. primi æqualia; & rectangulum C G, comprehensum sub A B, & segmento B G, quod A B, æqualis sit ipsi BC. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum



A F, erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum F H, sit æqualis ipsi F A;) una cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, æquale quadratis rectarum A E, A B: Quare rectangulum D H, vna cũ quadrato rectæ A E, æquale est quadratis rectarum A E, A B: Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.

6. secundi.

47. primi

SCHOLION.

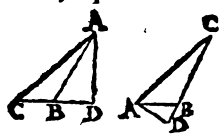
Hoc theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos numeros diuiditur, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, ut demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus.

12. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, una cũ rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta CD, diuisa sit in B, vtcunque, erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarũ CB, BD, & rectangulo cõprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarũ CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: Est aũt quadratis rectarũ CD, DA, æquale quadratũ rectæ AC; Quare & quadratũ rectæ AC, æquale erit trib⁹ quadratis rectarũ CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.



4 secundi.

47. primi

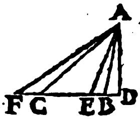
47. primi

SCHOLION.

QVONIAM aßumpsit Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes E, protractũ; Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulũ in latus CB, protractum, cuiusmodi est recta AD. Si enim

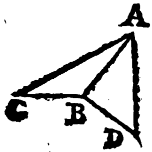
 caderet

caderet intra triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus: Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.



CONVERSVM *quoque huius theorematis ita ostendemus. In triangulo* ABC, *quadratum lateris* AC, *maius sit quadratis laterum* AB, BC; *Dico angulum* B, *quem dictum latus subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex* B, *ad* AB *perpendicularis* BD, *lineae* BC, *aequalis, iungaturq; recta* AD.

47. primi. *Quoniam igitur quadratũ ex* AD, *aequale est quadratis ex* AB, BD, *hoc est ex* AB, BC; *Ponitur autẽ quadratũ ex* AC, *maius quadratis ex* AB, BC: *Erit quadratũ ex* AD, *minus quadrato ex* AC, *& idcirco recta* AD, *minor quã recta* AC. *Itaque quia latera* AB, BC, *triãguli* ABC, *aequalia sunt lateribus* AB, BD, *trianguli* ABD, *vtrumq; vtriq;,*



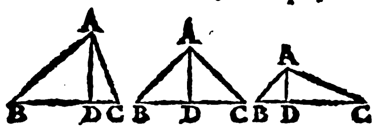
25. primi. *& basis* AC, *maior est base* AD; *Erit angulus* ABC, *maior angulo* ABD: *sed* ABD, *rectus est. Igitur* ABC, *recto maior, & obtusus erit.*

13.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triãgulis, quadratũ a latere angulũ acutũ subtendente minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulũ cõprehendentibus, rectangulo bis comprehẽso, & ab uno laterum, quæ sunt circa acutũ angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratũ lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus esse quadratis laterum A C, CB, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale esse duob⁹ quadratis laterũ AC, CB. Cum enim recta B C, diuisa sit in D, utcunque, erunt quadrata rectarũ BC, C D, æqualia rectangulo cõprehenso bis sub B C, CD, & quadrato rectæ B D. 7. secundi

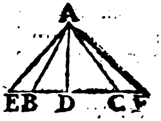


Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectãgulo bis cõprehenso sub B C, CD, & duobus quadratis rectarũ B D, D A: Duobus autem quadratis rectarũ C D, D A, æquale est quadratum rectæ C A; Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cũ ergo duobus quadratis rectarum B D, DA, æquale sit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & quadrato rectæ A B: quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum A B, BC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, & quadrato rectæ AC, hoc est, quadratum lateris AC, minus esse quadratis laterum AB, B C, rectangulo cõprehenso bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat. 47. primi 47. primi

SCHOLION.

QVAMVIS Euclides theorema hoc proponat de triãgulis dũtaxat oxygonijs, quæ scilicet oẽs angulos habẽt acutos; Idẽ tamen verum est in triangulis rectangulis & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangu-

lis rectangulis, & amblygonijs perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso; in oxygonijs vero, a quolibet.

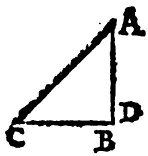


Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint enim in triangulo A B C, duo anguli A B C, ACB, acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior

16. primi A B C, acutus, maior interno & opposito recto A E B, quod est absurdum. Si vero caderet extra in B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiam si perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quae latus AC, vt in rectangulis, vel extra triangulũ cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. praecedentis demõstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis nõ ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulũ rectangulũ ABC, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quae eadẽ erit, quae latus A B, propter angulũ rectũ B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulũ C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & sub linea C D, quae interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cum enim

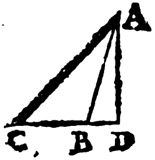


47. primi quadrata ex A B, C B, aequalia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, aequalia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D; Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, aequale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex

A C,

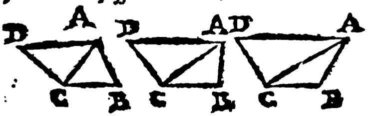
AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD, Quod est propositum.

Rursus sit triangulum obtusangulum ABC, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, & CD. Quoniam quadrata ex AD, CD, æqualia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, cõmuni, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD, æquale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, vna cũ quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, æqualia quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, vna cum rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, vna cum rectangulo sub CB, BD, æquale est rectangulum sub CD, CB; Ac propterea duplo quadrati ex ex CB, vna cum rectangulo bis sub CB, BD, æquale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis sub CB, CD, æquale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum. 47. primi 4. secundi 47. primi 3. secundi

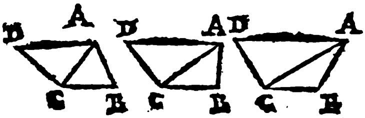


Conversum quoque huius theorematis in quodam antiquo scholio demonstratur in hunc fere modum.

In triangulo quocunque ABC, quadratum lateris AB, minus sit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulũ C, quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, lineæ CB, æqualis, iungaturque recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, æquale est quadratis ex AC, CD, 47. primi
hoc est, ex AC, CB; Ponitur autem quadratum ex AB, mi-
nus-



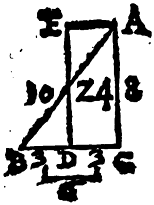
nus quadratis ex A C, C B; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B, & ideo recta A D, maior quam recta A B.



Itaque quia duo latera A C, C D, trianguli A C D, aequalia sunt duobus lateribus A C, C B, trianguli A C B, vtrunque vtrique: & basis A D, maior base A B: Erit angulus A C D, maior angulo A C B: Sed A C B, rectus est, ex constructione: ergo A C B, recto minor, & acutus erit.

25. primi

Ex his autem, quae in proximis duobus theorematibus, & in 1. lib. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus. Sit primo triangulum rectangulũ

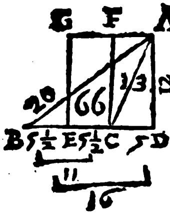


A B C, cuius latera nota sint, nempe A B, 10. palmorum; A C, 8. B C, 6. Diuiso latere B C, bifariam in D, vt sit C D, 3. palmorum, perficiatur rectangulum A C D E, quod aequale est triangulo A B C, vt in scholio propos. 42. lib. 1. ostendimus. Quia vero ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorum producitur area rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum A B C, rectangulo C E, aequale. Quod est propositum.

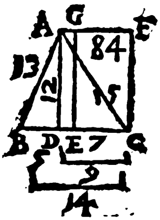
Sit secundo triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorum; A C, 13. B C, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineae A D, hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B, maius

12. secundi est, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D; si quadrata laterum A C, B C, nempe 169. 121. quae efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat

strat propos. 17. lib. 1. de triangulis. Quia vero quadrata laterum AD, CD, æqualia sunt quadrato lateris AC; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris CD, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris AC, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare latus AD, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Itaque diuiso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BD, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AG, quæ per A, ipsi BD, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si EC, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in CF, 12. palmorum. (Est enim CF, ipsi AD, æqualis,) exurget area rectanguli CG, 66. palmorum, quod cum æquale sit triangulo ABC, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum CG, & triangulum ABC, in eisdem parallelis) Erit quoque area trianguli ABC, palmorum quadratorum 66. quod est propositum. 47. primi 34. primi

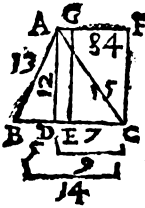


SIT postremo triangulum acutangulum ABC, latera habens nota; AB, 13. palmorum; AC, 15. BC, 14. Primũ igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis AD, hac ratione: Quoniam quadratum lateris AB, minus est, quam quadrata laterum AC, BC, rectangulo comprehenso bis sub BC, CD; 13. secundi si quadratum lateris AB, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum AC, BC, hoc est, ex 225. 169. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo cõprehenso bis sub BC, CD, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub BC, CD. Si igitur 126. rectangulum sub BC, CD, diuidatur per BC, latus notum, ut per 14; exibit reliquum eius latus CD, palmorum 9. ut constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. Quoniam autẽ quadrata ex AD, CD, æqualia sunt quadrato ex AC; si quadratum 81. palmorum, nempe lateris CD, 47. primi



9. pal-

9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12; erit latus A D, 12. palmorum. Itaque diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipsi B C. parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si C F, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; (est enim E G, recta ipsi A D, æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84. Quod cum triangulo A B C, *sit æquale, ex scholio propos. 41 lib. 1 (sunt enim rectangulum E F, & triangulum* ABC, *in eisdem parallelis) erit quoque area trianguli* A B C, *84. palmorum. Quod est propositum.*

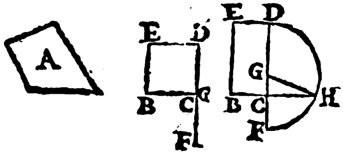


ITAQVE in uniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, ceu in exemplis datis est manifestum.

14.
PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo, æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. Constituaur parallelogrammum BCDE,
45. *primi* æquale rectilineo A habens angulum rectum, cuius vnum latus, ut D C, producatur ad F, sitque C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidaturque D F, bifariã in puncto G quod cadet aut in punctũ C, aut nõ. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangu
34. *primi* lum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, æqualia sint

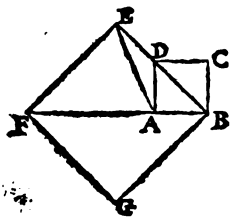


sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si uero punctum G, nō cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, uel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducatur enim recta G H. Itaq; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectāgulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus; Quod facere oportebat. 5. secundi 47. primi

SCHOLION.

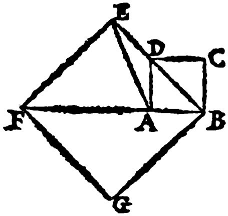
QVONIAM in secundo hoc libro Euclides de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inseri hic poterit sequens problema de quadrato nō iniucundum, ad hunc modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.



EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B. inueniendumque sit latus illius quadrati. Ex recta A B, *describatur quadratum* A C, *cuius diameter ducta* B D, *producatur ad E, vt sit D E, rectæ rectæ* A D, *æqualis. Dico rectam B F, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus B E, excessu dato AB.*

Ducatur

Ducatur enim EF, perpendicularis ad B E, quæ rectam B A, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus F E B, rectus est, & EBF, semirectus; erit & B F E,
32. primi

semirectus. Quare recta B E, F E, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi BE; & ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G; constitutum erit quadratũ rectæ BE. Quod si ducatur recta A E, erunt anguli A E D, E A D, æqualibus lineis D E, D A, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebunt anguli A E F, E A F, æquales, ideoque recta E F, A F, æquales erunt. Quoniam vero diameter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadẽ diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B; quod est propositum.

6. primi
5. primi
6. primi

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

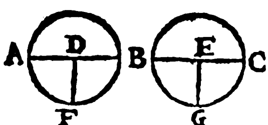
EVCLIDIS ELEMENTVM III.

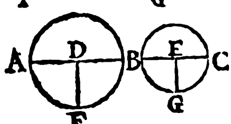
DEFINITIONES.

I.

AEQVALES circuli sunt, quorũ diametri sunt æquales; uel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

QVONIAM Euclides in hoc 3. lib. uarias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens futurus est usus in hoc lib. Primo itaque docet eos circulos esse æquales, quorum diametri, uel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterũ extremũ fixum, & immobile, ceu in 1. lib. diximus, perspicuũ est. eos circulos esse æquales, quorũ semidiametri, seu rectæ ex cẽtris ductæ, sũt æquales; uel etiã quorũ totæ diametri æquales sunt. Vt si diametri AB, BC, uel rectæ DF, EG, e centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam si circuli sint æquales, erunt diametri, uel rectæ e centris ductæ, æquales. Ex his liquet





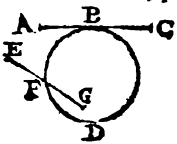
circulos, quorum diametri, uel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales,

quales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem, &c.

II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

Vt recta AB, quia ita circulum BFD, tangit in B, vt

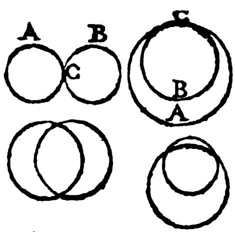


producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicitur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatque intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

Eodem modo duo circuli AC, BC, se mutuo dicuntur tangere in C, quia ita se se contingunt in C, vt neuter alterum



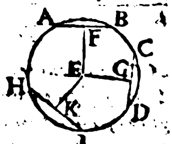
secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

IIII.

IIII.

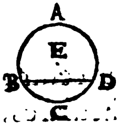
IN circulo, æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti à linea accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, à recta B C, dicitur esse perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis est; quia A D, omnibus est breuior, quod angulus A E D, vel A F D, minor sit angulo recto A D E. 19.primi. *Immo non solum A E, A F, maiores sunt quam A D, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim A F, maior, quam A E, cum angulus A E F, sit obtusus, Et A F E, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus.* 19.primi. *Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abesse dicetur à centro E, quam linea H I, si perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.*



V.

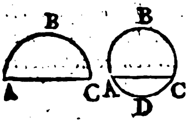
SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



Vt si ducatur in circulo A B C D, *recta* B D, *vtcunq;, dicetur tam figura* A B D, *contenta circunferentia* B A D, *& recta* B D; *quam* B C D, *comprehensa recta* B D, *& circunferentia* B C D, *circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta* B D, *per centrum* E, *incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta* B D, *non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum* B A D; *Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmẽtum* B C D. *Vocatur a plerisq; Geometris recta* BD, *chorda, & circunferentia* B A D, *vel* B C D, *arcus.*

VI.

SEGMENTI autẽ angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



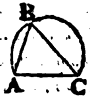
Definit iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur; Primo angulum segmenti, dicens, angulum mixtũ B A C, *vel* B C A, *contentum sub recta linea* A C, *& circunferentia* A B C, *appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si verò segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si deniq; segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.*

VII.

IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit

quod-

quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

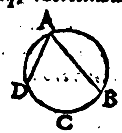


Sit segmentum circuli quodcunque ABC, cuius basis recta AC: Ex suscepto quolibet puncto B, in circunferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur existere in segmento ABC.

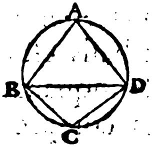
VIII.

CVM vero comprehendentes angulũ rectæ lineæ aliquam assumũt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

Ex puncto A, quolibet suscepto in circunferentia circuli ABCD, ducantur rectæ duæ lineæ AB, AD, ad duo extrema B, & D, circunferentiæ BCD, cuiusque, quam quidem duæ rectæ AB, AD, assumunt. Angulus itaque rectilineus BAD, insistere dicitur circunferentiæ BCD.

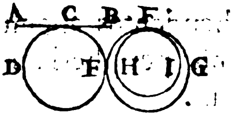


Perspicuum autem est, hunc angulum a precedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus BAD, iuxta precedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento BAD, si recta BD, basis duceretur; ex hac vero insistere circunferentiæ BCD. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circunferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circunferentiæ, circunferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur



segmentum aliquod circuli BCD, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circunferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit B C D; at eius circunferentiæ C B D, insistens, erit B A D, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circunferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum conuenire potest circunferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem, in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoq; facile constat ex verbo græco βεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus D A B, supra circunferentiam C B D.

PRAETER *tres dictos angulos cōsideratur etiam a Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circunferentia circuli; vel certe duabus circunferentijs se mutuo tāgentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius.*



Exemplum. Si recta A B, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus A C D, vel C B E, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus C E D, tangat circulum EFG, exterius in E: Item circulus H F I, circulum E F G, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus C E F, quā EFH, vel G F I, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaq;, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.

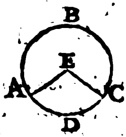
IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & a peri-

pheria

pheria ab illis assumpta.

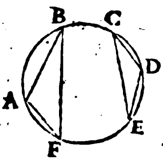
SI in circulo A B C D, cuius centrum E, rectæ A E, C E, constituant angulum A E C, ad centrum E; nominabitur figura A E C D, contenta rectis A E, E C, & circunferentia A D C, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circunferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circunferentiam A D C, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis A E, C E, assumptæ: Ita quoq; in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circunferentiam constituti; quandoquidem in vtraq; definitione vsus est eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.



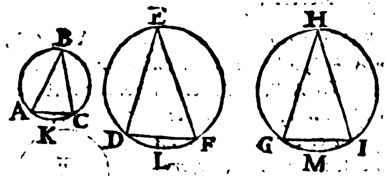
X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

SEGMENTA, seu circunferentiæ A B D F, D C A F, quæ capiunt hos duos angulos A B F, D C E, æquales: vel, quod idem est, in quibus iidem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.



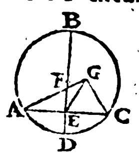
EODEM modo segmenta diuersorũ circulorum tam æqualium, quam inæqualium a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si anguli A B C, D E F, G H I, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circunferentiæ A B C, D E F, G H I, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc



segmentorũ, circunferentiarũue similitudo in eo, quod qualis pars est vna circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque sit altera circunferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circunferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars est circunferentia A B C, totius circunferentiæ A B C A, talis & tanta quoque pars sit circunferentia D E F, totius circunferentiæ D E F D; Item talis, & tanta circunferentia G H I, totius circunferentiæ G H I G. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circunferentiæ similes, ad totas circunferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circunferentiasue, appellari similes.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta B D, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam B D, centrum, a quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & basis A G, basi C G; (a centro

centro enim ducuntur) erunt anguli A E G, C E G, ęquales, ideoq; recti: Erat autem & angulus A E F, rectus ex constructione; Igitur recti A E F, A E G, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum. 8. primi.

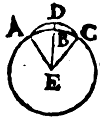
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

THEOR. 1. PROPOS. 2. 2.

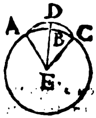
SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

IN circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circunferentia: Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea A D C, recta. Inuento igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, seceтq; E D, circunferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, ęqualia sunt, (e centro enim ducuntur) erunt anguli E A D, E C D; æquales: Est autem angulus E D A, angulo E C D, maior, externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur 1. tertij. 5. primi. 16. primi.



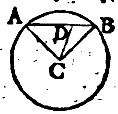
 & an-

& angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo opposita, hoc est, recta
19. primi. E B, sibi equalis, maior erit, quam recta E D, pars quam totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C non posse cadere super arcum A BC, ita vt eadem sit, quę circunferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum A B C, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaq; si in circuli peripheria duo quęlibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLION.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circunferentia circuli A B, cuius centrū C Dico rectā AB, intra circulū cadere, ita vt omnia eius pūcta media intra circulū existāt. Assumatur n. quodcunq; eius punctū intermediū D, & ex centro educātur recta CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera C A, C B, trianguli C A B, equa-



5.primi. *lia sunt, erunt anguli C A B, C B A, æquales: Est autem an-*
16.primi. *gulus C D A, angulo C B A, maior, externus interno; Igitur idem angulus C D A, angulo C A D, maior erit, & ob*
19.primi. *id latus C A, latere C D, maius erit. Quare cum C A, sit ducta a centro ad circunferentiam vsque, non perueniet recta C D, ad circunferentiam, ideoq; punctum D, intra circulum cadet: Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulū cadit; quod est propositū.*

COROLLARIVM.

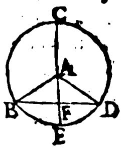
HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tāgit, ita vt eum non secet, in vno tātum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum; Quare circulum secaret, quod est cōtra hypothesin.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 3. 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoq; eam secabit.

PER A, centrum circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus lateribus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales; Igitur anguli AFB, AFD, æquales erũt, hoc est recti. Quod erat primo propositũ. 8. primi.



SIT iam AF, ad angulos rectos ipsi BD; dico rectam BD bifariam secari in F a recta CE. Ductis n. iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam 5. primi. igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF, & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoq; erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo propo- 26. primi. nebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrũ extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars; quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectę AB, æquale quadratis rectarum AF, FB, quam 47. primi. quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratũ rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectę AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atq; idcirco rectæ FB, FD, æquales erunt.

THEOR.

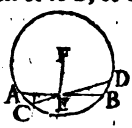
4. ## THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent non per centrum extensæ; sese mutuo bifariam non secabunt.

DVAE rectæ A B, C D, se mutuo in E, secent in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum aliquando bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. Inuento

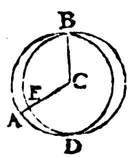
1. tertij, igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur secare rectam A B, bifariam in E, secabit

3. tertij. ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectę lineæ sese mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.



5. ## THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli sese mutuo secent; non erit illorum idem centrum.

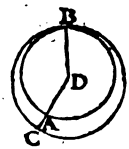


CIRCVLI A B D, E B D, se mutuo secent in B, & D. Dico ipsos non habere idē centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque C, a quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad sectionem B; C A, vero secans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli

culi E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6. 6.

SI duo circuli sese mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



DVO circuli A B, B C, se interius tangant in B; Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, a quo duæ rectę ducantur; DB, quidem ad tactum B; At D C, secans vtramq; circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, ęqualis. Quare rectæ A D, & C D, inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

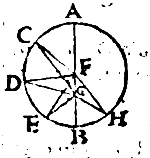
SCHOLION.

EVCLIDES *proposuit theorema hoc de circulis sese interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius sese tangentium, cum vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.*

THEOR. 6. PROPOS. 7. 7

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrũ ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodẽ puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

In diametro A B, circuli A G D, E B, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ F C, F D, F E; Dico omnium, quę ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam esse G A, in qua est centrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit; Deinde rectam G C, quæ centro propinquior est, maiorem recta G D, quę a centro plus distat, & eadem ratione G D, maiorem recta G B; Denique ex G, ad vtrasq; partes minimæ lineæ G B, duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur e centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ F C, F D, F E. Quoniã igitur duo latera G F, F C, trianguli G F C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectę G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc est,



20. primi. rectæ G A; erit & G A, maior quam G C; Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

20. primi. Deinde, quoniam in triangulo E F G, latus E F, minus est duobus lateribus F G, G E; Est autem F E, ipsi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E. Dempta ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quam G E; Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt.

Rvrsvs, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia sunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior est angulo G F D; erit ba-

24 primi. sis G C, maior base G D; Eadem ratione maior erit G C, quam G E; Item maior erit G D, quam G E. Quare linea

propin-

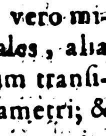
propinquior centro maior est ea, quæ remotior.

FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H, ita vt G E, G H, æqualiter distent a centro. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia sunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ G B, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit centro propinquior, maior quam G H; si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior a centro, minor quam G H, vt ostensum fuit. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ G B, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum. 4 primi.

SCHOLION.

HANC *propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.*

SI intra circulum pũctum sumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquiores, æquales autẽ ab eo æqualiter distabũt.



IN *circulo A B C, punctum sumatur D, a quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B; cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit D A, minima vero D C; ipsarum vero D E, D F, maior sit D E, denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est,*

DC,

DC, ipsi DA, esse in directum. Item DE, propinquiorem esse centro, quam DF. Denique DE, DB, æqualiter a centro abesse. Primum enim si DA, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, erit ea omnium ex
7. tertij. D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA, maxima ponatur. Transit ergo DA, per centrum.

DEINDE, si DC, non est in directum ipsi DA; protracta AD, in directũ, erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius AD, protractæ, omnium minima; Quod est absurdum; cũ DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri.

RVRSVS, si DE, non est vicinior cẽtro, quã DF; aut æqualiter distabũt ab eo, aut DE, longius ab eo abest: Si æqualiter
7. tertij. distant, ipsæ erunt æquales; quod est absurdum, ponitur enim DE, maior. Quod si DF, dicatur esse propinquior centro, ipsa
7. tertij. erit maior, quam DE. Quod magis est absurdum.

POSTREMO, si DE, DB, non æqualiter distant a centro, erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales DE, DB.
7. tertij.

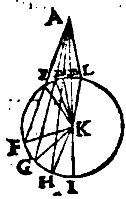
8.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: In conuexam vero peripheriam cadẽtium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum

metrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum transeat; aliæ vero A H, A G, A F, vtcunq;. Dico omnium esse maximam A I, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ centro propinquior existit, maiorem recta A G, quæ remotior est a centro; Et eadem ratione A G, maiorem quam A F. Econtrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse. Deinde rectam A C, quæ vicinior est minimæ A B, minorem esse recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipsam A D, maiorem, quam A E. Denique ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ A B, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, maiora sunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc est, rectæ A I erit & A I, maior, quam A H: Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quā A F. Quare A I, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima. 20. *primi.*



DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H, æqualia sunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior est angulo A K G; erit basis A H, base A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F; Item A G, maior, quam A F. Quare linea centro propinquior maior est linea remotiore. 24. *primi.*

RVRSVS, q̃a in triãgulo A C K, recta A K, minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K, C K, remanebit 20. *primi.*

adhuc

adhuc A B, minor, quam A C. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

RVRSVS, cum intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K, erunt A C, C K, minores, quam A D, D K; Sublatis igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E; Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor est, quam remotior ab eadem.

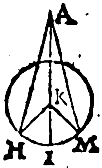
21. primi.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia sunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, dictis lateribus contenti æquales; erunt rectæ A C, A L, ex vtraq; parte minimæ A B, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior a minima, maior quam A L; Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam A L, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasq; partes minimæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi.

SCHOLION.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasq; partes maximæ A I. Fiat enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturq; recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia sunt lateribus A K, K M; sunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: erunt bases A H, A M, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H, ea vel maior erit, vel minor, quam A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.



4. primi.

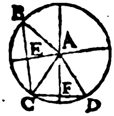
THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

9.

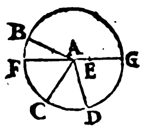
SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales: Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.



8. primi

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circunferentiam cadunt rectæ A D, A C; erit recta A D, quæ propinquior est centro E, maior, quam recta A C, remotior a centro, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



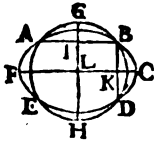
7. tertij

O THEOR.

10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

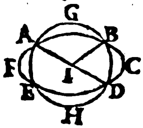
SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulū AGBDHE, in pluribus, quā duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus bifariam diuisis in I, & K, educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectis AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraq; ex corollario propos. 1. huius lib. per centrū ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrū dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum. quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat. Quod erat demonstrandum.



5. tertij.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, & B, & D. Inuentum autem sit I, centrū circuli AGBDHE, a quo ad dicta tria puncta ducantur IA, IB, ID. quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniā igitur intra circulū ABCDEF, assumptū est punctū I, a quo cadunt in circunferētiā plures, quā duæ rectę æquales, erit I, centrū circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE; Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum; quod est absurdum.

1. tertij. 9. tertij. 5. tertij.

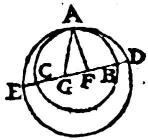


11. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta,

cta, in contactu circulorum cadet.

TANGAT circulus A B C, circulum A D E, intus in A, & sit F, centrũ circuli A B C, & G, centrũ circuli A D E. DICO rectam extensam per G, & F, cadere in cõtactum A. Si enim non cadit, secet utrumq; circulũ in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur A F, A G. Quoniam igitur in triangulo A F G duo latera G F, F A, maiora sunt latere G A; Est autem G A, recta rectæ G D, æqualis; (quod G, positum sit centrũ circuli A D E) Erunt & G F, F A, 20. primi



rectæ maiores recta G D. Dempta igitur communi G F, remanebit F A, maior, quam F D: Quare cum F A, æqualis sit ipsi F B; (quod F, positũ fuerit centrũ circuli A B C) erit & F B, maior, quã F D, pars toto, quod est absurdũ. Quod si quis velit cõtendere F, esse centrũ circuli A D E; & G, centrũ circuli A B C, instituetur argumẽtatio hac ratione. In triangulo A F G, duo latera F G, G A, maiora sunt latere F A; Est 20. primi
autẽ recta F A, rectæ F E, æqualis: (cum F, ponatur centrũ circuli A D E.) Igitur rectę F G, G A, maiores sunt recta F E; dempta ergo cõmuni F G, remanebit G A, maior, quã G E: Quia igitur G A, æqualis est ipsi G C; (propterea quod G, ponatur esse centrũ circuli A B C,) erit quoque G C maior, quã G E, pars toto. quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrũ maioris circuli extra minorẽ ponatur. Nõ ergo recta F G, extensa utrumq; circulum secabit sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 12. 11.

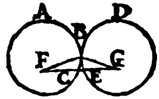
SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCULI ABC, DBE tangãt se exterius in B, & centrũ circuli ABC, sit F; circuli uero DBE, centrũ sit G; Dico rectã extensam per F, & G, trãsire per contactũ B. Si enim non

 transit,

transit, secet circunferentias in C, & E; ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniã igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, maiora sunt latere F G: Est autẽ recta B F, rectæ F C, æqualis; (quod F, sit centrũ circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, sit centrum circuli D B E) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quã totũ, (cum FG, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E;) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

20. primi



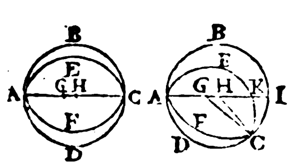
12.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, siue intus, siue extra tangat.

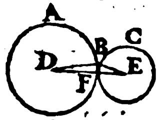
Circvli A B C D, A E C F, tangant se intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C. Assumantur igitur centra horum circulorum G, H, per quæ recta G H in utramque partem extendatur, quam necesse est cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta A C, diameter, diuidetur A C, bifariam in G Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H quod est absurdum. Vna enim recta in uno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si enim G C, est dimidium totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C. Quod si quis dicat rectã G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At uero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare utrumque circulum in I, & K, ut in secunda figura perspicuum est: ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrũ circuli

11. tertij



circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K; (quod H C, H K, sint ex centro) & recta G C, rectæ G I; (quod & hæ sint ex centro) erit quoque recta G K, maior, quam G I, pars toto: quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum utraque ducta sit ex centro H;) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A; Quare dempta communi H G erit G C, maior, quam G A, quod est absurdum, cum utraque ex centro G, ducatur: Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno. 20. primi 20. primi

TANGANT se iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quam uno, prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B; Ductis igitur rectis DB, E B, erunt rectæ D B. E B, æquales rectis D F, E F, hoc est ipsi D E: Sunt autem & maiores: quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno. 12 tertij 20. primi



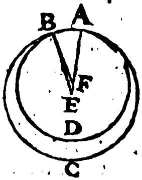
ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra unū circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra aliū, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

SI recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probauit, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam uno uidetur ea potissimum concludere, circulum nō posse tangi a circulo in duobus, uel pluribus punctis, qua longo internallo a se dissideant; nō autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem

 argumen-

argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, ostendemus breuiter, in vno eodemque contactu non posse esse plura puncta, quam unum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, recta ducatur E F, quæ ad contactũ 11. tertij perueniet necessario, vt ad punctũ A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A Si enim se tangant in alio puncto, vt in B; ductis ex B ad centra E, & F, rectis

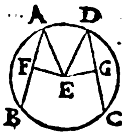


20. primi B E, B F, erunt recta E F, F B, maiores recta E B; Est autem recta E B, æqualis rectæ E A, cum vtraq; sit ex centro E: Igitur & rectæ E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quã F A; quod est absurdum, cum F B, F A, cadant e centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales existant.

13. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distãt a centro, æquales sunt inter se.

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D; Dico ipsas æqualiter distare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniugantur rectæ E A, E D; Secabuntque 3. tertij rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariã. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ uidelicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter se sunt æqualia:



47. primi Quadratum autem rectæ E A æquale est quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarũ A F, F E, æqualia quadratis rectarũ D G, G E. Ablatis ergo quadratis

æquali-

æqualibus æqualiũ rectarũ A F, D G, remanebunt quadrata rectarũ F E, G E æqualia, ideoque & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E.

Rvrsvs distent rectæ A B, C D, æqualiter a centro E; Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterũ ex cẽtro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; diuidentq; rectas A B, C D, bifariã. Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earũ quadrata æqualia: Est autem quadratũ rectæ E A, æquale quadratis rectarũ A F, F E; & quadratũ rectæ E D, æquale quadratis rectarũ D G, G E. Quare & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoq; ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoque erũt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum.

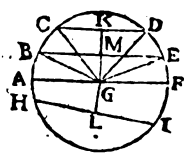
3. tertij.
47. primi

THEOR. 14. PROPOS. 15.

14.

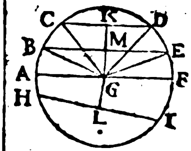
IN circulo maxima quidẽ linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

In circulo ABCDEF, cuius centrũ G, diameter sit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium esse maximam A F; & H I, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est C D, a cẽtro, quã H I, erit GK, maior quã G L, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex G K, recta G M, ipsi GL, æqualis, atq; per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & cõnectantur rectæ GB, GC, G D, G E. Quoniam igitur rectæ ꝑpendiculares G M, G L, æquales sunt, æqualiter distabũt rectæ B E, H I, a centro, per 4 defin. huius lib. & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ G B, G E, maiores



14. tertij
20. primi

quidem sunt recta B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E; Eadem ratione ostendetur A F, maior omnibus alijs lineis Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia sunt lateribus G C, G D, triãguli C G D; & angulus B G E, maior est angulo C G D; erit recta B E, maior quam C D; atque adeo H I, quæ æqualis ostensa fuit ipsi B E, maior quoque erit quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandũ.

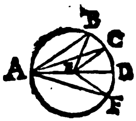


24. primi

SCHOLION.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab uno, eodemque puncto circunferentiæ plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim a puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, transeat. Dico A D, esse omniũ maximam, & A C, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis B E, C E, cum in triangulo A E C, latera A E, E C, maiora sint latere A C; sintque rectæ A E, E C, æquales rectis A E, E D, hoc est, rectæ A D; maior erit A D, quam A C; Eademque ratione maior erit, quam A B; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est A D.



20. primi

DEINDE, quia duo latera A E E C, trianguli A E C; æqualia sunt duobus lateribus A E, E B trianguli A E B; & angulus A E C, totus, maior est angulo A E B; erit basis A C, maior base A B; Eodemque argumento erit A C, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est.

24. primi

CAETERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt a puncto A, ad vtrasque partes maximæ A D. Si namq; angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturque recta A F; cum latera A E, E C, æqualia sint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoque A E C, A E F, æquales; Erunt bases A C, A F, æquales, Neque vero vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi; Quæcunque enim ducatur ex A, supra A C, ea minor erit quam A C; si vero infra A C, ea

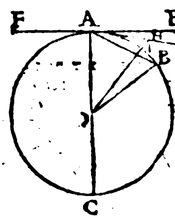
4. primi

ea maior erit, vt iam demonstratum est.

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

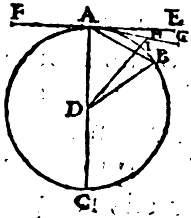
QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

In circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularẽ necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A B; ducta D B, erunt duo anguli D A B, DBA, æquales; sed D AB, *5. primi* rectus est, per constructionem: igitur & D B A, rectus erit, quod est absurdum; Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. *17. primi* Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; nec eandẽ ob causam in ipsam circunferentiã, sed extra, qualis est E F. Dico iam inter A E, rectam, & circunferentiã A B, non posse cadere alteram rectã. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, secans circunferentiam in I.



Quoniam igitur in triangulo D A H, duo anguli D H A, D A H, minores *17. primi* sunt duobus rectis; & D H A, rectus est, per constructionem, erit angulus D A H, recto minor, ideoque recta D A, hoc est, recta illi æqualis D I, maior erit quam D H, pars *19. primi* quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circunferentiam A B: sed quæcunque ex A, du-

A, ducatur infra A E, ea secabit circulũ. Dico deniq; angulũ semicirculi, contentũ diametro A C, & circunferẽtia A B, maiorẽ esse omni acuto angulo rectilineo; reliquũ uero angulũ cõtingentiæ, qui cõtinetur recta A E, & circunferentia A B, minorẽ esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniã ostensũ est, omnẽ rectã ex A ductã infra perpendicularẽ A E, cadere intra circulũ, aciet necessario ea cum A C, minorẽ angulũ angulo semicirculi, at uero cũ A E, maiorẽ angulo cõtingentiæ, cũ ille sit pars anguli semicirculi, hic uero totum quidpiã ad angulũ contingentiæ. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

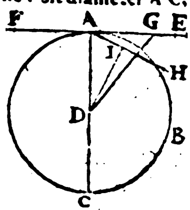


COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod recta a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta, ipsum circulum tangit. Ostensum enim fuit, ipsam cadere extra circulum; Quare solum in puncto illo diametri extremo ipsum attingit.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo ABC, cuius centrũ D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quã dico extra circulũ cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniã igitur in triãgulo ADG, duo



17. primi anguli DAG, DGA, minores sunt duobus rectis, & DAG, factus est rectus; erit DGA,
19. primi recto minor. Quare maior erit recta D G, quã D A; ideoq; punctũ G, extra circulũ erit. Eademq; est ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quã dico necessario secare circulũ. Fiat n. angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur cõmuni angulo DAH, erũt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoq; minores
11. pron. duobus rectis; quare coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, ut in I. Dico igitur punctũ I, esse intra circulũ. Quoniã tres anguli in triã-

gul-

gulo D A I, æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, oltēsi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atq; adeo maior, quam D A I, acutus. Quare recta DA, maior est quam D I. Non igitur D I, ad circunferentiā perueniet; proptereaq; punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta A H, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, ut prius. 32. primi 19. primi

SCHOLION.

EXISTIMAT *Peletarius, angulū contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circūferentiæ, non effici angulum ullum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quā ipse hoc in loco adducit. Sic igitur inquit:*

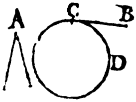
CVM *huius theorematis caput postremū attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriā nō satis sibi constare; immo adeo, repugnantiā in se admittere.*

PRIMVM *enim extra intelligentiā est, ut inter quātitates minima dari possit; qualē hoc loco angulū, quē dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorē omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, ut maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundū eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam cōtinuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cœpi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, ut apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.*

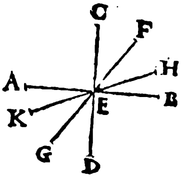
SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quā dimidiū, idq; continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

VERBI *causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, & BCD, angul⁹ (si modo sit angul⁹) cōtactus: Vult prima decimi, si auferas ab angulo A, maius, q̄ dimidium, ac rursus a reliqua parte*

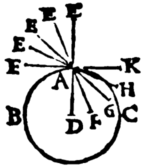
parte maius, quam dimidium; sicque continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam B C D. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (ut sic dicam) magis naturaliter uera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non uidet propositis duobus numeris 8. & 1. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, ut quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, ut binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc uentum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstranda, alijsque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.



Nos igitur hanc dubitationem sic expediemus; ut dicamus lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulũ non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindẽtibus in puncto E ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbẽ, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sane ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F Cũque facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtusior fiet H E A, inde vero acutior B E H; sicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cũ ea. Tum enim immersa, vt sic dicam linea C D, in lineam A B, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo



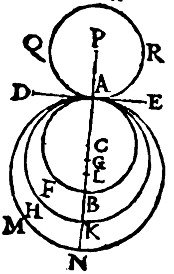
culo A B C A cuius centrum D, linea D E, præteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circunducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli cōtinuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea F. D, facta sit E K, & tangat circulum. Ac tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantū ad angulum attinet: non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantque spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non cōsistat quam vno; fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumque A', peripheriæ in suo rotundo; neque vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contraria contraposita, fiant manifestiora: Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; ut nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet: Illud tamen minime urgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per theoremata.



CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter vero A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæ sextæ, lineam D E, contingere ipsum A F B A, circulum: ac propterea

rea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsexta. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro A B, cētrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non esse quātitatem.



Constat quippe circulum A H K A, transire inter rectam D A, & curuam A F, cum sit semidiameter G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E, tangere ipsum A H K A, circulum ex eodem huiusce decimæsexta consectario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem consectario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic, omnes æquales, si modo æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis cōtactui D A F: Fietq; ut M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat cōtactum D A M. Igitur M A F, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

Sed & probabimus. contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes: Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excluduntur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

Contactvs lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

Manente enim eadem constructione, si D A F, *sit*

quantitas

quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neque per obliquam, vt per lineam A M: Esset enim F A M, pars ipsius DAF: Atqui F A M, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur F A M, pars ipsius D A F. Igitur D A F, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non sit quantitas, per primam harum; neque per rectam, cum neq; DAF, sit quantitas, per secundam earundem; neq; D A Q quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

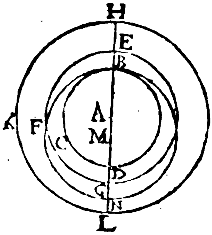
ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in posteriori figura, angulus B A F, æqualis est angulo B A D; cum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quãtitas nõ est: & ob id Q A P, rectus est, & æqualis ipsi DAP, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

HAEC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quã ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ais pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.

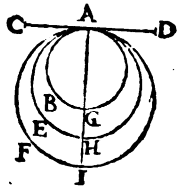
SINT enim super centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G. & secet E G. ambos circulos in punctis E, B, D, & G Aio duos angulos C B D, & F E D, esse æquales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neque enim contra, C B D, maior vllo pacto erit ipso F E D) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E. inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione ullus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.



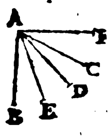
HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorē, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus B F N B, tanto interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro æquali ipsi A E; qui circulus tangat B C D B, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, æqualem esse angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum: Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D æqualis. Igitur C B F, contactus, nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio, eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

HAEC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasses, duxisset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt a nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem; Immo vero asseueramus, quemuis angulũ contactus & si ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus C A B, si per A, describatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod si adhuc maior circulus A F I, describatur, erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque: Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi possit infinite.



Vt angulus acutus B A C, minor est recto B A F; & tamen si ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D: Quod si alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.



PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse in *se infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior est angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam A B G, describantur tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodũ quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior est acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit æqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, uel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur a duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.*

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est, quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit: quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, ceu ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiuscemodi inter se æquales; Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa; Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum: Quare si uel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propositione huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui a peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris: Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue deniq; quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem dictæ propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, ceu videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici a duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria, & li-

& linea recta illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sic etiã omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

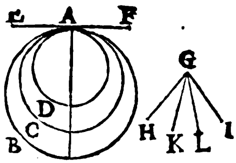
NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propositione. 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit vera pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori; non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi, maior sit angulo re-

cto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in praecedenti figura cernere licet.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



Proponantur enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur describantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam B F, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas G H, G I, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamē semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

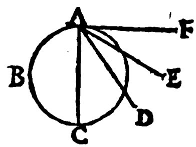
CAETERVM ex hac propositione 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

1. poster. TRANSITVR a minori ad maius, vel cōtra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter A C, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per pun-

cta

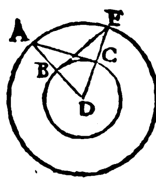
cta D, E, F, donec circulum contingat in A; Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectũ maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoq; vitiosam esse posteriorem consequentiam.



PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

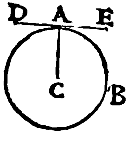
A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda sit linea, quę tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum B C, in B; Deinde centro D, interuallo autem D A, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulum A E, in E. Ducta igitur recta E D, secans circulum B C, in C, connectatur recta A C, quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, ęqualia sint duobus lateribus D A, DC, trianguli C D A, vtrunque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusq; D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt & bases B E, C A, & anguli D B E, D C A, super ipsas, æquales: 4. primi. Est autem D B E, rectus ex constructione; igitur & D C A, rectus erit. Itaq; C A, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est A C, recta tangens circulum BC, in C. quod faciẽdũ erat.



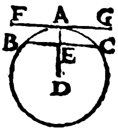
SCHOLION. I.

Quod si punctum A, datum fuerit in circunferentia circuli A B, cuius centrum C, faciliùs ex eo ducetur recta tangens circulum, hoc modo. Ducta semidiametro A C, educatur per A, ad A C, perpendicularis D E. Hæc enim per corollarium præcedentis propositionis, circulum tanget: quod est propositum.



EX PELETARIO.

Lineae rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

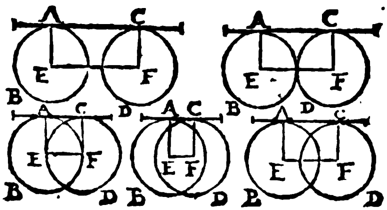


Circulum A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circunferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. Erit igitur F G, parallela ipsi B C, (28. primi.) tangetq; circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.

SCHOLION. II.

Sed & sequens problema cum Cardano absoluemus.

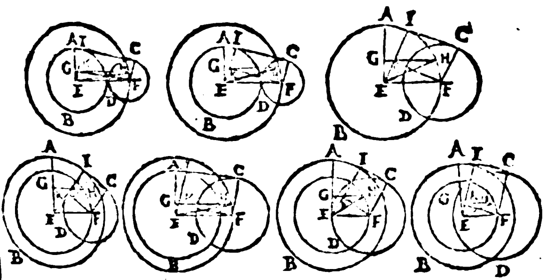
Propositis duobus circulis, quorum neuter alterũ includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumq; tangat circulum.



Sint primũ duo propositi circuli æquales A B, C D, quorũ centra E, & F, recta iungantur E F, ad quã ducãtur perpendiculares E A, F C, secãtes circun-

circunferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrunq; circulum tangere. Cum enim E A, F C, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, & parallelæ, quod anguli E, & F, recti sint; Erunt quoq; E F, A C, æquales & parallelæ; Ideoq; & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta A C, vtrunq; circulũ tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum. 28.primi. 33.primi. 29.primi.

SINT secundo duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorũ rursus cẽtra E, & F, iungãtur recta EF, ad cuius inter



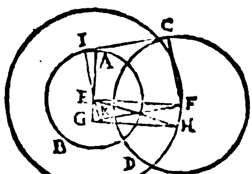
uallũ ex E, centro maioris circuli circulus describatur F H, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abscindatur ex ea recta A G, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G ipsi E A, perpendicularis ducatur G H, vsq; ad circunferentiã circuli vltimo descripti. Ducta autẽ recta H E, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atq; ex F agatur ipsi E I, parallela recta FC. Dico rectã p pũcta I, & C, ductã vtrũq; circulũ cõtingere. Abscindatur.n. ex I E, recta IK, ipsi A G, vel semidiametro FC, minoris circuli æqualis, vt sint reliquæ EG, EK, æquales quoq;, ducaturq; recta KF. Quoniã igiť latera HE, EG trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, triãguli FEK, & anguli ipsis cõtenti æquales, ex cõstructione: Erunt anguli HGE, FKE, æquales; Ac proinde, cũ HGE, rectus sit, ex cõstructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK æquales sunt, & parallelæ, ex cõstructione, erũt quoq; IC, KF, æquales & parallelæ; Atq; propterea angulus EIC, cũ æqualis sit externo FKE, rect⁹ erit; 4.primi. 33.primi. 29.primi.

Ideoq;

Ideoq; & ICF, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrũq; circulũ cõtinget, cũ rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorũ. Quod erat ꝓpositũ.

SATIS aũt constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinq; modis posse fieri. Aut.n. alius extra aliũ cadit, aut se mutuo cõtingũt, aut se inuicẽ p cẽtra secant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra consistant in cõmuni eorũ segmento, vel certe extra illud.

ITEM si circuli ꝓpositi fuerint inæquales, id cõtingere posse septẽ modis. Aut.n. minor totus extra maiorẽ cadit, aut ipsum tãgit, aut ipsũ secat, ita vt vel cẽtrũ eius sit in circũferẽtia maioris, vel intra, hac tamẽ lege, vt circũferẽtia minoris citra centrũ maioris trãseat, vel cẽtrũ minoris sit extra circunferẽtiã maioris, vel intra, ita tamẽ, vt circũferẽtia minoris ꝑ maioris centrum incedat, vel deniq; intra, ita tamen, vt circunferentia minoris includat centrum maioris.



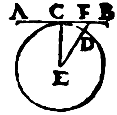
QVONIAM vero, circulis inæqualibus existẽtibus, initiũ cõstructionis sumpsimus semp a maiori, si quis maluerit a minori ĩcipere, id efficiet eadẽ cõstructione, demõstrationeq;, nisi qđ rectæ AE, IE, protrahẽdæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, cõtẽtos lateribus HE EG; FE, EK, idcirco æquales esse, qđ HEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, æquales sint ex cõstructione. Deniq; angulũ EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

17. ## THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulũ tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiũcta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA AB, tãgat in C, circulũ CD, cuius cẽtrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularẽ esse ad AB.

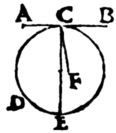
A B. Si.n. nõ est, ducatur E F, perpẽdicularis ad A B, secãs circunferentiã in D. Quoniã igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex cõstructione: erit ECF, minor. Quare maior erit recta EC, hoc est, E D, quã E F, pars quã totũ. qđ est absurdũ. Est igitur E C, perpẽdicularis ad A B. Quare si circulũ tãgat recta quæpiã linea, &c. Qđ demõstrãdũ erat. 17. primi. 19. primi.



ALITER. Si E C, non est perpendicularis ad A B, erit alter angulorũ Ad C, obtusus, & alter acutus: Sit ergo ECB, acutus, q cũ maior sit angulo semicirculi E C D, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: qđ est absurdũ. Oĩs siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto. 16. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a cõtactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.



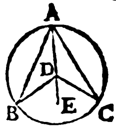
TANGAT recta A B, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur C E, perpendicularis ad A B. Dico in C E, esse centrum circuli. Si enim est extra C E, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta F C, quæ perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti: quod est absurdũ. Nõ igitur extra C E, cẽtrũ circuli existet. Itaq; si circulũ tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demõstrandũ. 18. tertij.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 19.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

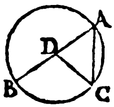
IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplũ esse anguli BAC. Includant enim primo duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniã



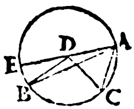
igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erunt
5.primi. anguli DAB, DBA, ęquales: Est autem ex-
32.primi. ternus angul⁹ BDE, æqualis duob⁹ angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorũ, vt anguli DAB Eodẽ mõ duplus ostẽdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC: qđ est ꝓpositũ.

SECVNDO non includãt rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quo-



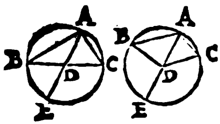
niam igitur externus angulus BDC, æqualis
32.primi. est duob⁹ internis DAC, DCA: Hi aũt duo
5.primi. inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

TERTIO recta AB, secet rectam DC, & per centrũ D, extendatur recta AE. Quoniam igitur an-



gulus EDC, ad centrũ, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandẽ basin EC, & recta AE, extẽditur per centrũ; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostẽsum fuit: Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent.n.hi anguli eandẽ basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Si.n.totum totius est duplũ, & ablatũ ablati; erit & reliquũ reliqui duplũ. In circu-
19. pron. lo igi. angul⁹ ad cẽtrũ duplex est, &c. Qđ erat demõstrãdũ.

SCHOLION.



QVOD si rectæ BD, CD, in cẽtro angulũ nõ cõstituãt ad partes basis BC; qđ tũ demũ fit, quãdo segmentũ BAC, est vel semicirculus, vel segmentũ minus; nihilo minus spatiũ illud ad centrũ duplũ erit anguli ad circunferẽtiã, qui eãdẽ habeat basin, quã spatiũ illud. Ducta.n.recta AE, per centrũ

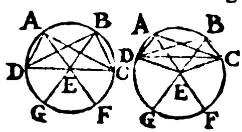
trũ, erit tã angulus BDE, ad cẽtrũ duplus anguli BAE, ad cir cunferentiã, quã angulus CDE, ad centrũ anguli CAE, ad cir cunferẽtiã, vt ostẽsum est. Spatiũ igit ad centrũ D, basin habẽs BEC cõstansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplũ est totius anguli BAC. Quod est propositum.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

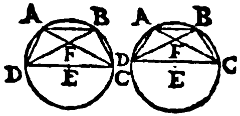
IN circulo ABCD, cuius centrum E, existãt anguli A, & B, in segmento DABC; Dico eos esse æquales. Sit enim primo segmentum DABC, semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrũ E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cũ omnes habeant eandẽ basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. Quare inter se æquales erunt. Eadẽq; ratione oẽs alij anguli existentes in segmento DABC, ostendent esse æquales. 20. tertij. 7. pron.

Sit secũdo segmentũ DABC, vel semicirculus, vel semi circulo minus. Ducãtur p centrũ E, rectæ AF, BG, & in segmẽto minori connectãtur rectæ DE, CE. Quĩ igit angul⁹ DEF, ad cẽtrũ, dupl⁹ est anguli DAF, ad peripheriã: Similiter angulus CEF, anguli CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC. 20. tertij.

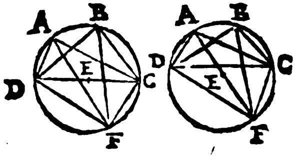


ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedẽtis demonstrauimus, spatiũ ad centrũ E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusq; anguli DAC, DBC, ad circunferentiam: Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales. 7. pron.

ALITER. Secẽt sese rectę AC, BD, in F, & connectatur recta AB; Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam



quā hi æquales sunt duobus re-
ctis: Si auferantur anguli AFD,
15. primi. BFC, qui æquales sunt; erūt reli-
qui ADF, DAF, reliquis BCF,
CBF, æquales. Atqui & anguli
ADF, BCF, æquales sunt ostēsi in segmēto maiori ADCB.
Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, ęquales sunt.

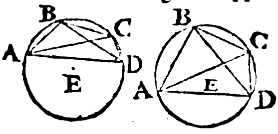


ALITER. Ductis re-
ctis DF, CF, ad pūctū cir-
cūferētiæ quoduis F, in-
cludētibus cētrū E, ita vt
tā DABCF, q̃ FDABC,
sit segmētū maius, iungā-
tur quoq; rectæ AF, BF.
Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori
DABCF, ęquales sunt; nec nō & anguli FAC, FBC, in seg-
mēto etiā maiori FDABC, existētes: Si hi illis addātur, fiet
totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaq; in cir-
culo, qui in eodē segmento sunt, &c. Quod erat ostēdendū.

21. THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in cir-
culis descriptorum anguli, qui ex aduerso,
duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius cētrū E, inscriptū sit quadrilaterū AB-
CD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Itē BCD,



DAB, æquales esse duobus
rectis. Ductis .n. diametris
AC, BD, erunt duo anguli
21. tertii. ABD, ACD, ī eodē segmē-
to ABCD, ęquales. Simili-
ter erūt duo anguli CBD,
CAD, in eodē segmēto CBAD, æquales. Quare duo anguli
ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duo-
bus angulis ACD, CAD. Addito igit̄ cōi angulo CDA,
erūt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD,
32. primi. CAD, CDA: Sed hi tres æquales sunt duobus rectis; igitur
& duo

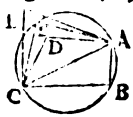
& duo ABC, CDA, duobus erũt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorũ, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM quoq; huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

Si in quadrilatero anguli, q ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circul⁹, qui p tres quoscũq; eius angulos describitur, trãsibit etiam per reliquũ quartũ angulũ; Atq; adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.

IN quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi A, & C; Item B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur; (Quo modo autẽ hoc fieri possit, in 25. propos. huius lib. & in 5. quarti lib. ostendetur.) quem dico transire etiã per D. Si .n. nõ, transibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo recta CE, AF, ad circunferẽtiã, ita vt nõ secent rectas CD, AD. Quo facto, erũt anguli B & F, æquales duobus rectis; Erãt aũt & anguli B, & D, duobus rectis æquales: Igitur duo anguli B, F, æquales sunt duobus angulis B D. Quocirca ablato cõi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdũ. Ducta.n. recta AC, erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus p pũctũ D. qđ est propositũ.

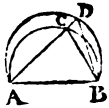


22. tertij.

21. primi.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, nõ constituentur ad easdem partes.

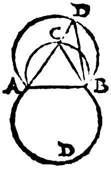


SI .n. fieri pōt, sup recta AB, cōstituātur ad easdem partes duo segmēta similia, & inęqualia ACB, ADB. Perspicuū ē aūt, qđ se solū intersecēt in pūctis A, & B; circulus .n. circulū nō secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmēti tota erit extra peripheriā alterius. Ducatur igitur recta AD, secās circunferētias in C, & D, & cōnectātur rectę CB, DB. Quoniā igi. segmēta ponūtur similia, erit p 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: qđ est absurdū. Nō igitur segmēta similia. Quare sup eadē recta linea, &c. qđ erat demōstrādū.

10. tertij.

16. primi.

SCHOLION.



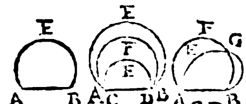
EADEM ratione, neq; ad diuersas partes super eadē recta linea duo segmēta circulorū similia, & inæqualia cōstituētur. Nā si alterū eorū intelligatī moueri circa lineā AB vt iā ambo sint ad easdē partes, in idē absurdū incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, cōstituta sint segmēta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmētū AEB, segmento CFD, cōgruere. Si .n. nō cōgruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra.



Quod si extra cadat, aut intra, cōstituētur super eadē recta CD, duo segmēta AEB, AFB, similia, & inęqualia; qđ est absurdū. Demōstratū .n. est cōtrariū. Qđ si partim extra cadat, partim intra, secabūt sese in pluribus pūctis, q̄ duobus, nimirū in A, E, G. Qđ est absurdū. Circuli .n. nō se secāt in pluribus pūctis, q̄ duobus. Cōgruet igit segmētū AEB, segmento

23. tertij.

10. tertij.

CFD,

CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erũt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

NON solum in hac propositione ostẽditur segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verũ etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

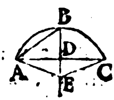
CONVERSVM quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint.

PROBL. 3. PROPOS. 25.

24.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, uel maior est angulo DAB uel æqualis, uel minor. Sit primo maior, (quod quidẽ continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum; cum ponatur esse minus, erit DA, maior, quam DB,



cum DB, perficiens diametrum, sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt; Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentũ ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, triãguli CDE, & anguli contenti, recti: Quare bases EA, EC, æquales erunt; Quæ Est

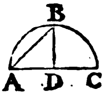
7. tertij.

18. primi

4. primi

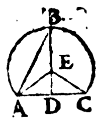
6. primi Est autē & E A, æqualis ipsi E B, quod anguli E A B, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ E A, EB, EC, æquales erūt, ac
9. tertij. propterea E centrū erit circuli ABC. quandoquidē ex E, plures quā duæ rectæ æquales cadunt in circunferentiam.

Sit secundo angulus D B A, angulo D A B, æqualis; (Quod demū continget, quando segmentū ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit A C, diameter, & D, centrum, atq; adeo rectæ D A, D B, æquales; quare



5. primi & anguli D A B, D B A, æquales erunt.) Erunt
6. primi igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem, & D C, æqualis ipsi D A; Quapropter cum tres rectæ D A, DB, D C, cadant ex D, in circunferentiam, erit D, centrum.
9. tertij.

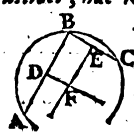
Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidē euenit, si segmentū ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam B D, transit per centrū, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidē intra segmentum, cū maius esse ponatur existit; erit D B, omnium, quæ ex D, in circun-
7. tertij. ferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quā



18. primi D A, ideoq; angulus DAB, maior angulo DBA) fiatq; angulus B A E, æqualis angulo DBA, & secet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostēdetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B, ut constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

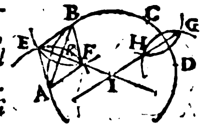
Brevius inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C quæ duabus rectis coniungantur AB, BC, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educātur ad AB, BC, perpendiculares D F, E F Quoniā igitur ꝑ corollariū propos. 1. huius lib. tam DF, quā E F, incedit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentū, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum; quod est propositum.



Aliter, vt Mechanici solent. Accipiantur in circun-

ferentia

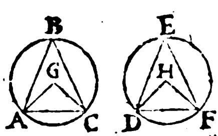
ferentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus describantur duo arcus ad idē interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F, Postea ex alijs duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describātur ad quoduis interuallum, siue idē quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ E F GH; transibunt ambæ per centrū: quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autē lineæ E F, GH, per cētrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ A E, AF, BE, BF quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorū. Quoniā igitur latera A E, EF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli B E F; & bases quoque A F, B F, æquales: Erunt anguli AEF, BEF, æquales. 8. primi Rursus ducta recta AB, quæ secet E F, in K; quoniā latera A E, EK, triāguli AEK, æqualia sunt lateribus B E, EK, triāguli B E K; & anguli AEK, BEK; ostensi quoque æquales; erunt & bases AK, B K; & anguli A K E, B K E, æquales, ideóque recti. 4. primi Quare cum E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos; transibit per centrū ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum.



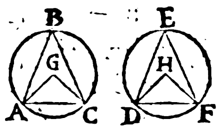
THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus periphèrijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorū cētra G, H, cōstituti sint primo ad cētra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, qb⁹ insistūt, siue sup quas ascēderūt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs ABC, DEF, duo pūcta B, E, ad q̄ rectę ducant AB, CB, DE, FE, cōnectāturq; rectę A C, DF. Quoniam igitur anguli B, & E, dimidij sunt ęqualiū angulorum G, & H; erunt ipsi æquales inter se: 20. tertij. Quare ex definitione segmēta ABC, DEF, similia erunt.



Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorũ æqualitatem, & anguli, quos continẽt G, H, æquales ex hypothesi; erũt bases A C, D F, æquales: Cum igitur segmenta similia A B C, D E F, sint super lineas æquales A C, D F, erunt ipsa inter se æqualia; Quare si a circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta A C, D F, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ A C, D F: Quod est propositum.



4. primi

24. tertij.

SINT secundo ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; dico rursus, peripherias A C, D F, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut prius, segmenta A B C, D E F, similia. Cum igitur sint super æquales lineas A C, D F: (cum enim anguli G, H, æquales sint, quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt prius, rectæ A C, D F, æquales.) erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta A C, D F æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

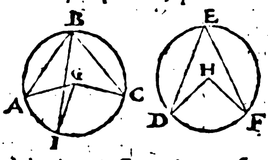
20. tertij.
24. tertii.

SCHOLION.

HAEC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniã anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E; erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ A C, D F, super quas ascenderunt, æquales erunt.

20 tertij.

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, sit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Itẽ angulus A B C, ad circunferentiam maior angulo D E F, ad circunferentiam. Dico peripheriam A C, maiorem esse peripheria D F. Si enim fiat angulus C G I, angulo D H E, & angulus C B I, angulo D E F, æqualis; erunt, ut ostensum est, peripheriæ C I, D F, æquales;

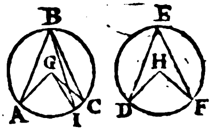


les; Ac propterea A C, *maior, quam* D F.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistũt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, insistant primo anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripherijs A C, D F; Dico angulos A G C, & D H F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cum igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales. 26. tertij.



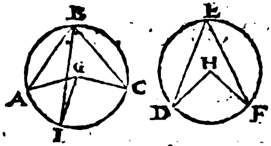
INSISTANT secundo eisdem peripherijs æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt A B C, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus A B I; eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod est absurdum. 26. tertij.

SCHOLION.

HAEC secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniã anguli A B C, *&* E, *dimidii sunt angulorum* A G C, *&* H, *quos iã ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.* 20. tertij.

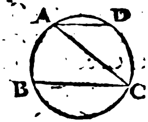
SI vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum, siue ad circunferentiam, quam minori. In figura enim scholii præcedentis sit peripheria A C. *maior, quam peripheria* D F. *Dico angulum* A G C, *maio-*

rem esse angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo



D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ DF, ducanturq; rectæ IG, IB, erunt, ut ostensum est, tã anguli ad centrũ CGI, DHF, quã anguli ad circunferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo DHF, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.

Ex hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo nõ



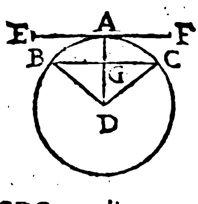
secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, esse parallelas. Ducta namque recta A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales, erunt anguli
27. tertij A C B, C A D, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alter-
27. primi ni, erunt A D, BC, parallelæ.

Sint iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC, ducta
29. primi recta AC; erunt anguli alterni ACB, CAD, æquales; Ac pro-
26. tertij. inde arcus A B, DC, quibus insistunt, æquales erunt.

Visum est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

Linea recta quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

In circulo A B C, cuius centrũ D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF tangens circulum. Dico EF,



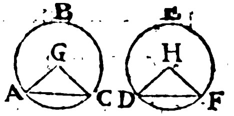
parallelam esse rectæ BC, arcũ BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctũ contactus A, recta D A, connexisq; rectis DB, D C, erunt anguli
27. tertij. ADB, ADC circunferẽtiis æqualibus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli BDG lateribus C D, D G, trianguli
4. primi CDG, æqualia, utrumq; utriq;. Igitur & anguli ad G, æquales

les sunt super bases G B, G C, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC illis deinceps recti sunt. Sunt autem & anguli GAE, GAF recti, quod DA, perpẽdicularis sit ad EF; Ergo E F, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum. 18. tertij. 28. primi

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiorẽ quidem maiori, minorem autem minori.

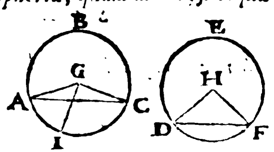
In circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales A C, D F. Dico maiorẽ peripheriam ABC, æqualẽ esse maiori DEF; & minorẽ AC, minori D F. Ductis .n. rectis AG, GC, DH, H F, erunt latera AG, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, HF, trianguli DHF;



Sunt autẽ & bases A C, DF, æquales: igitur anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, æquales erunt, quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum. 8. primi 26. tertij.

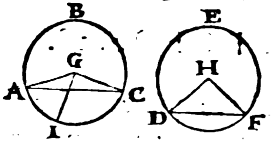
SCHOLION.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorẽ peripheriã, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nã si de segmẽtis circuli maiorib⁹ sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriã, quã minor. In circulis .n. æqualib⁹



ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta A C, maior, quam D F. Dico peripheriam A C, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria D F; At peripheriam A B C, minorem

norem peripheria D E F. *Ductis enim rectis* A G, G C, D H, H F, *erunt latera* AG, G C, *trianguli* AGC, *æqualia lateribus* D H, H F, *trianguli* D H F; *Ponitur autem basis* A C,
25. primi *maior base* D F: *Igitur angulus* A G C, *maior erit angulo*

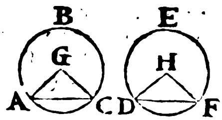


D H F. *Fiat angulus CGI, angulo* D H F, *æqualis; eritque propterea peripheria CI,*
26. tertij. *peripheriæ* D F, *æqualis; Ac proinde peripheria* AIC, *maior, quam peripheria* D F. *Ideoque reliqua* A B C, *minor, quam reliqua* D E F.

28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

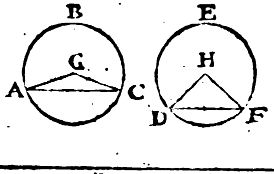
IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli DHF; Sunt autē & anguli G, H, æqua-



27. tertij. les, quod æqualibus peripherijs A C, D F, insistant: Igitur
4. primi bases A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorē maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem.



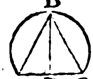
rem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, *quorum centra* G, *&* H, *sint peripheriæ semicirculo minores* A C, D F, *sitque* A C, *maior, quam* D F; *Ac proinde* A B C, *minor quam* D E F. *Dico lineam* A C, *maiorem esse, quam* D F. *Ductis enim rectis* A G, G C, D H, H F, *erit angulus* A G C, *maior angulo* D H F, *ex scholio propos.* 27. *huius lib. Cum igitur latera* A G, G C *trianguli* A G C *æqualia sint lateribus* D H, H F, *trianguli* D H F, *erit basis* A C, *maior base* D F, *&c.* 24. primi

Svnt autem proxime antecedentes quatuor propositiones 25. 27. 28. *&* 29. *intelligendæ etiam in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, &c. ut constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in uno eodemque circulo.*

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

DATAM peripheriam bifariam secare.

Sit peripheria A B C, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens A C, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B; Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti: Igitur & bases A B, C B, æquales erunt; Ac propterea peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus: Quod erat faciendum. 4. primi 28. tertij.

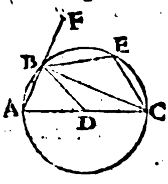


THEOR. 27. PROPOS. 31. 30.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui uero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris

ioris segmenti, recto quidē maior est: minoris autē segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI ABC, cuius centrū D, diameter sit A C, cōstituaturque in semicirculo angulus ABC, existetq; angulus BAC, in maiori segmēto CAB, constituatur quoq; in CEB, minori segmēto angulus B E C. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum uero BAC, in maiore segmento, minorem recto; & angulū B E C, in minori segmento, maiorem recto. Item angulū maioris segmenti cōprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti comprehēsum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem. Ducantur enim rectæ B C, B D, & extendatur A B, in F. Quoniā igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem



5. primi

ratione erit angulus DBC angulo DCB, æqualis, deoque totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis

32. primi

erit: Est autem & angulus F B C externus eisdem duobus internis angulis B A C, BCA. in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli A B C, F B C; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus A B C; quod est primum.

QVONIAM uero in triāgulo ABC, duo anguli ABC,

17 primi

& BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulū de-

22. tertij.

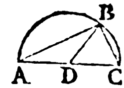
scripto, duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, ostensus est recto minor: Erit B E C, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria BAC; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

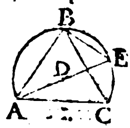
POSTREMO, cū angulus segmenti minoris, comprehensus

hensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quoque anguli recti FBC; Erit angulus segmẽti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est &c. Quod erat demonstrandum.

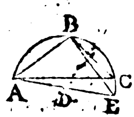
ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter AC, & centrũ D, sit angulus ABC, quem dico esse rectũ. Ducta n. recta BD, erunt anguli DBA, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales sint. Cũ igitur angulus BDC, externus æqualis sit duobus angulis internis DBA, DAB, in triãgulo ABD: Erit angulus BDC, duplus anguli DBA; Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DBC; atque adeo duo anguli ad D, duplicerũt totius anguli ABC. Cũ igitur anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus ABC, eorũ dimidius, rectus: quod est primũ. 5. primi 32. primi 13. primi



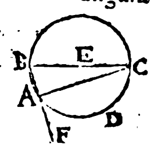
SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum.



SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.



IAM vero proponatur segmentum maius ABC, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulũ CAB, segmenti maioris, esse recto maiorem; At angulum CAD, segmenti minoris, recto minorem. Ducta enim diametro CB & recta BAF; erit angulus BAC, in semicirculo, rectus, atque adeo ei deinceps FAC. Cum igitur angulus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris: & angulus CAD, segmenti minoris, pars quoque



quoque anguli recti F A C; constat utrumque.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priori demonstratione.

EX CAMPANO.

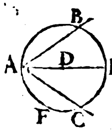
Ex hac propositione perspicuum quoque est, non ualere duas illas argumentationes, quas impugnauimus in propos. 16. huius lib. quarum una est.

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA uero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B. Erit igitur angulus A B E, segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur uersus A E, circa A, punctum fixum, faciet semper cū peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit, ubi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si ulterius moueatur ad A C, faciet a fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, uel etiam segmenti minoris, quorum uterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cùm igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, uitiosas esse prædictas consequentias.



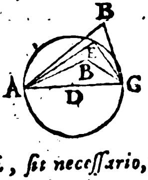
SCHOLION.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis. Hoc est, segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, semicirculus est. Nam si esset maius, angulus in eo foret acutus; si minus, obtusus; & sic de reliquis partibus theorematis.

HINC etiã perspicuum est, si angulo recto recta subtensa bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circulus describatur

ad

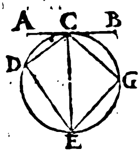
ad internallum dimidia subtensa; circulum transire per angulum rectum. Angulo enim recto A B C, *subtensa* A C, *bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad internallum D A, uel* D C, *circulus describatur.* A E C, *quem dico transire per* B, *si enim transeat citra* B, *uel ultra, ductis rectis* A E, C E, *erit angulus* A E C, *rectus quoque. Quare anguli recti* B, *&* E, *aequales erunt; quod est absurdum, cum angulus* E, *sit necessario, uel maior, uel minor angulo* B. *Transit igitur circulus per punctum B, quod est propositum.* 31. tertij. 21. primi

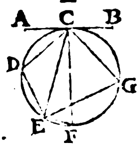


THEOR. 28. PROPOS. 32. 31.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C, puncto, a quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem esse angulo C G E, in alterno segmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque segmento. Transeat enim primo recta C E, per centrum. Erit igitur uterque angulus A C E, B C E, rectus: sunt autem & anguli C G E, C D E, in semicirculis recti; Igitur angulus A C E, angulo C G E; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est. 18. tertii. 31. tertii

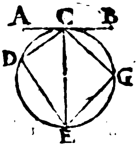




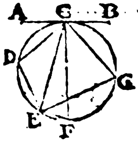
NON transeat iam C E, recta per centrum. Ducta igitur recta C F, per centrum, connectatur recta E F, eritque C F, perpendicularis 18. tertii

ad

31. tertii ad A B, & angulus C E F, rectus; ac propterea reliqui anguli E C F, E F C, æquales erunt uni recto; ut angulo recto A C F. Dempto ergo communi angulo E C F, erit reliquus A C B, reliquo C F E, æqualis.



21. tertii Est autem angulo C F E, æqualis quoque angulus C G E, cum uterque sit in segmento C G E. Quare angulus A C E, angulo C G E, æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero C D E G, duo anguli
22. tertii C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: Sunt autē & duo anguli A C E, B C E,
13. primi duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem; &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLION.

POTEST *theorema hoc conuerti hoc modo.*

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem constructione transeat prius recta C E, per centrum, secans circulum CDE, *& ducatur recta* A B, *per C, faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tan-*
31. tertii *gere circulum. Quoniam angulus C G E, rectus est; erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam uero C E, non transeat per centrum; construaturque figura, ut supra. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E;*
21. tertii *in alterno segmento maiori, & hic est æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo* E C F, *erit angulus* A C F, *æqualis duobus*

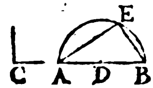
bus angulis E F C, E C F; *Atqui anguli* E F C, B C F, *æquales sunt uni recto, quod angulus* C E F, *rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo* C E F, *æquales sint duobus rectis. Angulus igitur* A C F, *rectus quoque erit, ideoque per coroll. propos.* 16. *huius lib.* A B, *circulum tanget.* 31. tertii 32. primi

Eodem modo, si angulus B C E, *æqualis fuerit angulo* C D E, *in alterno segmento minori, ostendetur recta* A B, *tangere circulum, Cum enim anguli* B C E, A C F; *duobus sint rectis æquales: Item duo anguli* C D E, C G E, *duobus rectis æquales; si demantur æquales* B C E, C D E *remanebunt anguli* A C E, C G E, *æquales. Quare, ut demonstratum iam est, recta* A B, *circulum tanget.* 13. primi 22. tertii

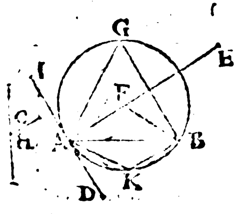
PROBL. 5. PROPOS. 33. 32.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

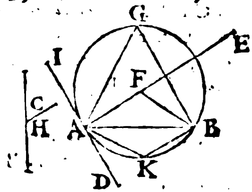
RECTA data sit A B, & datus angulus primo rect° C. oportet igitur super A B, segmentũ describere, in quo angulus exiſtens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem D A, uel D B, semicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nam angulus A E B, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto. 31. tertii.



SIT secundo angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angul° F B A, secans B F, rectã A E, in F. Erũt igitur rectæ F A, F B æquales. Quare si cẽtro F, & 6. primi



F, & interuallo F A, circulus deſcribatur A G B, tranſibit is per B. Dico igitur angulum in ſegmento A G B, quod deſcriptum eſt ſuper A B, eſſe æqualẽ angulo C. Fiat enim angulus in dicto ſegmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, tranſit, & ei perpendicularis eſt D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll. propoſ. 16. huius lib. Quapropter angulus



32. tertij. D A B, hoc eſt, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in ſegmento alterno.

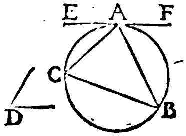
Sit tertio angulus datus H, obtuſus. Fiat rurſus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ ſupra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, deſcribeturque erit ſuper A B, ſegmentum A K B, in quo angulus K, æqualis eſt angulo alterno I A B, hoc eſt, angulo dato obtuſo H. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat.

33. ## PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus ſit A B C, a quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit dato angulo

17. tertii. D. Ducatur recta E F, tangens circulum in A; Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulũ A C B, in ſegmento ablato A C B, ęqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim



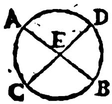
32. tertii. angulus A C B, æqualis angulo alterno F A B, hoc eſt, angulo D. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum A C B, &c. Quod erat faciendum.

THEOR.

THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ A B, C D, in E; Dico rectangulum comprehensum sub segmentis A E, E B, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis C E, E D. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Transeat primo utraque per cẽtrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus, æquale esse ei, quod sub reliquis duobus comprehenditur, rectangulo.

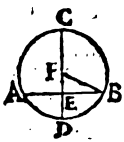


TRANSEAT secundo C D, sola per centrum F, dividatque prius rectam A B, bifariam, ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta B F. Quoniam igitur C D, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E; erit rectangulum sub C E, E D, una cum quadrato rectæ E F, æquale quadrato rectæ F D, ideoque quadrato rectæ F B; Sunt.n. rectæ FD, FB æquales: Est autẽ quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F E, E B; Igitur rectangulum sub C E, E D, una cum quadrato rectæ E F, æquale erit quadratis rectarum F E, E B. Quare ablato communi quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale quadrato rectæ E B, hoc est, rectangulo sub A E, E B; cum A E, E B, rectæ sint æquales.

3. tertij.

5. secundi

47. primi

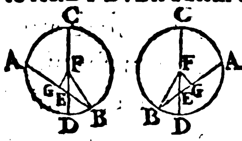


Diuidat iam C D, transiens per centrum rectam A B, nõ bifariam. Secetur ergo A B, bifariam in G, ducanturque rectæ F G, F B, eritque F G, perpendicularis ad A B. Quoniam uero rectangulum sub C E, E D, una cum quadrato

3. tertij.

5. secundi
47. primi

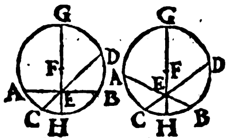
rectæ F E, æquale est quadrato rectæ F D, hoc est, quadrato rectæ F B: Est autem quadratum rectæ F E, æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F G, G B; Erit rectangulum sub C E, E D, una cum quadratis rectarũ F G, G E, æquale quadratis rectarũ F G, G B.



Dempto ergo cõmuni quadrato rectæ F G, remanebit rectangulũ sub C E, E D, una cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulũ sub A E, E B, una cum quadrato rectæ G E, æquale est eidem quadrato rectæ G B: Igitur rectangulũ sub C E, E D, una cũ quadrato rectæ G E, æquale est rectangulo sub A E, E B, una cum quadrato eiusdem rectæ G E. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale rectangulo sub A E, E B. quod est propositum.

5. secundi

TERTIO neutra per centrũ transeat, siue una illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta G H. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub A E, E B, æquale esse rectangulo sub G E, E H, siue A B, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub C E, E D, æquale esse quoq; eidem rectangulo sub G E, E H, siue C D, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. quod est propositum.

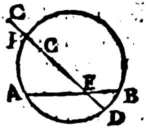


SCHOLION.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus.

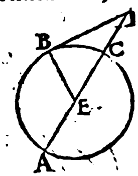
Secent se mutuo rectæ A B, CD, in E, sitque rectangulum sub A E, E B, *æquale rectangulo sub* C E, E D. *Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi. Describatur enim per tria puncta A,* D, *&* B, *circulus aliquis, (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut ultra C; vel citra, ut per* F. *Quoniam ergo rectangulum sub* F E, F D, *æquale est rectangulo sub A E, E B;* 35. tertij. *& rectangulum sub* C E, *E D, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub A E, E B: Erunt rectangula sub C E, E D; & sub* F E, E D, *æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositũ.*



THEOR. 30. PROPOS. 36. 35.

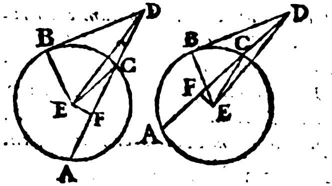
SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera uero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

Extra circulum A B C, punctum sumatur D, a quo linea ducatur D A, secans circulum in C, & linea D B, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub D A, D C, æquale esse quadrato rectæ D B. Transeat enim primo recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, quæ perpendicularis erit ad D B. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E C, hoc est, cum quadrato rectæ E B, 17. tertij. 18. tertij. 6. secundi



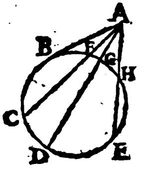
æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ
47. primi D E, æquale quadratis rectarum E B, B D; Quare rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale; Quod est propositum.

Non transeat iam D A, per centrũ E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F, eritque
18. tertij. E B, ad B D, perpendicularis; & E F, ad A C.
3. tertij.



Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, erit rectangulum sub D A, D C, una cum
6. secundi quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum
47. primi D F, F E: Est autem quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratum rectæ E C, ideoque quadratũ rectæ E B; Et quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadrato rectæ D E. Cum igitur quadra-
47. primi tum rectæ D E, æquale sit quadratis rectarum D B, B E; erit & rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo cõmuni quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale; quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

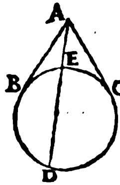
COROLLARIVM. I.



Hinc manifestum est, quod si a puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula cõprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se sunt æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ A C, A D, A E, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub A C, A E; Item, sub

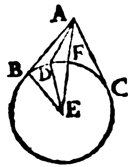
sub A D, A G; & sub A B, A H, æqualia inter se. Nam ducta A B, tangente circulum, erunt quadrato rectæ A B, æqualia singula dicta rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt. 36. tertij.

COROLLARIVM. II.



CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta A D, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quam quadratum rectæ A C, æquale rectangulo sub A D, A E; Quare quadrata rectarum A B, A C, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt. 36. tertij.

COROLLARIVM. III.



PERSPICVVM denique est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangãt. Si enim præter duas A B, A C, duci possit tertia A D, circulum eundẽ tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta A E, erit angulus A D E, maior angulo A B E. 18. tertij. 21. primi

ALITER. Erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, ut ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta A E, ad centrũ E, quæ circulum secet in F, erit A D, cum sit propinquior minimę A F, minor, quam A B, quæ a minima A F, remotior est. Solum igitur duæ rectę ducentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum. 8. tertij.

THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

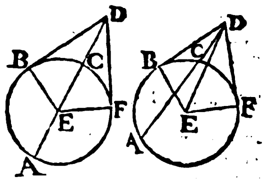
SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, com-

 prehenditur

prehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum sumatur D, a quo ducatur recta D A, circulum secans in C, & recta D B, incidens in circulum, ad punctum B; sitque rectangulum sub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B: Dico D B, circulum tangere in B. Ducatur enim A F, tangens circulum, & iungantur rectæ E B, E F. Quod si D A, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, D C, æquale est quadratum rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ DB, erunt quadrata rectarum D F, DB, inter se æqualia, ideoq; & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera D F, FE, trianguli D F E, æqualia sunt lateribus DB, B E, trianguli D B E, & basis D E, communis; erunt anguli D F E, D B E, æquales: Atqui angulus D FE, rectus est, quod A F, circulum tangat: Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulũ sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandũ.

17. tertij.



36. tertij.

8. primi

18. tertij.

SCHOLION.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

FINIS ELEMENTI TERTII.

EVCLIDIS

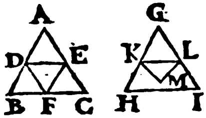
EVCLIDIS ELEMENTVM IIII.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cũ singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

AGENS Euclides in quarto hoc libro de varijs inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus; nec nõ de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa eadem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens a rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, esse inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non tangit latus H I, trianguli G H I, non dicetur triangulum K L M, inscribi in triangulo G H I; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.



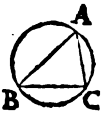
II.

SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circunscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E CONTRARIO dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum D E F; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt, &c. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cũ singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

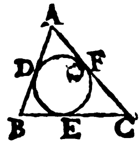


VT si tangant anguli A, B, C, trianguli A B C, peripheriam circuli A B C, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vnus tantũ angulorũ non tangeret peripheriã, nõ diceretur triangulũ esse inscriptũ in circulo.

IIII.

FIGVRA uero rectilinea circa circulum describi dicitur, cũ singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

At vero, si latera trianguli ABC, singula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

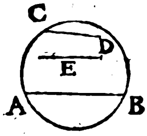
CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

Vicissim dicetur circulus DEF, inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, descriptus esse circa triangulum ABC. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Vt recta linea AB, quoniam eius extrema A, & B, in periphe-

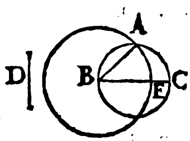


peripheria circuli A B C, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, uel C D; quia hæc vnum duntaxat extremum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero nullum.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

IN circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. (Cum enim diameter sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta, diametro maior foret, non posset
15. tertij.



in circulo aptari illi una æqualis) Ducatur diameter B C. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si uero D, minor fuerit diametro, abscindatur BE, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autẽ BE, circulus describatur EA, secans circulũ A B C, in A; Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. Est enim BA, æqualis ipsi B E; & D, æqualis eidẽ BE, per constructionẽ: Quare AB, & D, inter se æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

EX FEDERICO COMMANDINO.

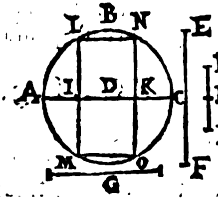
IN dato circulo rectam lineam accõmodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda sit re-

cta

cta æqualis rectæ E F, quę diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. Ducatur per centrum D, diameter A C, rectę G, parallela. Quod si recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si uero E F, diametro minor fuerit, ea secta bifariam in H, abscindatur DI, ipsi HE, & DK, ipsi HF, æqualis, ut tota IK, toti E F, sit æqualis. Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur LM, NO; iunganturq; L N. Dico LN. accōmodatam esse æqualem ipsi E F, & ipsi G, parallelam. Cum enim L M, NO, æqualiter a centro distent, ipsæ æquales inter se erunt: quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur a recta A C, per centrum D, transeunte; erunt & earum dimidię L I, N K, æquales. Quia uero L I, N K, parallelę etiam sunt; erunt quoque L N, I K, æquales, & parallelę, Quare cum I K, æqualis sit ipsi E F, & parallela ipsi G; Erit etiam L N, æqualis ipsi E F, & ipsi G, parallela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi E F, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

31. primi
11. primi
14. tertij.
3. tertij.
28. primi
33. primi.
30. primi

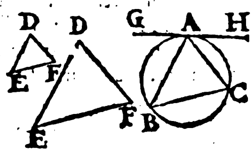


PROBL. 2. PROPOS. 2.

2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo ABC, dato describendū triangulū æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatq; angulus G A B, angulo F, ęqualis, & angulus HAC, angulo E; atq; extendantur rectæ A B, A C, ad circunferentiam usque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo D E F. Est enim angulus C, æqualis angulo G A B; & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione: Quare anguli C, & F, inter se quoq; erūt æquales. Similiter quia angulus B, æqualis est angulo HAC, & eidem angulo HAC, ęqualis est, per cōstructionē, angul⁹ E; erūt etiā anguli B, & E, inter se ęquales.



32. tertij.
32. tertij.

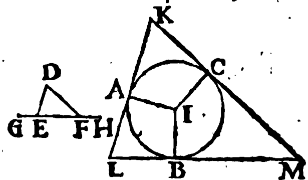
Cum

Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis F, & F, trianguli D E F, erunt quoque
32. primi reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta utcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G; & angulus BIC, angulo DFH; Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis



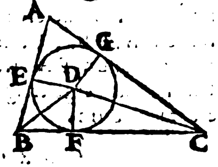
A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K L, M; (si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; quare A K, C K, coibunt, &c.) Descriptum est igitur circa circulũ triangulum K L M, quod dico esse æquiangulũ triangulo D E F. Quoniam omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, ut ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit; & anguli I A L, & I B L, sunt duo recti; erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli D E G,
13. primi. D E F, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales A I B, & D E G, remanebit angulus L, angulo D E F, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse
32. primi angulo D F E. Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inscribere. 4.

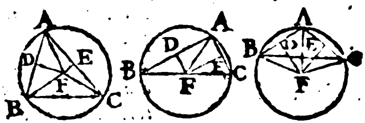
Sit describendus circulus in dato triangulo A B C. Diuisis duobus angulis A B C, A C B, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales sunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, uterque utrique; & latus B D, commune; erunt quoque latera D E, DF, æqualia. 26. primi Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, D F, D G, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetq; latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod perpendicularia sint ad semidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.



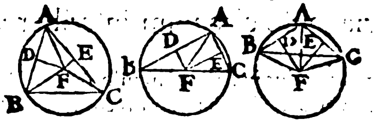
PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum describere. 5.

Sit circulus describendus circa datum triangulũ ABC. Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, uel obtusangulo sumenda sunt circa rectum, uel obtusum angulum) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet.



tet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, uel intra triangulum, uel in latere BC, uel extra triãgulum.



Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, triãguli BDF, & anguli ad D, recti: erũt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

4. primi

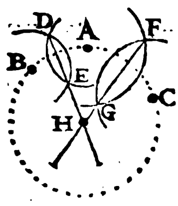
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si uero sit in latere BC, angulum BAC, esse rectum, quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulũ BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

CONTRA uero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum.

SCHOLION.

COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat.



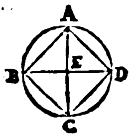
Nam si data puncta tribus rectis iungantur, ut constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo, duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quae recta linea ducatur DH.

D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo, uel etiam, si placet, eodem, alij duo arcus delineentur secantes se se in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in H. Dico H, esse centrũ circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam a rectis DH, FH, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare ut in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; erũt bases A B, B C, æquales. Eadem ratione *4. primi*



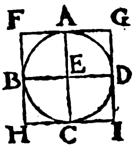
æquales erunt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, æqualia inter se sunt. Sunt autem & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit A B C D; proptereaque in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum. *31. tertij.*

PROBL. 7. PROPOS. 7. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, describendum

describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro, ad angulos rectos, & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico F H I G, esse quadratũ circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli A E B, F B E, sint recti, erũt

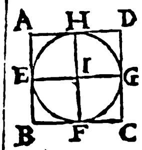


28 primi F H, A C, parallelæ; similiterque erunt
30. primi G I, A C, parallelæ. Quare & F H, G I parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est
34. primi A C H F, erunt latera opposita A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: sed A C H, est rectus, igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus, angulos H, I, G, rectos esse, & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris B D, A C. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G. æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

8. PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales, & parallelæ. Qua-



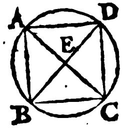
33. primi re & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D, ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E; sunt autem hæ inter se æquales, cum sint dimidiæ æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G,

IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H; qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat. 29. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

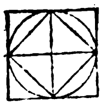
CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, DA trianguli ABD, æqualia sunt; erunt anguli ABD, ADB, æquales: est autē angulus BAD, rectus; Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC; Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulū descripsimus, quod erat faciendū. 5. primi 32. primi 6. primi



SCHOLION.

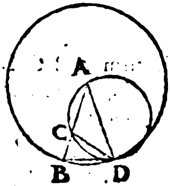
QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum uero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, ut ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.



10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulũ constituere; quod habeat utrumq; eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

11. secundi SVMATVR quæuis recta linea A B, quę diuidatur in C, ita ut rectangulũ sub A B, BC; æquale sit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo uero A B, circulus descri-
1. quarti batur, in quo accommodetur recta B D, æqualis ipsi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico utrumq; angulorum ABD, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta
5. quarti. CD, describatur circa triangulũ ACD, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectę A C, hoc est, quadrato rectæ B D; & recta A B, secat circulum D C A: tanget re-



37. tertij. cta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus
32. tertij. B D C, æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur cõmuni CDA, erit totus angulus A D B, æqua-
32. primi lis duobus angulis C A D, CDA; sed his eidem æqualis est etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis
5. primi erit angulo ADB, hoc est, angulo ABD, cum ABD, ADB,
6. primi æquales sint; ac propterea rectæ C D, B D, æquales erunt: Est autẽ B D, æqualis posita rectæ A C. Igitur & C D, ipsi
5. primi C A, æqualis erit, ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Cum igitur angulus A, ęqualis sit ostẽsus angulo BDC, erũt quoque anguli BDC, CDA, æquales; ac propterea angulus ADB, duplus erit anguli CDA, hoc est, anguli A, sibi ęqualis. Quare & angulus ABD, duplus erit eiusdẽ anguli A. Isosceles ergo triangulum cõstituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.

SCHOLION.

NON *est autem quod se excrucient Campanus, & Peletarius, ut probent, rectam B D, ita applicari circulo DCA, ut cũ nullo*

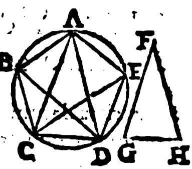
nullo modo fecet. Nã propterea quod quadratũ recta BD, aequale est rectangulo sub A B, BC, ostensum est in ultima propos. 3. lib. rectam B D, perpendicularẽ esse ad semidiametrũ circuli ex D, ductam. Quare circulũ tanget, & nulla ratione secabit.

PROBL. 11. PROPOS. 11. — 11.

IN dato circulo, pentagonum aequilaterum, & aequiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum aequilaterum, & aequiangulum. Construatur triangulum Isosceles FGH, ita ut uterq; angulorũ G, H, duplus sit reliqui F. & in circulo inscribatur triangulum ACD, aequiangulum triangulo F G H, & uterq; angulorũ ACD, ADC, bifariam diuidatur rectis C E, D B; atque rectae iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inscriptum, esse aequilaterum, & aequiangulum. Cum enim uterque angulorum A C D, A D C, duplus sit anguli C A D; & diuisus bifariam; erunt quinque anguli A D B, BDC, C A D, D C E, ACE, aequales. Quare arcus AB, BC, CD, DE, E A, super quos ascenderunt, atq; idcirco & rectae AB, BC, CD, DE, E A, aequales erunt. Aequilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus A B, E D, aequales sunt, addito communi BCD, fient aequales ABCD, EDCB; Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus insistẽtes aequales erunt. Eodẽ modo aequales erunt cuilibet horũ angulorũ reliqui anguli. Insistunt enim aequalibus arcubus. Aequiangulũ est ergo pentagonum ABCDE. Quare cũ & aequilaterum esse sit ostensum, inscriptũ erit in dato circulo pentagonum aequilaterum, & aequiangulum: Quod faciendũ erat.

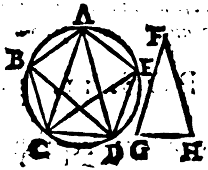
10. quarti
2. quarti
9. primi
26. tertij.
29. tertij.
27. tertij.



SCHOLION.

QVOD si detur recta linea terminata C D, super ea

constituemus petagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc
10. quarti *modo. Fiat triangulum Isosceles F G H, habens quemlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituantur anguli A C D, A D C, æquales angulis G, H, coeantq; rectæ C A, D A, in A, quæ efficient*



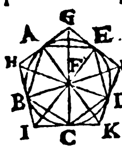
32. primi *angulum C A D, æqualem angulo F; atque propterea trianguli A C D, vterque angulorum A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam vero circa triangulum A C D, circulus describatur A B C D E; In quo cum sit inscriptum*
5. quarti
triangulum A C D, si anguli A C D, A D C, bifariam secentur, inscribetur vt prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta C D: Quod est propositum.

12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum A B C D E, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Inscribatur in
11. quarti eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducantur rectæ F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L, Cum n. anguli G A E, G E A, duobus sint rectis minores, coibunt



11. pron. rectæ A G, E G, ad partes G; & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum G H I K L, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, ac æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L; erunt quadrato rectæ F H,
47. primi æqualia tam quadrata rectarum F A, A H, quam rectarum F B, B H: Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarum F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebũt quadrata rectarũ A H, B H, æqualia; ideoq; & rectæ A H, B H,

B H, æquales erunt: Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia sunt lateribus B F, F H; trianguli BFH; Est autem & basis A H, basi B H, æqualis, ut ostensum est: erunt anguli A F H, B F H, æquales; Igitur & angu- 8. *primi*
li A H F, B H F. Duplus igitur est angulus A F B, anguli 4 *primi.*
B F H; & angulus A H B, anguli B H F. Eodem modo ostendemus, angulum B F C, duplum esse anguli B F I, &
angulũ B I C, anguli B I F. Cum igitur anguli AFB, BFC, 27. *tertij.*
sint æquales, quod insistant circunferentijs A B, B C, quæ 28. *tertij.*
æquales sunt, cum a rectis æqualibus subtendantur A B, BC; erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cum duo anguli B F H, H B F, trianguli B F H, æquales sint duobus angulis B F I, I B F, trianguli I F B, & latus il-
lis adiacens commune B F; erunt & latera B H, B I, æqua- 26. *primi*
lia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla est ergo recta H I, rectæ H B. Eademque ratione ostendemus G H, rectam duplam esse rectæ H A: Sunt autem ostensæ æquales H B, H A; igitur & earum duplæ H I, H G, æquales erũt. Similiter demonstrabimus, rectas I K, K L, L G, æquales esse cuilibet rectarum H I, H G. Aequilaterum ergo est pentagonum G H I K L. Rursus quoniam ostensum est angulos B H F, B I F, æquales esse, ac dimidios angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli B H A, B I C, æquales. Eademque ratione anguli I K L, K L G, L G H, erunt æquales cuilibet angulorum B H A, B I C. Aequiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. quod efficiendum erat.

PROBL. 13. PROPOS. 13. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribẽdus circulus in dato pentagono ABCDE;
Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, bifariam rectis 9. *primi*
A F, B F, quæ coeant in F. Cum enim anguli BAF, ABF,

 sint

sint minores duobus rectis, coibunt necessario rectae A F, B F: Connectantur deinde rectae FC, F D, FE. Quoniã igitur latera A B, B F, trianguli A B F, aequalia sunt lateribus CB, BF, triãguli CBF; Sunt autẽ & anguli ipsis contenti aequales A B F, C B F, erunt

4. primi

bases A F, CF, & anguli B A F, B C F, aequales. Cum igitur anguli B A E, B C D, ponantur aequales, & B A F, dimidium sit anguli B A E, per constructionem; erit & B C F, dimidium anguli B C D. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos C D E, D E A, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares F G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli F G A, F A G, trianguli F A G, aequales sunt duobus angulis F L A, F A L, trianguli F A L; estque latus A F, subtensum uni aequalium angulorum, commune; erunt &

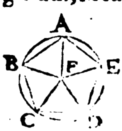
26. primi rectae F G, F L, aequales. similiterque ostendentur reliquae perpendiculares F H, F I, F K, aequales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo F G, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam uero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib 3. eo quod angulos rectos faciant cũ rectis F G, F H, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

14.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum aequilaterum, & aequiangulũ circulũ describere.

Sit circa pentagonũ A B C D E, aequilaterũ, & aequiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis B A E, A B C, bifariã rectis A F, B F, quae coeant in F; & coniũctis rectis F C, F D, F E, ostẽdemus, ut in praecedenti problemate, reliquos etiã angulos B C D, C D E, D E A, secari bifariã; Erunt ergo oẽs anguli dimidij inter se aequales, quod toti anguli aequales ponãtur. Quoniam igitur in triãgulo A F B,



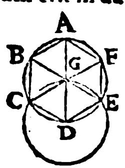
duo

duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademq; ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autẽ FA, transibit quoq; per puncta B, C, D, E. Circa datũ ergo pentagonũ, &c. Quod faciendum erat. 6. primi

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribendũ hexagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, interuallo uero DG, qui secet circulũ datũ in punctis C, & E, e quibus per centrũ G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum, & æquiangulum. Cũ enim recta GC, æqualis sit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli; erunt & rectæ GC, DC, æquales inter se. Ideoq; triangulum CDG, erit æquilaterũ. Quare tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars unius recti. Eodẽ modo erit angulus DGE, tertia pars unius recti. Sunt autẽ tres anguli CGD, DGE, EGF, ęquales duobus rectis: Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars est unius recti. Sũt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se ęquales; quibus cũ etiã ęquales sint anguli FGA, AGB, BGC, erũt sex anguli ad cẽtrũ G, ęquales. Quare circũferentię, quibus insistũt, ac propterea rectę AB, BC, CD, DE, EF, FA, ęquales erunt. Quapropter ęquilaterum est hexagonũ ABCDEF. Rursus quia circunferentia BC, æqualis est circunferentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt circunferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, AFC, æquales erunt. Similiterq; ostẽdemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorũ. Quare ęquiangulũ quoq; est hexagonum



5. primi
32. primi.
13. primi
15. primi
26. tertij.
29. tertij.
27. tertij.

num A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonũ æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendũ erat.

COROLLARIVM.

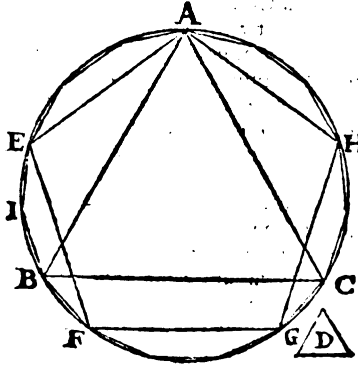
HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

CAETERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa idem hexagonum describemus circulum.

16. PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, (2. quarti) eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales. (28. tertij.) Qualiũ igitur partiũ æqualium quindecim est circunferẽtia tota ABC, talium quinque erit arcus A B, q tertia pars est totius circunferentiæ. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum (11. quarti.)



A E F G H, eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A. (28. tertij.)

HA, æquales. Qualium igitur partium æqualiũ quindecim est tota circunferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars existens totius circunferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiso ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circunferentiæ. Quare ducta recta B I, subtendet decimam quintam partem totius circunferentiæ; cui si aliæ quatuordecim æquales in circulo accomodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, ut perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod erat faciendum. 30. tertij. 1. quarti 27. tertij.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum; Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

SCHOLION I.

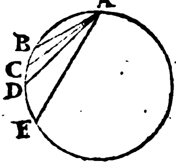
Ex huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, ac ars quædam, qua infinitæ propemodũ figuræ in dato circulo inscribantur. Nam quia recta A B, denominatur a ternario, quod sit latus trianguli æquilateri, & recta A E, a quinario, quod sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex dictis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc est, 3. exceditur a denominatore lateris A E, nempe a 5. binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiso arcu B E, bifariam in I, erit subtensa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur

du-

duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter dicta latera inclusus, tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio semper facto a puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni uero AC, & quadrati AD, trianguli deniq; æquilateri AE. Quoniã igitur denominator lateris AB, nempe 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter dicta latera inclusus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium: Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30. est tota circunferentia, taliũ 5. est arcus AB, sexta pars circunferentiæ; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circunferentiæ. Igitur arcus BC, unam talem continebit partem. Pari ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium: Nam denominator lateris AB, uidelicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24. Ita quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum. Arcus uero CD, complectetur unum latus figuræ 20. laterum; & arcus CE, duo latera figuræ 15. laterum. Arcus denique DE, continebit unum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarũ figurarum latera.



EX CAMPANO.

OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, aut circunscripta.

est quoque æquiangula. Nam figuræ inscriptæ anguli, cum insistant arcubus æqualibus, æquales erunt. Anguli uero circunscriptæ, æquales ostendentur, ductis a centro rectis lineis ad omnes angulos, & ad puncta quibus latera circulum tangunt, ut in pentagono est factum, propos. 12. 27. tertij.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoque inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterũ, figuræ 32. 64. 128. laterum, &c.

SCHOLION. II.

OMNES figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt officio Isoscelium triangulorum, ut recte hoc loco docet Peletarius.

IMPARIVM enim laterũ figuræ inscribent officio triãgulorũ Isosceliũ, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad uerticem sunt, angulorum. Vt officio Isosceles, cuius uterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad uerticem, descripti in circulo, inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulũ æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulũ æquilaterũ erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterq; angulorũ ad basin duplus sit eius, qui ad uerticem, inscribetur secunda figura imparium laterũ, utpote pentagonũ, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam ueluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonũ, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triãgulũ Isosceles habens utrumq; angulorum ad basin triplum eius, qui ad uerticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad uerticẽ. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur officio Isoscelis, cuius uterq; angulorũ ad basin quadruplus est eius, qui ad uerticem, si uterq; distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad uerticem, &c. 6. primi 23. primi 23. primi

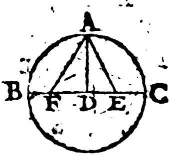
PARIVM

PARIVM vero laterum figuræ in circulo inscribentur, officio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circunferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem; subtendent ipsi tres partes circunferentiæ, & idcirco angulus ad verticem unam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sextæ parti circunferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis habentis vtrunque angulorum ad basin triplum sesquialterum angulo ad verticem, &c.

SI igitur inuenta fuisset ars, qua Isoscelia triangula construerentur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplũ anguli ad uerticem, facile in circulo describerentur figuræ omnes laterum imparium. Quod si arcus earum diuiderentur bifariam, inscriberentur quoque omnes figuræ parium laterum, atque adeo qualibet circunferentia circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuideretur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota existit: Non enim recte sibi eam uendicat Orontius Finæus in libello hactenus, ut ipse ait, desiderato, de absoluta rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, ut Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

QVONIAM vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua una eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus

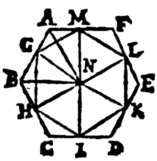
culus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æquales abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit A F, latus pentagoni, & D F, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, ut ipse demonstrat. Cæterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non uidetur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in propos. 13. differenda.



Non erit autem præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus, videlicet.

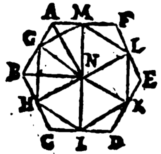
Si bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniunguntur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idem centrũ habens.

Sit enim figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, MG. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ ABCDEF, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Aequilatera quidem erit, quoniam eius latera subtendunt angulos æquales cõprehensos æqualibus rectis, utpote dimidijs laterum æqualium, æqualia sunt. Quoniam uero tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quam tres F L M, M L K, K L E, duobus sunt rectis æquales; Sunt autem A M G, L M F; F L M, K L E, inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque a basibus æqualibus: Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Aequiangula igitur quoque est figura G H I K L M. Quod autem



4. primi
13. primi.
8. primi.
13. primi

autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur



rectæ N G, N H, &c. iunctis quoque rectis N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; suntq; bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figurã descripti, æquales: Aequales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Qua-
8. primi re N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemq; modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum ostendant distantias rectarum A B, B C, &c.
14. tertij. æqualium a centro N; æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M. Quod est propositum.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM V.

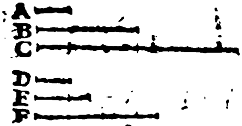
DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in præcedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata: Nunc uero in duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed pro ut una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. In hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, nõ descendendo ad ullam eius speciem, ut ad lineam, superficiẽ, vel corpus aliquod. In 6. lib. uero ostendit, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circunferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius uocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C; dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At



At uero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit a magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quedā metitur suum totum, ita ut aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quędam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum uel excedit, vel ab eodē deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc in loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hęc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia ut ex lib. 7. constabit, pars aliquanta non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duę partes tertię, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc in loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamē in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hęc utramq; illam metitur. At uero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hęc neutram illarum metiatur. Itaque pars ad multiplex refertur, feratur, & multiplex ad partem, ita minor quantitas mensurās maiorem, dicatur pars maioris; Maior uero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfecte metitur suum totū. Si enim 6. diceretur metiri 7. ut uult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundū quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, ut duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod una maior est, quam altera, uel minor, uel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (ut alijs placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, uel numerus cum linea, non dicetur ea cōparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod una est alba, & altera nigra; aut quod una est calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QVAMVIS autem in solis quantitatibus proprie reperiatur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, uoces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora considerantur, veluti quantitates.

CAETERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad

 aliam

aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea uero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si econtrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum, ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens uero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

DE PROPORTIONIBVS.

OPERAE *pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionũ apud Mathematicos, uel ob hanc præcipue utilitatem, ut ea, quæ in his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit.*

PROPORTIO *igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in his ce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis uero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati, ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, ceu in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem uero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autẽ quantitates commensurabiles, quæ habent unam cõ-*

munem

munem partem aliquotam, seu quas eadem mensura metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorũ est utriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineã 20. palmorum; Ita quoque eadem lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem unitas omnes metitur. Quantitates uero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri: Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. quamuis enim qualibet harum linearũ infinitas habeat partes aliquotas, utpote partem dimidiam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota unius, quantumuis minima, alteram metiri potest, ut demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. ultima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter dictas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

Alio modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, ut inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorũ, & lineã 10. palmorũ, &c. Inæqualitatis uero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, ut inter 20. & 10. inter 81 & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duo-

T 2 bus

bus eam connexionem, ut omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, non recte a quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non recte distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis; cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori uero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; ut a nobis factum est.

RVRSVS *proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius sub diuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeát proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quádo maior quátitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c.*

Pro-

Proportio minoris inæqualitatis est, quãdo minor quãtitas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis & superuacanea, ut multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. Sed multum inter se differunt, cum ualde diuersus sit usus utriusque, ut perspicuum est ijs, qui uel mediocriter in rebus geometricis, & regula Algebræ sunt uersati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla seclusa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniã de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, ut in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Pari ratione proportio minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis uocabulis præponatur præpositio (sub) ut in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientẽ. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora uero duo ex illis tribus composita, ut manifestũ est. Cur uero tantum sint quinq; hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, prope finem omnium proportionum ostendemus.

PROPORTIO *Multiplex, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, decies, centies, &c. continet. qualis est proportio 20. ad 4. Nam 20. comprehendunt 4. quinquies. Item linea 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c. Hæc autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minoré bis tantú continet, dicitur proportio dupla; si ter, tripla; si decies, decupla; si centies, centupla, &c. Itaque proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minoré, quando maior minorem octies complectitur. Eodemq; modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: ut proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.*

PROPORTIO *superparticularis, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper unam eius partem aliquotam, scilicet dimidiam, tertiam, quartam, &c. qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & adhuc unitatem, quæ dimidia pars est 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedú, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & adhuc lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c. Hæc quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est medietas minoris quantitatis, constituitur proportio sesqui-*

sesquialtera; Si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c. Unde ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. & inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

PROPORTIO superpartiens, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes unam aliquotá. qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres unitates, quarum qualibet est pars aliquota, utpote quinta, huius numeri 5. Constat autem ternarium ex illis compositum, non esse partem unam aliquotam numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere unam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu uidentur esse superpartientes, cum tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quamuis enim 10. contineant semel 8. & duas unitates, quarum qualibet est octaua pars numeri 8. tamen quia binarius ex illis unitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque, ut duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, ut maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant unam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt. Diuiditur primo proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes unam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c. Diuiditur deinde quodlibet horum generum, habita ratione partium aliquotarum in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inaequales, quarũ maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quod si duae illae partes fuerint quintae, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inaequales, quarum maior excedit minorem decem partibus undecimis, appellabitur superdecupartiens undecimas; Quod si decem illae partes sint decimaetertiae, uocabitur proportio superdecupartiens decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus. Ne autem proportiones superpartientes uel inter se cõfundantur, uel cum proportionibus superparticularibus, diligenter consideranda sunt ea, quae sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunq; proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter commonstrat, quotnam partes aliquotae minoris quantitatis in maiore supersint; alter uero, quotae partes, aut quãtae sint, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotan-

denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorẽ, & adhuc tres eius partes aliquotas; posterior autem ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione superpartiente duos prædictos numeros, qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, eiusmodi esse debere, ut non habeant ullam partem aliquotam communem, præter unitatem, quæ quidem est omnium numerorũ pars aliquota. Tales sunt duo prædicti numeri 3. & 8. Nam sola unitas, ut constat, est utriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habẽt præter unitatem aliã cõmunẽ mensurã, uidelicet 3. Nã ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senariũ metitur. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cũ maior quãtitas cõtineat semel minorẽ, & eius partẽ dimidiã. Eadẽ rõne nõ recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiẽs sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habẽt 2. cõem partem aliquotã, præter unitatem; atq; ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cũ maior quãtitas cõtineat minorẽ semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur nõ difficile erit unicuiq;, denominare cõueniẽter oẽs proportiones superpartiẽtes. Perspicuũ ẽt ex dictis relinquitur, cur proportionẽ superpartientẽ diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem

tertias,

tertias, quintas, septimas, nonas, &c. praetereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hae posteriores omissae, sint superparticulares, confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsae in numerum proportionum superbipartientium referrētur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, praeter unitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica edocetur, demonstraturque ab Euclide, ad initium libri 7.

PROPORTIO multiplex superparticularis, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, uel quater, &c. continet, & praeterea unam eius partem aliquotam; cuiusmodi est proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio haec cum multiplici conuenit, utpote cum dupla) & insuper comprehendunt unitatem, quae est quarta pars minoris; qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartae eadem proportio proposita similis est. Diuiditur autem proportio haec, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita. Veluti multiplex, in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper unam partem minoris quantitatis aliquotam. Vnumquodque rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio tripla superparticularis, continet sub se triplam sesquialteram, (ut quando maior quantitas minorem

rem ter continet, & præterea dimidiam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes unam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes unam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ unam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis: Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas sextas; quia duæ sextæ conficiunt unam tertiam partem: Quare uocabitur proportio tripla sesquitertia. Distribuitur autem hæc proportio primo, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c. Deinde quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c. Postremo quæuis istarum, habita ratione partium aliquotarū, in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens, diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNIA uero, quæ dicta hactenus sunt de quinque his generibus proportionum rationalium maioris in-

inæqualitatis, intelligenda sunt quoq; de quinque generibus correspondentibus minoris inæqualitatis, præmissa tamen semper præpositione (sub,) ut dictum est. Nam si in exemplis adductis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias: Ita proportio 3. ad 11. est subtripla superbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

CAETERVM ex dictis perspicue colligitur, nō posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quàm quinque iam exposita. Cum enim, ut Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunque, inter quas, ut diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, ut omnis proportio rationalis quarumcumque quātitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione constituitur proportio multiplex: aut semel tantummodo, ac præterea unam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis; aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes unam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & unam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque uero alio modo minor quantitas a maiore contineri potest. Eadem

ratione

ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis.

QVONIAM vero non exiguus est usus denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, a quibusnã numeris singulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distincte, & aperte habitudinem unius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ, est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ, est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, ut arbitror, quod Euclides in lib. 6. & cæteri Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius, quia denominator, ut diximus, ostendit, quanta sit una quantitas ad alteram, cum qua confertur, ut ex propositis exemplis constat.

Ex dictis autẽ facile colligi potest denominator cuiusq; proportionis. Denominator .n. proportionis multiplicis, quæcunque ea sit, est numerus integer; quia maior quantitas aliquoties minorem debet continere. Vt proportionis duplæ denominator, est 2. Noncuplæ 9. Centuplæ 100. millecuplæ 1000. &c. Denominatores autem proportionũ submultipliciũ multiplicibus correspõdentiũ, sũt partes aliquotæ a dictis denominatoribus denominatæ: Vt denominator proportionis

subdu-

subduplæ, est $\frac{1}{2}$; subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$: subcentuplæ, $\frac{1}{100}$: submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$; Denominator autē proportionis subquintuplæ est $\frac{1}{5}$. Eodē modo & denominatores aliarū proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis, est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est unitas; denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, ut ex dictis exemplis patet.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superparticularis, est unitas cum parte una aliquota: quoniam maior quantitas debet minorem semel tantum, & unam eius partem aliquotam comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator, est $1\frac{1}{2}$; sesquioctauæ, $1\frac{1}{8}$; sesquimillesimæ, $1\frac{1}{1000}$, &c. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores una tantum unitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est $\frac{2}{3}$; subsesquioctauæ, $\frac{8}{9}$; subsesquimillesimæ, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus unitate maior: Vt denominator proportionis subsesquidecimæ est $\frac{10}{11}$, &c.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superpartientis, est unitas cum pluribus partibus aliquotis non efficientibus unam: quia maior quantitas debet semel tantum minorem continere, & plures eius partes. Vt denominator proportionis supertripartientis

tis septimas, est $1\frac{3}{7}$; supertripartientis uigesimas, $1\frac{3}{20}$; &c. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot unitatibus minores sunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$; subsupertripartientis uigesimas, $\frac{20}{23}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis sub superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, cui si addatur numerus partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis undecimas, est $\frac{11}{15}$; Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio $\frac{5}{8}$. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientium denominatores.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis, est numerus cum una parte aliquota: qua maior quantitas continere debet minorem aliquoties, & insuper unam eius partem aliquotam. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ, est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticulariũ, sunt fractiones, quarũ numeratores numeri sunt. Vt denominator proportiónis subtriplæ sesquiseptimæ, est $\frac{7}{22}$; subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{9}{46}$; etc. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multipli-

multiplicis, addaturque unitas numero producto, habebitur denominator eiusdem fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{25}$, &c.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus cum pluribus partibus aliquotis, non constituentibus unam: quoniam maior quantitas minorem debet aliquoties comprehendere, & eius plures partes aliquotas non facientes unam. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est $3\frac{5}{8}$; quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$, &c. Denominatores uero proportionum submultiplicium superpartientiũ, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{29}$: subquadruplæ superbipartientis quintas, $\frac{5}{22}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est $\frac{13}{34}$, &c.

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis, perpetuo est unitas: quia una quantitas debet alteram semel duntaxat continere.

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

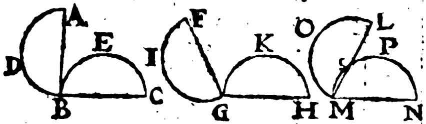
Qvod hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογια plerisque autem latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari: Vt si proportio quantitatis A, ad quãtitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus; habitudinem autẽ proportionum, Proportionalitatẽ) a scriptoribus, præsertim Boetio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu harmonica: Verum Euclides de sola Geometrica agit in hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis præcedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera uero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed uel antecedẽs tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

V v.

V.

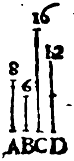
RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM *Euclides in tertia definitione habitudinē duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat proportionem, seu rationem; explicat nunc in hac 5. definitione, quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, ut proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionē habent inter se, ut mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, ut alteram tandem superet; adeo ut si alterutra quamtumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora.* 20.primi. *Ita quoque circunferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circunferentiam superat, cum omnis circunferentia circuli, ut ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrū eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum, ad modum Lunæ nouæ, quādo falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic uero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, ut & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula, & parabola maior eo quadrat,* drato. Hoc idem demonstratur a Proclo in angulis rectilineis, ac curuilineis. Ostendit enim, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describantur ADB, BEC.



Quoniã igitur anguli semicirculorum ABD, CBE, sunt æquales; addito communi angulo mixto ABE, fiet angulus totus curuilineus DBE, toti angulo recto ABC, æqualis. Similiter ostẽdes, angulum curuilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; nec non curuilineum O M P, acuto L M N, dummodo hic ab angulis semicirculorum L M O, N M P, auferas communẽ angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P; Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum, posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At uero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, ullam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiã minimo: ceu propos. 16. lib. 3. demõstrauimus. Itaque ut apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, uoluit hac definitione, eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, ut alterutra multiplicata, alteram possit superare, alias non. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare unam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus.

PERSPICVVM est ex his, quam inepte, & quam falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem duæ quæcunque propositæ quantitates habeant. Itaque ut inquit, uult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habebunt magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æquemultiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. ubi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quã illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B; Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, ut liquido constat ex verbis Euclidis.



VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundã, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrunque ab utroque uel una deficiunt, uel una æqualia sunt, uel una excedunt; si ea sumãtur, quæ inter se respondent.

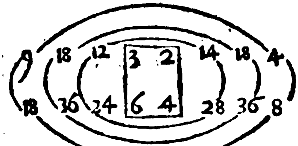
EXPLICAT hoc in loco Euclides, quænam conditiones requirant apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut rectius exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales,

qu

quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, & quartæ aliæ quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quod si iam inter se conferantur sumpta æque multiplicia ea, quæ inter se respondent, ut multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est E, & G; Item multiplex tertiæ & multiplex quartæ inter se, hoc est F, & H; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se se habere, ut si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H; Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quam H; (quod est utrumque ab utroque vel vna deficere, uel una æqualia esse, uel una excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, idest, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & ut nunquam E, equale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique ut nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æque multiplicia quæuis accepta, perpetuo se se ita habere; vt dictum est, dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G; non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, ceu in defin. 8. fiet perspicuum.

ITAQVE vt demonstratione aliqua concludantur quatuor

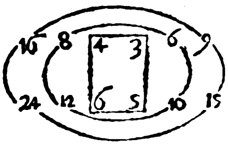
tuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cũ quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionẽ, concedatur quoque necesse est, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus conditionem. Debẽt enim definitio & definitũ reciprocari. Vt autem perspiciatur, quonã pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionem habentibus, quædã æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, a quibusdã æque multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, utrumque ab utroque una deficiant; alia uero vna æqualia sint; alia denique una excedant, si ea sumantur, quæ inter se respondẽt; placuit vnum exemplum adducere in numeris. Sint enim quatuor numeri 3. 2. 6. 4. sumanturque primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æquemultiplices, ut septupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij a 28. multiplice quarti. Rursus primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nimirum sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij æque multiplices, ut noncupli 18. & 36. Vides ergo, tã 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus in quacunque sumantur multiplicatione semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.



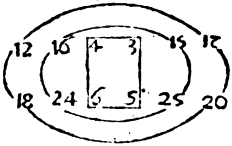
CAMPANVS vero atque Orontius, longe aliter definitionem

tionem hanc exponunt, Dicunt enim Euclidem uelle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secunda & quarta æque multiplicibus, utrumque ab utroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione; uel una æqualia sunt, vel vna excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Clarius, ut ait Campanus, quando earũ æque multiplicia proportionalia sunt, id est, cũ eandẽ proportionem habet multiplex primæ ad multiplex secundæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non uidet, si ita intelligatur definitio, Euclidem idẽ per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides uult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplicia eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est; ueluti eo in loco demonstrabimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, ut proprijs in locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, ut exposuimus, ita ut, propositis quatuor magnitudinibus in eadem proportione, si multiplex primæ deficit a multiplici secundæ, uel æquale sit, uel excedat; etiam multiplex tertiæ deficiat a multiplici quartæ, uel æquale sit, uel excedat, quicunque sit ille defectus, excessusve. Nam in 4° postea Theoremate demonstrabitur, dictum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nã si de quocumque intelligeretur, essent quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadẽ proportione. Si enim primi & tertij, vtpote 4. & 6. sumantur æque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti, nempe 3. & 5. æque multiplices, ut dupli quoque, 6. & 10. excedet iam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secundi, quam



di, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemq; cernitur si primi, & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. secundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, vt aeque multiplicia accepta una excedant se se quomodocumque, & non requiritur, ut proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3, quae est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus aeque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4 ad 3. quae est 6. ad 5. quod eorum aeque multiplices non se se excedant proportionaliter, ut constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamuis enim numeri aeque multiplices adducti se se vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel aequalis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quincuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25 multiplicem quarti, sed deficiet. Quod si primi, & tertij sumantur tripli 12. & 18 At secundi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi aequalis 12. multiplici secundi; At uero 18. multiplex tertij, aequalis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur qualibet aeque multiplicia dictorum numerorum sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque multiplex quarti; quamuis id in nonnullis aeque multiplicibus ita esse contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionē, ut adhuc clarius constabit ex 8. definitione.



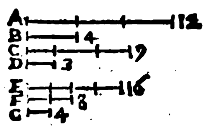
CAETERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, si modo secunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quae 6 ad 4. quoniam aeque multiplicia quaecumque sumpta ad 9. & 6. uel vna deficiunt ab aeque multi-

multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel æqualia sunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales uocentur.

Vt si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur dictæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales cõtinue, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales sunt non continue, sed discretæ, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum est in 4. definitione.



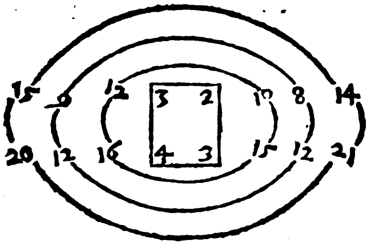
VIII.

CVM uero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ut maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartã, dicens.

dicens. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprehēsumq; fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplici secundæ, multiplex autem tertiæ non esse maius multiplici quartæ, sed uel minus, uel æquale; dicetur maior esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam: ut perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt triplicia E, & F, secundæ uero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H; Et quoniam E, multiplex primæ maius est quam G, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius non est quam H, multiplex quartæ, sed minus; idcirco maior esse dicetur proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ, ad D, quartam. Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quam tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamuis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque fieri, ut tam multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item ut & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ, uel minus est, uel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, ut perspicuum est in sequenti exemplo. Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, ut æque multiplicia earum, iuxta quasuis multiplicationes accepta, uel una deficiant, uel una æqualia sint, uel una excedant, ceu in 6. defin. fuit expositum: Ut autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex uero tertiæ non superet multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras multiplicationes.

tiones, æque multiplicia primæ, ac tertiæ excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ. Quod si aliquando e contrario multiplex primæ deficiat a multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ; dicetur prima magnitudo ad secundam minorē habere proportionem, quam

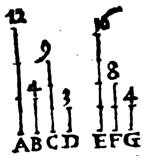


tertia ad quartam; quamuis secundum plurimas multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.

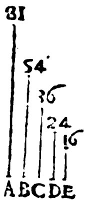
QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quā interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedens, & consequens, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duo antecedentia, ac duo consequentia. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines: At vero si fuerit continua, erunt cum minimū tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscumque, solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.



X. CVM

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.



SINT magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita vt ea sit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E. Proportio igitur A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones repenuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; vt proportio A, ad B; & B, ad C. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, nimirum proportio A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B; propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD si e contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D: At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoq; proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione; si proponantur aliquot quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Nec enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionẽ primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperiantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quã habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, ut diximus. Non autem, illam duplam esse huius, intellexit, ne Theorema proponeret, quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potius sit quincupla? At vero, illam dici huius duplicatam, nemo inficiabitur, eo quod bis sit posita, & continue proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor sit, hæc autem maior? Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius quinta pars. Quare & si proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio est eiusdẽ dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, sit sedecupla, ut hic patet 16. 4. 1.

ITAQVE hoc in loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. ut demonstrationes sequentium librorũ percipiantur, rebusq; possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Quare cum ex propositione 20. lib 6. constet, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita ut si prioris quadrati latus fuerit

rit trium palmorum, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. ut in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur, sphæras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, ceu hic perspicitur 27. 9. 3. 1. &c.

Caeterum proposita quacumque proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio sedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus in dictum productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exẽplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, ut hic vides, 64. 16. 4. 1 Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatã proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis,

portionis bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At uero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ proportionis denominatore ter posito, et sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic. 3. 3. 3. atq; ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater posito; Quincuplicata ex eodem quinquies posito, ac ita multiplicato, &c. Quocirca proportio duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapit naturam quodam modo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportio vero, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habet conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportio, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinet naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodū etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmedicos, qui Algebræ regulam exposuerunt, &c.

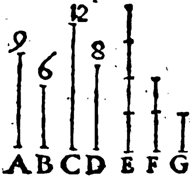
XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes uero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionū esse similitudinem. Docet iam, non solum in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologas ve, dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus

in

in quam plurimis demonstrationibus, quæ nam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quæ nam consequentia, ceu in 6. lib. perspicuum fiet.



Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D; propter similitudinem enim proportionum, necesse est, utramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem esse vtrique consequenti, vel eodẽ modo maiorem, aut minorem; Alias non haberet vtraque antecedens ad vtranque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum uides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, ubi tam E, & F, homologæ sunt, quam F, & G, vt constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinũ, nempe consequentium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat; in magnitudinibus uero non proportionalibus dissimiles.

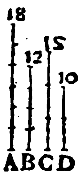
ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus uarie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; ceu in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. cõsideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi ex proportionibus.

portionibus, quorum frequentissimus est usus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, uel disiuncta proportionalitas: Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique uocatur proportio ex æqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandē esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D; dicemur argumētari a permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione utuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A. ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim; erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterum in dicto modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdē generis, ut inter binas vt ut assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur; Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, ut linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, ut perspicuum est ex defin. 5.

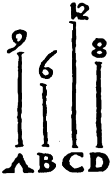


XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentē, uelut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, ut D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad

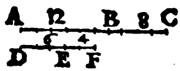
B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, uel e contrario, erit quoque B, ad A, ut D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur propos. 4 huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse unius generis, & posteriores alterius. Recte namque licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C.



XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

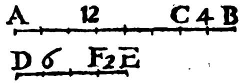
SIT proportio A B, ad B C, quæ D E, ad E F; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius A C, nempe antecedentis cum consequente, ad B C, consequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum consequente, ad E F, consequentem; Dicetur huiuscemodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, componendo ergo erit & A C, ad B C, ut D F, ad E F. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

VT si dicatur, quæ proportio est totius A B, ad C B, ea est totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, excessus, quo antecedens cõsequentem superat, ad C B, consequentem, ut D F, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad F E, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.



XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

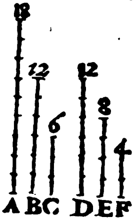
QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo A B, ad C B, ita tota D E, ad F E; igitur ita etiam erit eadẽ A B, ad A C, excessum, quo cõsequentem superat antecedens, vt D E, ad D F; Dicemur proportionem conuertere. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionẽ rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus propos. 19. huius lib.

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidẽ D, E, F, sintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc est, A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, primæ ad ultimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad ultimã in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis medijs, colliguntũ habere unã, eandemq; inter se proportionem, ceu in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, sumendo binas ac binas magnitudines in eadem proportione, atque ordinate procedendo; altero vero, cum ordo inuertitur; fit ut duplex sit proportio ex æqualitate, non quidem ratione proportionis extremorum, sed ratione proportionis magnitudinum intermediarum. Id quod clarissime duæ sequentes definitiones explicant.



XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

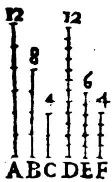
VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; Ideoque concludatur A, ad C, vt D, ad F; Di-

F; dicetur talis modus argumentandi ex æqualitate, ordinata proportio, quod in vtrisque magnitudinibus idem ordo in proportionibus seruetur. Hic autem modus demonstratur propos. 22. huius lib.

XIX.

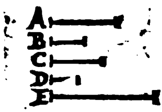
PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs quæ sint his multitudine pares; ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

Si, ut ex æqualitate colligatur eadem proportio extremorum, ordo in proportionibus perturbetur, ita ut dicatur, quemadmodum A, ad B, Ita E, ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B. consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinib⁹ aliud quidpiã ad E, antecedentẽ magnitudinẽ; nuncupabitur huiuscemodi mod⁹ argumentandi ex æqualitate, Perturbata proportio, ꝗ nõ seruetur idẽ ordo in proportionib⁹ magnitudinum. Consecutionem uero hanc ualidam esse, ostendetur propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quã ordinata, semper infert ex æqualitate eandẽ extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, ceu propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.



VTVNTVR Euclidis interpretes hoc in libro, & in alijs, ubi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate *quodam, quod ut hic subijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.*

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

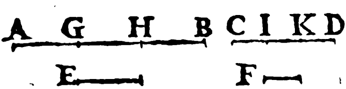


VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Non enim ex hoc absurdum aliquod consequitur, quamuis ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, quam sane esse posse, dubitandũ non est.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI sint quotcunq; magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quã multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines A B, C D, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex A B, ipsius E, uel C D, ipsius F. Cum enim A B, C D, sint æque multiplices ipsarum E, & F; si A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipsi E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipsi F, æquales; erũt magni-



magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot sunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, erunt A G, C I, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt G H, & I K, simul, æquales ipsis E, & F, simul; Nec non H B, & K D, eisdem E, & F. Quoties igitur E. in A B, uel F, in C D, continetur, toties & E, F, simul, in A B, C D, simul comprehenduntur: Ideoque; quam multiplex est A B, ipsius E, tam sunt multiplices A B, C D, simul, ipsarũ E, & F, simul. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum. 2. pron.

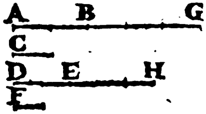
SCHOLION.

Hoc idem demonstrabitur vniuerse in omni genere proportionis, propos. 12.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

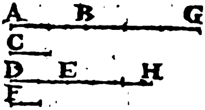
SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cũ quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

Sit magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex D E, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cũ B G, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quã multiplex est D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartę. Cum enim A B, D E, sint æque multiplices ipsarum C, F; erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æqua-



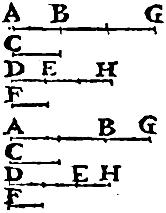
les, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erũt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H; erunt totę multitudines A G, D H, æquales. Quare toties cõprehẽditur C, in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

2. pron.



SCHOLION.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ: Quinta vero & sexta, æquemultiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æquemultiplices fuerint secundæ, & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota A G, (prima, & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota D H, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinũ æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, ceu perspicuum est in proposito schemate. Si uero tam prima & tertia, quam quinta, & sexta æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius existit, primam & quintam simul; atque tertiam & sextam simul, æquemultiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.



HOC quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis uniuersæ propos. 24.

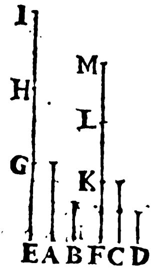
3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æquemultiplex,

atque

atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, & F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo, tam multiplicem esse E, ipsius B, quam est F, ipsius D; Nã cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, ut in E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam uero EG, F K, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt G H, K L; Itẽ H I, LM, æque multiplices earundem B, & D. Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex F K, tertia quartæ D; Item G H, quinta tam multiplex est eiusdem secundæ B, quam multiplex est K L, sexta eiusdem quartæ D; Erit & E H, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex F L, composita ex tertia & sexta, quartę D. Rursus cum sit E H, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est F L, tertia quartæ D; sit autem & H I, quinta, tam multiplex secundæ B, quam est L M, sexta multiplex quartæ D; Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est F M, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. 2.quinti.



Quod ostendendum erat.

SCHO-

SCHOLION.

OSTENDETVR hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ binæ sumptæ eandem habent proportionem.

4. ## THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quãuis multiplicationem. Dico quoque esse ut E, multiplicem primæ ad G, multiplicẽ secundæ, ita F, multiplicem tertiæ ad H, multiplicem quartæ. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundę, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primę ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; sumptæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ; Item L, M, æque multiplices secundæ & quar-

3. quinti.

& quartæ; fit ut si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis sit ipsi L, etiam K, ipsi M, sit æqualis: & si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus ipsarum E, & F, nec non magnitudinum G, & H. Itaque cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, ęque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque esse M, multiplici quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: Erit, ut E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum. 6.defin.5. 6.defin.5.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si quatuor quantitates fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione, proportionales esse. Cum enim, propterea quod sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, ostensum sit, si I, multiplex primæ minor fuerit quam L, multiplex secundæ, uel ęqualis, uel maior, etiam K, multiplicem tertiæ minorem esse, uel æqualem, uel maiorem M, multiplici quartæ; Perspicuum est, si e contrario L, maior fuerit quam I, uel æqualis, uel minor, etiam M, maiorem fore, uel æqualem, uel minorem, quam K, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si utraque I, K, minor est quam utraque L, M; erit contra utraque L, M, maior quã I, K, &c. Quare erit ut B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. 6.defin.5.

SCHOLION.

ORONTIVS *quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, ut K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, ut F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est uitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstra-* *tur*

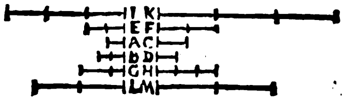
tur conuersum 6. definitionis, per conuersum eiusdem, atque idcirco idem per idem, quod est absurdum; tum etiam, quia eodem modo statim a principio licuisset illi inferre, sic esse, per conuersum 6. definitionis E, ad G, ut F, ad H, sine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quam in his. Reÿcienda est ergo huiuscemodi demonstratio, una cum expositione 6. definitionis, ut supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quam L, uel æqualis, uel maior, etiam K, minorem esse, uel æqualem, uel maiorem, quam M; quemadmodum & idem constat in æque multiplicibus E, F, G, H, si sumantur, pro ut inter se respondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, ut est F, tertia ad H, quartam.

CAETERVM *non uidetur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis mathematicis ualde familiare, quamuis a nemine, quod sciam, sit demonstratum. Videlicet.*

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad secundam, & quartam magnitudines, eandem habebunt ratione͂: Necnon æque multiplices secundæ & quartæ ad primam & tertiam magnitudines. Et contra eandem ratione͂ habebunt secunda & quarta, ad æque multiplices primæ & tertiæ; Nec non prima & tertia, ad æque multiplices secundæ & quartæ.

SIT *A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, sumanturque F, & F, æque multiplices ipsarum A, & C; Item G, & H, æque multiplices ipsarum B, & D. Dico ita esse E, ad B, ut F, ad D; Item G, ad A, ut H, ad C; Et e conuerso,*

uerso, ita esse B, ad E, ut D, ad F; Item A, ad G, ut C, ad H. Sumantur enim rursus ipsarum E, F, æque multiplices I, K; Item ipsarum G, H, æque multiplices L, M. Erũt igitur ex æquo, ut ante probatum est, 3. quinti.



I, K, æque multiplices ipsarum A, C; Item L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Quocirca si I, multiplex primæ A, deficit a G, multiplici secundæ B, etiam K, multiplex tertiæ C, 6.defin.5.
deficiet ab H, multiplici quartæ, &c. Igitur erit ut E, prima ad B, secundam, ita F, tertia ad D, quartam. Eodem modo 6.defin.5.
ostendetur, ut est G, ad A, ita esse H, ad C; Atque idcirco erit conuertendo, ut B, ad E, ita D, ad F; Item ut A, ad G, ita C, ad H,

Ex quo constat modus argumentandi, quo frequentissime utuntur Geometræ, maxime Apollonius Pergæus, Archimedes, Theon, &c. Videlicet; Ut est A, ad B, ita est C, ad D; ergo ut duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius A, utpote E, ad B; ita quoque erit duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius C, quale est F, ad D. Item ut est A, ad B, Ita est C, ad D; igitur ut A, ad duplum uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius B, nempe ad G; ita erit quoque C, ad duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius D, nimirum ad H.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

ITA multiplex sit tota A B, totius C D, ut est multiplex A E, ablata ablatę C F: Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reliquæ C D, ut est tota A B, totius C D. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis uidelicet

delicet ipsius GC, ut est A E, ipsius C F. Quoniam igitur A E, E B; æque sunt multiplices ipsarum C F, G C; erit

1. quinti. tota A B, totius G F, ita multiplex, ut A E, ipsius C F, hoc est, omnes omnium, ut una unius. Sed tam multiplex ponitur A B, ipsius C D, quam est multiplex A E, ipsius C F; Igitur A B, tam est multiplex ipsius G F, quam ipsius C D; atque idcirco æquales sunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipsius F D, quam multiplex est ipsius G C. Sed ita multiplex posita fuit E B, ipsius G C, ut A E, ipsius C F, hoc est, ut tota A B, totius C D. Quare tam multiplex est reliqua E B, reliquæ F D, quam est tota A B, totius C D: quod est propositum.

Aliter. Sit ita multiplex tota A B, totius C D, ut ablata A E, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquę F D, esse sic multiplicem, ut est

tota toti⁹. Posita enim G A, ita multiplici ipsius F D, ut est A E, ipsius C F; erit to-

1.. quinti ta G E, sic multiplex totius C D, ut A E, ipsius C F. Sed ita quoque multiplex est A B, eiusdem C D, ut A E, ipsius C F, ex hypothesi: Aeque multiplices sunt igitur G E, A B, ipsius C D, atque adeo inter se æquales. Quare dempta communi A E, æquales erunt G A, E B; Ideoque ęque multiplices ipsius F D, cum G A, sit multiplex posita ipsius F D: Atqui ita est multiplex posita G A, ipsius F D, ut A B, ipsius C D; Igitur & E B, reliqua sic erit multiplex ipsius F D, reliquæ, ut A B, tota totius C D; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis ęque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

VNIVERSE idipsum demonstrabitur propos. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, &c.

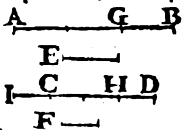
THEOR

THEOR. 6. PROPOS. 6.

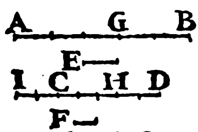
6.

SI, duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdẽ aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

SINT AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG; erit reliqua GB, uel æqualis ipſi E, uel eius multiplex, alias inęqualis, uel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E; Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quam CH, tertia quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartę F; erit AB, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, ut HI, tertia cum ſexta, quartæ F; Atqui CD, ipſius F, erat quoque tam multiplex quã AB, ipſius E; Aeque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F; Ideoque æquales inter ſe. Quare dempta CH, communi, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. quod eſt propoſitum. *2. quinti.*



SIT ſecundo GB, multiplex ipſius E; Dico ita quoque eſſe multiplicem HD, ipſius F. Poſita namque CI, ita multiplici ipſius F, ut eſt multiplex GB, ipſius E, erit, ut prius AB, ita multiplex ipſius E, ut HI, ipſius F. Quare iterum ęquales erunt HI, CD, atque adeo reliquæ CI, HD; *2. quinti.*



H D; sed C I, est ita multiplex ipsius F, ut G B, ipsius E, ex hypothesi. Igitur & H D, tam multiplex erit ipsius F, quam G B, ipsius E, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

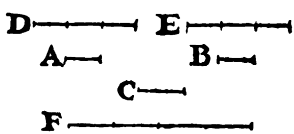
SCHOLION.

HOC quoque ostendemus uniuerse propos. 24. in omni genere proportionis.

7.
THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C; Item C, ad A, & B. Sumantur D, E. æque multiplices ipsarũ æqualium A, B, eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, utcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sũt, fit ut utraque uel minor sit, quam F, uel æqualis, uel maior, iuxta quã cunque multiplicationẽ id fiat.



Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplici secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinũ, &c.) uel æquales, uel maiores; Erit ea proportio primæ A, ad C, secundã, quæ tertiæ B, ad C, quartam. Eodem pacto ostendemus F, uel minorem esse utraque D, E, uel utrique æqualẽ, uel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat a D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartę B; uel una æqualis sit, uel maior; Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartã B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi

6. defin. 5.

6. defin. 5.

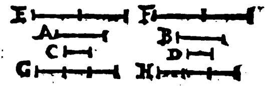
per

per coroll, 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit esse A, ad C, ut B, ad C, erit contra C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem; Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

PERSPICVVM est, nihil poße in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neq; enim per demonstrationem constat, utranque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; sed solum, cũ illæ sint æquales, utramque esse uel minorem, uel æqualem, uel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt.

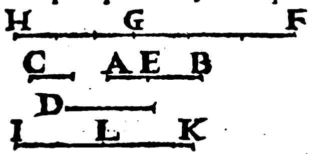
EODEM fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C, & D, secundæ, & quartæ; Erũt tam E, & F, inter se æquales, quam G, & H, inter se, ut constat ex ijs, quæ in 1. lib. docuimus, cum axioma sextum expli-caremus; quod E, & F, sint æqualium A, & B, æque multiplices, necnon G, & H, æque multiplices quoque æqualium C, & D. Quare si E, multiplex primæ deficit a G, multiplici secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplici quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam, ex defin. 5. Quod est propositum.



THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maioré.

SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At e conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad A B; Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, ut sit reliqua E B; Vtraq; deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, ut G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quam D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed uel maior, uel æqualis. Quoniam igitur duæ F G, G H, æque multiplices sunt duarũ



1. quinti. B E, E A; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, ut H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & A E: Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proxime maior sit, quam H G, nempe dupla. Quod si dupla, maior non fuerit quam H G, sumatur tripla, uel quadrupla, &c. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, non erit I L, maior, quam H G, (alias I K, non erit multiplex ipsius D, proxime maior quam H G; sed & I L, maior erit quam H G) & idcirco H G, erit uel æqualis ipsi I L, uel maior. Et quia F G, maior est posita quam D; L K, uero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K; Est autem H G, non minor, quã I L, ut demonstratũ est, sed uel æqualis, uel maior: Erit igitur tota F H, maior quam I K. Itaq; cum F H, H G, sint æque multiplices primæ A B, & tertiæ C; Atque I K, multiplex ipsius D, quę instar est secundæ & quartæ; sit autẽ F H, multiplex primæ, maior quã I K, multiplex secundę; At H G, multiplex tertiæ non sit maior, quã I K, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi (sumpta enim est I K, multiplex maior quã H G) erit maior proportio

8. defin. 5. A B, primę ad D, secundam, quã C, tertiæ ad D, quartam.

QVONIAM uero e contrario I K, multiplex primæ D, (ponitur

D, (ponitur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda, & A B, quarta) maior est quam H G; multiplex secundæ C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non est, quam F H, multiplex quartæ A B, immo minor, cum F H, maior sit, quam I K, ut ostensum est; Erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum. 8. *defin*. 5.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

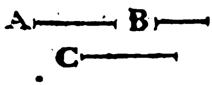
QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; sunt inter se æquales.

HABEANT primo A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera nempe A, maior & B, minor. Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quã B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat secundo C, eandem proportionem ad A, & B; Dico adhuc A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat. 8. *quinti*. 8. *quinti*.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

Habeat primo A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B. Si
7. quinti. enim A, foret ipsi B, æqualis, haberent A, & B, eandem pro portionem ad C; Si autem A, minor esset, quam B, haberet B, ma-

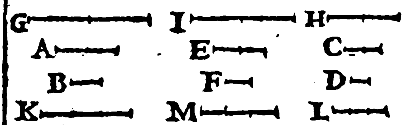


8. quinti. ior ad C, maiorem proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis uel minor quam C, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse, quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; alioqui haberet C, ean-
7. quinti. dem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque uero B, maior erit quam A; alias haberet C, ad
8. quinti. minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorẽ: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quã A; quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

Sint proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quęcunque G, H, I; & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcun-



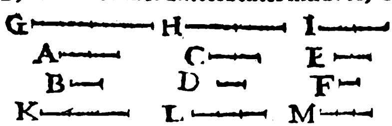
que æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut E, tertia ad F, quartam; fit,

fit, ut si G, multiplex primæ deficit a K, multiplici secun- 6.defin.5.
dæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplici
quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, uel maior, æqualis quo
que sit I, ipsi M, uel maior: sed (ut eodem modo ostende- 6.defin.5.
tur) si I, minor est, quam M, uel æqualis, uel maior, est quo
que H, minor, quàm L, uel æqualis, uel maior, propterea
quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad
D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit a
K, multiplici secundæ B deficiet quoque H, multiplex ter
tiæ C, ab L, multiplici quartæ D; Et si G, æqualis est, uel
maior quam K, etiam H, æqualis erit uel maior quam L.
Idemque ostendetur accidere in quibuscunque æque multi-
plicibus. Quapropter erit A, prima ad B, secundam, ut C, 6.defin.5.
tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem ratio-
nes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 12.

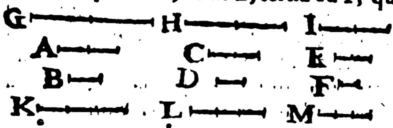
SI sint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, ut C, ad D; & E, ad F. Dico ut est una antecedentium ad unam consequentiũ, nimirum A, ad B; ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque



multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, erunt omnes G, H, I, simul omnium
A, C, E, simul ita multiplices, ut una unius nempe ut G, 1. quinti.

ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipsius B. Quoniam uero ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut E, tertia ad F, quartam; fit ut si G,
6.defin.5. multiplex primæ deficit a K, multiplici secundæ, deficiat quoq; H,



multiplex tertiæ ab L, multiplici quartæ, & I, ab M; Et si G, æqualis est ipsi K, uel maior, æqualis quoque fit H, ipsi L, & I, ipsi M, uel maior. Quare si G, minor est, uel æqualis, uel maior quam K, erunt & omnes G, H, I, omnibus K, L, M, minores, uel æquales, uel maiores. Quocirca ut est A, prima ad B, secundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartã.
6.defin.5. Si sint itaq; magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

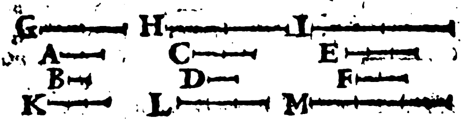
13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia uero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B; secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D,
6.defin.5. quartam; fit ut si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam

L, mul-

L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando 8. defin. 5.
erit, aliquando minor, qđ maior po-



natur proportio C, primæ ad D, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur si G, excedit K, non necessario I, excedit M. Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat. 8. defin. 5.

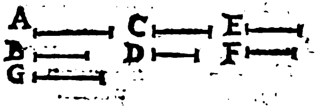
SCHOLION.

QVOD *si proportio C, tertia ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, sextam; erit quoque proportio A, prima ad B, secundam minor quam E, quintæ ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quam E, ad F, hoc est, proportio E, ad F, maior quam C, ad D; fit ut si I, excedit ipsam M, non necessario H, excedat ipsam L, sed aliquando deficiat, uel ei æqualis sit. Sed si H, deficit ab L, uel ei æqualis est, etiam G, deficiet a K, uel ei erit aqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessario G, excedet ipsam K; atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, secundam, quam A, tertiæ ad B, quartam, hoc est, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F, quod est propositum.* 8. defin. 5. 8. defin. 5. 8. defin. 5.

EODEM *modo. Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.*

QVOD *si prima ad secundam, minorem habuerit rationē, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundā, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.*

SIT *pportio A, ad B, maior, quā C, ad D; & C, ad D, maior, quā E, ad F. Dico proportionem A, ad B, maiorem quoque esse,* quam E, ad F. Sit enim ut C, ad D, ita G, ad B; ita ut A, ad B, maiorem habeat rationem, quam G, ad B. Quo posito, erit ratio



13. quinti. G, ad B, maior quam E, ad F; Cum igitur ratio A, ad B, maior sit quam G, ad B; multo maior erit ratio A, ad B, quam E, ad F.

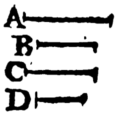
IAM vero, si proportio A, ad B, minor fuerit, quam C, ad D; & C, ad D, minor, quam E, ad F; demonstrabimus, per ea, quæ in hoc scholio ostensa sunt, proportionem G, ad B, minorem esse quam E, ad F. Cum ergo proportio A, ad B, minor sit quam G, ad B; erit multo minor proportio A, ad B, quam E, ad F.

14.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima uero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si uero minor, & minor erit.

SIT A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D; Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D; Si denique A, minor fuerit quã C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primo A, maior quã

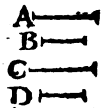


8. quinti. C, eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, ut ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam; Maior quoque erit

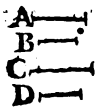
13. quinti. proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sex-

B, sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque B, ma- 10. quinti.
ior erit quam D, quod est propositum.

Sit secundo A, æqualis ipsi C, eritque id-
circo A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur pro- 7. quinti.
portiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt
proportioni A, ad B, erunt quoque inter se 11. quinti.
eædem proportiones C, ad D, & C, ad B;
Ideoque æquales erunt B, & D, quod est propositum. 9. quinti.



Sit tertio A, minor quam C, eritque ob
hoc maior proportio C, maioris ad B, quam 8. quinti.
A, minoris ad B, eandem: Quoniam igitur
est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad
B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad
B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam; Minor
quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam 13. quinti.
C, quintæ ad B, sextam; Ideoque B, minor erit, quam D, 10. quinti.
quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandē
habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 15. PROPOS. 15. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

Sint partium A, & B, æque multiplices C D, & E F. Dico ita esse C D, ad E F, ut A, ad B. Cum enim C D, & E F, sint æque multiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidatur ergo C D, in partes C G, G H, H D, æquales ipsi A; & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipsi B; eritque C G, ad E I, ut A, ad B, ex scholio propos 7. huius lib. quod C G, & A, æquales inter se sint, nec non E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K; & H D, ad K F, ut A, ad B; Ideoque

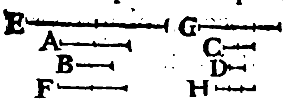
11. quinti. B; Ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionē. Quo circa ut CG, ad EI, hoc est, ut A, ad

12. quinti. B, ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul, ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaque cū pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

16. **THEOR. 16. PROPOS. 16.**

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erūt.

SIT A, ad B, ut C, ad D. Dico uicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, ut B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, æque multiplices E, F; Item ipsarum C, D,
15. quinti. æque multiplices G, H; eritque E, ad F, ut A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F; & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad



11. quinti. B; erunt & ipsæ inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F; & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D, erunt & ipsæ eædem inter se, hoc est, ut est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare si E,
14. quinti. maior est quam G, uel æqualis, uel minor, erit quoque F, maior quam H, uel æqualis, uel minor, in quacunque multi-
6. defin. 5. plicatione. Est igitur A, prima ad C, secundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his una deficiant, uel una æquales sint, uel una excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

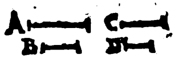
SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc & illud demonstrabitur.

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima uero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

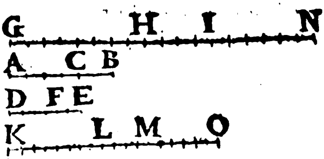
Sit enim ut A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorē esse quarta D; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Erit enim permutando, ut A, ad C, ita B, ad 16. quinti.
D. Quare si A, maior est, quam B, erit 14. quinti.
& C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.



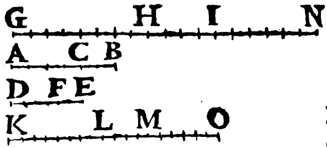
THEOR. 17. PROPOS. 17. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, AB, ad CB, ut DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM, eritque GI, ita multiplex ipsius AB, ut est GH, ipsius AC, 1. quinti.
hoc est



hoc est, ut K L, ipsius D F; sed ut est multiplex K L, ipsius
1. quinti. D F, ita quoque multiplex est K M, ipsius D E. Aeque multiplices ergo sunt G I, K M, ipsarum A B, D E: Capiantur rursus I N, M O, æque multiplices ipsarũ C B, F E. Quoniam igitur sic est multiplex H I, prima secundæ C B, ut L M, tertia quartæ F E; Itẽ itã est multiplex I N, quinta secundæ CB, quã M O, sexta quartæ F E;



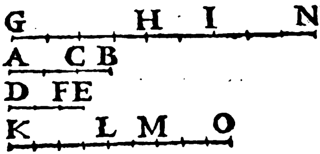
2. quinti. erit & H N, sic multiplex secundæ C B, ut L O, multiplex est quartæ F E. Itaque cum sit A B, prima ad C B, secundam, ut D E, tertia ad F E, quartam; sumptæque sint æque multiplices primæ ac tertiæ; Item secundæ & quartæ; sit ut si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici secundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab L O, multiplici quartæ F E; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Deficiat nunc G I, ab H N, & K M, ab L O. Ablatis ergo communibus H I, L M, deficiet quoq; G H, ab I N, & K L, ab M O. Quod si G I, æqualis fuerit ipsi H N, & K M, ipsi L O, erit & G H, æqualis ipsi I N, & K L, ipsi M O. Et si G I, excesserit ipsam H N, & K M, ipsam L O; excedet quoque G H, ipsam I N, & K L, *ipsam* M O. Quam ob rem cum G H, K L, sumptæ *sint* æque multiplices primæ A C, & tertiæ D F; Item I N, M O, æque multiplices secundæ C B, & quartæ F E, ostensumq; sit, æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus
6. defin. 5. secundæ & quartæ uel una deficere, uel una æquales esse, uel una excedere; Erit A C, prima ad C B, secundam, ut D F, tertia ad F E, quartam. quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

18. THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales,

nales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

SINT diuisæ magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales, hoc est, A C, ad C B, ut D F, ad F E; Dico eas etiam compositas proportionales esse, ut A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumantur enim, ut prius, ipsarum A C, C B, D F, F E, æque multiplices G H, H I, K L, L M; Item ipsarum C B, F E, aliæ æque multiplices I N, M O; eruntque rursus G I,



K M, ipsarum A B, D E, æque multiplices. Item H N, L O, ipsarum C B, F E, ceu in præcedenti Theoremate ostensum fuit. Quoniam uero ponitur esse A C, prima ad C B, secundam, ut D F, tertia ad F E, quartam; sumptæque sunt æque multiplices primæ ac tertiæ; Item secundæ & quartæ; fit ut si G H, multiplex primæ deficit ab I N, multiplici secundæ, etiam K L, multiplex tertiæ deficiat ab M O, multiplici quartæ; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Deficiat nunc G H, ab I N, & K L, ab M O: additis igitur communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N, & K M, ab L O. Quod si G H, æqualis fuerit ipsi I N, & K L, ipsi M O, erit & G I, ipsi H N, æqualis, & K M, ipsi L O: Et si G H, excesserit ipsam I N, & K L, ipsam M O, excedet quoque G I, ipsam H N, & K M, ipsam L O. Quoniam ergo si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici secundæ C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplici quartæ F E; & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit; erit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam: quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

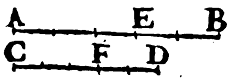
1. quinti.
2. quinti.
6. defin. 5.
6. defin. 5.

THEOR.

19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

SIT tota A B, ad totam C D, ut ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, esse ad reliquam F D, ut est tota A, ad totam C D. Cum enim sit A B, ad C D, ut A E,



16. quinti. ad C F, erit & permutando A B, ad A E, ut C D, ad C F. Diuidendo ergo erit E B, ad A E, ut
17. quinti F D, ad C F: quare permutando rursus erit E B, ad F D, ut A E, ad C F, hoc est ut tota
16. quinti. A B, ad totam C D, cum posita sit A B, ad C D, ut A E, ad C F; Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur a conuersione rationis, iuxta 16. defin.
SIT enim A B, ad E B, ut C D, ad F D; Dico per conuersionẽ rationis esse quoque A B, ad A E, ut C D, ad C F; Cum enim sit
16. quinti. A B, ad E B, ut C D, ad F D; erit permutando A B, tota ad CD, totam ut E B, ablata ad F D, ablatam: ut igitur tota A B, ad totã CD,
19. quinti. ita A E, reliqua ad C F, reliquam. Permutando ergo rursus erit
16. quinti. A B, ad A E, ut C D, ad C F: quod est propositum.

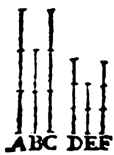
20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quã tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta.

ta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitndines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F, sit autem primo A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B; est autem ut A, ad B, ita D, ad E; maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B; At ut C, ad B, ita F, ad E; (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit conuertendo ut C, ad B, ita F, ad E,) maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E; Quare D, maior erit, quam F; quod est propositum. 8. quinti. 13. quinti. 10. quinti.

SIT secundo A, æqualis ipsi C; Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, erit A, ad B, ut C, ad B; est autem ut A ad B, ita D, ad E; Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B; At ut C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, uti prius. Quare erit D, ad E, ut F, ad E; Ideoque æquales erunt D, & F; Quod est propositum. 7. quinti. 11. quinti. 9. quinti.



SIT tertio A, minor quam C; Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; sed ut A, ad B, ita D, ad E; Minor ergo proportio est D, ad E, quā C, ad B; Est autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E; Igitur minor est proportio D ad E, quam F ad E; propterea que D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum. 8. quinti. 10. quinti.

THEOR.

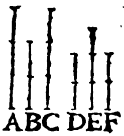
21. THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quã tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; Sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E; Sit autem primo A. prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim

8. *quinti.* A, maior sit quam C, erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B; est autem ut A, ad B, ita E, ad F: Maior ergo proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam uero ut B,
4. *quinti.* ad C, ita D, ad E, erit conuertendo ut C, ad B, ita E, ad F. Quare maior erit proportio E, ad F, quam E, ad D;
10. *quinti.* Ideoque maior erit D, quam F; quod est propositum.

SIT secundo A, ipsi C, æqualis; Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis



7. *quinti.* ipsi C, erit A, ad B, ut C, ad B; sed ut A, ad B, ita est E, ad F: Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F; est autem, ex inuersa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, ueluti prius. Igitur erit ut E, ad F, ita E, ad D; atque idcirco D, ipsi
9. *quinti.* F, æqualis erit; quod est propositum.

SIT tertio A, minor, quam C; Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, erit minor
8. *quinti.* proportio A, ad B, quam C, ad B; Vt autem A, ad B, ita E, ad F: minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B.

Quoniam

Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione vt C. ad B, Ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F; quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat. 10. quinti.

THEOR. 22. PROPOS. 22. 22.

SI sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunq; magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, sitq; A, ad B, vt D ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F; Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; erit quoq; G, multiplex primæ ad I, multiplicem secundæ, vt H, multiplex tertiæ ad K, multiplicem quartæ. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secūdam, vt E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ ad L; multiplicem secundæ, vt K, multiplex tertiæ ad M, multiplicem quartæ. 4. quinti.

Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur, sit vt si G, superat ipsam L, superet quoque H, ipsam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaq; cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiāt vna ab L, M, æquemultiplicibus secūdæ C, & quartæ F, vel vna æqua- 20. quinti.

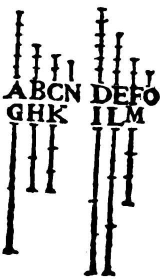
les sint, vel vna excedat, in quacũq; multiplicatione; Erit A,
6. defin. 5. prima ad C, secũdã vt D, tertia ad F, quartã. qđ est ꝓpositũ.

Quod si fuerint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiã C, ad N, vt F, ad O; Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cũ.n.iã sit ostẽsum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur aũt C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadẽ rõne sumũtur: ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostẽsa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodẽq; modo idẽ ostẽdetur in quinq; magnitudinib⁹, per quatuor; sicut id in quatuor demõstratũ fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaq; si sint quotcũq; magnitudines, &c. Quod erat ostendẽdũ.

23.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæq; ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earũ proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoq; ex æqualitate esse vt A, ad C, Ita D, ad F. Sumptis.n. ipsarũ A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Itẽ ipsarũ C, E, F, æquemultiplicib⁹ K, L, M; Erit vt A, ad B, ita
15. quinti. G, ad H, cum G, H, sint ipsarũ A, B, æquemultiplices; At vt A, ad B, ita est
11. quinti. E, ad F. Igitur vt G, ad H, ita est E, ad F;
15. quinti. Sed vt E, ad F, ita est quoq; L, ad M. qđ
L, M,

L,M, sint ipsarũ E,F, ęquemultiplices. Igitur erit vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniã est B, prima ad C, secũdã, ut D, tertia ad E, quartã; erit quoq; ut H, multiplex primæ ad K, multiplicẽ secundæ, ita I, multiplex tertiæ ad L, multiplicem quartæ. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadẽ rõne sumũtur, estq; earũ proportio perturbata; fit ut si G, superat ipsã K, superet quoq; I, ipsam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaq; cũ G, I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, a K, & M, æquemultiplicibus secũdæ C, & quartæ F, uel una deficiant, uel una æqualia sint, uel una excedant; erit ut A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. — 1. quinti. / 4. quinti. / 21. quinti. / 6. def. 5.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio perturbata, ut si fuerit A, ad B, ut F, ad O; & B, ad C, ut E, ad F; & C, ad N, ut D, ad E. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, ut D, ad E; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quę binæ in eadem sumuntur proportione, estq; perturbata earum proportio: Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 24. PROPOS. 24. — 24.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

SIT A B, prima ad C, secundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, vt E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt
4. quinti. C, ad B G, ita F, ad E H.

Quoniã igitur est A B, ad C, vt D E, ad F; & C,
22. quinti. ad B G, vt F, ad E H; erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad
18. quinti. E H: componendo igitur erit vt tota A G ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cum rursus sit A G, ad B G, vt D H,
22. quinti. ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F; erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theorema sextum huius lib. demonstrauit in æquemultiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

Si duę magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionẽ, & detractæ quędam habeant ad easdem eandẽ proportionẽ: & reliquæ ad easdem eandẽ proportionẽ habebũt.

HABEANT A G, D H, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit A G, ad C, vt D H, ad F. Item detracta A B, D E, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem, ita vt sit quoque A B, ad C, vt D E, ad F; Dico & reliquas B G, E H, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse B G, ad C, vt E H, ad F. Cum enim sit vt A B,
4. quinti. *ad C, ita D E, ad F; erit conuertendo vt C, ad A B, ita F, ad D E. Quoniam igitur est A G, ad C, vt D H, ad F; & C, ad*
22. quinti. *A B, vt F, ad D E; erit ex æqualitate A G, ad A B, vt D H,*
17. quinti. *ad D E. Diuidendo ergo erit vt B G, ad A B, ita E H, ad D E,*

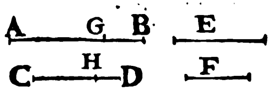
Itaq;

Itaque cum rursus sit B G, *ad* A B, *vt* E H, *ad* D E; *&* A B, *ad* C, *vt* D E, *ad* F; *erit ex æquali* B G, *ad* C, *vt* E H, *ad* F. 22. quinti.
Quod est propositum.

THEOR. 25. PROPOS. 25. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT A B, ad C D, vt E, ad F, sitq; A B, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, simul esse maiores duabus C D, & E, simul. Auferatur enim ex A B, magnitudo A G, æqualis ipsi E; & ex C D, alia C H, æqualis ipsi F; Erit igitur A G, ad C H, vt E, ad F, hoc est, vt A B, ad C D. Quare cum sit tota A B, ad totam C D, vt ablata A G, ad ablatam C H; erit quoq; vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua G B, ad reliquam H D. Est autem 19. quinti.
A B, (cum sit omnium maxima) maior, quam C D: Igitur & G B, maior erit quam H D. Quoniam vero A G, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & C H; fient A G, & F, simul æquales ipsis E, & C H, simul. Additis igitur inæqualibus G B, & H D, fient A B, & F, simul maiores quam E, & C D, simul, cum G B, sit maior quam H D. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

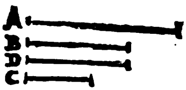


SCHOLION.

NECESSE *est autem, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam, ceu in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt* A B, *ad* C D, *ita* E, *ad* F; *&* A B, *maior quã* E; *erit quoq;* C D, *maior quam* F. *Item quia maior est* A B, 14. quinti.
quam C D, *erit quoque* E, *maior quam* F. *Quod si e contrario*

antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neq; ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C. Sitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul, vt proxime demonstratum est, hoc est, quã dupla ipsius B. Quod est propositũ.

HIC finem Euclides imponit quinto libro; Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, nec non in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autẽ traduntur de magnitudinibꝰ improportionalibus, quarum prima hæc est.

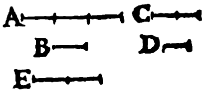
26. THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartã: habebit cõuertẽdo secũda ad primã minorẽ proportionẽ, quã quarta ad tertiam.

HABEAT A, ad B, maiorẽ proportionẽ, quã C, ad D. Dico proportionẽ B, ad A, minorẽ esse proportione D, ad C.

Intel-

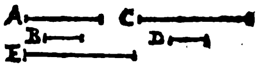
Intelligatur.n.esse E,ad B,vt C,ad D;eritq; proportio A,ad B,maior quoq; quã E,ad B; ac pro pterea A, maior erit quã E; Quare minor erit proportio B, ad A, maiorẽ quã B,ad E,minorẽ;Sed ut est B,ad E,ita est conuertendo D,ad C. Igitur proportio B,ad A,minor est quoque,quam D,ad C;quod est propositum.



10. quinti.
8. quinti.
4. quinti.

SCHOLION.

Eodem fere modo demonstrabim⁹,si prima ad secũdã habuerit minorẽ proportionẽ,quã tertia adquartam, cõuertendo maiorẽ esse proportionẽ secũda ad primã,quã quartæ ad tertiã; dũmodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contra.

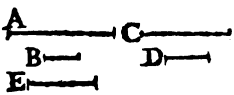


Sit enim minor proportio A,ad B,quã C,ad D. Dico conuertendo,B,ad A,maiorẽ habere proportionẽ,quã D,ad C. Intelligatur enim esse E,ad B,vt C,ad D; Eritq; proportio A, ad B,etiã minor,quã E,ad B;ac propterea A, minor erit, quã E. 10. quinti. *Quare maior erit proportio B,ad A,minorẽ,quã B,ad E, maiorẽ.* 8. quinti. *Sed vt B,ad E,ita est cõuertẽdo D, ad C.Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.*

THEOR. 27. PROPOS. 27. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorẽ proportionẽ,quã tertia ad quartam:Habebit quoq; viciſſim prima ad tertiã maiorẽ proportionẽ, quã secunda ad quartam.

Habeat A,ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorẽ esse quoque proportionem A, ad C, quã B,ad D. Intelligatur nãq; esse E,ad B,ut C,ad D, eritq; proportio A,ad B,maior etiam quã E,ad B; Ideoq; A,maior erit quam E. Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C: Quoniam vero permutando, est vt E,

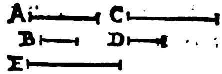


10. quinti.
8. quinti.

 ad C,

16. quinti. ad C, ita B, ad D; (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D, quod est propositum.

SCHOLION.



SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quã tertia ad quartam, vicissim primæ ad tertiã minorẽ esse proportionẽ, quã secundæ ad quartã.

SIT namq; minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quã B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; Ac propterea A, minor erit, quam E. Quare minor erit proportio A, ad C, quã E, ad C. Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod est propositum.

28.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

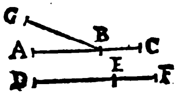
SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem esse proportionem A C, ad B C, quam D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, maior quoque, quam G B, ad B C; Ideoq; A B, maior quam G B. Addita ergo communi B C,

10. quinti.

BC, fiet A C, maior quam G C; maiorq; propterea erit pro portio A C, ad B C, quam G C, ad B C; Sed componendo, ut est G C, ad B C, ita est D F, ad E F; (quod posita sit GB, ad B C, vt D E, ad E F,) Maior ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F, quod est propositum. 8. quinti 18. quinti.

SCHOLION.



Eadem ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quam tertiæ ad quartam, minorem quoque esse proportionem primæ & secundæ simul, ad secũdam, quam tertiæ & quartæ simul, ad quartam.

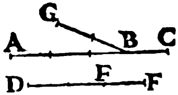
Sit minor proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo minorem esse proportionem A C, ad B C, quã D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque quam G B, ad B C; ideoq; A B, minor erit, quam G B. Addita ergo communi B C, fiet A C, minor, quam G C; minorq; propterea erit proportio A C, ad B C, quam G C, ad B C. Sed componendo, vt G C, ad B C, ita est D F, ad E F. (quod posita sit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. quod est propositum. 10. quinti. 8. quinti.

THEOR. 29. PROPOS. 29. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cũ quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

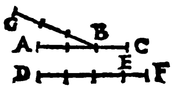
Sit maior proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. Dico & diuidendo maiorem esse proportionẽ A B, ad B C, quam

quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, ut D F, ad E F; eritq; proportio A C, ad B C, maior quoque
10. quinti. proportione G C, ad B C; ideoq; maior erit A C, quam G C. Ablata ergo cõmuni B C, maior erit A B, quam G B;
8. quinti. Ac propterea maior erit proportio AB, ad B C, quam G B, ad B C; sed diuidendo, ut est G B, ad B C, ita est D E,
17. quinti ad EF; (Posita namq; est G C, ad B C, ut D F, ad E F,) Igitur maior quoq; erit proportio AB, ad B C, quam D E, ad E F. quod est propositum.



SCHOLION.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cũ quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartã: ut eodem modo potest ostendi, si modo vocem maioris ubiq; mutes in vocem minoris, & contra, ceu in præcedentibus factum est.



30. THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad secũdam habuerit maiorem proportionem, quam cõposita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

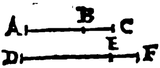
SIT maior proportio A C, ad BC, quã D F, ad E F. Dico per conuersionẽ
29. quinti. rationis, minorẽ esse proportionẽ AC, ad AB, quã D F, ad DE. Cum enim sit A C,

A C, ad B C, maior proportio, quam D F, ad E F; erit & diuidendo maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quare conuertendo minor erit proportio BC, ad AB, quam E F, ad D E; Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad AB, quam totius D F, ad D E. Quod est propositum.

20. quinti. 26. quinti. 28. quinti.

SCHOLION.

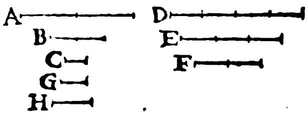
NON dissimili ratione ostẽdemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem primæ & secundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam: dummodo vbique pro voce maioris reponamus vocem minoris.



THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

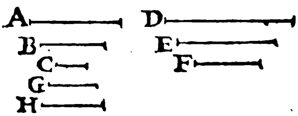
SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiã, quam primæ posteriorum ad tertiã.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam D, ad E; Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut E, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C; Ideoq; B, maior quã G. Quare maior erit 10. quinti.
pro-



proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, maiorem; Ponitur autẽ proportio A, ad B, maior quam D, ad E: Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; Ideoq; A, maior erit, quam H. Quare maior quantitas A, ad C, habe-
8. quinti. bit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad
22. quinti. eandem C; Atqui vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F: (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) maior ergo proportio quoq; est A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLION.



EADEM *ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad* B, *quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F: Vel contra, si proportio A, ad* B, *fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ* E, *ad* F; *ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F, ceu in proposita figura cernere licet.*

NON *dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem.*

QVOD *si plures fuerint magnitudines tribus, ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus.*

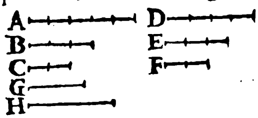
32.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ poste-

posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorũ ad tertiã.

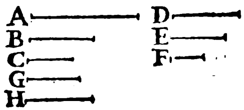
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Iem maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritq; propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C;



Ideoq; maior erit B, quam G. 10. quinti.
Quare maior erit proportio 8. quinti.
A, ad G, minorem, quam eiusdem A, ad B, maiorem: est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; ideoq; maior erit A, quam H. 10. quinti.
Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionẽ, 8. quinti.
quam H, minor ad eandem C: At vt H, ad C, ita est ex æqualitate D ad F, (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; & 23. quinti.
vt E, ad F, ita est H, ad G,) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLION.

EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F; At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel cõtra, si proportio A, ad B, maior quam E, ad F; At



B, ad C, eadem, quæ D ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad F, vt in proposita figura perspicitur.

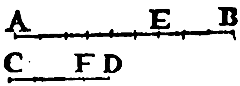
HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum *tudinũ minores fuerint, etiã extremarũ ꝑportionẽ eſſe minorẽ.*

QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, demonſtrabimus, maiorem quoque vel minorem eſſe proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ poſteriorum ad vltimã, ea arte, qua vſi ſumus propoſ. 23. &c.

33. ## THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT maior proportio totius A B, ad totam C D, quã ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reliquæ E B ad reliquam F D, maiorem eſſe, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim maior ſit proportio AB, ad CD,



27. quinti. quam A E, ad C F, erit quoque permutando maior proportio A B, ad A E, quã CD, ad C F; ac propterea, per con-

30. quinti. uerſionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quã

27. quinti C D, ad F D. Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc eſt, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D. quod eſt propoſitum.

QVOD ſi tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, ut ex modo demonſtrandi liquet.

34 ## THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI ſint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorũ,

quam

quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autẽ, quam prima priorum ad primã posteriorũ.

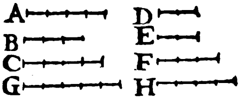
SINT tres magnitudines A,B,C, & aliæ tres, D, E, F; Sit aũt maior proportio A,ad D,quã B,ad E; Itẽ maior B, ad E,quã C,ad F. Dico ꝓportionẽ ipsarũ A,B C, simul,ad ipsas D,E,F,simul maiorẽ esse proportione C,ad F. & proportione ipsarũ B. C,simul,ad ipsas E, F, simul,minorẽ vero proportione A,ad D. Cũ.n.maior sit proportio A,ad D,quã B,ad E; erit permutando maior A,ad B, quã D,ad E. Igitur cõponẽdo maior erit proportio ipsarũ A,B,simul ad B,quã ipsarũ,D, E, simul ad E: ꝑmutãdo ergo rursus,maior erit proportio A, B,simul ad D,E,simul quã B,ad E. Itaq; cũ tota A,B,ad totã D,E, maiorẽ habeat ꝓportionẽ, quã ablata B, ad ablatã E; habebit quoq; reliqua A,ad reliquã D,maiorem ꝓportionẽ,quã tota A,B,ad totã D,E. Eadẽ rõne,maior erit ꝓportio B,ad E,quã totius B,C,ad totã E, F. Multo ergo maior erit ꝓportio A,ad D,quã B,C totius ad totã E,F. Permutãdo igitur,maior erit ꝓportio A,ad B,C,quã D, ad E, F; & cõponẽdo ergo maior est ꝓportio totius A, B, C, ad B, C,quã totius D,E,F,ad E,F; Et rursus ꝑmutãdo maior ꝓportio oĩum A, B,C,simul ad oẽs D,E,F,simul,quã B, C, ad E, F; qđ est secũdũ. Itaq; cũ sit maior ꝓportio totius A, B, C,ad totã D,E,F,quã ablatæ B,C ad ablatã E, F; erit & maior ꝓportio reliquæ A,ad reliquã D,quã totius A,B,C, ad totã D,E,F. qđ est tertiũ. Quoniam uero maior est proportio B, ad F, quam C, ad F; erit permutando maior

27. quinti.
28 quinti.
27. quinti.
33. quinti.
27. quinti.
28. quinti.
27. quinti.
33. quinti.
27. quinti.

quoque

quoque B,ad C,quam E, ad F; & componendo maior to-
28. *quinti.* tius B C,ad C,quam totius E,F, ad F; & rurſus permutan-
27. *quinti.* do maior B C,ad E,F,quam C,ad F. Eſt autem maior pro-
portio A,B,C,ad D,E,F, vt oſtendimus,quam B, C, ad E,
F. Multo ergo maior erit proportio omniũ A,B,C, ad om-
nes D,E,F quam vltimæ C,ad vltimã F; quod eſt primũ.

Q V O D ſi fuerint quatuor magnitudines vtrobiq; cũ ea-
dẽ hypotheſi, hoc eſt, ſi ſit quoq; maior proportio C,ad F,
quã G ad H; eadẽ conſequentur. Vt .n. iam in tribus eſt o-
ſtenſum, maior eſt proportio B,ad E,quã B,C,G,ad E, F,H. Multo ergo maior erit A,ad D, quam B,C,G,ad E, F, H. Per-
mutãdo ergo, maior erit A, ad



18. *quinti.* B,C,G,quam D,ad E, F, H; & componendo maior A, B,
C,G,ad B,C,G,quam D,E,F,H,ad E,F,H ; & permutãdo
27. *quinti.* A,B,C,G,ad D,E, F,H,maior quã B,C,G,ad E,F,H, quod
eſt ſecundum . Itaq; cum ſit maior proportio totius A, B,
C,G,ad totam D,E,F,H,quam ablatæ B,C,G, ad ablatam
33. *quinti.* E,F,H; erit & reliquæ A,ad reliquam D, maior proportio,
quam totius A,B,C,G,ad totam D,E, F, H; quod eſt ter-
tium. Quoniam vero vt in tribus eſt demonſtratũ, maior
eſt proportio B C,G,ad E F, H, quam G, ad H; & maior
A,B,C,G,ad D,E,F,H,quam B,C,G, ad E, F, H, vt fuit
oſtenſum ; multo maior erit proportio A,B,C,G,ad D,E,
F,H, quam vltimæ G, ad vltimam H ; quod eſt primum.
Eadem arte concludes,eadem conſequi in quinque magni-
tudinibus per quatuor ; & in ſex per quinq; , & in ſeptem,
per ſex , &c. quemadmodum oſtendimus in quatuor , per
tres. conſtat ergo totum Theorema , &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

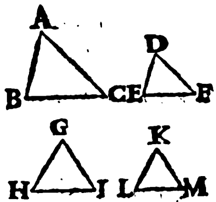
EVCLIDIS ELEMENTVM VI.

DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habet, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula A B C, D E F, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit; Itē latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F; & ut AB, ad B C, ita DE, ad E F, & ut A C, ad C B, ita D F, ad F E.



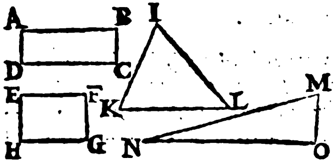
QVOD si anguli unius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ similes. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas et æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quamuis inter se maxime sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera G H I, K L M. Propter laterum enim æqualitatem

tatem, erit G H, ad G I, ut K L, ad K M; Item G H, ad H I, ut K L, ad L M; & G I, & I H, ut K M, ad M L, cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

Vt si in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera A B, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, ut utrobique sit & antecedens, & consequens, diversarum proportionum, hoc est, ut sit ea proportio A B, ad E F, quæ F G, ad B C; seu A B, ad F G, ut E F, ad B C; (utroque enim



modo A B, est antecedens vnius proportionis & B C, consequens alterius, in figura A B C D; quemadmodum & primo modo E F, est consequens vnius, & F G, antecedens alterius; uel secundo modo F G, consequens; & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula I K L, M N O; reciproca, si fuerit ut I K, ad M N, ita M O, ad I L; uel vt I K, ad M O, ita M N, ad I L.

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur,

cum

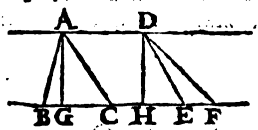
cum ut tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

Si linea recta quævis A B, *ita diuidatur in* C, *inæqualiter, ut sit, quemadmodum tota* A B, *ad maius segmentum* A C, *ita* A C, *maius segmentum ad* C B, *minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub alijs uerbis iam docuit lib. 2. propos. 11. ut fiet perspicuum propos. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atque utilitates lineæ hoc modo diuisæ, ceu ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. ut non immmerito a quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea est diuisa.*

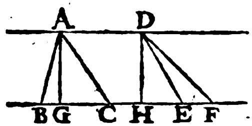
IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a uertice ad basin deducta.

Si a uertice A, *trianguli* A B C, *ad basin* B C, *perpendicularis ducatur* A G; *dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli* A B C; *ita ut tantam dicatur habere altitudinem dictum triangulum, quanta est perpendicularis* A G. *Sic etiam perpendicularis* D H, *ducta a* D, *uertice trianguli* D E F, *ad basin* E F, *ad partes* E, *protractam, appellabitur altitudo trianguli* D E F. *Vnde si duarum figurarum perpendiculares a verticibus ad bases, (siue hæ protractæ sint, siue non) demissæ fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem dictæ perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares* A G, D H, *triangulorum* A B C, D E F, *in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli* A G H, D H G,



interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, tunc duo
28.primi. recti; erunt rectæ A G, D H, parallelæ; sunt autem & A D,
G H, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;
34.primi. ac propterea latera opposita A G, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicetur dicta triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero A B, & D E; non habebunt eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin D E, protractam æqualis non est perpendiculari ex C, ad basin A B, deductæ, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.



RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad basin deducitur: quoniam, ut scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente simplicio, in libro de dimensione; mensura cuiuscunque rei debet esse stata, determinataque & non indefinita: Inter oēs autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataque longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataque. Qua de re plura scripsimus ad initium cōmentariorum, quos in sphæram Ioan. de sacro bosco edidimus.

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (ut denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis

subqua-

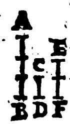
subquadrupla videlicet ¼. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur in hac definitione Euclides, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus compositam; quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicata effecerint illam proportionem, seu (ut vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla & sextupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ; hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producuntur eadem 12. denominator scilicet duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quincupla. Nam harū denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermediis constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, ceu in quinto libro defin. 10. exposuimus: ita ut si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam, duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiā in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam, consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primo, inductione quadam Theonis Alexandrini, quā hoc in loco adducit, confirmabimus: Deinde uero idem duabus demonstrationibus, quarum una traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1 lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propos. 11.

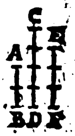
altera autem a Vitellione lib. 1. propos. 13. suæ perspectiuæ, comprobabimus.

THEON *igitur rem propositam ita conatur absoluere. Habeat* AB, *ad* CD, *rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; &* CD, *ad* EF, *eandem quoque datam. Dico quod ipsius* AB, *ad* EF, *ratio constat ex* AB, *ad* CD; *& ex* CD, *ad* EF; *vel quod ipsius* AB, *ad* CD; *rationis quantitas multiplicata in ipsius* CD, *ad* EF, *rationis quantitatẽ, efficit ipsius* AB, *ad* EF, *rationis quantitatem. Sit enim primum* AB, *quam* CD, *maior; &* CD, *quam* EF; *& sit quidem* AB, *ipsius* CD, *dupla, &* CD, *ipsius* EF, *tripla. Quoniam igitur* CD, *ipsius* EF, *tripla est; ipsius autem* CD, *dupla est* AB; *erit* AB, *ipsius* EF, *sexcupla. Quoniam si triplum alicuius duplicamus, fit sexcuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam* AB, *dupla est ipsius* CD, *diuidatur* AB, *in ipsi* CD, *æqualia, hoc est,* AG, *&* GB: *& quoniam* CD, *ipsius* EF, *tripla est; æqualis autem est* AG, *ipsi* CD; *&* AG, *igitur ipsius* EF, *tripla est: Id propterea &* GB, *ipsius* EF, *tripla est. Tota igitur* AB, *ipsius* EF, *sexcupla est. Ipsius igitur* AB, *&* EF, *ratio connectitur per* CD, *medium limitem, composita ex ipsius* AB, *ad* CD; *&* CD, *ad* EF, *ratione.*

SIMILITER *autem, & si minor fuerit* CD, *utraque ipsarum* AB, *&* EF, *idipsum colligitur. Sit enim rursus* AB, *ipsius* CD, *tripla; At* CD, *ipsius* EF, *sit dimidia. Et quoniam* CD, *ipsius* EF, *dimidia est; Ipsius autem* CD, *tripla est* AB; *erit* AB, *sesquialtera ipsius* EF. *Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam* AB, *ipsius* CD, *tripla est; &* CD, *ipsius* EF, *dimidia; qualium* AB, *æqualium ipsi* CD, *trium, talium est* EF, *duorum. Quare sesquialterum est* AB, *ipsius* EF. *Igitur ratio ipsius* AB, *ad* EF, *connectitur per* CD, *medium limitem, composita ex ipsius* AB, *ad* CD; *&* CD, *ad* EF, *ratione.*



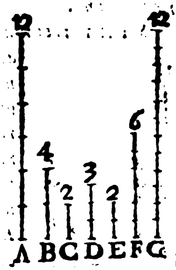
SED *iam rursus sit* CD, *utraque ipsarum* AB, *&* EF, *maior* midior; & sit quidem A B, ipsius C D, dimidium, & C D, ipsius E F, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est A B, duorum, talium est C D, quatuor; qualium autem C D, quatuor; talium E F, trium. Et qualium igitur A B, duorum, talium E F, trium: Connectitur igitur rursus ratio ipsius A B, ad E F, per C D, medium limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si a composita ratione quæuis vna compositarum auferatur, vno simplicium eiecto, reliqua compositarum assumetur.



Hæc ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

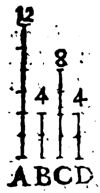
EVTOCII vero demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio; Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatam in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12, &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producetur B; producatur quoque G, ex multiplicatione F, in C. Ostendendum ergo est G, æqualem esse ipsi A; atq; adeo ex multiplicatione F, in C, produci A. Quoniam F, & E, multiplicantes C, produ-



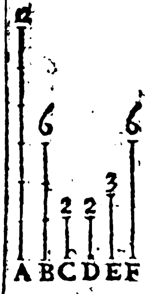
cuuo G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, ut
18. septimi dictum est,) erit ut F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, mul-
17. septimi tiplicans E, & B, producit F, & A; erit ut E, ad B, ita F,
ad A; & permutando ut E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, ut F, ad E, ita A, ad B. Ut autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur ut A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea que F, quantitas erit proportionis A, ad C; quod est propositum.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad ultimam componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Ut si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, ut ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiuscemodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; et B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocii. Denominatorem videlicet proportionis multiplicantem in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale est ei, quod



ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) erit ut F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur F, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. quod est propositum. Hæc Vitellio. 19. septimi

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio.

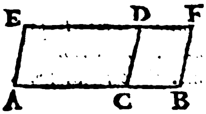
ITAQVE cum proportio extremorum componatur ex proportionibus intermediis, ceu demonstratum fuit; nihil aliud colligendum erit, quando proportio aliqua ex duabus proportionibus dicetur esse composita, quam eam proportionem eandem esse, quæ illa, quam habet prima aliqua quantitas ad tertiam, si modo tres quantitates ita coordinentur, ut proportio primæ ad secundam sit eadem, quæ altera componentium, & proportio secundæ ad tertiam eadem, quæ reliqua componentium. Vt, quando dicitur proportio 16. ad 12. composita esse ex proportionibus 8. ad 3. & 2. ad 4. nihil aliud est intelligendum, quam si sumantur tres quilibet numeri 24. 9. 18. secundum proportionẽ 8. ad 3. & 2. ad 4. (est enim ut 8. ad 3. ita 24. ad 9. & ut 2. ad 4. ita 9 ad 18.) eam esse proportionem 16. ad 12. quam habent 24. ad 18. Vt manifestum erit propos. 23. huius lib.

QVINQVE autem prædictis definitionibus Euclidis addendam esse censemus sequentem sextam quæ multum conducet, ut recte intelligantur 27, 28 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem est eiusmodi.

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatũ, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere uero, quando occupat maiorem lineam, quã sit ea, secundum quam applicatur.

SIT data recta linea A B, supra quam constituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, sed desit C B; & ducta B F, parallela ipsi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrāmum igitur A D, applicatum secundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita ut D B, appelletur defectus.



RVRSVS sit data recta linea A C, supra quam constituatur parallelogrammum A B F E, quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipsi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum secundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, uocetur excessus.

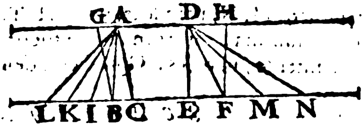
HIC autem defectus D B, uel excessus, in rectangulis quidem esse potest uel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem, uel Rhombus, vel Rhomboides, ut perspicuum est.

1. ## THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.

SINT duo triangula A B C, D E F, quorum bases B C, E F, habentia eandem altitudinem. Item duo parallelogramma C G, E H, eiusdem altitudinis, quorum eaedem bases B C, E F. Dico ita esse triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H, ut est basis B C, ad basin E F. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas G H, L N. (Nam ut in defin. 4. dictum

ctum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares a verticibus ad bases demissæ æquales erunt) & ex B L, sumantur quotcunque rectæ B I, I K, K L ipsi B C, æquales; Item ex F N, abscindantur quotcunque rectæ F M, M N, æquales rectæ E F. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ A I, A K, A L, D M, D N. Erunt igitur triangula A B C, A I B, A K I, A L K, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula D E F, D F M, D M N. Quam multiplex est ergo recta C L, rectæ B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quam multiplex est recta E N, rectæ E F, tam quoque multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F; quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula A C L, D E N, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ C L, E N. Quoniam uero si basis C L, æqualis fuerit basi E N, necessario triangulum A C L, æquale est triangulo D E N; & si C L, maior fuerit quam E N, necessario A C L, maius est quam D E N; & si minor, minus; deficient. propterea una C L, recta, & triangulum A C L, æquemultiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ ABC, ab E N, recta, & triangulo D E N, æque multiplicibus secundæ E F, & quartæ D E F; uel una æqualia erunt, uel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Quare quæ proportio est primæ B C, ad secundã EF, basis ad basin, ea est tertiæ A B C, ad quartã D E F, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita triãgulum ad triangulum. quod est propositum.



38. primi

38. primi

6. defin. 5.

QVONIAM autem ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita parallelogrammum C G (quod duplũ est trianguli A B C, per 34. propositionem primi.) ad parallelogrammum E H (quod est duplũ trianguli D E F) perspicuũ est, ita quoq; esse parallelogrammum ad parallelogrammum,

15. quinti.

11. quinti.

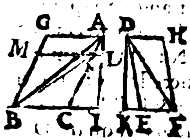
mum, ut est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo usi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi B G; nec nõ ex punctis M, N, parallelæ, ipsi F H. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut bases, eandem habent altitudinem, æqualesue.

SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammũ A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut basis B C, ad basin E F. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares A I, D K, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit A I, si fieri potest, maior, quã D K. Abscissa igitur I L, ipsi D K, æquali, ductaque L M, ipsi B C, parallela, quæ latus A C, secet in N, coniunctaq; recta B N, erit N B C, triãgulũ ad triangulum D E F, ut basis B C, ad basin E F; cum altitudines L I, D K, ponantur æquales. Sed fuit etiam A B C, ad



1. sexti. *lũ ad triangulum D E F, ut basis B C, ad basin E F; cum altitudines L I, D K, ponantur æquales. Sed fuit etiam A B C, ad*

11. quinti *D E F, ut B C, ad E F. Igitur triangula N B C, A B C, ad triangulum D E F, eandem habent proportionem; Ac proinde*

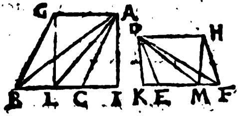
9. quinti. *æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines A I, D K, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma N M B C, A G B C, æqualia esse, si altitudines A I, D K, inæquales dicantur, & L I, D K, æquales.*

ADDIT hoc in loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum,

rum æquales sunt bases, uel eadem, ita se habent inter se, ut altitudines.

Sint duo triangula A B C, D E F; & parallelogramma A G B C, D E F H, habentia bases æquales B C, E F. Dico esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut altitudo A I, est ad altitudinem D K.



Si enim sumantur rectæ I L, K M, basibus B C, E F, æquales, ducanturque rectæ L A, M D; erit triangulum A L I, triangulo A B C, æquale, cum sint super bases æquales L I, B C, & inter easdem parallelas A G, I B. Eodem modo æquale erit triangulum D K M, triangulo D E F. Quare erit, ut A B C, ad D E F, ita A L I, ad D K M. Est autẽ, ut A L I ad D K M, ita A I, ad D K. (Nam si bases ponantur A I, D K, erunt rectæ æquales L I, K M, altitudines.) Igitur & A B C, ad D E F, erit, ut A I, ad D K. Quod est propositum.

38. primi. 7. quinti. 1. sexti.

Quoniam uero est, ut A B C, ad D E F, ita parallelogrammum A G B C, trianguli A B C, duplum, ad parallelogrammum D E F H, trianguli D E F, duplum; Erit quoque A G B C, ad D E F H, ut A I, ad D K. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur L G, M H. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin.

15. quinti. 11. quinti.

Hoc uero conuertemus etiam, ad hunc modum.

Triangula, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut altitudines, æquales habent bases.

Sit triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammũ A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut altitudo A I, ad altitudinem D K. Dico eorum bases B C, E F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit B C, si fieri po-

test,

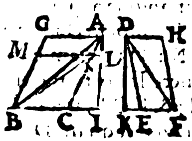
mum, ut est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo usi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi B G; nec nõ ex punctis M, N, parallelæ, ipsi F H. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut bases, eandem habent altitudinem, æqualesue.

SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammũ A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut basis B C, ad basin E F. Dico eorum altitudines, hoc est, perpendiculares A I, D K, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit A I, si fieri potest, maior, quã D K. Abscissa igitur I L, ipsi D K, æquali, ductaque L M, ipsi B C, parallela, quæ latus A C, secet in N, coniunctaq; recta B N, erit N B C, triangulũ ad triangulum D E F, vt basis B C, ad basin E F; cum altitudines L I, D K, ponantur æquales.



1. sexti. *Sed fuit etiam A B C, ad D E F, ut B C, ad E F. Igitur triangula N B C, A B C, ad*

11. quinti *triangulum D E F, eandem habent proportionem; Ac proinde*

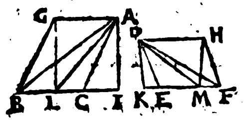
9. quinti. *æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines A I, D K, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus, parallelogramma N M B C, A G B C, æqualia esse, si altitudines A I, D K, inæquales dicantur, & L I, D K, æquales.*

ADDIT hoc in loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum,

rum æquales sunt bases, uel eadem, ita se habent inter se, ut altitudines.

SINT duo triangula A B C, D E F; & parallelogramma A G B C, D E F H, habentia bases æquales B C, E F. Dico esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut altitudo A I, est ad altitudinem D K.



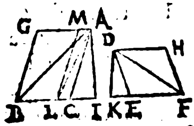
Si enim sumantur rectæ I L, K M, basibus B C, E F, æquales, ducanturque rectæ L A, M D; erit triangulum A L I, triangulo A B C, æquale, cum sint super bases æquales L I, B C, & inter easdem parallelas A G, I B. Eodem modo æquale erit triangulum D K M, triangulo D E F. Quare erit, ut A B C, ad D E F, ita A L I, ad D K M. Est autẽ, ut A L I ad D K M, ita A I, ad D K. (Nam si bases ponantur A I, D K, erunt rectæ æquales L I, K M, altitudines.) Igitur & A B C, ad D E F, erit, ut A I, ad D K. Quod est propositum. 38.primi. 7. quinti. 1. sexti.

QVONIAM uero est, ut A B C, ad D E F, ita parallelogrammum A G B C, trianguli A B C, duplum, ad parallelogrammum D E F H, trianguli D E F, duplum; Erit quoque A G B C, ad D E F H, ut A I, ad D K. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur L G, M H. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin. 15. quinti. 11. quinti.

HOC uero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut altitudines, æquales habent bases.

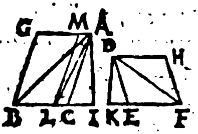
SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammũ A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut altitudo A I, ad altitudinem D K. Dico eorum bases B C, E F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit B C, si fieri potest,



teſt; maior, quam E F. Abſciſſa igitur B L, ipſi E F, æquali, ductaq́; recta L A; erit, ut proxime demonſtrauimus, A B L, ad DEF, ut A I, ad D K: Sed ut A I, ad D K, ita ponitur eſſe ABC, ad DEF. Igitur A B L, A B C, ad DEF, eandem habent proportionem; Ac proinde inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes B C, E F, ſed æquales. Eademq́ue eſt ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta L M, ipſi G B, parallela, oſtendemus, parallelogramma M G B L, A G B C, æqualia eſſe, ſi baſes BC, E F, dicantur inæquales.

11. quinti.

et 9. quinti.



IN omnibus autem his non uariabitur demonſtratio, etiam ſi triangula, & parallelogramma ſint rectangula, ita ut altitudines ſint ipſorum latera, uel unum fuerit rectangulum, alterum uero non. Nos aſſumpſimus caſum difficiliorem, quando ſcilicet neutrum eſt rectangulum. Ita enim demonſtratio maiore indiget quandoque conſtructione.

2.

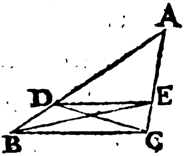
THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

IN triangulo A B C, ducatur recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, ſecta eſſe proportionaliter in D, & E, hoc eſt, eſſe ut A D, ad D B; ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E, erunt triangula D E B, DEC, ſuper eandem baſin D E, & inter eaſdem parallelas D E, B C.

37. primi

B C, constituta, inter se æqualia. Quare ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C; Atqui ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita basis A D, ad basin D B, (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, ut constat, si per E, agatur parallela recta ipsi A B;) & eadem ratione, ut triangulum A E D, ad triangulum DEC, ita basis A E, ad basin E C. Vt igitur A D, ad D B, ita A E, ad EC. (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, uel trianguli A E D, ad triangulum D E C.) quod est propositum. 7. quinti. 1. sexti. 11. quinti.



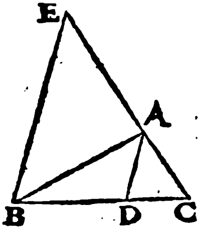
SECET iam recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam esse reliquo lateri B C. Ductis enim rursus rectis C D, B E, erit ut basis A D, ad basin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem ut A D, ad D B, ita A E, ad E C; igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E ad E C: Sed rursus ut basis A E, ad basin E C, ita triangulum A E D, ad triangulum D E C, cum sint altitudinis eiusdem. Igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C. Aequalia ergo sunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea cum eandem habeant basin D E, inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est D E, ipsi B C; quod est propositum. Si itaq; ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum. 1. sexti. 11. quinti. 1. sexti. 11. quinti. 9. quinti. 39. primi

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem

rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a uertice ad sectionẽ producitur, ea bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo A B C, recta A D, secet angulum B A C, bifariam. Dico esse ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipsi A D, donec cum C A, producta conueniat in E; eritque angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter se æquales; Ideoque rectæ B A, E A, inter se æquales. Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C; Atqui ut E A, ad A C, ita B D, ad D C, cũ in triangulo B C E, recta A D, sit parallela lateri B E; Igitur ut B A, ad A C, ita B D, ad D C, quod est propositum.



29. primi

6. primi.
7. quinti

2. sexti.
11. quinti

SIT iam ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Dico rectã A D, bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta B E, ipsi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur ut B A, ad A C, ita ponitur B D, ad D C; ut autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta A D, sit lateri B E, parallela) Erit ut B A, ad A C, ita E A, ad eandem A C. Aequales igitur sunt B A, & E A, inter se; ac propterea anguli A B E, & E, æquales erunt. Cum igitur angulus A B E, æqualis sit alterno B A D; & angulus E, externo D A C; erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

2. sexti

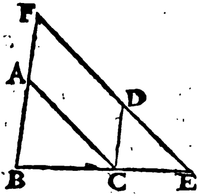
11. quinti
9. quinti.
29. primi.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SINT equiangula triangula A B C, D C E, sintq; æquales anguli A B C, D C E; & A C B, D E C; & B A C, C D E. Dico esse A B, ad B C, ut D C, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D; & A B, denique ad A C, ut D C, ad D E; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita ut angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; pariterque externus A C B, interno D E C. Et quia duo anguli A B C, A C B, minores sunt duobus rectis; est autē angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. Quare rectæ B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniā uero angulus externus D C E, æqualis est interno opposito A B C; parallelæ erunt C D, & B F. Eadem ratione, parallelæ erunt C A, & E F, quod angulus externus A C B, sit æqualis interno D E C. Parallelogrammum est igitur A C D F; proptereaque recta A F, æqualis rectæ C D; & recta C A, rectæ D F. Quoniam igitur in triangulo B E F, recta A C, parallela est lateri E F; erit A B, ad A F, hoc est, ad D C, (quæ æqualis est ipsi A F,) ut B C, ad C E. permutando igitur erit A B, ad B C, ut D C, ad C E. Rursus quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela est lateri B F, erit B C, ad C E, ut F D, hoc est, ut C A, (quę



17. primi

11. pron.

28. primi

34. primi

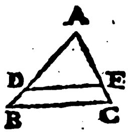
2. sexti.

16. quinti

2. sexti.

16. quinti. æqualis est ipsi F D) ad E D. permutando igitur erit B C, ad C A, ut C E, ad E D. Cum igitur sit A B, ad BC, ut DC, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D: erit & ex æquali
22. quinti. A B, ad CA, ut D C, ad E D. quod est propositum. Æquiangulorũ ergo triangulorũ proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.



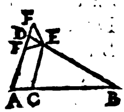
Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo A B C, lateri B C, parallela D E. Dico triangulum A D E, toti triangulo A B C, esse simile. Aequiangula namque sunt, cum anguli A D E,
29. primi A E D, æquales sint angulis A B C, A C B, exter-
4. sexti. ni internis; & angulus A, communis. Quare ut demonstratum est, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

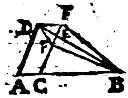
SCHOLION.

Non alienum a nostro instituto esse putaui, si hic demonstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, quæ uehuntur in aqua; Secundum uero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est.

Si ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum uero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta coniungens extremum unius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremum alterius lineæ.

Sit recta A B, & ex punctis A, *&* C, *educantur duæ parallelæ* A D, C E, *proportionem habentes, quam* A B, BC, *ita ut sit A D, ad* C E, *sicut* A B, *ad* B C; *uel* CE, *ad* A D, vt B C, ad A B. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire per punctum E. Si enim recta B E, nō transit per D, coeat cum A D, in F, puncto, quod sit vel supra D, vel infra, ut in prima figura: Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula B A F, B C E, similia sunt; erit, ut A B, ad A F, ita B C, ad C E; Et permutando, ut A B, ad B C, ita A F, ad C E: Vt autem A B, ad B C, ita erat quoque A D, ad C E; Igitur erit, ut A F, ad C E, ita A D, ad C E: Ac propterea æquales erunt rectæ A F, A D, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B E, per punctum D. Quod est primum.





4. sexti.
16. quinti.
11. quinti
9. quinti

RVRSVS si recta B D, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit uel supra E, uel infra, ut in secunda figura. Quoniam ergo, per dictum coroll. triangula B A D, B C E, similia sunt; erit, ut A B, ad A D, ita B C, ad C F; & permutando, ut A B, ad B C, ita A D, ad C F: Vt autem A B, ad B C, ita quoque erat A D, ad C E; Igitur erit, ut A D, ad C F, ita A D, ad C E: Ac proinde æquales erunt rectæ C F, C E, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B D, per E. Quod est secundum.

4. sexti.
16. quinti.
11. quinti.
9. quinti.

Secundum uero est.

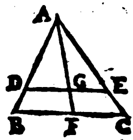
SI in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus dictum, in easdem rationes.

IN triangulo A B C, ducta sit D E, lateri B C, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur F A, secans D E, in G. Dico esse, ut B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quoniam triangula A F B, A G D, ex coroll. huius propos. similia sunt; erit ut A F, ad B F, ita A G, ad D G; & permu-

4. sexti.

16. quinti. *tando, ut* A F, *ad* A G, *ita* B F, *ad* D G. *Atque eodem argumento concludemus esse, ut* A F, *ad* AG,

11. quinti. *ita* F C, *ad* G E. *Igitur erit, ut* B F, *ad* D G, *ita* F C, *ad* G E; *& permutando, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quod est propositum.*



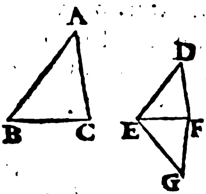
Aliter. *Quoniã triangula* ABF, A D G, *similia sunt, nec non triangula* A F C, A G E, *per*

4. sexti. *coroll. huius propos. erit, ut* B F, *ad* F A, *ita* D G, *ad* G A: *Item ut* F A, *ad* F C, *ita* G A, *ad* G E. *Ex æquo igitur, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quod erat demonstrandum.*

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula A B C, D E F, latera proportionalia, sitque A B, ad B C, ut D E, ad E F; & BC, ad CA, ut E F, ad F D; & A B, denique ad A C, ut DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F; sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C, conueniantque rectæ E G, F G, in G;



32. primi eritq; reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula

4. sexti. A B C, G E F. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; Vt

11. quinti. autem A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. Igitur ut GE,

9. quinti. ad E F, ita D E, ad E F, eandem: propterea que æquales

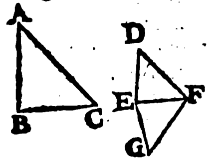
4. sexti. erunt G E, D E. Rursus, quoniam ut B C, ad C A, ita E F, ad F G; Vt autem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D;

F D; erit ut E F, ad F G, ita eadē E F, ad F D; ideoque æquales erunt F G, F D. Itaque cum latera E G, F G, æqualia sint lateribus D E, D F, utrumque utrique; & basis communis E F, erunt anguli G, & D, æquales; ac propterea reliqui anguli G E F, reliquis angulis D E F, D F E, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A, erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque modo angulus D E F, angulo B, & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat. 9. quinti. 8. primi 4. primi

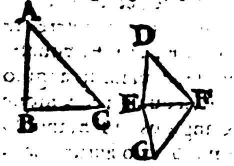
THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Sit angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli D E F, sintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, E F, hoc est, sit A B, ad B C, ut D E, ad E F. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulū scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus F E G; & angulo C, angulus E F G; eritque, ut in præcedenti propos. dictum est, triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; sed ut A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F; igitur ut D E, ad E F, ita G E, ad eandem E F; ac idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E, 4. sexti. 11. quinti. 9. quinti.



E F, æqualia sint lateribus G E, E F, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est, æqualis angulus F E G, æqualis est positus angulus D E F, propterea æquales ad inuicem erunt anguli D E F, G E F,) erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus E F G, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, E F D; & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F. quod est propositum. Si igitur duo triangula unū angulum uni angulo æqualem; &c. Quod erat demonstrandum.



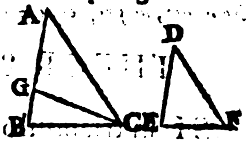
4. primi

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum uero simul utrunque aut minorem, aut nō minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, *circum* quos proportionalia sunt latera.

Sit angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F; & latera A C, C B, circa angulum ACB, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc est, sit ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit uel minor recto, uel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet A C B, & F, circa quos sunt latera proportionalia, nec non & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primo tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, non sunt æquales, sit A C B, maior, quam F; fiatque ipsi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur

ponatur æqualis, erit & reliquus A G C reliquo B, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. 32. primi
Quare ut A C, ad C G, ita D F, ad F E; sed ut D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B: Vt igitur A C, ad C G, ita eadem A C, ad C B; ac propterea, æquales erunt C G, C B, & anguli C B G, C G B, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoque ei deinceps A G C, recto maior; cum A G C, C G B, sint duobus rectis æquales; Est autem ostensus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est angulus E; Sed positus est etiam recto minor. quod est absurdum. 4. sexti. 11. quinti. 9. quinti. 5. primi 13. primi



Sit secundo tam B, angulus, quam E, recto non minor, eritque ut prius angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & C G B, recto non minor erit, ac propterea anguli C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, sed uel maiores, uel æquales duobus rectis, quod est absurdũ. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, ac idcirco reliqui etiã anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat. 17. primi 32. primi

SCHOLION.

Addidit Euclides, utrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse uel minorem recto, uel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, habebunt duo triangula A B C, A G C, unum angulũ uni angulo æqualẽ, immo angulum A, cõmunem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, ut A C, ad C B, ita eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non sunt ullo modo æquiangula triangula A B C, A G C, ut constat. Quod ideo euenit, quia non uterque angulorum A B C, A G C, minor est recto, uel non minor. Immo A B C, est quidem recto minor; A G C, 7. quinti.

 uero

5. primi
32. vel 32. primi.

nus recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia sint, & ideo anguli C B G, C G B, æquales; erit uterque eorum recto minor, ac propterea A G C, recto maior.

8.

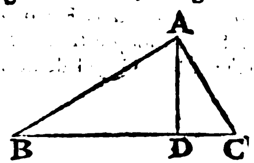
THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, a quo ad basin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, similia esse & toti triangulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, sint recti, & angulus B, communis, erunt & reliqui anguli A C B, & D A B, æquales. Aequiangulum est igitur triangulum D B A, triangulo A B C, ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, erit ut C B, ad B A, ita B A, ad B D; & ut B A, ad A C, ita B D, ad D A; & ut B C, ad C A, ita B A, ad A D. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo ostendetur triangulum A D C, simile eidem triangulo A B C; Nam anguli BAC, & A D C, sunt recti, & angulus C, communis; ac propterea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare ut B C, ad CA, ita C A, ad C D; & ut C A, ad A B, ita CD, ad D A; & ut C B, ad B A, ita C A, ad A D. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B, & ADC, cũ anguli A D B, AD C, sint recti, & anguli ABD, CAD, ostensi æquales, nec non anguli BA D, A C D; Atq; idcirco sit ut B D, ad D A, ita D A, ad D C, &c. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

32. primi

4. sexti.



32. primi
4. sexti.

CORROL-

COROLLARIVM.

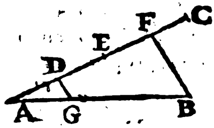
Ex hoc manifestum est, perpendicularẽ quæ in rectangulo triã gulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod dicto lateri adiacet.

Ostensum est enim, esse ut B D, ad D A, ita D A, ad DC; ac propterea D A, esse mediam proportionalem inter B D, & D C: Item esse ut C B, ad B A, ita B A, ad B D; & idcirco B A, mediam esse proportionalem inter C B, & B D: Denique esse ut B C, ad C A, ita C A, ad C D; ideoque C A, esse proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod erat propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. 11.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.

Imperetur, ut ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, utcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex A B, ut in proposito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, esse partem tertiam imperatam.



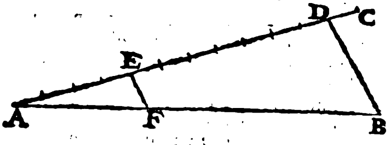
Nam cum in triangulo A B F, lateri F B, parallela sit recta D G; erit ut F D, ad D A, ita B G, ad G A; componendo igitur, ut F A, ad D A, ita B A, ad G A: sed F A, ipsius A D, est tripla ex constructione; Igitur & B A ipsius A G, erit tripla, ideoque A G, erit tertia pars ipsius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat. 2. sexti. 18. quinti.

SCHOLION.

Quod si ex A B, auferenda sit pars, quæ contineat quatuor undecimas ipsius A B, sumenda erunt ex A C, undecim

partes

partes æquales usque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partiũ.



Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus ut D A, ad A E, ita BA, ad A F: Quare, & conuertendo ut A E, ad A D, ita A F, ad A B: Est autem A E, pars continens quatuor undecimas ipsius A D, ex constructione; Igitur & A F, eadẽ pars erit rectæ A B. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas.

4. quinti.

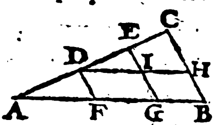
11

12.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

SIT recta A B, secanda similiter, ut secta est recta A C, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus A D, D E, E C, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, parallelæ ipsi B C. Dico rectam A B, similiter esse sectam in F, & G, ut est secta A C, in D, & E. Nam ut A D, ad D E, ita A F, ad F G; Proportionales ergo sunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quod si ducatur D H, ipsi F B, parallela, secans E G, in I, erit rursus ut D E, ad E C, ita D I, ad I H, hoc est, ita F G, ad G B; quod F G, ipsi D I, & G B, ipsi I H, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes F G, G B, partibus D E, E C. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.



2. sexti.

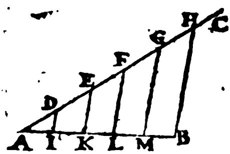
2. sexti.

34. primi

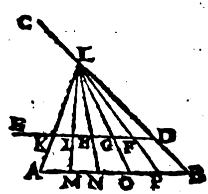
SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc problemate colligi potest facilis admodum uia, ac ratio diuidendi lineam rectã datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus. Sit enim data recta A B, diuidenda in quinque partes æquales. Ducta recta A C, faciente cum A B, quemcunque angulũ C A B, sumantur ex ea quinque partes æquales A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H, utcunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur D I, E K, F L, G M; erit A B, similiter diuisa, ut A H, ceu constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur A H, sit diuisa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta A B.



Huic rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt aliæ non iniucundæ, ceu propos. 10. lib. 1. sumus polliciti. Sit enim rursus data linea recta A B, diuidenda in quinque partes æquales. Ducatur ex B, recta B C, utcunque faciens angulum cum A B; Deinde ex assumpto puncto D, agatur D E, parallela ipsi A B, ex qua abscindantur quinque æquales partes D F, F G, G H, H I, I K, ea lege tamen, ut D K, minor sit quam A B. Postremo ex A, per K, recta ducatur A L, occurrens ipsi B C, in L, puncto, a quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur L P, L O, L N, L M, quas dico diuidere rectã A B, in quinque partes æquales. Cum enim D E, sit parallela ipsi A B, erit angulus L I K, angulo L M A, & angulus L K I, angulo L A M, æqualis: est autem angulus A L M, communis; Aequiangula igitur sunt triangula L K I, L A M, ac propterea ut L I, ad I K, ita L M, ad M A; Item eadem ratione, ut L I, ad I H, ita L M, ad M N: sed ut L I, ad

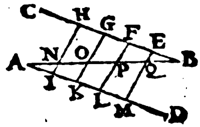


29. primi

4. sexti

7 quinti. ad I K, ita L I, ad I H, quod æquales sumptæ sint I K, I H; igi-
11. quinti. tur ut L M, ad M A, ita eadem L M, ad M N; ideoque æqua-
9. quinti. les erunt A M, M N. Non aliter ostendes M N, æqualẽ esse ipsi N O; & N O, ipsi O P, & O P, ipsi P B. Diuisa est ergo A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ B C, A D, inter se parallelæ; Et ex B C, abscindantur quatuor partes æquales B E, E F, F G, G H, ut sint tot partes una minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex A D, totidem æquales resecentur A I, I K, K L, L M. Ductis igitur rectis E M, F L, G K, H I, secantibus rectam A B, in N, O, P, Q; dico ipsam A B, sectam esse in quinque partes æquales. Cum

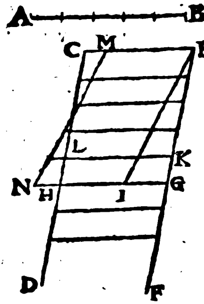


33. primi enim æquales sint, & parallelæ G H, I K, erunt & H I, G K, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt G K, F L, E M. Quare cum A M, secta sit in quatuor æquales partes, erit & A Q, similiter in quatuor partes æquales diuisa, ut constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa erit & B N, in quatuor partes æquales, eo quod B H, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cum tam A N, quam B Q, æqualis sit singulis partibus N O, O P, P Q; erũt omnes quinque partes A N, N O, O P, P Q, Q B, inter se æquales. Quod est propositum.

ALITER. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum. Ductis duabus rectis inter se parallelis utcunque C D, E F; ex utraque abscindantur partes inter se æquales quotcunque, saltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde officio circini capiatur longitudo rectæ A B, diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ C E, ut ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I, illius lineæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo est recta G H; ea enim includit quinque spatia. Postremo ex E, ad I, recta ducatur E I, quã dico diuisam esse in quinque æquales partes. Cum enim G K,
33. primi H I, æquales sint, & parallelæ, erunt quoque G H, K L, parallelæ; Eodemque modo omnes lineæ inter rectas C D, E F,

inter

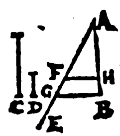
inter se parallelæ ostendentur. Quare, ut ex demonstratione huius 10. propos. liquet, quemadmodum E G, diuisa est in quinque partes æquales, ita similiter in totidem diuisa erit E I. Si igitur officio circini singulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propositam A B, ipsi E I, æqualem, diuisa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.



ALIQVANDO *autem necesse est lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadẽ linea transferatur ab M, usque ad N, punctum lineæ G H, protractæ, erit quoque M N, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi E G, parallela, usque ad rectam G H. Quod si linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendæ erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c.*

EODEM *modo, ad similitudinem huis propositionis, licebit nobis facili negotio datam lineam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam. Id enim non raro a Geometris exigitur.*

SIT *secanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta A F, ipsi C, & F G, ipsi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, cum sit, ut A F, ad F G, atque adeo, ut C, ad D, ita A H, ad H B.* 2. sexti.



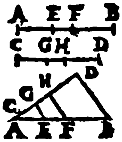
POSTREMO *inferemus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de ijs, quæ uehuntur in aqua. Nimirum.*

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ se-

ctiones

ctiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.

SECENTVR *rectæ* A B, C D, *proportionaliter in binis punctis* E, F, *&* G, H, *ita ut sit* A E, *ad* E B, *sicut* C G, *ad* G D; *Item* A F, *ad* F B, *ut* C H, *ad* H D. *Dico sectiones intermedias* E F, G H, *proportionales quoque esse cum duobus segmentis* A E, C G; *uel cum duobus* F B, H D; *hoc est, esse* A E, *ad* E F, *ut* C G, *ad* G H. *Item* F B, *ad* E F, *ut* H D, *ad* G H. *Cum enim sit, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Erit componendo, ut* A B, *ad* E B, *ita* C D, *ad* G D. *Item cum sit, ut* A F, *ad* F B, *ita* C H, *ad* H D; *Erit componendo, ut* A B, *ad* F B, *ita* C D, *ad* H D; *&*



conuertendo, ut F B, *ad* A B, *ita* H D, *ad* C D. *Itaque cum sit, ut* F B, *ad* A B, *ita* H D, *ad* C D; *Et ut* A B, *ad* E B, *ita* C D,
22. quinti. *ad* G D; *Erit ex æquo, ut* F B, *ad* E B, *ita* H D, *ad* G D; *Et conuertendo, ut* E B, *ad* F B, *ita* G D, *ad* H D; *Et per conuersionem rationis, ut* E B, *ad* E F, *ita* G D, *ad* G H; *Et diuidendo, ut* F B, *ad* E F, *ita* H D, *ad* G H. *Quod est secundum.*

RVRSVS, *quia est, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Et ut* E B, *ad* E F, *ita* G D, *ad* G H; *Erit ex æquo, ut* A E, *ad* E F, *ita* C G, *ad* G H. *Quod est primum.*

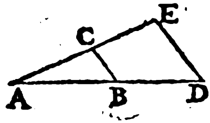
BREVIVS *tota propositio demonstrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta* A, *&* C, *in unum, ut fiat angulus* B C D, *uel* B A D; *iunganturque rectæ* D B, H F, G E. *Quia igitur est,*
2. sexti. *ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Parallela erit* G E, *ipsi* D B. *Rursus, cum sit, ut* A F, *ad* F B, *ita* C H, *ad* H D; *Pa-*
30. primi *rallela erit eadem ratione* H F, *ipsi* D B. *Quare &* G E, H F,
2. sexti. *inter se parallelæ sunt: Ac propterea erit, ut* A E, *ad* E F, *ita* C G, *ad* G H. *Quod est propositum.*

10.
PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ A B, A C, ita dispositæ, ut efficiant angulum

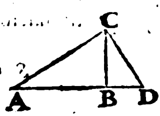
angulum A, quemcumque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem A B, ad A C, ita A C, ad tertiam. Producatur A B, quam uolumus esse antecedentem, & capiatur B D, æqualis ipsi A C. Deinde ducta recta B C, agatur illi ex D, parallela D E, occurrens ipsi A C, productæ in E. Dico C E, esse tertiam proportionalẽ, hoc est, esse ut A B, ad A C, ita A C, ad C E. Cum enim in triãgulo A D E, lateri D E, parallela sit recta B C; erit ut A B, ad B D, ita A C, ad C E; Sed ut A B, ad B D, ita eadem A B, ad A C, æqualem ipsi B D: Vt igitur A B, ad A C, ita A C, ad C E. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



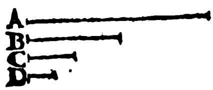
2. sexti.
7. quinti.

SCHOLION.

Aliter idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ A B, B C, constituantur ad angulum rectum A B C; & coniungatur recta A C. Producta autem A B, antecedente, ducatur ex C, ad A C, perpendicularis C D, occurrens ipsi A B, producta in D. Dico B D, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triãgulo A C D, angulus A C D, sit rectus, & ab eo ad basin A D, deducta perpendicularis C B; erit per coroll. 8. propos. huius lib. B C, media proportionalis inter A B, & B D, hoc est, ut A B, ad B C, ita erit B C, ad B D. Quod est propositum.



Inventa autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C; & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis,

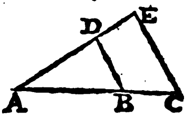


tionalis, sexta, septima, octaua, &c.

10. PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem A B, ad B C, ita A D, ad quartam. Disponantur primæ duæ A B, B C, secundum lineam rectã, quæ sit A C: Tertia uero A D, cum prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo A C E, lateri C E, acta sit perpendicularis B D, erit ut



2. *sexti.* A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

HINC *facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ* A, B, *in quacunque proportione, si tertia quælibet accipiatur* C, *& ei quarta proportionalis inueniatur* D, *ut sit quemadmodum* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D; *factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.*

OSTENDEMVS *etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.*

TRIBVS datis rectis lineis, quartã inuenire, quæ sit ad tertiam, ut prima ad secundam.

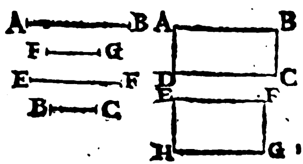
SINT

DBE. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 11. PROPOS. 16. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C, ut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum A B C D, comprehensum sub extremis A B, B C; rectangulum uero E F G H, comprehensum sub medijs E F, F G. Dico rectangula A C, E G, esse æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit ut A B, ad F G, ita E F, ad B C; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelogrãma A C, E G, æqualia erunt. Quod est propositum. 14. sexti.

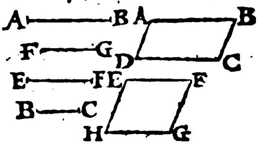


CONTRA uero, sint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B C, esse proportionales, hoc est, esse ut A B, ad F G, ita E F, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & C; erunt latera circa hosce angulos reciproca, sicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales 14. sexti.

 fuerint,

fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

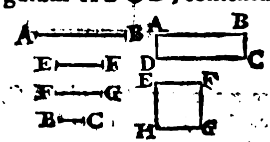


Idem verum est, etiam si parallelogramma A C, E G, non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales. Velut manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.

16. THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres lineæ rectæ A B, E F, & B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C, sitque rectangulum A B C D, contentum sub extremis A B, B C; & quadratum mediæ E F, sit E F G H. Dico æqualia esse rectangulum A C, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis sit ipsi E F, erunt quatuor lineæ A B, E F, F G, B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita F G, ad B C; eritque quadratum E G, comprehensum sub medijs E F, F G, propter æqualitatem rectarū E F, F G; Quare rectangulum A C, comprehensum sub



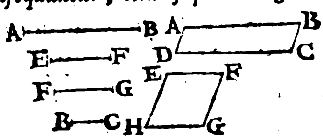
extre-

extremis A B, B C, æquale est quadrato E G, hoc est, re- 16. sexti.
ctangulo sub medijs E F, E G, comprehenso: Quod est propositum.

SED sint iam æqualia rectangulum A C, & quadratū E G. Dico esse ut A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia sint rectangula A C, & E G, erit ut A B, ad E F, ita 15. sexti.
F G, ad B C. Vt autem F G, ad B C, ita est E F, ipsi F G, 7. quinti.
æqualis, ad eandem B C. Quare ut A B, ad E F, ita est E F, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut E G, sit Rhombus, & A C, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, ut figura indicat.



COROLLARIVM.

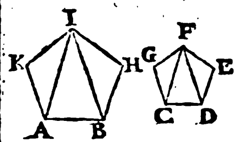
EX posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalē inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, ostensum fuit, esse ut A B, ad E F, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & B C.

PROBL. 6. PROPOS. 18. 19.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterq́; positum rectilineum describere.

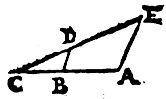
SIT data recta A B, super quam describendum sit rectilineum rectilineo C D E F G, simile similiterq; positum, Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coeantque rectæ A I, B I, in puncto I; eritque reliquo angulo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis, totumque triangulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rursus angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus B I H; conueniantque B H, I H, in puncto H; eritque eadem ratione triangulū B H I, triangulo D E F, æquiangulum. Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K; coeantque A K, I K, in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G E, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, simile esse, similiterque positum. Cū enim angulus I A B, constitutus sit æqualis angulo F C D; & angulus I A K, angulo F C G; erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis; Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut constat ex constructione. Quare æquiangulum erit rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G. Quoniam vero ita est A B ad B I, ut C D, ad D F; & ita B I, ad B H, ut D F, ad D E; erit ex æquo ita A B, ad B H, ut C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, proportionalia sunt. Sunt autem & latera circa æquales angulos H & E, proportionalia, ob triangula æquiangula B H I, D E F. Rursus ita est H I, ad I B, ut E F, ad F D; & ita I B, ad I A, ut F D, ad F C; & ita I A, ad I K, ut F C, ad F G; Quare ex æquo erit ita H I, ad I K, ut E F, ad F G; & ideo latera quoque circa angulos H I K, E F G, proportionalia, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo

32. primi



4. sexti.
22. sexti.
4. sexti.
4. sexti.
22. sexti.

SINT tres rectæ AB, BC, CD; oporteatque inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam sit, ut AB, prima ad BC, secundam. Disponantur prima duæ AB, BC, in directum, ut faciant rectam AC: Tertia uero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, producta, in E. Dico ED, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, ut est AB, prima ad BC, secundam. Hoc autem manifestum est, cum AC, EC, proportionaliter secentur in B, & D.

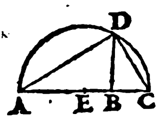


2. sexti.

PROBL. 5. PROPOS. 13. 9.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

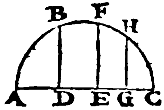
SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, uel EC, semicirculus describatur ADC; Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam usque. Dico BD, esse mediam proportionalē. Ductis enim rectis AD, CD, erit angulus ADC, rectus in semicirculo existens. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB; erit per corollarium 8. propos. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediā proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



31. tertij.

SCHOLION.

PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo a quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, mediam esse proportionalem, *inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipsi A C. Dico D B, esse proportionalem mediam inter A D, & D C, id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim iungantur rectæ A B, C B, fiet angulus A B C, rectus; Quare per coroll. propos. 8. constat propositũ.*

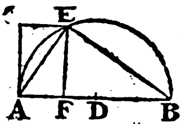


31. *tertij.* *Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, &c.*

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.

SIT data recta A C, & diuidenda proponatur recta A B, (quæ minor non sit quam dupla ipsius A C, sed uel dupla, uel maior) ita ut inter huius segmenta, media proportionalis sit A C. Disponantur rectæ A B, A C, ad angulum rectum B A C, & diuisa A B, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem D A, uel D B, semicirculus describatur A E B. Deinde per C, ducatur ipsi A B, parallela C E, secans circumferentiam in E, puncto, a quo demittatur ad A B, perpendicularis E F. Dico A C, esse mediam proportionalem inter segmenta A F. F B. Ductis enim rectis A E, B E, erit ut iam est demonstratum, ex coroll. 8. propos. huius lib. E F, media proportionalis inter A F, & F B. Cum igitur E F, æqualis sit ipsi A C, eo quod parallelogrammum sit A C E F; (Est enim C E, ipsi A F, parallela per constructionem, & A C, ipsi E F, propter angulos rectos C A F, & E F A;) erit & A C, media proportionalis inter A F, & F B. Quod est propositum.



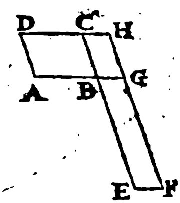
34. *primi*
28. *primi*

13.
THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & unum uni æqualem

lem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, & BG, unam efficiant lineã rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, ſint æquales, erunt & EB, BC, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia ſunt parallelogramma DB, BF, erit ut DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. Sed ut DB, ad BH, ita eſt AB, baſis ad baſin BH, quod parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; & ſimiliter ut BF, ad BH, ita eſt baſis EB, ad baſin BC: Igitur ut AB, ad BG, ita eſt EB, ad BC, quod eſt propoſitum.



7. quinti.

1. ſexti.

E CONTRARIO, ſint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc eſt, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione, cum ſit, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC; Vt autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & ut EB, ad BC, ita BF, ad idem BH: erit quoque ut DB, ad BH, ita BF, ad idem BH; Ac idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

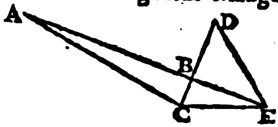
1. ſexti.

9. quinti.

14. THEOR. 10. PROPOS. 15.

AEQVALIVM, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

SINT duo triangula æqualia A B C, D B E, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur triangula ad angulos æquales, ita ut



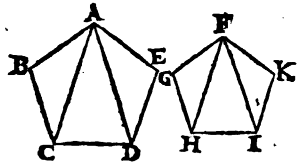
A B, B E, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli A B C, D B E, sint æquales; erũt & D B, B C, una recta linea, ceu demonstratum est, ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E; quoniam æqualia sunt triangula A B C, D B E, erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, ad idẽ B C E; sed ut triangulum A B C, ad triangulum B C E, ita est basis A B, ad basin B E, quod hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter ut D B E, ad B C E, ita basis D B, ad B C; Quare ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Quod est propositum.

7. quinti. 1. sexti.

IAM uero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit ut A B, ad B E, ita D B, ad B C; ut autem A B, ad B E, ita triangulum A B C, ad triangulũ B C E; & ut D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E: Erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E; proptereaq; æqualia erunt triangula A B C, D B E.

1. sexti. 9. quinti.

triangula A B C, F GH, habentia angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G; ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt. Eadem ratione erunt similia triangula A E D, F K I. Deinde quia est ut A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob similitudinem triangulorum A B C, F G H; ut autem C B, ad C D, ita est, ex hypotesi, H G, ad H I, ob similitudinem polygonorum; Ex æquo erit ut A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur angulo G H I; est autem & ablatus A C B, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. Quare triangula A C D, F H I, æquiangula erunt, ideoque similia. 6. sexti. 4. sexti. 22. quinti. 6. sexti.

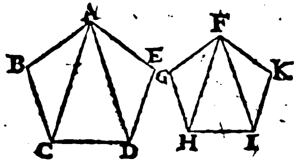


Dico præterea triangula hæc esse homologa totis polygonis. Quoniam similia sunt triangula A B C, F G H, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H: Atque eodem argumento proportio triãgulorum A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum A D E, ad triangulum F I K, ut A C D, ad F H I. Atque ita proportionalia sunt triangula unius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula unius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem unum antecedens ad unum consequens, ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. 19. sexti. 12. quinti.

Dico postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim sit ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K; Triãgulum

gulum uero A B C, ad triangulum F G H, habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa A B, F G: habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis corũdem laterum homologorum A B, F G.

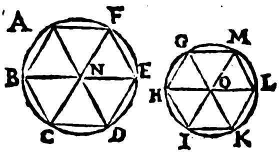
15. quinti.



Itaq; similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

QVOD si polygona similia, fuerint æquilatera, & æquiangula, diuidentur quoque in similia triangula, & numero æqualia, ductis e centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula A B C D E F, G H I K L M, quæ circumscribantur a circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur N A, N B, &c. Dico triangula *N C D, O I K, similia esse. Quoniam anguli C N D, I O K, æquales sunt; (quod æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam utrunque spacium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & quantitate æquales, subtensos nimirum a basibus æqualibus, contentosque lateribus æqualibus.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum utrobique sit proportio æqualitatis; Similia erunt triangula N C D, O I K. Eademque est ratio de cæteris. At uero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negocio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, ut patet, habebunt utique eandem cum ipsis proportionem.*



6. sexti.

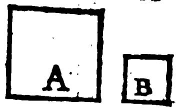
15. quinti.

PORRO *ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theore-*

theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

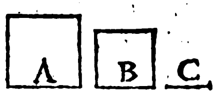
SIT primum recta A, dupla recta B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, ut constat ex 1. defin. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut hic apparet. 1. 2. 4.



SIT iam quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, ut dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in exemplo adducto superius apparet.

COROLLARIUM.

HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum.



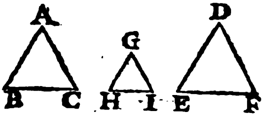
HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate: Ut perspicuum est in hac figura apposita.

THEOR.

20. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

Sint rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales sint angulis



rectilinei G H I; Item eadem de causa anguli rectilinei D E F, æquales angulis eiusdem rectilinei G H I; erunt per communem sententiam, anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cum ob eandem similitudinem latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei G H I, ea uidelicet, quæ circum æquales sunt angulos; Item eandem ob causam, latera rectilinei D E F, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei G H I; erunt quoque latera rectilinei
11. quinti nei A B C, lateribus rectilinei D E F, proportionalia, ea nimirum, quæ angulos ambiunt æquales; Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea A B C, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

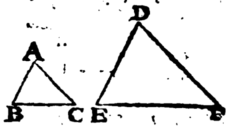
21. THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

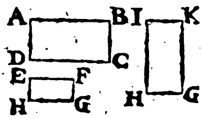
Sint quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales, ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsimus; Quod faciendum erat.

SCHOLION.

DICVNTVR *autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & reliqui æquales semper ordine sese consequuntur, nec non, & latera proportionalia. Vt triangula A B C, DEF, non solum erunt similia, sed etiã super rectas B C, E F, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit A B, ad B C, ut D F, ad E F, &c. At super rectas B C, DE, non dicentur similiter esse descripta, cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E.*



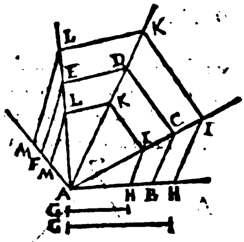
Similiter rectangula A C, E G, similia, dicentur similiter esse descripta sup rectas D C, H G, quoniam ut A D, ad D C, ita est E H, ad H G, &c. At vero rectangula A C, I G, non dicentur similiter descripta super rectas D C, H G, quamuis sint similia, ut manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas D C, I H, uel super rectas A D, H G.



Omnes autem figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, ut patet in rectilineis A B H I K, C D E F G, super lineas A B, & C D, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter. 17.

FORTASSIS *autem expeditius Problema propositum conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo A B C D E F, super datam rectam G, describendum simile rectilineum, similiterque positum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ A C, A D, A E, quantumlibet. Deinde ex A B, abscindatur A H, æqualis datæ rectæ G, uel certe ex ipsa A B, ulterius producta, si uidelicet G, fuerit maior, quam A B. Post hæc per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per I, rect-*

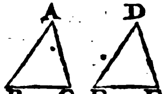
I, recta I K, lateri C D, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis A B, A F; factumq; erit, quod proponitur. Cũ enim angulus A, sit communis; & angulis A B C, A F E, æquales
29. primi *sint anguli A H I, A M L; Nec non & angulis A C B, A C D; æquales sint anguli A I H, A I K, hoc est, toti angulo B C D, æqualis sit angulus H I K; Eodemque modo angulis C D E, D E F, æquales sint anguli I K L, K L M: Aequiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, ut A B, ad*
4. sexti. *B C, ita A H, ad H I. Rursus, ut B C, ad C A, ita H I, ad I A; Et ut C A, ad C D, ita I A, ad I K: Ac proinde, ex æquo, ut B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, & similiter posita.*



17. THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

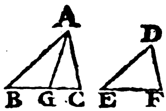
SINT triangula similia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico triangula inter se rationem habere duplicatã eius, quam habent latera homologa B C, & E F. Sint enim primum latera B C, E F,



26. primi æqualia; eruntque propterea triangula inter se æqualia, habebuntque proportionem æqualitatis, quemadmodũ & latera homologa; Atqui proportio æqualitatis

litatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, ut constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam.) Igitur triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet latus B C, ad E F. Quod est propositum.

Sit secundo B C, latus latere E F, maius; & ex B C, abscindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis B G, ducaturq; recta A G. 11. sexti. Quia igitur est ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando ut A B, ad D E, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad E F, ita est per constructionem E F, ad B G: Vt ergo A B, ad D E, ita erit E F, ad B G. 11. quinti. Quare cum triangula A B G, D E F, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, ipsa inter se æqualia erunt; 15. sexti. & propterea ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G; 7. quinti. Vt autem triangulum A B C, ad triangulum A B G, eiusdem altitudinis, ita est basis B C, ad basin B G. 1. sexti. Igitur ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est B C, ad B G. Atqui cum tres lineæ B C, E F, B G, sint proportionales, erit proportio primæ B C, ad tertiam B G, duplicata proportionis B C, primæ ad E F, secundam. Quare & triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam proportionis B C, ad E F. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.



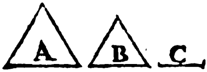
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

Sint enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterque descripta.

Dico,

Dico, ut est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B: Cum igitur triangulum A, ad triangulum B,



19. sexti. habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiã simile similiterq; descriptu, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est recta C, ad rectã A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

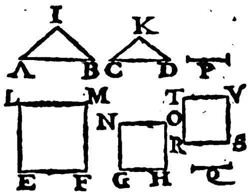
18. THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

SINT polygona similia A B C D E, F G H I K, habentia angulos æquales B A E, G F K; Item angulos B, G, & sic deinceps. habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem A B, ad B C, ita F G, ad GH; & ut B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primo, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint A C, A D, F H, F I; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia, cũ propter similitudinem habeant angulos numero æquales. Quoniam uero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; æquiangula erunt

triangula

nales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Constituanturque super A B, C D, duo quæcunque rectilinea similia, similiterque descripta A B I, C D K; Item super E F, G H, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, E F M L, G H O N. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia proportionalis Q; eritque ex æquo, ut A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita est rectilineum A B I, ad rectilineum C D K, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. uel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, ut E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. Igitur ut A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod est propositum. 11. sexti. 22. quinti. 11. quinti.

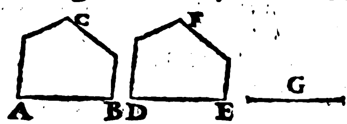


E CONVERSO, sint iam dicta rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D, E F, G H, esse quoque proportionales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H. Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, super quam describatur rectilineum R S V T, simile rectilineo E M, & ob id rectilineo G O, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, ut iam est ostensum, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt autem A B I, ad C D K, ita quoque ponitur E M, ad G O: Igitur erit ut E M, ad R V, ita E M, ad G O; Ac idcirco æqualia erunt R V, G O. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus, super rectas R S, G H, æquales. Quare erit ut E F, ad R S, ita E F, ad G H. Ponitur autem E F, ad R S, ut A B, ad C D. Igitur erit ut A B, ad C D, ita E F, quoque ad G H. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. 12. sexti. 21. sexti. 11. quinti. 9. quinti. 7. quinti. 11. quinti.

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt G O, R V, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt G H, R S; sit G H, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut G H, ad H O, ita R S, ad S V; Ponatur autem G H, maior quam
14. quinti. R S; erit quoque H O, maior quam S V; & propterea rectilineum G O, maius rectilineo R V, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ G H, R S. quod est propositum.

ALITER. Sint duo rectilinea A B C, D E F, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ A B, D E, esse æqualia. Si enim nō credatur æqualia, sit A B, maius, quam



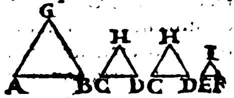
D E; inueniaturque rectis A B, D E, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, ut A B, ad D E, ita D E, ad G; Est autem A B, maior, quam D E: Erit quoque D E, maior, quam G; ac propterea multo maior A B, quam G. Vt uero A B, ad G, ita est rectilineum A B C, ad rectilineum D E F, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. Igitur cū A B, maior sit, quam G, erit quoque rectilineum A B C, maius rectilineo D E F: quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est A B, recta quam recta D E. Sed neque minor erit eadem ratio-

ne;

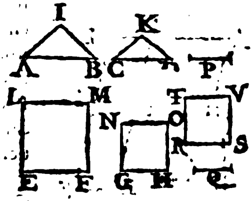
ne; quia & rectilineum A B C, minus ostenderetur rectilineo D E F; quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ A B, D E.

SCHOLION.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, ut hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod a secunda est descriptum, æquale sit ei, quod a tertia, eo quod & linea secunda sit æqualis tertiæ; manifestum est, quod proponitur.



BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primo esse ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico esse quoque ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Cum enim sit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Itē proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H: erunt proportiones A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium A B, ad C D; & E F, ad G H. Quod est primum. 19. uel 20. sexti.

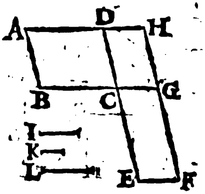


Rursus ponatur secundo esse, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoque ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Cum enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D; & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum. 19. uel 20. sexti.

24. THEOR. 17. PROPOS. 23.

AEQVIANGVLA parallelogrammata inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SINT parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut B C, C G, efficiant unam lineam rectam; Quo facto, cum anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec conueniant in H. Sumpta iam recta I, quacunque, inueniatur tribus B C, C G, & I, quarta proportionalis K: Item tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, ut B C, ad C G, ita A C, ad C H; Vt autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K; erit quoque ut A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, ut H C, ad C F, ita K, ad L. Ex æquo igitur erit, ut A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; hoc est, ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque



12. sexti.

1. sexti.

11. quinti.

22. quinti.

demque ratione ostendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad G E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos rectos, ut B C, C E, efficiant unam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter se, rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

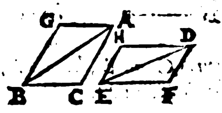
SCHOLION.

Expeditius idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, ut prius; Cum sit ut A C, ad C H, 1. *sexti.*
ita B C, ad C G; & ut C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quae illis intermedijs sunt aequales. Quod est propositum.

Demonstrat hoc in loco Federicus Commandinus nonnulla alia ad compositionem proportionum pertinentia non inutilia, quae nos quoque afferre decrevimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quae sequuntur.

Triangula, quae unum angulum uni angulo aequalem habent, proportionem habent ex lateribus aequalem angulum comprehendentibus compositam. I.

Sint triangula A B C, D E F, *angulum* C, *angulo* F, *habentia aequalem. Dico proportionem trianguli* A B C, *ad triangulum* D E F, *compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione* B C, *ad* E F, *& ex proportione* A C, *ad* D F; *Vel ex proportione* B C, *ad* D F. *& proportione* A C, *ad* E F.

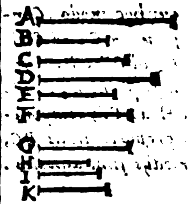


Completis enim parallelogrammis C G, F H, *erunt ea aequiangula; atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula* A B C, D E F, *cum ipsis,* 23. *sexti.*
quorum sunt dimidia, eandem habeant proportionem; Erit 15. *sexti.*

quoque proportio A B C, ad D E F, composita ex proportionibus laterum B C, A C, ad latera E F, D F.

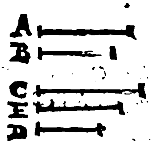
II. PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Oportet iam ex ipsis unã proportionem componere. Fiat ut A, ad B, ita G, ad H; & ut C, ad D, ita H, ad I; & ut E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim composita sit ex proportionibus G, ad H; H, ad I; & I, ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, & F; quod his illæ sumptæ sint æquales.



III. PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

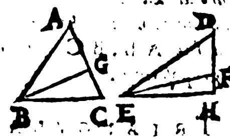
SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. Fiat, ut A, ad B, ita C, ad E; statuaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamque esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.



IIII. TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus

bus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

Sint triangula A B C, D E F, *angulum* A, *angulo* D, *habentia æqualem. Dico esse* A B C, *ad* D E F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Ductis enim ad* A C, D F, *perpendicularibus* B G, E H, *erunt triangula* A B G, D E H, *æquiangula, ut constat ex coroll.* 1. *propos.* 32. *lib.* 1. *cũ duo ãguli* A, A G B, *duobus angulis* D, D H E, *sint æquales. Igitur erit, ut* G B *ad* B A, *ita* H E, *ad* E D: *Vt autem* G B, *ad* B A, *ita est rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* B A, A C. (*Nam si bases ponantur* G B, B A, *erit eorum eadem altitudo* A C.) 4. sexti. 1. sexti.



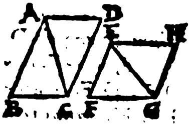
Et eadem ratione, ut H E, *ad* E D, *ita est rectangulum sub* E H, D F, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Rectangulum igitur sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* A B, A C, *est, ut rectangulum sub* E H, D F, *ad rectangulum sub* D E, D F; *&* *permutando, rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* E H, D F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Sed ut rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* E H, D F, *ita est triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia.* (*Habent enim easdem cum illis bases* A C, D F, *altitudinesque easdem* B G, E H; *ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.*) *Igitur erit quoque triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Quod est propositum.* 11. quinti. 15. quinti. 41. primi

V. PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.

Sint parallelogramma A B C D, E F G H, *æquiangula inter se, quorum anguli* B, *&* F, *sint æquales. Dico esse,*

 ut

ut B D, ad F H, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Ductis enim diametris A C, E G, quae angulos aequales B, F, subtendunt, habebunt triangula A B C, E F G, angulum B, angulo F, aequalem. Quare, ut iam demonstrauimus, erit, ut A B C, ad E F G, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Cum ergo parallelogramma B D, F H, eandem habeant proportionem, quam triangula A B C, E F G, ipsorum dimidia; Erit quoque ut B D, ad F H, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Quod est propositum.

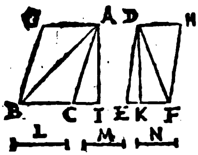


15. quinti.
11. quinti.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent cōpositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

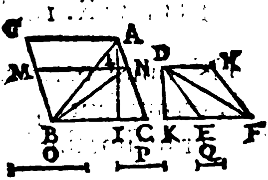
SINT triangula A B C, D E F, & parallelogramma C G, E H, quorum altitudines A I, D K. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis B C, ad basin E F, & proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K. Sint enim primū altitudines aequales, bases uero uel aequales etiā, uel inaequales: Fiatque, ut B C, ad E F, ita L, ad M; Vt autem A I, ad D K, ita M, ad N. Quo facto, erit M, ipsi N, aequalis, quod & A I ipsi D K, aequalis ponitur; Ac proinde erit L, ad N, ut L, ad M, hoc est, ut B C, ad E F. At uero, ut B C, ad E F, ita est triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H. Igitur quoque erit, ut L, ad N, ita triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H; Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, basis B C, ad basin E F; & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis A I, ad altitudinem D K. Proportio ergo trianguli A B C, ad triangulum D E F, & pa-



7. quinti.
1. sexti.

& parallelogrammi C G, ad parallelogrammi E H, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

SINT iam altitudines A I, D K; inæquales, & A I, maior; bases vero B C, E F, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt A I, ad D K, ita O, ad P; & vt B C, ad E F, ita P, ad Q. Abscissa deinde I L, æquali ipsi D K; ducatur per L, ipsi B C, parallela L M, secãs A C, in N, iungaturq; recta B N. Quoniam igitur est triangulum A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad



parallelogrammum C M, vt altitudo A I, ad altitudinem I L, vel ad D K, ipsi I L, æqualem, hoc est, ut O, ad P, per ea, quæ ad 1. propos. huius lib. ostendimus: Et vt triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, ita est, basis B C, ad basin E F, (cum eadẽ sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q. erit ex æquo A B C, ad D E F, & C G, ad E H, ut O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, altitudinis A I, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc est, basis B C, ad basin E F: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod est propositum. 1. sexti.

EODEM pacto ostendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor est, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, composita esse ex ꝓportione basis E F, ad basin B C, & proportione altitudinis D K, ad altitudinẽ A I. Si enim fiat, vt E F, ad B C, ita Q, ad P; & vt D K, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius, erit triangulũ D E F, ad triangulũ N B C, & parallelogrammũ E H, ad parallelogrammum C M, vt E F, ad B C, hoc est, ut Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, seu D K, ad A I, hoc est, vt P, ad O. Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, 1. sexti.

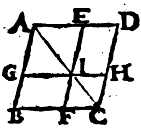
E F,

E F, ad B C, & ex proportione P, ad O, hoc est, D K, ad A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eisdem proportionibus.

22. THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

ESTO parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctũ I, ducantur duæ rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogrãma circa diametrũ, nẽpe E G, F H, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam angulus G A E, idem est qui angulus B A D; & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æquiangulum est E G, ipsi B D: Et eadẽ ratione eidem B D, æquiangulum erit F H. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum A G I, æquiangulum sit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, ut perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. uel etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. erit ut A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus erit ut B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item ut C A, ad C D, ita I A, ad I E. Ex æquo igitur, ut B C, ad C D, ita G I, ad I E; ac propterea & latera circa angulos B C D, G I E, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse ꝓportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrãmum



4. sexti.

22. quinti.

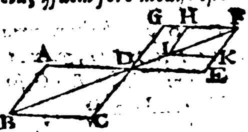
mum F H, simile esse eidem parallelogrammo B D; atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelo- 21. sexti.
grammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius, esse talia, quæ habeant unum angulũ cum toto parallelogrammo communem, ut manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud; ita ut duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, iisdem fere mediis ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter B D, sit producta ad F, circa quam consistat parallelogrammum D E F G, cuius duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, simile esse parallelogrammo A C. Quod enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno A D G; huic autem æqualis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. Quare his oppositi C, & E, æquales quoque erunt. Rursus quia anguli A D C, G D E, ad verticem, sunt æquales, erunt his quoque oppositi A B C, G F E, æquales. Igitur æquiangula sunt G E, A C, parallelogramma. Quod autẽ latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulũ sit triangulo D G F; & triangulum B C D, triangulo D E F, vt constat ex propos. 29. lib. 1. Erit vt B A, ad A D, ita D G, ad G F. Rursus vt A D, ad D B, ita G F, ad F D; & vt D B, ad D C, ita F D, ad F E; ac propterea ex æquo vt A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse.

34. primi
15. primi
34. primi
4. sexti.



Quare

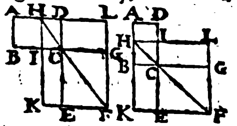
Quare similia sunt parallelogramma A C, G E: Quod si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum H I K F. habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C; idem demonstrabitur. Nam productis A D, C D, donec occurrant rectis F K, F H, productis in E, & G; erit H K, simile ipsi G E, ut Euclides demonstrauit: Atqui eidem G E, simile est quoq; A C, vt nunc ostendimus. Igitur & H K, A C, inter se similia sunt. Quod est propositum.

21. sexti.

SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

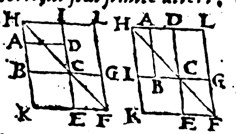
DATIS duobus parallelogrammmis æqui angulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint A B C D, C E F G; & ex A B C D, abscindendum sit parallelogrammum ipsi C E F G, simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales B C D, E C G, ita ut



sit una linea recta B C G, & propterea ut ad ppos. 15. lib. 1. demonstratum est, E C D, quoq; una recta linea. Deinde ducta diameter F C, producatur, donec in H, secet uel latus A D, uel latus A B; & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogramum abscissum H C, simile esse ipsi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum; Quare inter se similia, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.

EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, ut fiat simile alteri. Sit enim augendum A B C D, ut fiat ipsi C E F G, simile. Coniunga-

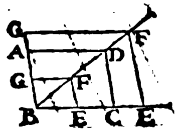


tur vti prius, & diameter F C, extendatur, donec in H, secet uel latus B A, protractum, uel latus D A, protractum. Deinde per H, ducatur H I, parallela ipsi A D, uel ipsi A B, donec secet vel C D, protractam, uel C B, protractam in I. Dico parallelogrammum auctum H C, simile esse parallelogrammo C F. Nam si

com-

compleatur totum parallelogrammum K L, consistent H C, C F, circa diametrum; Quare similia inter se erunt.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis a nobis propositi in hoc Scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia; Verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo A B C D, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus unum, nēpe B C; Atque ex E, quolibet puncto ultra C, ipsi C D, parallela E F, ducenda, secans diametrũ B D, productã in F; & per F, ducenda F G, parallela ipsi A D, occurrens rectæ B A, productæ in G. Erit enim parallelogrammum G E, simile similiterque positum ipsi A C, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, ut prius, ceu figura indicat.

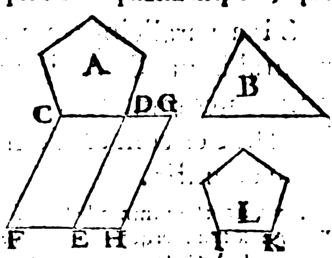


PROBL. 7. PROPOS. 25.

25.

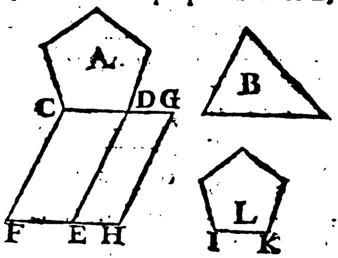
DATO rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale uero ipsi B. Super C D, unum latus rectilinei, cui simile debet constitui, constituatur parallelogrãmum C E, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam D E, in angulo E D G, qui æqualis sit angulo D C F, parallelogrammum D H, æquale ipsi B; eritque C D G, linea una



44. uel 45. primi.

una recta, nec nō F E H, ceu demonstratum fuit propos. 45.
15. sexti. lib. 1. Inueniatur iam inter rectas C D, D G, tertia propor-
18. sexti. tionalis I K, super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positū. Dico L, æquale etiā esse alteri rectilineo B. Cū enim



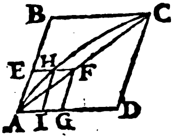
sint proportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit p coroll. propos. 20. huius lib. ut C D, prima ad D G, tertiā, ita A, rectilineum super primam C D, ad rectilineum L, super I K, secundam simile similiterq; descriptū.
1. sexti. Vt autem C D, ad D G, ita est parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiusdem altitudinis. Igitur erit ut C E, ad DH, ita A, ad L. Vt autē C E, ad D H, ita est A, ad B, propter æqualitatem parallelogrammorum, & ho-
11. quinti. rum rectilineorum. Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; pro-
9. quinti. ptereaq; æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

23. THEOR. 19. PROPOS. 26.

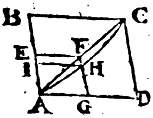
SI a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

Ex parallelogrammo B D, abscissum sit parallelogrammū E G, simile similiterq; positum, habens cum ipso angulū cōmunem E A G. Dico E G, consistere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ si fuerint una linea

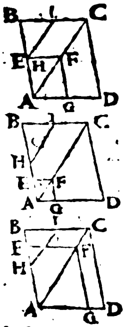
linea recta, perspicuum est, cum A F, sit diameter ipsius E G, & A C, diameter ipsius B D, parallelogrammum E G, consistere circa diametrū A F C, totius parallelogrammi. Quod si A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter A C, secans latus E F, in H puncto, per quod ipsi F G, parallela agatur H I. Quoniā igitur parallelogramma B D, E I, sunt circa eandem diametrum A H C, ipsa erunt similia, similiterq; posita. Quare erit ut B A, ad A D, ita E A, ad A I: Sed ut B A, ad A D, ita quoque est E A, ad A G; quod parallelogramma B D, E G, ponantur similia, similiterque posita. Igitur erit ut E A, ad A I, ita E A, ad A G. Ac propterea æquales erunt rectæ A I, A G; pars, & totum; quod est absurdum. 24. sexti. 11. quinti. 9. quinti.



QVOD si dicatur recta A H C, secare alterum latus F G; Tunc ducta H I, parallela ipsi E F; erunt rursus similia parallelogramma B D, I G, similiterq; posita. Quare erit ut D A, ad A B, ita G A, ad A I: Sed ut D A, ad A B, ita quoque est G A, ad A E; ob similitudinem parallelogrammorum B D, E G; Igitur erit ut G A, ad A I, ita G A, ad A E; ideoq; æquales erunt rectæ A I, A E; pars & totum: Quod est absurdum. Itaq; si a parallelogrāmo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum. 24. sexti. 11. quinti. 9. quinti.



SCHOLION.

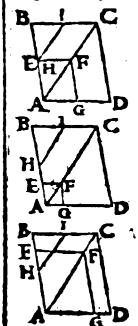


ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiue, hoc modo. Diuisis lateribus A B, B C, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue supra, siue infra; ducantur rectæ H I, A F. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est ut A B, ad B C, ita A E, ad E F; Vt autē tota A B ad totam B C, ita est dimidia H B, ad dimidiam B I; Erit ut H B, ad B I, ita A E, ad E F. Triangula igitur H B I, A E F, cum habeant circa 15. quinti. 11. quinti

angulos

angulos æquales B, F, latera proportionalia, erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF.

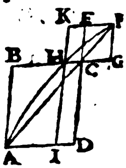
6. sexti.



28. primi Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniã vero recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, parallela quoq; est rectæ HI, propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc cõstituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I, utpote bifariam; efficitur, ut ducta recta AC, eadem fiat quæ AF, transeatq; per punctum F; cum ex puncto A, solum una linea parallela rectæ HI, possit duci, ut manifestum est. Consistunt ergo BD, EG, parallelogramma circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.

2. sexti.

QVOD si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra aliud, hac tamen lege, ut ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus ijsdem fere medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungãtur, ut lineæ BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ DC, CE, unam quoq; lineã rectam componant. Dico parallelogrãma BD, EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, unam rectam lineam conficere. Si enim AC, FC, nõ faciunt unam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD, occurrens rectæ FE, productæ in K.



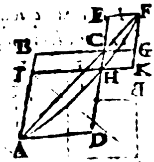
Quoniam igitur parallelogrãma BI, KG, circa eandem diametrum AHF, productam consistunt, efficiuntq; duæ rectæ BH, HI, cum duabus rectis HG, HK, lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq; posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit ut HB, ad BA, ita FK, ad KH. Habet autem CB, maior ad BA, maiorem proportionem, quam HB, minor ad eandem BA; &

8. quinti.

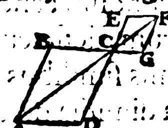
est

est ut C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur similia similiterque descripta; Igitur & F E, ad E C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam H B, ad B A, hoc est, quam F K, ad K H. Quam ob rem cum F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam F K, ad eandem K H, erit F E, maior quam F K; pars quam totum: Quod est absurdum. 10. quinti.

QUOD si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat rectæ F G, protractæ in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut H D, ad D A, ita F K, ad K H. Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionē, quam H D, ad D A; Et est ut C D, ad D A, ita F G, ad G C, propterea quod parallelogramma B D, E G, similia similiterque posita sunt concessa; Igitur & F G, ad G C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam F K, ad K H; ideoque F G, maior erit, quam F K, pars quam totum: Quod est absurdum. 8. quinti. 10. quinti.

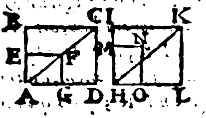


OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum B D, E G, anguli B, E, sunt æquales; estque ut A B, ad B C, ita C E, ad E F; habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia, ac idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos B C A, E F C, æquales. Addito ergo communi angulo B C F, erunt duo anguli B C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales; sed hi inter parallelas B C, E F, æquales sunt duobus rectis. Quare & B C A, B C F, duobus erunt rectis æquales; Ac propterea A C, F C, unam component rectam lineam. Quod est propositum. 6. sexti. 29. primi 14. primi

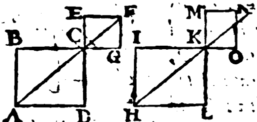


RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiā similiter positū, ut ostēdatur circa eandē cū toto diametrū. Nam si ex altera parte longiori B D, abscindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum consistens,

24. sexti. erit E G, ipsi B D, simile similiterque positum. At vero si in rectangulo I L, quod sit aequilaterũ ipsi B D, sumatur H M, aequalis ipsi E F; & M N, aequalis ipsi A F, &c. erit quidem rectangulum M O, aequale & simile rectangulo E G, propter aequalitatẽ laterum, & angulorum, qui sunt recti, & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistit circa eandem cum toto I L, diametrum.



IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis, quorum unũ est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se connexa, ut duo latera unius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus E G, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum: At vero M O, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamvis simile sit, cũ prorsus sit aequale ipsi E G. Nam K M, aequalis est ipsi E F, & M N, ipsi E G, &c.

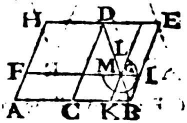


26. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod a dimidia describitur; maximũ id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammũ simile existens defectui.

DETVR recta A B, diuisa bifariam in C, superq; eius dimidiam B C, constituatur quodcunque parallelogrammũ C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum paralle-

parallelogrammum A B E H, erit parallelogrãmum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundũ A B, deficiens parallelogrammo C E, & existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum, deficiensque parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quę secundum A B, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, utcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis A B, B E; erit parallelogrammum F K, secundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, quod ipsi C E, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum C E, diametrum. Quoniam uero complementa C G, G E, æqualia sunt; si addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E: Est autem C I, æquale ipsi C F, propter bases æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoq; communi C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius sit gnomone L M, (continet enim C E, præter gnomonẽ parallelogrãmum adhuc D G,) erit quoq; A D, æquale existens ipsi C E, propter bases ęquales A C, C B, maius quam parallelogrammum A G, eodem parallelogrammo D G. Eodemq; modo ostendetur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, ut punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam dimidia A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.



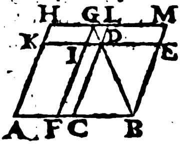
24. sexti.
43. primi
36. primi
36. primi

Aliter demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo. Parallelogramma F D, D I, sunt æqualia, cum bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius quam G E, hoc est, quam complementum C G, sibi æquale, parallelogrammo D G; Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Acidcirco addito communi C F, maius erit A D, quam A G, parallelogrãmo eodem D G.

36. primi
43. primi

Quod si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta

HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq; rectis AK, BE, pro



tractis in H, & M; Itē ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammū AG, applicatum secundum rectam AB, deficiēs parallelogrammo FM, quod
24. sexti ipsi CE, est simile similiterque positū, cum sit circa eandem diametrum cum CE; Dico adhuc maius esse AD, ipso AG. Protracta enim
34. primi CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, ideoque æqualia
36. primi parallelogramma HD, DM. Cum igitur DM, sit æquale complemento DF, erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL; Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis cōcludes AD, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam dimidia AC, habetque maiorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

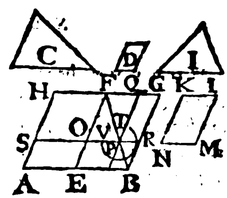
MANIFESTUM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidia AC, qualis est AK, in priori figura, vel minorem, cuiusmodi est AF, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

27.

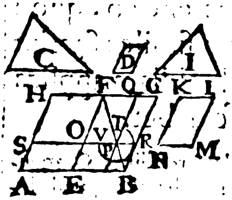
PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam in E, super medietatem EB, describatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. 18. sexti. Si igitur AF, æquale est ipsi C, cum sit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo EG, simili ipsi D, factum erit, quod iubetur. Si autem AF, maius est quam C. (Neque enim minus erit. Nam cum per præcedentem ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari ullum ad AB, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora: Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoq; sibi æquale EG, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua uero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad ppos. 45. lib. 1.) & cōstituatur parallelogrammū KLMN, simile quidem ipsi D, seu ipsi EG, æquale uero excessui inuento I, ut sit EG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, simul, & ob id maius quam KM. 25. sexti. Cum igitur ob similitudinem sit ut EF, ad FG, ita NK, ad KL; erunt quoque latera EF, FG, maiora lateribus NK, KL. Si enim his illa forent æqualia, uel minora, esset etiam EG, æquale ipsi NL, uel minus, ut constat. Quare abscissis rectis FO, FQ, quæ sint æquales ipsis KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO; erit hoc ipsi



L N, æquale, & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi E G: atque adeo circa eandem diametrum cum E G, consistet, quæ sit BF. Productis iam rectis Q B, O P erit
16. sexti.



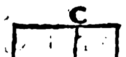
parallelogrammũ A P, ad rectam A B, applicatũ, deficiẽs parallelogrãmo P B, quod simile est ipsi E G, & propterea ipsi D. Dico igit. A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. Nã cũ P G, æquale sit cõplemẽto P E; si addat. cõmune P B, erit & B Q, æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S, quod æquale est ipsi E R, propter bases æquales B A, E B. Quare si æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æqualis gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C. (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, una cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrãmo D; & æquale rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

24. sexti.
43. primi
36. primi

SCHOLION.

MOVENT hoc in loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Qua de re consule eorum commentarios.

PERSPICVVM autem ex dictis est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C; Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratũ C B; continetur quoq; A C, sub segmentis A D, D B, per applicationẽ factũ.

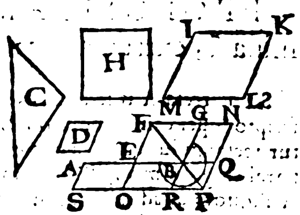


PROBL.

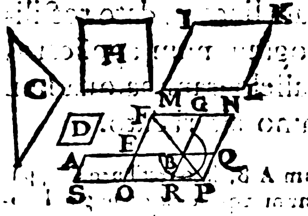
PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri, parallelogrammo D. Diuisa A B bifariam in E; super dimidiam E B, construatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum. 18. sexti. Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G constituatur quadratum H, æquale, cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile uero ipsi E G, similiterque positum; eritque propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod cõstructũ est rectilineo C, una cum parallelogrammo E G, æquale. Cum igitur ob similitudinẽ M K, E G, sit ut M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoque latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, uel minora, esset quoque M K, uel æquale ipsi E G, uel minus, ut perspicuum est. Productis igitur F E, F G, ut rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N, erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cũ sit æquale ipsi M K, & simile. Quare O N, E G, circa eandem diametrum consistent, quæ sit F P. Productis iam A B, G B, 26. sexti. ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniat in S; erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, quod simile est 24. sexti. ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. Nam cũ A O, E R, sint æqualia; & E R, æqua 36. primi



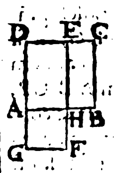
43. primi. le complemento B N, erit & A O, ipsi B N, æquale; Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni EPN. Atqui gnomon EPN, æqualis est rectilineo C, (nam cum M K, hoc est, O N, æquale sit rectilineo C, una cum E G; Si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P N, & rectilineũ C.) Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est A P, excedens parallelogrãmo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.



29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatã, extrema, ac media ratione secare.

SIT recta A B, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; ad latus D A, applice-
29. sexti. tur rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato, eritq; propterea A F, quoq; quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet deinde recta E F, rectam A B, in H. Dico A B, in G, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint D F, & A C; si dematur commune A E, remanebunt æqualia G H, H C; quæ cum habeant angulos æquales A H F,
14. sexti. B H E, utpote rectos; erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit ut E H, hoc est, ut A B, sibi æqualis, ad H F, hoc est, ad A H, sibi æqualem, ut A H, ad H B. Quare secta est A B, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineã terminatam, &c. Quod erat faciendum.



ALITER

ALITER ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitq; rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; erunt ipsæ proportiona- *17. sexti.* les, ut AB quidē ad AH, ita AH, ad HB. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

ALITER totum problema conficiemus. Diuidatur AB, in C, ita ut rectangulum sub to- *18. secundi* ta AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam

extrema ac media ratione. *17. sexti.* Erunt enim rursus, ut prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.

SCHOLION.

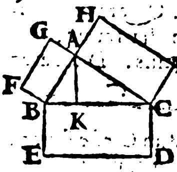
HABET admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes utilitates, proprietatesque, ceu in libris Stereometriæ manifestum erit, ut nō sine causa a plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilē eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum subtendēte descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ a lateribus rectū angulum continentibus describuntur.

TRIANGVLVM rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectū; describaturq; super BC, quæcunq; figura rectilinea BCDE, cui similes similiterq; positæ super *18. sexti.* AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK; erit per corollarium propos. 8. huius

huius lib. ut B C, ad C A, ita C A, ad C K. Quare ut B C, ad C K, prima linea ad tertiã, ita figura B D, super primã, ad figuram C H, super secundam similiter positã, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. & conuertendo ut C K, ad B C, ita figura C H, ad figura B D. Non secus ostendetur, esse quoque ut B K, ad B C, ita figuram B G, ad figurã B D; cum tres lineæ B C, B A, B K, sint quoque proportionales, &c. Quoniã igitur est ut C K, prima quantitas ad B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut



B K, quinta quantitas ad B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam; erit ut prima C K, cum quinta B K, ad B C,

24 quinti. secundam, ita tertia C H, cum sexta BG, ad B D, quartã Sunt autem prima C K, & quinta B K, simul æquales secundæ B C; ergo tertia C H, & sexta B G, simul æquales quoque erunt quartæ B D. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. Quod erat ostendendum.

8. sexti. ALITER. Cum triangulo A B C, simile sit triangulũ K A C, sintq; homologa latera ipsorum BC, CA; (Nam est ut B C, ad CA, in triãgulo ABC, ita CA ad C K, in triãgulo

19. sexti. K A C) habebit triangulũ K A C, ad triangulũ A B C, duplicatã proportionem eius, quam habet C A, ad B C. Habet autẽ

19, uel 20. sexti. & figura C H, ad figuram B D, proportionẽ duplicatã proportionis C A, ad B C. Quare erit ut triangulũ K A C, ad

11. quinti. triangulum ABC, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione ostendetur esse, ut triangulũ K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rursus est, ut K A C, prima quantitas ad A B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut K B A, quinta ad ad ABC, secundam, ita B G, sexta ad BD, quartam; erit &

24. quinti. prima K A C, composita cum quinta K B A, ad secundam ABC, ita composita tertia, C H, cum sexta BG, ad quartam B D. Sunt autẽ K A C, K B A, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC: Igitur & C H, BG, tertia & sexta simul, æquales erunt quartæ B D.

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita est figura C H, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem,

titatem, cum utraque proportio sit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit ut quadratū rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundā quantitatē, ita figura B G, sexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nēpe quadratū rectę A C, cum quadrato rectæ A B, ad secundā, hoc est, ad quadratū rectæ B C, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, nempe ad figuram B D: Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, simul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt.

19. vel 20 sexti.

24. quinti.

47. primi

SCHOLION.

VIDES igitur, longe eße uniuersalius theorema hoc Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, ut propos. 47. primi lib. monuimus. Est tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, adhuc uniuersalius hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisque etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisque similibus, & similiter positis, proponatur.

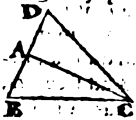
CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano nō aliter, quam 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab uno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum A B C, sitque figura quæuis super latus B C, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera A B, A C. Dico angulū B A C, esse rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ sit ipsi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniā igitur angulus C A D, rectus est, erit figura super C D, (quæ similis

similis sit ei, quæ super B C, similiterque posita) descriptæ æqualis figuris super A D, A C, descriptis, quæ ei similes sint, similiterque positæ: Est autem figura super AD, æqualis figuræ super AB, ob æqualitatem laterum; Quare figura super CD, æqualis erit figuris super A B, A C. Cum igitur figura super B C, eisdē figuris super A B, BC, æqualis ponatur; erunt figuræ super C D, BC, inter se æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, ut constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & basis D C, ostensa est quoque æqualis basi B C; erunt anguli D A C, B A C, æquales. Quare cum D A C, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit BAC; quod est propositum.

31. sexti.

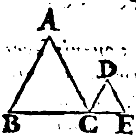


8. primi

30. THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela; tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineā collocata reperiētur.

HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE; componanturque ad angulum A C D, ita ut latera homologa A B, D C; Item A C, D E, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua B C, C E, rectam cōponere lineam. Cum enim parallelæ sint AB, DC, erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa erūt inter



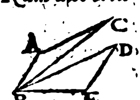
29. primi

inter se æquiãgula, habebuntq; æquales angulos B,&,DCE. 6. sexti.
Additis ergo æqualibus A,& ACD, erunt duo anguli B,& A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales sunt duobus rectis;ergo & duo ACE,ACB, 32. primi
duobus erunt rectis æquales: Ac idcirco BC,CE, unam re- 14. primi
ctam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

DEBENT *autem prædicta duo triangula ita secundum vnum angulum esse composita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula cõponuntur; veluti in schemate theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quẽ triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum uterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.*

QVOD *si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triã- gula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compositaque sunt ad angulum CBD, ita vt tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, ut perspicuum est.*



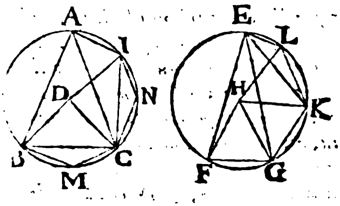
Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

THEOR.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper uero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem insistãt anguli B D C, F H G; ad circunferentias uero anguli B A C, F E G. Dico esse ut arcũ B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad angulum F H G; & angulum B A C, ad angulum F E G; & sectorem B D C, qui rectis B D, D C, & arcu B C, continetur, ad sectorem F H G, quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G. Ductis enim rectis B C, F G, applicentur ipsis in circulis æquales rectæ, C I, quidem ipsi B C, At uero G K, K L, ipsi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales sunt rectæ B C, C I, erunt quoque æquales arcus B C, C I, ac propterea anguli BDC, C D I, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus F G, G K, K L, & anguli F H G, G H K, K H L. Quã multiplex ergo est arcus B C I, ipsius arcus B C, tam multiplex erit angulus B D I, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui B C I, anguli B D C: Et quã multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G, tam multiplex erit angulus F H L, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui F G K L, insistentium, anguli F H G: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli B D I, F H L, in quot arcus æquales secti sunt arcus B C I, FGKL. Quoniã



1. *quarti.*

28. *tertij.*

27. *tertij.*

uero

uero si arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, necessario angulus B D I, angulo F H L, æqualis est; Ac proinde si arcus B C I, maior fuerit arcu F G K L, necessario angulus B D I, maior erit angulo F H L; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & angulus B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab F G K L, arcu, & angulo F H L, æque multiplicibus secundæ magnitudinis F G, & quartę F H G; uel una æqualia erūt; uel una excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. 27. tertij.
Quare quæ proportio est arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, secundam magnitudinem, ea erit anguli B D C, tertiæ magnitudinis, ad angulum F H G, quartam magnitudinem. 6. defin. 5.

Quoniam uero, ut angulus B D C, ad angulum F H G, ita est angulus B A C, ad angulum F E G, cum illi horum sint dupli; perspicuum est, ita esse quoque angulum B A C, ad angulum F E G, ut est arcus B C, ad arcum F G. Quod tamen eisdem argumentis demōstrari potest, quibus usi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducātur rectæ I A, K E, L E. 15. quinti 20. tertij. 11. quinti.

Constituantur iam in segmentis B C, C I, anguli B M C, C N I, qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus B A C, C B A I. Quare similia erunt segmenta B M C, C N I, atque adeo inter se æqualia, propterea quod sint super rectas B C, C I, quæ inter se sunt æquales. Additis igitur triangulis B D C, C D I, quæ æqualia quoque sunt, fient sectores B D C, C D I, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector B D I, sectoris B D C, quā est multiplex arcus B C I, ipsius arcus B C. Similiter ostendemus, sectorem F H L, tam multiplicem esse sectoris F H G, quam multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G. Quoniā uero si arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, sector quoque B D I, sectori F H L, æqualis est; (ceu in sectoribus B D C, C D I, ostensum fuit.) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & sector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab arcu F G K L, & sectore F H L, æque multiplicibus secundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; uel una æqualia erunt; uel una excedent; si ea sumantur, quæ 27. tertij. 24. tertij. 4. primi

quæ inter se respondent. Quamobrem quæ proportio est
6. defin. 5. arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, secundam magnitudinem, ea erit sectoris B D C, tertiæ magnitudinis, ad sectorem F H G, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM. I.

Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, ut est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportio-
11. quinti. ni arcus ad arcum. Quare & inter se eadem erunt.

COROLLARIVM. II.

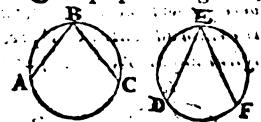
Perspicuum quoque est, ut est angulus ad centrum ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circunferentiam. Et contra, ut sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circunferentiam ad arcum illi angulo subtensum. Nam ut est angulus in centro ad angulum rectum in centro, ita est
33. sexti. arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit ut angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circunferentiã, per ea, quæ ad 4. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est ut angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circunferentiam; erit & conuertendo, ut quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circunferentia ad arcũ angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabitur. Cum sit, ut angulus rectus in centro ad
33. sexti. angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 4. lib. 5. ostendimus, ut quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circunferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositũ.

SCHOLION.

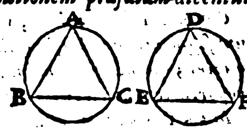
Caeterum ex theoremate hoc luce clarius colligitũ angulũ, qui circunferentiæ alicui insistit, referendum esse ad arcũ, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, ut vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim circuli

æquales

æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentiam cõstituti sint B, E, maior quidem B, minor autem E. Quo posito erit arcus A C, maior arcu D F, ac propterea reliquus arcus A B C, minor reliquo arcu D E F. Quare proportio anguli B, ad angulũ E, est maioris inæqualitatis; proportio vero arcus A B C, ad arcum D E F, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus A C, D F, tum demũ erit angulus B, ad angulum E, ut arcus A C, ad arcum D F, ut recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.



NON obscure quoque ex hoc theoremate deduci potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circunferentiæ similes, ad integras circunferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea qualis pars est una circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque sit alia circunferentia similis totius suæ circunferentiæ; veluti in expositione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentiam constituantur æquales B A C, E D F; Quo posito, segmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circunferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circunferentias. Cum enim ob circulorum æqualitatem, arcus B C, E F, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circunferentias B A C, E D F, esse quoque æquales. Quare ad totas circunferentias, quæ æquales etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt. Atque idcirco, quæ pars est arcus B A C, totius circũferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D. 26. tertij.



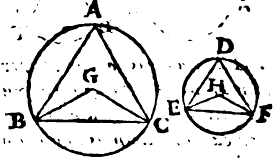
Ff SINT

SINT secundo duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circunferentias constituantur æquales BAC, EDF. Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circunferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli G, & H, æquales, cum hi illorum dupli existant. Quare quatuor recti ad angulum G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum H. Atqui ut quatuor recti ad angulum G, ita est tota circunferentia ABCA, ad arcum BC: Et ut quatuor recti ad angulum H, ita est tota circunferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. Igitur ut tota circunferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circunferentia DEFD, ad arcum EF. Diuidendo ergo erit, vt arcus BAC, ad arcũ BC, ita arcus EDF, ad arcum EF. Et conuertendo rursus, vt arcus BC, ad arcũ BAC, ita arcus EF, ad arcũ EDF. Ac propterea componendo, vt circunferentia tota ABCA, ad arcum BAC, ita circunferentia tota DEFD, ad arcum EDF. Et rursus conuertendo, ut arcus BAC, ad totam circunferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circunferentiam DEFD. Quocirca quota pars est arcus BAC, totius circunferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circunferentiæ DEFD.

20. tertij.

7. quinti.

11. quinti.

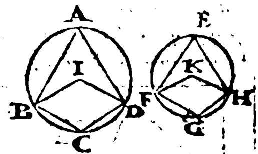


CONSTAT igitur, rectè Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales; quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

MANIFESTVM etiam est ex dictis, angulos insistentes arcubus circulorum similibus, siue ad centra, siue ad circunferentias insistant, æquales esse inter se. Sint enim in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, arcus similes BCD, FGH, quibus insistant, ad centra quidem anguli I, & K, ad circunferentias autem anguli A, & E. Dico tam illos, quam hos esse inter se æquales. Constituantur enim in dictis arcubus anguli

BCD

BCD, FGH, qui æquales erunt, ex defin. segmentorum similium; Sunt autem tam anguli C, & A, quam G, & E, duobus rectis æquales: Ablatis igitur æqualibus C, & G; reliqui A, & E; ac proinde eorum dupli I, & K, æquales erunt. 22. tertij.

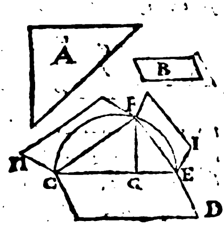


VICISSIM quoq; liquet, arcus, quibus insistunt siue ad cētra, siue ad circunferentiā, anguli æquales, similes esse. Nā si anguli A, et E, fuerint æquales; erunt & reliqui duorū rectorū C, & G, æquales. Igitur, p definitionē, arcus BCD, FGH, similes sunt, quibus dicti anguli A, & E, insistūt. Quod si I, & K, æquales sint, erūt et eorū dimidij A, et E, æquales. Quare, ut prius, arcus BCD, FGH, similes sunt.

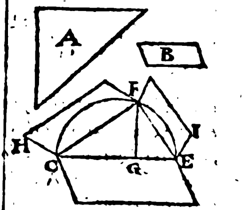
QVONIAM vero Euclides multa dixit de inuentione linearū proportionaliū, nihil vero de superficierū, vel planorum proportionaliū inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorū multa circa inuentionē superficierū proportionaliū uersantur, scitu nō iniucunda, loco appēdicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic sexto libro annectam; quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducuntur; Hinc autem exordium capiemus.

A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum. I.

SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterque posita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B, simile, & similiter positū. Cōstituatur rectilineū C D, æquale quidē ipsi A, simile vero ipsi B, superq; vnū eius latus CE, semicirculus describatū CFE. Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatū GF, ad CE, ppendicularis, cōnectanturq; recta CF, EF, sup quas cōstruanū rectilinea FH, 25. sexti. 9. sexti. 13. sexti.

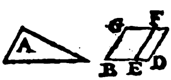


18. sexti. F H, F I, similia similiterque posita ipsi C D. Dico igitur factum esse, quod iubetur. Cum enim angulus C F E, rectus sit,
31. tertij. quippe qui in semicirculo existit; erit rectilineum C D, aequa-
31. sexti. le rectilineis H F, F I; atque adeo si auferatur rectilineum



F I, simile ipsi B, ex rectilineo C D, hoc est, ex sibi aequali A; relinquetur rectilineũ H F, simile quoque ipsi B. Quod autem rectilineum ablatum F I, sit tertia pars rectilinei C D, ita ostendetur. Quoniam est ut recta
4. sexti. C G, ad G F, ita recta C F, ad F E,
8. sexti. eo quod triangula, C G F, C F E, sint similia: Habet autem C G, ad G E, proportionem duplicatam proportionis C G, ad G F, propterea quod proportionales sint tres rectae C G, G F, G E, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectilineum H F, ad rectilineum F I,
19. vel 20. sexti. proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum C F, F E; Erit ut recta C G, ad G E, ita rectilineum H F, ad rectilineum F I; quandoquidem hae proportiones duarum aequalium proportionum duplicatae sunt. Componendo igitur erit, ut C E, ad G E, ita duo rectilinea H F, F I, simul, hoc est, rectilineum C D, quod est illis aequale, ad rectilineum F I. Est autem C E, ipsius G E, tripla, per constructionem; Igitur & rectilineum C D, triplum erit rectilinei F I. Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.

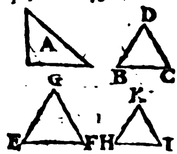
QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte. Rectilineum datum A,
45. primi reuocetur ad parallelogrammum B C,



sibi aequale; & ex latere B D, auferatur D E, tertia pars imperata, & per E, agatur ipsi C D, parallela E F. Dico E C, tertiam esse partem ipsius B C, hoc est, rectilinei dati A. Cum
1. sexti. enim sit ut D E, ad D B, ita E C, ad C B: sit autem per constructionem D E, ipsius D B, pars tertia; erit & E C, ipsius C B, tertia pars. Quod est propositum.

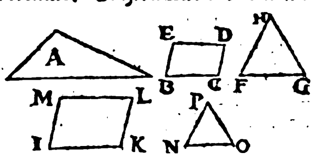
II. **DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.**

SINT data duo rectilinea *A*, & BCD, *quibus inueniẽdum sit tertium proportionale*. *Constituatur ipsi* *A*, *rectilineum æquale* EFG, *simile vero similiterque positum ipsi* BCD. 25. *sexti.*
Deinde lateribus homologis EF, BC, *inueniatur tertia linea proportionalis* 11. *sexti.*
HI, super quam constituatur rectilineũ HIK, simile similiterque positum ipsis 18. *sexti.*
EFG, BCD. *Dico* HIK, *esse tertium proportionale*. *Cum enim proportionales sint rectæ* EF, BC, HI, *erunt & rectilinea* EFG, BCD, *HIK, ab illis descripta* (*cum sint similia, similiterque posita*) 22. *sexti.*
proportionalia. *Cum ergo* EFG, *per constructionem, æquale sit ipsi* A; *erunt & rectilinea* A, BCD, HIK, *proportionalia*.



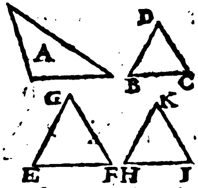
TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire. III.

TRIA *rectilinea data sint* A, BCDE, FGH, *quibus quartum sit inueniendum proportionale*. *Construatur rectilineum* 25. *sexti.*
IKLM, æquale quidem ipsi A, *simile vero similiterq; positum ipsi* BCDE. *Tribus deinde rectis* IK, BC, FG, *inuenta quarta proportionali* 12. *sexti.*
NO, constituatur super NO, *rectilineum* NOP, *ipsi* FGH, 18. *sexti.*
simile similiterque positum. *Dico* NOP, *rectilineum esse quartum proportionale*. *Cum enim quatuor rectæ* IK, BC, FG, *NO, sint proportionales, erunt & rectilinea similia similiterq; posita ab ipsis descripta* IL, BD, FGH, NOP, *proportionalia*. 22. *sexti.*
Cum igitur IL, *constructum sit æquale ipsi* A; *erunt & quatuor rectilinea* A, BD, FGH, NOP, *proportionalia*.



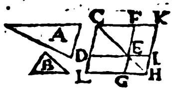
DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire. IIII.

SINT *duo rectilinea* A, BCD, *quibus medium inueniendum est proportionale*. *Constituatur rectilineum* EFG, *æquale ipsi* A, *& simile similiterque positum ipsi* BCD. 25. *sexti.*
Duabus deinde rectis EF, BC, *inuenta media proportionali* HI, *construatur super* HI, *rectilineum* HIK, *simile similiterq; posi-* 13. *sexti.* 18. *sexti.*



tum ipsis EFG, BCD. *Dico* H I K, *medium esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres re-ctæ* E F, H I, B C, *erunt quoque recti-*
22. sexti. *linea ab ipsis descripta* E F G, HIK, BCD, *proportionalia, cum sint simi-lia similiterque posita, &c.*

ALITER. *Sit rursus inter rectilinea A, & B, perqui-rendum mediũ proportionale. Constitua-*
45. primi *tur ipsi A, æquale parallelogrãmũ quod-cunque* CDEF; *Ipsi vero* B, *æquale pa-*
25. sexti. *rallelogrammũ* EGHI, *simile vero similiterque positum ipsi* C D E F. *Connectanturque hæc parallelogramma ad angulos æquales, ut* D E, E I, *efficiant unam lineam, ac propterea, per ea, quæ ad 15. propos. 1. lib. demonstrauimus, una quoque linea componatur ex* F E, E G; *perficiaturque totum parallelogrammum* KL. *Dico vtrumlibet* E K, *vel* E I, *medium esse proportionale inter* D F, G I, *hoc est, inter* A, & B. *Cum enim similia sint, similiterque posita* D F, G I, *erit vt* DE, *ad* EF, *ita* E I, *ad* E G. *Permutando ergo vt*
1. sexti. D E, *ad* E I, *ita* F E, *ad* E G. *Vt autem* DE, *ad* E I, *ita* D F, *ad* E K; & *vt* F E, *ad* E G, *ita* E K, *ad* G I. *Igitur vt* D F, *ad* E K, *ita* E K, *ad* G I, *&c.*



QVOD *etiam in hunc modum confirmari potest. Cum* DF, G I, *similia sint, similiterque posita, consistent ea circa*
26. sexti. *eandem diametrum. Quare complementa* E K, E L, *æqualia erunt. Vt autem* D F, *ad* E K, *ita est* E L, *ad* G I, *eo quod*
1. sexti. *vtraque proportio eadem sit proportioni* D E, *ad* E I. *Igitur erit, vt* D F, *ad* E K, *ita* E K, *ad* G I.

V.

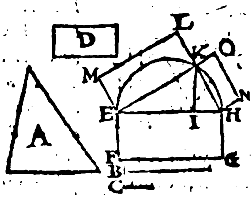
DATO rectilineo duo rectilinea æqualia cõstituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT *datum rectilineũ A, dataq; proportio recta* B, *ad* C, *oporteatq; constituere duo rectilinea, quæ ipsi* A, *æqualia sint, habeantq; proportionem, quam* B, & C; *ac similia similiterque posita sint rectilineo cuiuis* D. *Constituatur rectilineum* E F G H,
25. sexti. *æquale ipsi* A, & *simile similiterque positum ipsi* D. *Diuise*

deinde

deinde latere eius E H, in I, secundum proportionem B, ad C, (quod facile fiet, si conficiatur vna linea ex B, & C. Nam tunc similiter secanda erit E H, &c.) describatur circa E H, semicirculus E K H, & ex I, ducatur ad E H, perpendicularis I K, connectanturq; rectæ E K, H K. Describantur iam ex E K, K H, rectilinea E K L M, K H N O, ipsi E G, vel ipsi D, similia similiterq; posita; quæ dico æqualia etiã esse ipsi E G, seu ipsi A, habereque proportionem datam B, ad C. Cum enim angulus E K H, in semicirculo existens rectus sit, erunt rectilinea E L, H O, æqualia rectilineo E G, cũ sint similia inter se, similiterq; descripta. Quoniam uero est, vt E I, ad I K, ita E K, ad K H, cum triangula E I K, E K H, similia sint; Est autẽ E I, ad I H, in proportione duplicata proportionis E I, ad I K, quod tres E I, I K, I H, sint, ex corollario propos. 8. lib. huius, proportionales: Item E L, ad H O, in proportione duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homologum K H; erit vt E I, ad I H, hoc est, ut B, ad C, ita E L, ad H O. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo æqualia E L, H O, quæ similia sunt, similiterque posita dato rectilineo D, habentque proportionem inter se datam B, ad C.

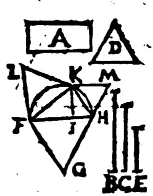
10. sexti. 18. sexti. 31. tertij. 31. sexti. 4. sexti. 20. sexti.



VI.

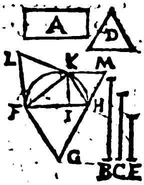
D A T O rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

D E T V R rectilineum A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteatque constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, pposito, similiterq; posita, quorũ latera homologa pportionẽ habeãt, quã B, ad C. Inuẽta ipsis B, C, tertia pportionali E, fiat rectilineũ F G H, æquale ipsi A, & simile, similiterq; positũ ipsi D. Diuisoq; latere F H, in I, sẽm pportionẽ B, ad E; describatũ circa F H, semicirculus F K H; et ex I, ducatũ ad F H, perpẽdicularis



 I K,

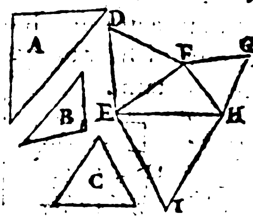
IK, connectanturque rectæ FK, HK. Describantur iam ex FK, HK, rectilinea FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D, similia, similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A; eorumque latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C.



31. tertij. Cum enim angulus FKH, in semicirculo rectus sit, erunt recti-
31. sexti. linea FKL, HKM, rectilineo FGH, idest,
& rectilineo A, æqualia. Quoniã vero est,
4. sexti. vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH: Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK, (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) Ac propterea in proportione duplicata proportionis laterũ homologorũ FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex cõstructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt.

VII. DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.

DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendũ, simile similiterq; positum ipsi C.



25. sexti. Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autẽ similiterque positũ ipsi C. Itẽ ipsi B, æquale constituatur GFH, simile vero eidem C, similiterq; positũ. Deinde rectilinea DEF, GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituant angulum EFH, rectũ, cui subtendatur recta EH, ex qua
18. sexti. describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C. Perspicuum autem est EHI, æqua-
31. sexti. le esse duobus DEF, GFH; atque idcirco duobus A, & B.

BREVIVS. Cõstituatur parallelogrammũ æquale duo-

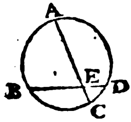
bus

bus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum E H I, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum E H I, æquale duob⁹ rectilineis A, B, & simile, similiterq; positũ rectilineo C. 25. sexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineę se se mutuo secuerint: Erunt segmenta unius segmentis alterius reciproca.

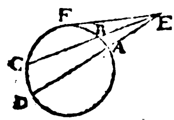
In circulo A B C D, se mutuo secent rectæ A C, BD, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmẽtis B E, ED: Hoc est, esse vt A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel ut A E, ad ED, ita B E, ad E C. Cum enim rectangulum sub A E, E C, comprehensum æquale sit rectangulo sub BE, ED, contento; erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum. 35. tertij. 14. sexti.



IX.

SI extra circulum sumatur punctũ aliquod, ab eoque in circulum cadãt duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hęc media proportionalis inter quamlibet rectam, quę circulum secet & eius segmentum exterius.

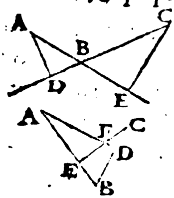
Extra circulum A B C D, sumatur punctum E, a quo cadant rectæ E C, E D, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB, esse reciprocas rectis E D, E A: Hoc est, esse, vt E C, ad E D, ita E A, ad E B: Vel ut E C, ad E A, ita E D, ad E B. Ducta enim E F, tangente circulum in F, erit rectangulum sub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula sub EC, EB, & sub E D, E A, æqualia erunt: Ac propterea latera eorũ circa angulos æquales reciproca. Quoniã autẽ quadrato rectæ EF, æquale est rectangulũ sub E C, E B: Item rectangulũ sub ED, EA, erunt tres rectæ EC, EF, EB. Itemq; tres 36. tertij. 14. sexti. 36. tertij.



tres E D, E F, E A, proportionales, atque adeo E F, media proportionalis inter quamlibet lineam quæ circulum secat, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

X. SI duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & a duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum una inter terminũ, & sectionẽ, altera uero inter eundẽ terminũ & suã perpendicularem interijcitur, alijs duab⁹ eodẽ modo inclusis reciprocæ.

DVAE rectæ A B, C B, se mutuo secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares, A D, quidem ad C B, at uero C E, ad A B; quæ perpendiculares cadent in A B, C B, protractas ultra B, si angulus A B C, fuerit obtusus; in ipsas vero introrsum, si idem angulus acutus fuerit, ut figuræ indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B; posterior vero inter sectionem B, & perpendicularẽ suam C E, quæ nimirum ad ipsam A B, ducitur) reciprocas esse duabus C B, B D, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt A B, ad B C, ita B D, ad B E: Vel vt A B, ad B D, ita B C, ad B E. Cum enim anguli A B D, A D B, trianguli A B D, æquales sint angulis C B E, C E B, trianguli C B E. (Nã A D B, C E B, recti sunt; & A B D, C B E, ad verticem in priori figura, in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula A B D, C B E, æquiangula. Quare



4. sexti. *erit vt A B, ad B D, ita C B, ad B E: Ac propterea permutando quoq; , vt A B, ad B C, ita B D, ad B E. Quod est propositum.*

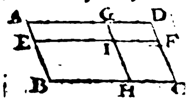
PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium A D, C E, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula A F E, C F D, sint æquiangula;

4. sexti. *erit vt A F, ad F E, ita C F, ad F D: Et permutando quoque, vt A F, ad C F, ita F E, ad F D.*

XI. IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum

grammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

In parallelogrammo A B C D, duæ rectæ E F, GH, lateribus A D, D C, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma E G, G F, BI, I C, esse proportionalia. Cũ enim sit, vt E I, ad I F, ita EG, ad GF: Item vt E I, ad I F, ita B I, ad I C; Erit quoque ut EG, ad G F, ita B I, ad I C, quod est propositum.

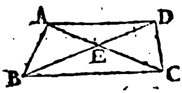


1. sexti.
11. quinti.

XII.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

DIVIDANT diametri A C, BD, se mutuo secantes in E, quadrilaterum A B C D. Dico quatuor triangula A E D, C E D, A E B, CEB, esse proportionalia. Erit enim vt A E, ad E C, ita triangulum A E D, ad triangulum C E D; & triangulum A E B, ad triangulum C E B. Quare vt triangulum A E D, ad triangulum C E D; ita triangulum A E B, ad triangulum C E B. Eademq; ratione ostendes esse ut B E A, ad DEA, ita BEC, ad DEC, cum vtraq; proportio eadem sit proportioni B E, ad E D. Constat ergo propositum.



1. sexti.

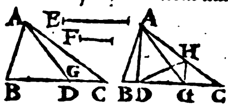
XIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT triangulum A B C, oporteatque a dato puncto D, in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmẽta secundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur BC, in G, secundum proportionẽ E, ad F, cadatq; primo punctum G, in datum punctum D, ducaturq; recta D A. Quoniam igitur est vt B D, ad DC, ita triangulum B D A, ad triangulum CDA, secabit recta DA, triangulum datum secundum proportionem datam BG, ad GC, hoc est, E, ad F.

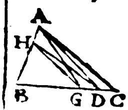
1. sexti.

CADAT secundo punctum G, inter C, & D. Ducatur ergo recta DA, cui per G, parallela agatur G H, coniungaturq; rectæ recta D H. Dico rectam D H, secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium BDHA, ad triangulum C D H, vt E, ad F, seu vt BG, ad GC. Ducta enim recta G A, erunt triãgula HGA,



37. primi GHD, æqualia, cum sint super eandem basin GH, & inter easdẽ parallelas G H, D A. Addito igitur communi triangulo CGH, fiet æqualia triangula CGA,
. quinti. CDH: Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionem ad CGA, & ad CDH. Diuidendo igitur, erit vt triangulum BGA, ad triangulum CGA, ita trapezium BDHA,
7. quinti ad triangulum CDH. Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad
1. sexti. GC. Igitur erit & trapezium BDHA, ad triangulũ CDH, vt BG, ad GE, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.

CADAT tertio punctum G, inter B, & D, ducaturq́; recta D A, cui rursus per G, agatur parallela G H. Dico igitur, rectam ductã DH, secare triangulum ABC, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triãgulum BDH, ad trapezium CDHA, vt E, ad F. Ducta enim recta GA, erunt,



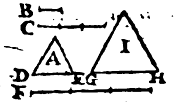
37. primi vt prius triangula HGA. GHD, æqualia; additoq́; communi BGH, æqualia fient BGA, BDH. Quare erit ABC, ad
7. quinti. BGA, vt ad BDH. Diuidendo ergo erit vt CGA, ad BGA,
17. quinti. ita trapezium CDHA, ad triangulum BDH; & conuertendo, vt BGA, ad CGA, ita BDH, ad trapezium CDHA. Est
1. sexti. autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur & BDH, ad trapezium CDHA, erit ut BG, ad GC, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.

HINC perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ a quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dato puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionẽ multiplicem, cuius denominator vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis, cum priori denominatori proportionis multiplicis addatur unitas, quæ ante deerat.

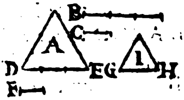
DATO

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, uel minus, secundum proportionem datam. XIIII.

SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positũ sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, vnum latus recti linei dati quodcunque) inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, inueniatur media proportionalis GH, super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quã A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, ut DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundã, illi simile similiterq; positum. 12. sexti. 13. sexti. 18. sexti.



NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterque positũ, secundum proportionem datam B, ad C. Ceu in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.



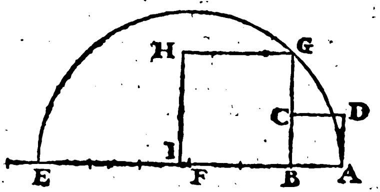
FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineũ duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, etc. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum & quadratorum eadem remanet similitudo. Si namq; proportio B, ad C, sumatur ut 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptũ, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius; quod proponitur.

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunq; oblatum. Ex hac enim construemus quoq; rectilineum simile, similiterque descriptum

cuicun-

cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio a praecedenti differt, vt mox ostendemus.

SIT igitur quadratum ABCD, quincuplicandum. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi AB, aequales, a puncto B, incipiendo, vsque ad E, vt sit BE, quincupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producaturque latus BC, ad circunferentiam vsque in G.

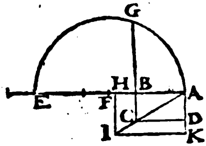


Dico quadratum BGHI, ex BG, descriptum, quincuplum esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit ut EB, prima ad BA, tertiam, ita BH, quadratum secundae, ad AC, quadratum tertiae, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quincupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quincuplum erit. Quod est propositum. Quod si recta BE, sumatur sexcupla lateris AB, erit & quadratum rectae BG, quadrati ABCD, sexcuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.

SIT rursus rectangulum ABCD, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere AB, producto sumatur BE, dupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quaesiti. Quare si abscindatur AH, aequalis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protractae in

24. sexti. I, perficiaturque parallelogrammum HK, erit HK, ipsi BD, simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD.

B D. *Cum enim proportionales sint tres rectæ* E B, B G, B A, *ex corollario propos.* 13. *huius lib. Erit vt prius, sicut* E B, *prima ad* B A, *tertiam, ita rectangulũ* H K, *supra* A H, *secundã (sumpta enim fuit* A H, *ipsi* B G, *secundæ æqualis) ad rectangulum* B D, *supra tertiam* A B, *quod est simile similiterque descriptum.*



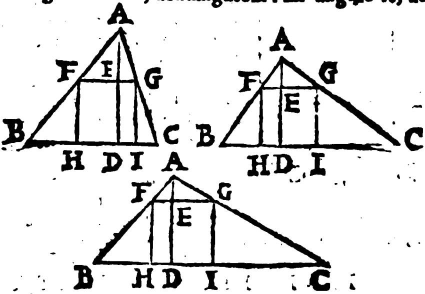
EODEM *modo, si supra* A B, *constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex* B G, *illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex* B G, *ad rectilineum simile ex* A B, *quam habere ponetur recta* E B, *ad rectã* B A, *ex constructione.*

PERSPICVVM *autem est, hanc operationem vna cũ eius demonstratione a nostra antea tradita nõ differre, nisi quod hac simul tradat inuentionem mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuũ lineas* E B, B A, *quæ proportionem habẽt datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.*

EX FEDERICO COMMANDINO.

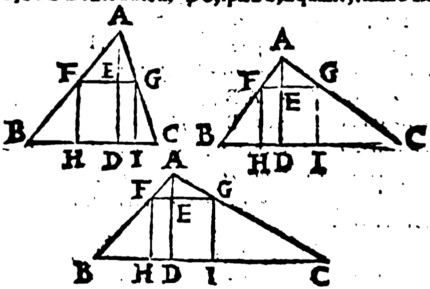
In dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo A, ad BC, perpẽdicularis demittatur AD, quæ in E, ita secetur, per ea, quæ in Scholio prop. 10 huius libri docuimus, ut eadẽ sit proportio AE, ad ED, quę



A D, ad B C. Deinde per E, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur F H, G I. Dico FGIH, rectilineum triangulo A B C, inscriptum, esse quadratũ. Cum enim F E G, ipsi C, sit parallela, erit ut ED, ad D C, ita FE, ad EG, ex scholio propos. 4. huius lib. & componendo, ut B C, ad D C, ita FG, ad E G. Sed ut D C, ad AD, ita est EG, ad A E; & per coroll. propos. 4 huius lib. triangula ADC, AEG, sint similia. Igitur erit ex æquo, ut B C, ad AD, ita FG ad A E. Quia uero per constructionem est, ut A D, ad BC, ita A E, ad ED; erit rursus ex æquo, ut BC, ad BC, ita F G, ad E D. Est autem BC, ipsi BC, æqualis, immo eadem: Aequalis igit est & F G, ipsi ED. Quare cũ FG, ipsi HI; & ED, ipsis F H, G I, æquales existat; Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F, æqualia inter se.

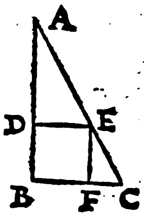
34. primi



25. primi

Et quia anguli E D H, F H D, duobus rectis æquales sunt: Est autẽ EDH, per constructionem rectus: erit & F H D, rectus. Quocirca, per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli H FG, FGI, GIH, recti sunt; Ac propterea F I, quadratũ est. quod est propositum.

Non secus idẽ problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum uel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, uel obtuso perpendicularem demittamus, ceu in posterioribus duobus triangulis apparet.



Qvod si in triangulo rectangulo quadratũ describere libeat, ita ut duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulũ rectũ mitantur; diuidemus perpẽdicularẽ AB, in D, ita ut eadẽ sit proportio A D, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipsi B C, parallelã ducemus DE; per E, uero ipsi A B, aliã parallelã EF. Quoniã igitur est, ut B C, ad AB, ita DE, ad A D; quod triangula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autẽ per cõstructionẽ, ut A B, ad B C, ita AD, ad DB. Erit ex æquo, ut BC, ad BC, ita D E, ad DB: Est autem BC, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Aequalis igitur est & D E, ipsi DB. Quare ut prius, D E-FB, quadratum est. Quod est propositum.

4. sexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM VII.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quã unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana uersatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio linearũ requiratur, idque adeo, ut absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque usum, neque exprimi queant, neque intelligi: Nam pleraque laterũ sunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel certe, si non sunt Irrationales, longitudine inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, ac intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, ut absque his nullo modo cognoscantur, oportuit etiam numerorũ explanationem, ut doctrina suus ordo, ratioque constaret, lineis anteponi.

anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur. Incipiens igitur more suo a principiis, definit initio unitatem, docetque eam esse, secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum esse dicitur: Nam secundum unitatem unum lapidem, unum animal, unum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum unitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, ut in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex unitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerũ quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes; Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nempe vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum quælibet centesima ipsius pars est, &c.

Ex his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos una eademque mensura, nimirũ vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurimæ illarum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, ut clarissime lib. 10. ostendetur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

Non

NON est dissimilis haec definitio illi, quam Euclides lib. 5. partem quantitatis continuae exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum haec solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; ut 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodē modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VULT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem nō metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cū eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quaelibet decimaoctaua pars est huius numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, nō autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset haec definitio quarta, quae partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quaecunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura utrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita ut si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintae. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum unitas, eorum cōmunis mensura, illum metiatur per 6. hunc uero per 10. Idem iudicium habeto & in reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc in loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, uerum etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus praestiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quae maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantum eam, quae maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, ceu propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes uero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inaequalibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cum eae persaepe sint incommensurabiles, ut aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides in quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX uero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo ut numerus maior, cuius minor est pars, sit uicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si uero maiorem minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hãc definitionem. Et uicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem nõ metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes aequales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR uero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui unitate differt a pari.

OMNES *hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia unitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. uel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.*

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parē.

QVIA *numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pari-*

ter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

I X.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CAETERVM si recte duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit, fieri posse, ut unus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar uocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum; ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neque pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari potest pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetii, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis

clidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponũt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. ubi manifeste omnem numerũ parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parẽ appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habẽt impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec solum pariter pares, nec solum pariter impares illi sint. Sed hac planius in lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparẽ. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem unitas sola metitur.

Qvod si numerum quempiam nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura, metitur.

Sicvt numerus ille, quem sola vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tamquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem uero isti 2. 4. tamen nullus istorum vtrunque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter se dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quiuis numerus, dici possunt, licet impropriè, numeri inter se primi: quia sola vnitas unitatem, & numerum quemuis metitur.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quē numerus quispiam metitur.

Nvmervm, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, om-

nes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorũ & se ipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus nocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

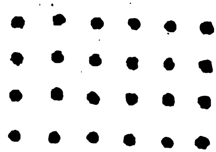
VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoque contra numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur. procreauerimusque eundem numerũ 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus

ptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procrearive ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel e contrario. Et sic de reliquis.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati nocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac recta lineae angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, ut latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latũ dispofita, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum uero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.



CAETERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras: Euclides solum definit planum quadrangulare

rem

rem recti angulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorũ mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quod omni ex parte quadrato geometrico, & figuræ altera parte longiori, similes sint, et æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatemue spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quoad ambitum: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuũ est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

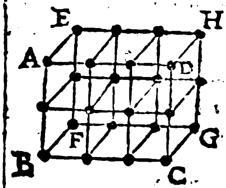
POTEST autem unus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum; Quod etiam de numero solido, qui iamiam definitur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM uero tres numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum disposita referunt figurã quãdam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, ut lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 3. efficietur numerus 6. basis solidi numeri longa tres unitates, & lata duas. Et si hæc basis in 4. multiplicetur, hoc est, accipiatur quater, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens quatuor vnitatum. At si numerus 2. in 4. multiplicetur, habebitur basis 8. vnitatum, quæ multiplicata in 3. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 3. vnitates. Si deniq; numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita.



Si enim basis sit A B C D, duodecim vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B A, latitudo, tres complectitur; superponetur ei altera basis similis, & æqualis E F G H, ut totus numerus solidus contineat 24. vnitates, eiusque altitudo B F, vnitates duas. Similiter, si basis sit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor, & latitudo B F, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ duæ bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem B A, habens trium vnitatum. Si denique basis sit A B F E, sex vnitatum, cuius longitudo A B, tres continet, & latitudo B F, duas, superponentur illi tres aliæ bases similes, & æquales, constabitque totus numerus solidus unitatibus 24. quarum quatuor, altitudinem dabunt B C. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cũ ex his mutuo multiplicatis pducat̃. Eodem q; modo de alijs numeris solidis indicandũ erit.

DENIQVE

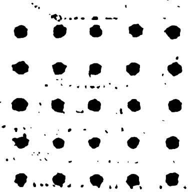
DENIQVE & vnitas aliquando solidus appellabitur numerus, & si non proprie, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua eorũ multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, continetur que sub tribus numeris, omissis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam, quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia: vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius vnitates in formã planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in omnibus lateribus habens quinque vnitates, ideoque æqualiter æqualis erit.

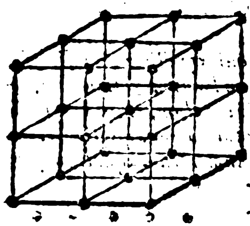


ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, uel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati a Geometris, radix uero ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

CVBVS uero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoque illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius unitates in longũ, latum, atque profundum dispositæ, cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cũ ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipse numerus. 27. est æqualiter æqualis æqualiter.



QVI FIVNT vero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; uel eadem pars, uel eædem

partes:

partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, uel easdem partes.

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiusmodi sunt omnes numeri inæquales inter se collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. Definitio etenim vulgata Euclidis, quā puto esse corruptam, cum manca sit, atque imperfecta, comprehendit solum proportionales numeros in proportione multiplici, submultiplici, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici sunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; in submultiplici vero, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus secundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis: At vero ex ea nequaquam deprehendere possumus, quinam numeri proportionales sint in proportione superparticulari, superpartiente, multiplici superparticulari, & multiplici superpartiente; In his enim omnibus, primus numerus secundi, & tertius quarti, nec æque multiplex est, nec eadem pars, nec eadem partes; sed primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel semel, vel aliquoties, & eandem insuper illius partem, easdemue partes; vt perspicuum est ex ijs, quæ diximus ad defin. 3. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiose explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex sit, nempe triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. est enim primus secundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rursus proportionales sunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus secundi, & tertius quarti eædem partes sint, videlicet tres partes quartæ. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. sunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus secundum, & tertius quartum, semel, & insuper

insuper eandem partem, nempe sextam; In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In ultima tandem primus secundum, & tertius quartum, bis, et praeterea easdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, nō sit aeque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus secundum, & tertius quartum, non aequaliter contineat, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propositi proportionales.

QUOTIESCUNQUE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus cōferuntur, quod primus secundi, & tertius quarti, aeque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat aequaliter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aeque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aequaliter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et e contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales; qui proportionem eandem inaequalitatis habent. Nam si de proportione aequalitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto aequalem debere esse, ut proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, aequales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra, eundē ad aequales eandem quoque habere proportionem; Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idē eandē habet proportionem, aequales esse. Cum enim aequales numeri sint eiusdem, vel aeque multiplices, vel eadem pars, vel eadē partes; Vel certe eundē aequaliter cōtineant, eandemq; insuper illius partem, vel partes; Item cum idem numerus aequalium sit vel aeque multiplex, vel eadem pars, vel eadē partes:

Vel

Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, uel partes; perspicuum est, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel æquemultiplices, uel eadem pars, uel eadem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, uel partes: Item quia idẽ numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, uel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestum est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionẽ, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

NON necesse est, ut planus numerus plano numero sit similis, quælibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundũ suas vnitates in formam planã redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniã illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. uel 12. 2.

EODEM modo, vt duo numeri solidi similes sint, nõ requi-

ritur, ut quauis tria unius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, ut tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. uel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, uel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, ut dictũ est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8 nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua uia, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. ultima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abũdans: si uero minores, Diminutus.

HIS

His definitionibus ab Euclide propositis adiungendæ mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes uti uidentur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, illum producit.

Vt numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus secundum 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia uero vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, uel pars, partesue; uel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, uel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nempe quincuplus, dicetur *hac comparatio, habitudone, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60 confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.*

QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, aequaliter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundum: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, ut ad magnitudines pertinet, copiose explicata fuit in quinto lib. Vnde cum omnia, qua ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertiũ, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus uerbis a nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones uersantur, demõstrabuntur quoque in hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, uel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad unitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinite per additionem continuam unitatis.

sis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille uidelicet, qui ex unius unitatis, uel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorũ, uel eiusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque multiplex est, uel æque multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualiũ numerorum, uel eiusdem, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, uel æquales, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM unitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito unitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis unitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per unitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per unitatē.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquē produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, unitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

A .... B ...
C ....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

Vt quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metitur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per unitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. uel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quē metitur, uel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

Metiatur enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, uel multiplicatum a B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

A.... B...
C............

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

Metiatur numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum BD. Cum enim A, metiatur ipsos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipsius A, multi-

A, multiplex: Diviso ergo B C, in partes BE, EC, ipsi A, æquales, & ipso CD, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compositus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum B D, metitur. Quod est propositum.

A . . . .
B . . . . E . . . . C . . . . F . . . . G . . . . D

XI.

NVMERVS quemcunque numerũ metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quẽ B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum C D; erit C D, ipsius B, multiplex. Diviso ergo CD, in partes C E, E D, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compositum. Quod est propositum.

A . . .
B . . . .
C . . . . E . . . . D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quam B D, ipsius

ipsius A, multiplex. Diuiso ergo tam B C, quam BD, in partes ipsi A, æquales; Erit reliquus numerus D C, uel una pars numeri B C, ipsi A, æqualis, uel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipsi A, uel eius multiplex. Metitur igitur A, ipsum D C.

A . . .
B . . . . D . . . C
B . . . . D C

Quod est propositum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus unquã metiatur præcedentẽ, quoad assumpta sit unitas; qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

SINT duo numeri propositi inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties potest, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam potest; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatẽ G B, quæ quidem præcedentẽ numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, esse inter se primos; hoc est solam unitatem communi mensura eos metiri. Si enim non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit H, communi mensura, præter unitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D; & C D, numerum A E, (quod C D, uel pars sit ipsius A E, uel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) metietur quoque H, ipsum A E: At H, metitur quoque totum

A . . . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H ——

11. pron

AB;

A B ; igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, 12. pron.
ipsum C F; Igitur & H, ipsum C F, metietur; Ac propterea, 11. pron.
cum & totum C D, metiatur, metietur quoque reliquum 12. pron.
F D. Cum ergo F D, metiatur ipsum E G; metietur etiā H, ipsum E G: Metiebatur autem & H, totum E B; Reli- 11. pron.
quam igitur unitatem quoque G B, numerus H, metietur, 12. pron.
partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrē, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

CONVERTEMUS facile cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, al terna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit unitas.

SINT duo numeri inter se primi A B, C D, quorū minor C D, ex maiore A B, quoties potest, detrahatur; & reliquus F B, ex C D, quoties etiam potest; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri precedentem, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatē detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus G B, precedentem F D, ex E B, ablatum.

A . . . . E . . G -- B
C . . . . F . . D

Quia igitur numerus G B, numerum F D, metitur; & F D, ipsum E G; metietur quoque G B, ipsum E G. Cum ergo G B, & se ipsum metiatur; metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compositum: Metitur autem E B, ipsum C F; Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atq; adeo cū & ipsum F D, positus sit metiri; metietur quoque C D, ex C F, F D, compositum. At vero C D,

Margin: 11 pron. / 10. pron. / 11. pron. / 10. pron.

11. pron. CD, metitur ipsum A E: Igitur & eundem A E, numerus G B, metitur: Ac proinde. cum & ipsum E B, metiatur, ut ostensum est; metietur & A B, ex utroque A E, E B, compositum. Quare cum numerus G B, metiatur numeros A B, C D, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit unitas. Quod est propositum.

A................E..G—B
C......F..D

10. pron.

EODEM modo & hoc demonstrabimus.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad unitatem usque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad unitatem usque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, ut Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nūquā reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit unitas; ipsi erunt inter se primi, ut Euclides demonstrauit: Si uero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus utrunque numerum propositum metiatur, ut perspicuum est ex demonstratione superiori. Ex eo enim, quod reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, ostensum fuit, eundem reliquū G B, utrunque A B, & C D, metiri.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis

inter

inter se, maximam eorum cõmunem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri A B, C D, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex maiore A B, quoties potest, relinquatq; E B, numerum, qui ex C D, subtractus relinquat F D, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidẽ peruenietur ad numerum, qui præcedentẽ metiatur. Nam si ad unitatẽ deueniretur, numeri A B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. 1. septimi Peruentũ ergo iam sit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico F D, esse maximam mensuram communem numerorum A B, C D. Quod enim utrunq; metiatur, ita ostendemus. Quia F D, metitur ipsum E B; & E B, ipsum C F; metietur quoque F D, ipsum C F; atq; adeo cũ & seipsum metiatur, metie- 11. pron. tur & totũ C D, ex C F, F D, compositum. 10. pron. At C D, ipsum A E, metitur; Igitur & F D, eundem A E, metietur. 11. pron. Ac propterea cum F D, metiatur quoque ipsum E B; metietur etiã totum A B, ex utroque A E, E B, compositum. 10. pron. Metitur igitur F D, utrunque numerum A B, C D.

A . . . . E . . . . . . B
C . . . . F . . D
G - - - - -

QVOD autem F D, sit maxima mensura communis illorũ, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrunque A B, C D; Et C D, metitur ipsum A E; metietur quoque G, ipsum A E. Igitur & residuum E B: 11. 12. & At uero E B, metitur C F; Metietur ergo & G, eundem C F; 11. pron. Igitur & residuum F D; maior minorem. 12. pron. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quã F D, numeros A B, C D, metitur; Ac proinde F D, maxima est mensura numerorum A B, C D.

QVOD si minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipse maxima

A . . . . B
C . . . . . . D

ma amborum mẽsura communis cum & se ipsum metiatur. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, quod numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorundem communem mensuram. Hoc elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit F D, esse maximam mensuram ipsorum A B, C D. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros A B, C D, metiri quoque numerum F D, maximam eorum mensuram cõmunem. Eademq; ratio est de cæteris.

SCHOLION.

Ex dictis facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter se primi: Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter unitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.

A . . . .
B . . . .
C . . . . .

Si vero A, & B, fuerint inter se compositi, sit eorum maxima mensura communis inuenta D; quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeant numerum D, communem mensuram.

2. *septimi*

A . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . .

Quod si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; Erunt C, & D, uel inter se primi, uel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita ut habeant numerum communem mensuram, metietur eiusmodi communis mensura numerum D, ma-

ximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autē C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. Inuenta enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se sunt compositi. Quod est propositum.

A . . . .
B . . . .
C . . . . . .
D . . .

2. septimi

A . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . . . E . .

11. pron.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum cōmunem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensurā cōmunem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur

A . . . .
B . . . . D . . . .
C . . . . . . E . . F ——

2. septimi

quoque

quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si uero D, nõ metiatur ipsum C; erũt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram cõmunem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura cõmunis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipsos A, & B; metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A.................
B .... D....
C....... E.. F—.

2. septimi (margin)

11. pron. (margin)

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communẽ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, quod numerus metiens tres numeros, metitur quoque maximam eorum communem mẽsuram. Hoc enim colligitur ex ultima parte demonstrationis; Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum

merum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mẽsura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua uero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B.

Sint enim primo A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet unitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B.

A ....
B ....

SINT deinde A, & B, nõ primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito manifestum est A, partẽ esse numeri B.

A .....
B ....

SED iam A, non metiatur ipsum B; inuenta autem maxima eorum mẽnsura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. Quia igitur C, pars est ipsius B, cũ ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F: Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

A .. D .. E .. F
B ....
C ..

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter

alterius eadem pars: Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

Sit numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico utrunque numerum A, & D, simul, utriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est uel A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, EF, in partes BG, GC; EH, HF,

A . . . . . . D . . . .

B . . . . . . G . . . . . . C E . . . . H . . . . F

ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis BG, & E H, simul: Eodē argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in BC, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, uel C, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterque A, & D, simul utriusque B C, & E F, simul, quę est A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Eodem modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera unitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul utraque unitas, uel unitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

Hoc autem perspicue in his appositis exẽplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A . D . A . D
B . G . C E . H . F B . G . C E . . H . . F

Possumus etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorũ, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius.

Sint numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorũ eadẽ pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omniũ numerorum DE, FG, HI, simul eandem esse

A . . . . B . . . C . .
D . . . . K . . . . E F . . . L . . . G H . . M . . I

partẽ, quæ est A, ipsius DE. Diuisis.n. numeris DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partiũ numeri DE, æqualis multitudini partiũ tam numeri FG, quã numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addãtur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM; erunt quoq; A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erũt A, B, C simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatũ numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, cõtinetur. Quamobrẽ eadẽ pars erũt A, B, C, simul ipsorũ DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

Idem sequitur, si loco unius numerorũ A, B, C, sumatur unitas, uel loco pluriũ, uel etiã omniũ, plures unitates, ut de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A . B . . C . . . A . B . C .
D . K . E F . . L . . G H . . . M . . . I D . K . E F . L . G H . M . I

Theoremati quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcūque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Demonstratio eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

A . . . . B . . . . . . C . . . .
D . . . E . . . F . .

Quod si loco unius numerorum D, E, F, assumatur unitas, uel etiam loco plurium, uel omnium, plures unitates, theorema eodem modo demonstrabitur, ut ex sequentibus figuris apparet.

A . . B . . . . C . . . . . .
D . E . . F . . .

A . . B . . C . .
D . E . F .

THEOR. 4. PROPOS. 6.

6\. Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul uterque utriusque simul eædem partes erit, quæ unus unius.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus

merus D E, numeri F. Dico utrunque numerum A B, & D E, simul utriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Diuisis n. numeris A B, D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F, erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eædem partes est numerus A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri C, eadem est D H, numeri F; erit uterque A G, D H, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ A G, ipsius C, uel D H, ipsius F. Eadem ratione erit uterque G B, H E, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ G B, ipsius C, uel H E, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, contenta, partes eædem numerorum C, F, simul, quot partes eædem est numerus A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Ac proinde eædem partes erit uterque numerus A B, D E, simul, utriusque numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. 5. septimi

A ... G ... B   D ... H ... E

C ....   F ....

SCHOLION.

SED & hanc propositionem ad quotcunque numeros extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ unus unius.

EADEM enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; ut hic perspicuum est.

A .. K .. B   *C ... L ... D*   *E .... M .... F*

G ......   *H ....*   *I ....*

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus A B, eadem pars numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquum E B, eandem esse partē reliqui F D, quæ est totus A B, totius C D. Ponatur enim E B, numeri G C, eadem pars, quæ est A E, ipsius C F, uel totus A B, totius C D. Quia igitur A E, eadem est pars ipsius C F, quæ E B, ipsius G C; erit utrunque A E, E B, simul eadem pars utriusq; simul C F, G C, quę A E, ipsius C F, hoc est, quæ totus A B, totius C D; Ac propterea cum A B, eadem sit pars utriusque numeri F G, C D, erunt ipsi numeri F G, G D, inter se æquales. Dempto ergo communi C F, æquales remanebunt G C, F D. Eadem igitur pars erit E B, ipsius F D, quæ ipsius G C, hoc est, quæ totus A B, totius C D. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . E . . B
G . . . C . . . . . F . . . D

5. septimi

SCHOLION.

IDEM hoc theorema uerum est, etiam si ablata sit unitas A E, uel reliqua fuerit unitas E B; uel denique & ablata, & reliqua sit unitas, ut ex his exemplis apparet.

A . E . . . B	*A . . . E . B*	*A . E . B*
G . . . . . C . . F . . . . . D	*G . . C . . . . . . F . . D*	*G . . C . . F . D*

CAETERUM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, ut totus totius.

Quod quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D, æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita esse multiplicem, ut est totus A B, totius C D. Cum enim A B, ipsius C D, sit æque multiplex, atque A E, ipsius C F; erit e contrario totus CD, totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E. Quare & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac proinde e contrario E B, ita multiplex erit ipsius F D, ut A B, ipsius C D, est multiplex. 7. septimi

A . . . . . . E . . . . B
C . . . F . . D

Si aliquando ex C D, ablata fuerit unitas C F; vel reliqua sit unitas F D: vel denique & ablata sit unitas C F, & alia reliqua F D; idem demonstrabitur, ut hæc exempla commonstrant.

A . . . E . . . . . B — A . . . . E . . B — A . . . . E . . . B
C . F . . D — C . . F . D — C . F . D

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

Sit numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquũ E B, easdem esse partes reliqui F D, quæ totus A B, totius C D. Sumpto enim numero G H, æquali ipsi A B; erit

A . . . . . . K . . . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . . . D
G . . . . . . L . . I . . . . . . M . . H

 GH,

GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partiũ AK, KE, æqualis, eademque pars tam

A...... K...... E.... B
C.................. F...... D
G...... L.. I...... M.. H

GI, quam IH, ipsius CD, quæ tam AK, quam KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF. erit & reliquus LI,

7. septimi reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, uel IH, totius CD. Quoniã ergo tam GI, quam IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quam MH, ipsius FD; erit uterque GI, IH,

6. septimi. simul eædem partes ipsius CD, quæ uterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & uterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia uero si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nempe, quæ uterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentẽ, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabat hic, reliquum numerũ EB, alicuius numeri easdem esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF; ibi uero

per-

perspicuum erat, reliquum E B, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est A E, ipsius C F. Licet enim ipsius E B, duplũ assumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti G C, ut A E, est submultiplex ipsius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et uicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadẽ pars erit, uel eædem partes & secundus quarti.

SIT numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, sintque A, B C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. Dico & uicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F.

A . . . .
B . . . . G C
D . . . . . .
E . . . . . . H . . . . . . F

Quia uero B G, G C, inter se sunt æquales, & minores quã E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponitur; Erit B G, ipsius E H, eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F; ac propterea & uterque B G, G C, simul, nempe B C, secundus utriusque E H, H F, simul, nimirum E F, quarti eadem pars, uel partes, quæ B G, ipsius E H, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat. *5. uel 6. septimi.*

SCHOLION.

QVOD si loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit uicissim

unitas

A .
B . G . C
D . . . . . .
E . . . . . . H . . . . . . F

unitas tertij numeri eadē pars, qua secundus numerus quarti; id, quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demōstratione, ut ex hoc exemplo apparet.

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et uicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quę numerus D E, numeri F, sintque A B, C, ipsis D E, F, minores, singuli singulis. Dico & uicissim, numerum A B, easdem partes esse, aut partem numeri D E, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris A B, D E, in partes A G, GB, & D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partiū in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tam A G, quam G B, eadem pars ipsius C, quæ tam D H, quam H E, ipsius F. Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes A G, ipsius D H, & G B, ipsius H E, quæ C, ipsius F: Ac propterea eadē pars erit, uel partes A G, ipsius D H, quæ G B, ipsius H E. Igitur & uterque A G, GB, simul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes utriusque D H, H E, simul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipsius D H, hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

9. septimi

5. uel 6. septimi.

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

SI fuerit ut totus ad totum; ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

SIT ut totus numerus A B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, esse, ut est totus A B, ad totum C D.

A............E......B
C.......F...D

Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita A E, ad C F; erit per defin. 20. A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eædem partes: uel certe A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel easdem partes. Sit primum A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, æque multiplex. Quo posito erit e contrario C D, totus totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E, propter A B, A E, æque multiplices ipsorum C D, C F. Igitur & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac propterea e contrario A B, ipsius C D, & E B, ipsius F D, æque multiplex erit. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D. 7. septimi

SIT secundo A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, eadem pars, uel eædem partes. Quo posito, erit & reliquus E B, reliqui F D, eadē pars, uel partes, quæ totus A B, toti⁹ C D; Ac proinde, per defin. 20. erit ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D. 7. uel 8. septimi.

A...E..B
C.......F....D
A....E..B
C.......F...D

CONTINEAT tertio A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, eandemque insuper illius partem, uel partes. Quo posito, erit e cōtrario C D, totus totius A B, eædē partes, quæ ablatus C F, ablati A E, ut mox demōstrabimus.

Reli-

8. septimi Reliquus igitur F D, reliqui E B, eædem quoque partes

A	E	B	A	E	B
C	F	D	C	F	D

erit, quæ totus C D, totius A B: Ac propterea, e contrario A B ipsum C D, & E B, ipsum F D, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes, ut mox ostendemus. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

QVOD si A B, totus toti C D, æqualis fuerit, & ablatus A E, ablato C F; perspicuum est reliquum E B, quoque esse æqualem reliquo F D. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

A	E	B
C	F	D

LEMMA.

QVOD autem, si *A B*, ipsum *C D*, & *A E*, ipsum *C F*, æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius uel partes; e contrario *C D*, ipsius *A B*, & *C F*, ipsius *A E*, sit eædem partes: Et si *C D*, ipsius *A B*, & *C F*, ipsius *A E*, sit eædem partes: e contrario *A B*, ipsum *C D*, & *A E*, ipsum *C F*, æqualiter contineat, eandemque illius partem uel partes; hoc modo demonstrabimus. Contineat primo *A B*, ipsum *C D*, & *A E*, ipsum *C F*, æqualiter, nempe semel, uel bis, uel ter, &c. eandemque insuper partem, *G B*,

A . N . O . G . B
C . I . K . D
A . P . Q . H . E
C . L . M . F

quidem

quidem ipsius C D, & H E, ipsius C F, ita ut numeri reliqui A G, A H, sint uel æquales ipsis C D, C F, uel eorum æque multiplices. Diuisis igitur numeris C D, C F, in partes C I, I K, K D; & C L, L M, M F, ipsis G B, H E, æquales; erit multitudo partiũ numeri C D, multitudini partium numeri C F, æqualis, quod G B, ipsius C D, sit eadem pars, quæ H E, ipsius C F. Similiter diuisis numeris A G, A H, in partes A N, N O, O G; &, A P, P Q, Q H, eisdem G B, H E, æquales; erit quoque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis: Cum enim A G, A H, uel æquales sint ipsis C D, C F, uel eorum æque multiplices; erunt uel tot partes in A G, A H, quot in C D, C F; uel certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; propterea que multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars numeri C F, est numeri A E. Quare cum multitudo partiũ numeri C D, æqualis sit multitudini partium numeri C F; erit C D, eædem partes numeri A B, quæ C F, ipsius A E.

CONTINEAT secundo A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter; uidelicet semel, bis, ter, quaterne, &c. easdemque insuper partes illius, numerus quidem A B, partes G B, numeri C D, & numerus A E, partes H E, numeri C F, ita ut reliqui numeri $A G$, $A H$, sint rursum uel æquales ipsis $C D$, $C F$, uel eorũ æquemultiplices. Diuisis igitur numeris $G B$, $H E$, in partes

A . . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . O . . . F

tes $G I$, $I B$, & $H K$, $K E$, numerorum $C D$, $C F$, erit multitudo partium ipsius $G B$, multitudini partium ipsius $H E$, æqualis. Simili modo, diuisis numeris $C D$, $C F$, in partes $C L$, $L M$, $M D$, & $C N$, $N O$, $O F$, partibus $G I$, $I B$, & $H K$, $K E$, æquales, erit quoque multitudo partium ipsius $C D$, multitudini partium ipsius $C F$, æqualis, quod quælibet partium numeri $G B$, eadem pars sit numeri $C D$, quæ unaquæque partium numeri $H E$, est numeri $C F$. Deinque diuisis numeris $A G$, $A H$, in partes $A P$, $P Q$, $Q G$, & $A R$, $R S$, $S H$, eisdem partibus $G I$, $I B$, & $H K$, $K E$, æquales, erit & multitudo partium numeri $A G$, æqualis multitudini partium numeri $A H$. Cum enim $A G$, $A H$, uel æquales sint ipsis $C D$, $C F$, uel eorum æquemultiplices; erunt uel tot partes in $A G$, $A H$, quot in $C D$, $C F$, uel certe numerus partium ipsius $C D$, toties continebitur in $A G$, quoties numerus partiũ ipsius $C F$, in $A H$; propterea multitudo partium numeri $A G$, multitudini partium numeri $A H$, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum $G B$, $H E$, erit quoque multitudo partium numeri $A B$, multitudini partium numeri $A E$, æqualis; Atque adeo una pars numeri $C D$, eadem pars erit numeri $A B$, quæ una *pars numeri* C F*, est numeri* A E*. Quare cum multitudo partium numeri* C D*, æqualis sit multitudini partium numeri* C F*; erit* C D*, eædem partes numeri* A B*, quæ* CF*, ipsius* A E*. Quod est primo propositum.*

IAM uero sit C D*, ipsius* A B*, & * C F*, ipsius* A E*, eadem partes. Dico e contrario* A B*, ipsum* C D*, &* A E*, ipsum* C F*, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, uel partes. Diuisis enim numeris* C D*,* C F*, in partes numerorum* A B*,* A E*, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris* A B*,* A E*, in partes partibus numerorum* C D*,* C F*, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri* C D*, in* A B*, supereritque eadem pars, uel partes ipsius* C D*, quoties omnes partes numeri* C F*, continentur in* A E*, & quæ pars, aut partes ipsius* C F*, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum* C D*,* C F*, &* A B*,* A E*. Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum* A B*,* A E*, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* C D*,* C F*, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum* C D*,* C F*, multitudine æquales. Quam ob rem* A B*, ipsum* C D*, &* A E*, ipsum* C F*, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes. Quod secundo est propositum.*

THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

SI sint quotcunque numeri proportionales,

nales, erit quemadmodum unus anteceden tium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, ut est A, ad B. Sint enim primū A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, eadem pars est, aut partes

A .... C .. E ...

B .... D .... F ......

A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; erit quoque

5. uel 6. septimi. uterque A, C, simul vtriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, uel E, ipsius F. Rursus quia uterque A, C, simul, tanquam unus, utriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius

5. uel 6. septimi. F; erunt & ambo A, C, tanquam unus, & E, simul, amborum B, D, tanquam unius, & F, simul eadem pars, uel partes, quæ A, ipsius B. Quare, per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ est ipsius A, ad B.

SINT secundo A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit e contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo ut prius,

5. septimi A .... C .... E ......

B. . . . D. . F . . .

erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & e contrario omnes A, C. E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. Quare per defin. 20. eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quę est A, ad B. Hoc idem uerum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, uel etiam omnes, sint numerorum ad unitatem. Est enim eadem semper demonstratio, ut hic apparet,

paret, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A... C..... E........ A... C... E..... A... C... E...
B.. D.. F... D... D. F.. B. D. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipsum B, & C, ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemque

insuper partem, uel partes; Erit per lemma præcedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius E, eædem partes. Igitur ut prius, erunt omnes B, D, F, omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ B, ipsius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario continebunt omnes numeri A, C, E, simul, omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum B, æqualiter, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. 6. septimi

A.... C.... B..............
B...... D... F.........

SINT quarto & ultimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, simul æquales ipsis B, D, simul, quibus si rursum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt, ut A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum utrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

A.... C... E.....
B.... D... F.....

THEOR. 11. PROPOS. 13. 14.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et uicissim proportionales erunt.

SIT A, ad B, ut C, ad D. Dico uicissim esse A, ad C,

 ut

ut B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D; & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadem pars, uel partes. Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadē pars erit, uel partes: Ac proinde per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . C . . . . . .
B . . . . D . . . .

9. vel 10. septimi.

SINT secundo A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, uel partes. Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, uel partes: Atque adeo e contrario, uel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . .
B . . . . D . . . .

9. vel 10. septimi.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo posito, erit ob eandem proportionem, uel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; uel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, cōtinebit æqualiter, candemq; insuper partem, uel partes; Atq; adeo e cōtrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C uel eadem pars, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, uel partes; Ac proinde per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . . .
B . . . D . . . . . .

9. vel 10. septimi.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, uel æque multiplex, uel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter cōtinebit, eandemque insuper partem uel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, uel eadem pars, uel certe, per

A . . . . C . . . .
B . . . . . . D . . .

per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, uel partes; 9 uel 10. septimi.
Ac propterea e contrario uel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, uel certe, per lemma adductum, B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

SINT quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quã C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, uel eadem pars, uel eædem partes sunt; Erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A	C . . . . .
B	D . . . .

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorũ C, & D, uel æque multiplices sunt, uel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, uel partes; erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A	C . . .
B	D . . .

SINT septimo ac ultimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales. Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, uel eadem pars, uel eædem partes; uel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, candemque insuper partem, uel partes; suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, ut A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & uicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

A	C . . . . .
B . . .	D . . .

SCHOLION.

COACTI sumus in hac propositione, & duabus praecedentibus tot casus recensere, eosque demonstrationibus certissimis confirmare, una cum lemmate propos. 11. ut earum ueri-

tas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inaequalitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, ut perspicue ex eorundem auctorum demonstrationib⁹ apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, ut nonnulli concedunt, quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, ubi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti aeque multiplex est, uel eadem pars, uel eadem partes, &c. Nam si existimaret maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, uel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, ut manifestum est; quare reliqua omnia uerba definitionis superuacanea essent.

15. THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis aequales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex aequalitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque ut A, ad B, ita D, ad E; & ut B, ad C, ita E, ad F. Dico ex aequalitate quoque esse ut A, ad C, ita D, ad F.
13. *septimi* Quoniam est, ut A, ad B, ita D, ad E, erit uicissim, ut A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eadem ob causam, cum sit, ut B, ad C, ita E, ad F; erit uicissim, ut

A.	D.	
B.	E.	
C. . . .	F. . .	
G.	H.	

B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit ut A, ad D, ita C, ad F; Cum enim utraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni

portioni B, ad F, ut demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt, ut mox ostendetur.) Ac proinde uicissim, ut A, ad C, ita D, ad F. 13. septim

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autẽ ut C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æquã litate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit ut A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

IDEM uerum est, si loco unius numeri unitas assumatur, uel etiam loco plurium plures unitates, ut in hoc exemplo perspicuum est.

A .	D	
B ..	E	
C ...	F	
G .	H ...	

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorũ, quæ eidem proportioni eædem sunt, inter se quoque sint

A.............	B........	C....
D.........	E......	F...

eædem, quales sunt in demonstratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem ostensæ sunt proportioni B, ad E; ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quam C, ipsius F, æque multiplex, uel eadem pars, uel

 eædem

eadem partes; uel uerte B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quam C, ipsum F; continebit aequaliter, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. numeri A, D, C, F, proportionales sunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.

Hoc idem demonstratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

16. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI unitas numerum quempiam metiatur, aeque autem alter numerus alterũ quendam numerum metiatur: Et uicissim aeque unitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR unitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, aeque. Dico uicissim unitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, aeque metiri. Diuiso enim numero B C, in unitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipsi D, aequales; erit multitudo unitatum numeri B C, aequalis multitudini partium numeri E F, metieturque aeque unitas A, numerum D, & unitas B G, ipsum E I, atque unitas G H, ipsum I K, & unitas H C, ipsum K F: atque ideo eadem pars erit unitas A, numeri D, & unitas B G numeri E I, quae unitas G H, numeri I K, & unitas H C, numeri K F. Quare per ea, quae ad propos. 5. huius lib. ostendimus, eadem pars erunt unitates B G, G H, simul numerorum E I, I K, simul, quae unitas B G, numeri E I, uel unitas H C, numeri K F. Itaque quia eadẽ pars est unitas H C, numeri K F, quae numerus B H, numeri E K; erit, ut iam demõstrauimus, unitas H C, & numerus B H, simul, utrumque

A. D..

B.G.H.C E..I..K..F

quę numeri K F, E K, simul, eadem pars, quæ unitas H C, numeri K F, hoc est, quæ unitas A, numeri D; Ac proinde unitas A, numerum D, & numerus B C, ex unitate H C, & numero B H, compositus, numerum E F, ex numeris K F, B K, compositum æque metietur. Si unitas igitur numerũ quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

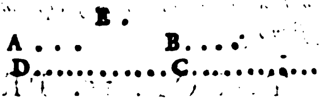
SCHOLION.

ILLVD idem, quod Euclides demonstrauit de numeris, propos. 13. ostendit hic in loco separatim de unitate, & tribus numeris, propterea quod unitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia unitas A, numerum B C, æque metitur, atque numerus D, numerum E F; erit unitas A, eadẽ pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit uicissim unitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri mutuo se se multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita ut A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim unitate E; cũ A,



ipsum B, multiplicans faciat C; erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, unitates; atque adeo unitas E, numerũ A, & numerus B, numerum C, æque metietur. Vicissim ergo & unitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, 15 *defin.* 15. *septimi* metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, unitates, atque adeo unitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autẽ & eadem unitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Aeque igitur numerus A utrunque numerum C, & D, metitur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo se se multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

E .
A . . .   B . . . .
D . . . .   C . . . .

SCHOLION.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

Si duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur unus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam ut prius, cũ A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus unitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At uero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, etiam unitas E, numerum B, & numerus A, numerũ factum, per defin. 15. æque metitur. Idẽ ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quando quidem ipsum numerus A, æque metitur, atque unitas E, ipsum B.

E .
A . . .   B . . . .
C . . . .

18. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans, fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem

tionem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, ut B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim unitate F; erit D, ex B, cõpositus toties, quoties unitas F, est in A, per defin. 15. similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem unitas F, est in eodem A. Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; Ac proinde, per defin. 20. erit ut B, ad D, ita C, ad E; et permutando, ut B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat. 13. septimi

F.
A..
B... C....
D...... E............

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiã multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse ut A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cũ ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicãs ipsos A, & B, facit D, & E; erit, ut A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum. 16. septimi 17. septimi

A.... B.....
C...
D............ E...............

SCHO-

SCHOLION.

HANC propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, uel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, uel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, uel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quos numeri multiplicantes, uel multiplicati B, C, D: hoc est, esse, ut B, ad C, ita E, ad F, & ut C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, uel ex B, C, in A, fiant E, F; erit ut B, ad C, ita E, ad F. 17. uel 18. septimi. *Similiter quia ex A, in C, D, uel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque ut C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.*

A...

B.. C... D....

E...... F......... G............

20. THEOR. 17. PROPOS. 19.

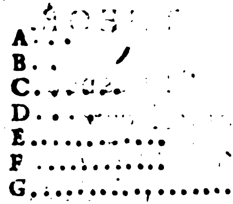
SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero. Et si qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, ut quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quar-

D, quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, hoc est, ut A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam uidelicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus.

17. septimi

18. septimi



SED iam sit E, ex A, primo in D, quartū genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, ut quidē A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, ita G, ad E, uel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, ut ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut A, ad B, ita idē G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, ut A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

17. septimi

18. septimi

SCHOLION.

POTERAT *huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum.*

SI duo numeri duos numeros eandem, quā illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA *enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente,*

dente, in D, consequentem; æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

20. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur; Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidē A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, erit numerus factus ex A, in C,

A. . . . .
B. . . . . . D. . . . . .
C. . . .

19. septimi æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur.

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, ut B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D,

19. septimi tertium; erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, ut quidem A, ad B, ita D, ad C, uel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor uero minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadẽ, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita ut sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem A B; ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem: Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita E, ad F; erit uicissim, ut A B, ad E, ita C D, ad F; Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E F; erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, uel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. Erit ergo, ut A G, ad E, ita C H, ad F; & uicissim, ut A G, ad C H, ita E, ad F, uel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsum E, & C D, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandẽ cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . .
F . . . . . .

13. septimi

20. defin.

SCHOLION.

PARI ratione, & hoc uerum est, quod Campanus docet.

QVOT-

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit

A . . . K . . . B C . . L . D E . . . . M . . . . F
G . . . . H . . . . . . I . . . .

proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, siue non; ita ut non possint reperiri alij numeri ipsis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad secundum sit, ut A B, ad C D; & secundus ad tertium, ut C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. uel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiantur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8 & 10. proportio uero 20. ad 25. in 4. & 5, uel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, ut A B, ad C D; & H, ad I, ut C D, ad E F. Dico A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, metiri æque. Cum enim sit ut A B, ad C D, ita G, ad H;
13. septimi *erit uicissim ut A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cum sit ut C D, ad E F, ita H, ad I, erit quoque uicissim, ut C D, ad H, ita E F, ad I. Quare A B, ipsius*
20. defin. *G, & C D, ipsius H, & E F, ipsius I, erit uel eadem pars, uel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F; atque adeo A K, ipsius G, &*
20. defin. *C L, ipsius H, eadem pars. Erit ergo ut A K, ad G, ita*

C L,

CL, ad H; & uicissim ut AK, ad CL, ita G, ad H, uel AB, ad CD. Eodemque modo erit, ut CL, ad EM, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, æque metietur. Quod est propositum. 23. septimi

QVOD *si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita ut etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æque metiri. Nã per hæc propos. 21. A, B, cũ sint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipsos D, E; eademq; ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, æque metiatur, ac B, ipsum E; metientur æque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.*

A.. B..... C...
D.... E.......... F......

THEOR. 20. PROPOS. 22. 19.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadẽ ratione, sitque perturbata corũ ꝓportio, ut quidẽ A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse ut

A............ H...
B... D...
C...... E........
G...... F...

ut A, ad C, ita D, ad F. Cum enim sit ut A, ad B, ita E, ad
19. septimi F; erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam ut B, ad C, ita D, ad E, erit eidē numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atq; adeo

A..............	H...
B....	D...
C......	E.........
G........	F...

numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. Quare erit
19. septimi ut A, ad C, ita D, ad F.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam C, ad G, ut H, ad D; Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem ut C, ad G, ita H, ad D, erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idē ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

QVONIAM Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13 & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14 & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos in numeris, & alia quædam ostendere, octo sequentibus theorematibus.

I. **Si quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo proportionales erunt.**

Sit, ut A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse ut B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit C, ad D, ut A, ad B, erit vicissim C, ad A, 13. septimi
ut D, ad B. Rursus quia est D, ad B, ut C, ad A, erit vicissim D, ad C, ut B, ad A, hoc est, ut B, ad A, ita D, ad C; Quod est propositum.

A ...... C ...
B .... D ..

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt. II.

Sit ut A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico & diuidendo esse, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Cum enim sit ut A B, ad C B, ita D E, ad F E, erit vicissim, ut totus A B, ad totum D E, 13. septimi
ita ablatus C B, ad ablatum F E: Ac proinde, ut totus A B, ad totum D E, ita reliquus A C, ad reliquum D F: hoc est, A C, ad 11. septimi
D F, ut C B, ad F E. Vicissim ergo erit quoque A C, ad C B, ut 13. septimi
D F, ad F E. Quod est propositum.

A .... C ... B
D .... F .. E

Si diuisi numeri proportionales sint; Hi quoque compositi proportionales erunt. III.

Sit ut A B, ad B C, ita D E ad E F. Dico & componendo, esse ut A C, ad B C, ita D F, ad E F. Cum enim sit, ut A B, ad B C, ita DE, ad E F, erit vicissim, ut A B, ad D E, ita B C, ad 13. septimi
E F; Ac proinde A B, B C, simul 12. septimi
ad D E, E F, simul, ut B C, ad
E F: Et vicissim A B, BC, simul, hoc est, totus A C, ad B C, ut 13. septimi
DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositũ.

A ...... B ... C
D .... E .. F

Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. IIII.

Sit ut AB, ad CB, ita D E, ad F E. Dico, per conuersionem

sionem rationis esse quoque, ut A B, *ad* A C, *ita* D E, *ad* D F. *Cum enim sit, ut* A B, *ad* C B, *ita* D E, *ad* F E, *erit vicissim,*
13. *septimi* *ut totus* A B, *ad totum* D E, *ita ablatus* C B, *ad ablatum* F E; *Ac proinde, ut totus* A B, *ad totum* D E, *ita*
11. *septimi* *erit reliquus* A C, *ad reliquum* D F,
13. *septimi* *Vicissim igitur, ut* A B, *ad* A C, *ita* D E, *ad* D F. *Quod est propositum.*

A . . . . . . C . . . B

D . . . . F . . E

RVRSVS *ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.*

V. SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eãdem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT *ut* AB, *primus ad* C, *secundum, ita* DE, *tertius ad* F, *quartum: Item vt* BG, *quintus ad* C, *secundum, ita* EH, *sextus ad* F, *quartum. Dico ita esse* AG, *compositum ex primo & quinto, ad* C, *secundum, ut est* D H, *compositus ex tertio & sexto, ad* F, *quartum. Cũ enim sit, ut* B G, *ad* C, *ita* E H, *ad* F; *erit conuertendo ut* C, *ad* BG, *ita* F, *ad* EH. *Quoniam igitur est ut* A B, *ad* C, *ita* D E, *ad* F; *& ut* C, *ad* B G, *ita* F, *ad* E H; *erit ex aequalitate ut* AB, *ad* BG, *ita* DE, *ad* EH. *Componendo igitur, ut* A G, *ad* B G; *ita* D H, *ad* EH. *Itaque cum rursus sit, ut* A G, *ad* BG, *ita* DH, *ad* E H: *& ut* B G, *ad* C, *ita* EH, *ad* F; *erit ex aequalitate, ut* AG, *ad* C, *ita* DH *ad* F. *Quod est propositum.*

A . . . . . . B . . G   D . . . . E . . . H

C . . . .   F . . . . . .

EODEM *modo & hoc Theorema ostendemus.*

VI. SI duo numeri ad duos numeros eandem

habeant

habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

SIT ut totus A B, ad C, ita totus D E, ad F; Item ut detractus A G, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, ut est reliquus H E, ad F. Cum enim sit, ut AG, ad C, ita D H, ad F; erit conuertendo, ut C, ad A G, ita F, ad D H.

A . . . . . . G . . B   D . . . . H . . . E
C . . . .   F . . . . . .

Quia igitur est, ut AB, ad C, ita DE, ad F; & ut C, ad A G, ita F, ad D H; erit ex aequalitate ut A B, ad A G, ita D E, ad D H. Diuidendo ergo ut G B, ad A G, ita H E, ad D H. Itaque cum rursus sit, ut G B, ad A G, ita H E, ad DH; & ut A G, ad C, ita D H, ad F; erit ex aequalitate, ut G B, ad C, ita H E, ad F. Quod est propositum.

ITEM & hoc demonstrabimus.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. VII.

SIT ut primus A, ad secundum B C, ita tertius D, ad quartum E F; & ut primus A, ad quintum C G, ita tertius D, ad sextum F H. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, ut est D, tertius ad E H, compositum ex quarto & sexto.

A . . . . . .   D . . . .
B . . . . C . . G   E . . . . . . F . . . . H

Cum enim sit, ut A, ad BC, ita D, ad E F; erit conuertendo ut BC, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur est ut B C, ad A, ita EF, ad D; & ut A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex aequalitate ut BC, ad CG, ita EF, ad FH; & componendo, ut BG, ad C G, ita EH, ad F H; & conuertendo, ut C G, ad BG, ita FH, ad E H. Quoniam ergo est, ut A, ad C G, ita D, ad F H; & ut CG, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex æqualitate, ut A, ad BG, ita D, ad E H. Quod est propositum.

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII. Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportioné, quam omnes hi simul ad eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idẽ numerus ad omnes illos simul proportionem, quã idem numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunque numeri A B, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eundem K: Hoc est, sit ut A B, ad E, ita FG, ad K; & ut B C,

A....B......C........D F..G...H....I
E.......... K.....

ad E, ita G H, ad K; & ut CD, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum A D, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul, hoc est, ipse F I, ad K. Cum enim sit, ut AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item ut B C, quintus ad E, secundum, ita G H, sextus ad K, quartum; erit quoque ut A C, primus cum quinto, ad E, secundum, ita F H, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, ut A C, primus ad E, secundum, ita F H, tertius ad K, quartum: Item ut C D, quintus ad E, secundum, ita H I, sextus ad K, quartum; erit etiam, ut A D, primus cum quinto, ad E, secundum, ita F I, tertius cum sexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque

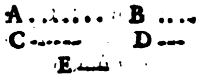
A B,

AB, BC, CD, proportiones easdem, quas idem numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc est, sit ut E, ad AB, ita K, ad FG; & ut E, ad BC, ita K, ad GH; & ut E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, ut E, ad omnes illos simul, nempe ad AD, ita K, ad hos omnes simul, nempe ad FI. Cum enim sit, ut E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item ut E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, ut E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, ut E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item ut E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, ut E, primus ad AD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E, ita ut C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties unitas est in E. Itaq; cũ unitas numerũ E, & numerus C, numerũ A, ęque metiatur; metietur & uicissim ęque unitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia unitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; metietur quoque uicissim æque unitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem nu-



21. septimi

15. septimi

 merus

merus E, utrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B. minores; minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerū, præter unitatem, cōmuni mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habeant numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties unitas est in numero D; At uero ipsum B, toties, quoties unitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt unitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt unitates in E, producit ipsum B; fit, ut D, &

A......... B.....

C ---

D --- E ---

9. pron. E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. Quare eadem

18. septimi erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cū D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

SCHO-

SCHOLION.

HANC *propositionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.*

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT *quotcunque numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarũ proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim nõ sunt minimi, erunt aliqui alij minores*

A...... B........ C....
D--- E--- F---
G---

ipsis, nempe D, E, F, *minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur* D, E, F, *minimi, sunt in proportione numerorum* A, B, C; *metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, æque, per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus; atque adeo secundũ unum eundem numerũ, qui sit* G; *ita ut* D, *toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties unitas est in G. Quoniam igitur unitas numerum G, & numerus D, ipsum A, æque metitur; metietur quoque uicissim æque unitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, æque atque unitas ipsos E, F; Atque idcirco A,* 15. *septimi*
B, C, cum habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; sed ipsi A, B, C, minimi sunt.

IAM *uero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G, ita* *ut G, toties metiatur ipsum A, quoties unitas est in D; & ipsum B, toties, quoties unitas est in E; & ipsum C, toties quoties unitas est in F. Quoniã igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties unitas est in D,*

A	B	C .....
D ---	E -----	F ---
	G ---	

9. pron. *E, F; fit ut D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.*

24. ## THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B; & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim nõ sunt inter se primi B, & C; metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipsum A; metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem, numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demõstrandum.

A	B .....
C	D ---

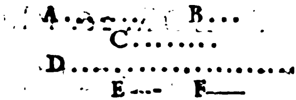
11. pron.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 26. 25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT uterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, uel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi, sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties, quot unitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D; quot sunt unitates in F; fit



ut F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D; & contra E, ip- 9. pron.
sum F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autē 16. septimi
idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartū fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; erit ut E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartū. Quia 19. septimi
uero A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri, erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum sint in- 25. septimi
ter se primi, in sua proportione minimi erunt. Aeque igitur 23. septimi
metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, ni- 21. septimi
mirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur utrunque B, & C; nō erūt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 25. PROPOS. 27. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, erit numerus ex A, in D,

26. septimi hoc est, ex A, in se genitus, nempe C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.......

C................

D....

27. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrunque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SINT uterque A, & B, ad utrunque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim uterque A, & B, primus sit ad C; erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum uterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus est ad E; erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat ostendendum

A..... B...

E ....

26. septimi C... D..

F ....

26. septimi.

28. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erũt:

Et

Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at
ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si
rursu fiat
E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoq; esse inter se primos.

A ... B ..
C .... D ....
E .... F ....
G, 81. H, 16.

Cum enim A, B, sint inter se primi, erit
C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem 27. septimi
modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B,
in se, ad C, primus.
RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, erit & C,
factus ex A, in se, ad B, & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: 27. septimi
Erat autem & C, ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad
utrunque B, D, primus erit; Ac proinde E, factus ex A, in 28. septimi
C primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A,
in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi sint ad
B, erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque 26. septimi
ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur uterque A, E,
ad utrunque B, F, primus est; erit & G, factus ex A, in E, 28. septimi
ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps si plures
fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, erit
& G, ex ipsis factus, ad B, primus; necnon & H, ad A; Quare 26. septimi
re & genitus ex A, in G, ad genitum ex B, in H, primus erit: 28. septimi
cum uterque A, G, ad utrunque B, H, sit primus. Si duo
itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint:

Etiam

Etiam uterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si uterque simul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & utrumque simul A C, primũ esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur

A . . . . B C

D —. . . . .

12. pron. D, metitur totum A C, & ablatum A B, metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemq; modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.

SED iam uterque A B, B C, simul, primus sit ad unum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, BC, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, &

10. pron. B C; metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, cõpositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eodemq; argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad BC, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unũ illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, BC, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiusdem. quod est propositum.

32.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem

nem

nem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos, præter unitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A,

A..... B........

C.....

ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerũ A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; Atque propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerũ, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 30. PROPOS. 32. 33.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiã unum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem unum ipsorum A, & B, si non utrunque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur uero ipsum C, toties, quot sũt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus

A.... B........

C...............................

D... E.........

ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; erit ut D, primus ad A, secundũ, ita B, tertius ad E, quartũ. Quia uero prim⁹ D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; erunt D, & A, in sua proportione minimi. Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur, ipsum

19. septimi
31. septimi
23. septimi
21. septimi

sum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquẽ, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Eodem modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

Si duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipsum sit compositus: is ad unum eorum, qui in principio, compositus erit.

Nam ex A, in B, fiat C, quem uel metiatur numerus non primus D, uel certe compositus ad eum sit. Dico D, quoque ad unum ipsorum A, B, compositũ esse. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit vterque A, & B, ad D, primus. Quare & C, ex illis genitus, ad eundem

A . . . B . . . .
C . . . .
D . . . .

26. septimi *D, primus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur uel metiri ipsum C, vel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cum non sit primus ad utrunque.*

30. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Sit numerus compositus A. Dico aliquem numerũ primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si uero compositus, metiatur eum numerus C, qui uel primus erit, uel compositus: Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus
11. pron.

eus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia uero numerus non diminuitur infinite, ueniemus tandem ad aliquẽ numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, metietur quoque compositum A. Omnem ergo compositum numerum, aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum. 11. pron.

A . . . .
B . . . . C . . .

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, uel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. 11. pron.

A . . . .
B . . . C --

THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum uel esse primũ, uel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus uel primus sit, uel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si vero compositus; metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum. 33. septimi

A . . . .

PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem

nem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habẽtes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C. siue non; oporteatque totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi, aut compositi. Si primi inter se sunt; erũt ipsi in continuatione suarum proportionũ minimi, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib.

A.......	B....	C.........
	D..	
E...	F..	G....
H....	I----	K----
	L----	

demonstrauimus. Si uero non sunt inter se primi, inuenta

3. septim. sit maxima earum communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorũ A, B, C. Quod enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per

9. pron. E, F, G; fit, ut D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

QVOD uero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores, minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui, quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æque, ut ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerum L. Quo posito L, multiplicans numeros H, I, K, pro-

9. pron.

8. pron. ducet numeros A, B, C; & uicissim L, ipsos A, B, C, metietur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertiũ

19. septimi facit eundem A; erit, ut E, primus ad H, secundum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H: Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C,

sed

sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in caeteris ratio.

SCHOLION.

Ex his facili uia comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D, E, siue illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2 G, 3.

siue non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F. & G, minimos in proportione duorum A, & B, nempe illos, per quos I, maxima eorum cōmunis mensura eos metitur.

CAETERVM aliquando contingit unum numerorum E, F, G, inuentorum esse unitatem, quando scilicet D, maxima mensura uni ipsorum A, B, C, aequalis est, ut ex his exemplis

A ... B ...... C .... A .... B .. C ......
D ... D ..
E . F .. G ... E .. F . G ...

apparet. Manifestum est autem, inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam unitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire,

quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse minimum, quẽ A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perspicuum est. Nam cum producatur C, ex A, in B, uel ex B, in A; metietur A, ipsum C, per

7. pron. B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omniũ, quos A, & B, metiuntur, sic demonstrabimus.

A . . . . B . . . . .
C . . . .
D ————————
E ——— F ——

Si C, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturque A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, tam ex A, in E, quam

9. pron. ex B, in F, & e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex

19. septimi B, secundo in F, tertium; erit, ut A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur

23. septimi primi inter se, & ob id, in sua proportione minimi sint) aeque

21. septimi metientur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam uero A, multiplicans B, & E, facit C, & D, erit

17. septim. C, ad D, ut B, ad E: Ac propterea cum B metiatur ipsum E, ut ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipso C; atque adeo C, minimus est omnium, quos metiuntur.

SINT secundo dati numeri A, & B, non primi inter

35. septimi se. Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, ut sint quatuor numeri proportionales, nempe A, ad B, ut C, ad D. Quo posito, fiet idem

A . . . . B . . . . . .
C . . D . . .
E . . . .
F ——————
G ——— H ——

19. septim numerus, ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. factus ergo sit E. Dico E, hac uia procreatũ esse

7. pron. minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur

tiantur, manifestum est. Nam cum tã A, multiplicatus a D, quam B, multiplicatus a C, ipsum E, producat; metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod uero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; erit, ut A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, uel H, ad G, metientur ipsos H, & G, æque; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia uero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; erit E, ad F, ut D, ad G; Ac propterea cũ D, metiatur ipsum G, ut ostensum est; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdũ. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

7. pron.
9. pron.
19. septimi
17. septimi

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiantur.

SCHOLION.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiã metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D, sitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum C D, metiri. Si enim E, ipsum C D, non metitur; ablato E, ex C D, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E.

A . .   B . . .
C . . . . F —— D
E . . . . . .

Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties potest, numerũ, si fieri potest, F D, minorem se, ita ut E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum C F; metietur quoque tam A, quam B, ipsum C F. Itaque A, & B, cum me-
11. pron.
12. pron. tiantur totum C D, & ablatum C F; metientur & reliquum F D. Est autem F D, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim; Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quẽ illi minimum metiantur, numerum.

36. septimi SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primo C, ipsum D, ita ut omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiantur, minimum quoque esse, quẽ tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur,

A . . .   B . . . .   C . . . . . .
D . . . .
E ————

tiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E, & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. 37. septimi

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. 36. septimi Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cum A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; metientur quoque A, & B, ipsum E. 11. pron. Metitur autem & C, eundē E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest. A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiantur; 37. septimi Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdū. 37. septimi Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A.. B... C....
D......
E.............
F ———

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nā in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLION.

Hoc corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sitque F, minimus, quem iidem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partē

A.. B... C....
D........................G—E
F............

D G, relinquatque numerum G E, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum D G; metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cum & totum D E, ponantur metiri; metientur & reliquum G E, ipso F, minorē.
11. pron.
12. pron.
Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiantur. Quod est absurdū, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum D E.

Pari ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur: Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquā a B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot unitates sunt in numero C. Quia igitur unitas ipsum C, & B, ipsum A, æque metitur; & uicissim unitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur; atque adeo eadem pars erit unitas ipsius B, quæ C, ipsius A: Est autem unitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, ut ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars

A............
B....   C...

15. septimi

erit

erit ipsius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendū erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nā cū B, pars denominetur a C; sit autē & unitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur unitas ipsum C, & B, ipsum A, æque. Vicissim ergo & unitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandū erat. 15. septimi

A ....

B ...   C .....

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, hoc est, qui ipsas denominent, D, E, F; minimusque, quem D, E, F, metiantur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cū D, E, F, ipsum G, metiantur, habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod uero G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C; metientur ipsum numeri D, E, F, a parti- 38. septimi 39. septimi 40 septimi

D ..   A. Secunda

E ...   B. Tertia

F ....   C. Quarta

G ....

H ———

bus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Quod si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet a D, E, F.

A. Secunda	D..	I......	
B. Tertia	E...	K....	
C. Quarta	F....	L...	
	G.............		

Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur æque unitas ipsos I, K, L, & numeri D,
15. septimi *E, F, ipsum G. Vicissim ergo metietur quoque æque unitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G; atque adeo unitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo unitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ a D, E, F.*

Ex his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes a numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

Iam vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; sit illius duplus, numerus H, triplus uero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim

H, S

H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet a D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ip-

G . . . . A D . .
H . . . . B E . . .
I . . . . C F . . . .
K ———— M ——— L
N ———————————— P —— O

sum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C. 11. pron. 39. septimi

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus dictas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus dictis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundẽ K L. Metitur autem & G, ablatum K M, sibi aequalem: Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est, huiusmodi partes habens. 40. septimi 12. pron.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, nempe N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autẽ H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C; metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Ac idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo aequalem. Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, ter- 40. septimi 12. pron.

I, tertius est illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cũ sit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendusque sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cũ ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties unitas in D: Est autẽ vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . .
H . . . .
. Vnitas
I ————————
K ——————
L ————
M ——

adeo H, habet partem A, nempe numerum G, a D, denominatã. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nempe numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nempe unitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus dictas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, a D, denominata; erit K, toties in I,

quoties

quoties vnitas in D; Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex K, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I; erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & I, fiant G, & K; erit, ut G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & ut G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit, per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autē H, numerus numero I, maior; vnitas igitū maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quā H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum. 15. defin. 17. septimi

H.	G.	F.	Vnitas.
I.	K.	L.	M.

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac aliam a 4. & hac aliam a 5. & hac denique partem a 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, nempe secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS
ELEMENTVM VIII.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi uero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationẽ habentiũ.

NVMERORVM deinceps proportionaliũ quotcunque A, B, C, D. extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentiũ. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunq; numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini sumuntur, & in eadẽ ratione sunt, erit, ex æqualitate, ut A, ad D, ita E, ad H: Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur.

A........ E---
B............ F---
C................. G------
D........................... H---------

14. septimi qualitate, ut A, ad D, ita E, ad H: Sunt autem A, & D, in
13. septimi sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur.
21. septimi Igitur A, ipsum E, & D, ipsum H, æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsi met minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri dein-

ri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandũ.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continue proportionales, ut vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in priori eadem semper proportio reperitur.

A	E —
B	F ——
C	G ———
D	H ————

PROBL. 1. PROPOS. 2. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C. D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B; hoc est, esse ut C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiãt C, & D; erit ut A, ad B, ita C, ad D. 17. septimi

A ..		B ...		
C	D	E		
F, 8.	G, 12.	H, 18.	I, 27.	
K, 16.	L, 24.	M, 36.	N, 54.	O, 81.

Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; erit quoque, ut A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod uero in eadẽ ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi

mi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; sunt autem
24. septimi A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportio-
29. septimi ne; Erunt & C, E, extremi, inter se primi. Quare C, D,
1. octaui. E, minimi sunt in ratione A, ad B.

IAM uero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in ultimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B.

	A..	B...		
C....	D......	E.........		
F, 8.	G, 12.	H, 18.	I, 27.	
K, 16.	L, 24.	M, 36	N, 54.	O, 81.

Rursus quia A, & B, ipsum
18. septimi E, multiplicantes, fecerunt H, & I; erit quoque, ut A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. Quoniam A, & B, mini-
24. septimi mi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nempe F, ex A, in C, & I, ex B, in E; erunt
29. septimi & F, I, extremi, inter se primi. Quare F, G, H, I, in sua
1. octaui. proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D,
18. septimi *C: & F, ex A, in C. Quo peracto, numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A, B, multiplicantes C, ip-*

sus

sos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quod B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in I, H, G, & ex A, in C.

COROLLARIVM. I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I. extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea uterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub alijs denominationibus, quæ in Algebra solent explicari. Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonstrauimus de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, uel ex B, in C, & D; item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, uel ex B, in F, G, H; ut ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLION.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab vnitate, quod illorũ quidẽ proportiones a numero A, horũ vero a B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo uides C, & E, extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, nempe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi constituuntur. Nam vltimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui *minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque in reliquis est ratio.*

BOETIVS *autem, & alij regulam hanc ita explicant. Sumantur tot numeri continue ab unitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erũt quinque numeri ab unitate quincupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet; 625. 750 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exẽplo post 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionẽ sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, ut ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, ut primus ad secundum, vt propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.*

THEOR. 2. PROPOS. 3. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cũ eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur

Nn

niantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, uel B, ad C, uel C, ad D. Deinde iuxta uiam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F. 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18, N, 27.

Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi: Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si, sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Haec propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inueniri non possent, ex præcedenti problemate K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 15. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, ut constat ex 1. theor. Et uicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ut *ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper e contrario, numeri extremi quotcunque minimorum, non continue proportionalium, inter se primi sunt, ut manifestum est in exemplo nuper adducto 6. 10. 13. 18.*

PROBL. 2. PROPOS. 4. 4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. Quare erit ut A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G, erit ut C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione, ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nempe B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem.

A, 6.	B, 5.	C, 4.	D, 3.
H, 4.	F, 24.	E, 20.	G, 15.
I ----	K ----	L ----	

Marginal notes: 36. septimi (at "Inuento numero E"); 9. pron. (at "tur per H"); 18. septimi (at "Quare erit ut A, ad B"); 21. septimi (at "mi sunt in sua proportione").

cedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur, me-
37. septimi tietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, me tiuntur, minorem maior. Quod est absurdum Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. Inuento
36. septimi rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primū; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico

A, 6. B, 5. C, 4 D; 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20 I, 15. K, 21.
L ---- M ---- N ---- O ----

H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cum enim A, & B, ipsos H, & G, æque metiantur; erit ut prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, ut C, ad D, ita G ad I: & ut E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest L, M, N, O.
21. septimi. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; ipsi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nempe B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N; nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M metian-
37. septimi tur; metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior Quod est absurdū. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

SED iam E, non metiatur ipsum I. Inuento ergo numero

mero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L, & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. 36. *septimi*

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O P Q R

Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æque metiantur; erit ut supra, quẽadmodum H, ad G, ita M, ad L; & ut G, ad I, ita L, ad K; Est autem eadem ratione, ut H, ad G, ita A, ad B; & ut G, ad I, ita C, ad D; quod & A, B, ipsos H, G; & C, D, ipsos G, I, metiantur æque. Igitur ut A, ad B, ita M, ad L; & ut C, ad D, ita L, ad K. Atqui ut E, ad F, ita quoque est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur: Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si nãque non sunt minimi; dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt, ipsi æque metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, uidelicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia uero ostensum est, esse ut G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, ut G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, metiente G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q, (quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nempe antecedens E, antecedentem Q.) Ergo metientibus I, E, ipsum Q; metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; proptereaque ipsi M, L, K, N, minimi sunt. 21. *septimi* 37. *septimi* 21. *septimi* 37. *septimi*

QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, ut

 nuper

nuper cum tertia proportione data: Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primũ M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F: Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si uero S, ipsum N, non metiatur; sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiat K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties uero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demõstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, uel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N. 105. O, 70.

36. septimi

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

SCHOLION.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nõ minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur; vt ex demonstratione manifestũ est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic nõn dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalium *libus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quae ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.*

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quaecunque C, D; posterioris uero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; uel ex proportionibus C, ad F; & D, ad E, ita ut latera unius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & B, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; erit A, ad G, ut C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, ut D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24.		B, 48.
	G, 18.	
C, 4.	D, 6.	E, 3. F, 16.

17. septimi

27. defin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, cõpositã esse ex ꝓportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; erit A, ad G, ut C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, ut D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex pro-

A, 24.		B, 48.
	G, 96.	
C, 4.	D, 6.	F, 16. E, 3.

17. septimi

27. defin. portionibus A, ad G,& G,ad B; Eadem ex proportionibus C,ad F, & D,ad E,componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

SINT continue proportionales A,B,C,D,E; & A,primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquã illorũ ullum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, uero ipsum B, non metiatur;

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
F,4. G,6. H,9.

neque B,ipsum C,neque C,ipsum D,neque D,ipsum E,metietur. Quod uero nec alius quisquam illorum ullum metiatur, sic demonstrabimus. Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A,ad B; erit ex æquo, ut A,ad C, ita F,ad H. Quia uero est ut A,ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; At propterea F,non non erit unitas, alias F, ipsum G, metiretur,cum unitas omnem numerum metiatur. Quare cum F,& H, sint inter se primi, & F, non sit unitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, ut F,ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se numerum D, nec C,tertium E,metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A,ad B, simili modo demõstrabimus, neque A, quartum D,neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

(margin: 2. octaui.; 3. octaui.)

SCHO-

SCHOLION.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam ullius multiplex erit.

Sint enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum ullius esse multiplicem. Quod enim nullus proxime insequẽtis multiplex sit, constat. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16. *Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non sit autem A, ipsius B, multiplex; neque B, ipsius C; neque C, ipsius D; neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum ullius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipsius E, non est multiplex: non metietur e contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum sit D, ad E, ut C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, ut D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; neque alius quisquam illorum ullum metietur.* 6. octaui *Quare e contrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum ullius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. docuimus.*

Sed & ex his sequens theorema demonstrabimus.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus uero secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur.
11. pron. *Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D; metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur; metietur quoque*
11. pron. *B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.*

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: sit autem A, ipsius E, multiplex; erit & E, ipsius C; & C, ipsius

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

D; & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex; metietur e contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metitur, vt demonstratum est; Ac propterea e contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, uel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus

A, mi

A, vel alius quisque nullum a secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quae secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentiũ. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam ullum a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius a secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secũdi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quae secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam ullius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primũ metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri; neque alius quisquam ullũ metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atque idcirco, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

6. huius

SCHOLION.

VT theorema, quod secũdo loco in scholio praecedẽtis ppos. demõstrauimus, conuertemus, amplificabimus hanc ppos. hoc modo.

SI

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, uel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

Qvod eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1. theoremate scholij præcedentis.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; sitque ut A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis ĩ ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, ut A, ad B, atque adeo ut E, ad F, ita G, ad K. Quare cũ G, & K, inter se primi sint, nempe extremi minimorum numerorum, ac propterea

A,24.	C,36.	D,54.	B,81
G,8.	H,12.	I,18.	K,27.
E,32.	L,48.	M,72.	F,108.
A,40.	C,20.	D,10.	B,5
G,8.	H,4.	I,2.	K,1.
E,8.	L,4.	M,2.	F,1.
A,27.	C,9.	D,3.	B,1.
G,27.	H 9.	I,3.	K, .
E,108	L,36.	M,12.	F,4.

3. octaui.

pterea in sua proportione minimi; æque metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita ut numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, singuli singulos. Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt, ex 9. pronunciato; in eisdem rationibus erunt E L, M, F, in quibus G, H, I, K, ut ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales sunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat. 23. & 21. *septimi*

SCHOLION.

NON *solum ex demonstratione cōstat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadē esse proportione, in qua G H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.*

EADEM *hæc propositio uera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si uel A, vel B, fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.*

CONSTAT *etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis vero inter numeros sola vnitate differentes; superbipartiens denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportiornalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis*

in-

inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, uel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui easdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam nec inter binarium & vnitatem, nec inter duos numeros sola vnitate differentes, ullus numerus interponitur, tantum abest, ut aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri A B, C D, binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quam A B, maior uero quam C D, vnitate quoque. Dico E F, non esse medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur esse A B, ad E F, ut E F, ad C D; ablato ex A B, numero A G, ipsi E F, æquali, ut reliqua sit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipsi C D, æquali, ut relinquatur etiam vnitas H F; erit quoque ut A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum, cum A G, E H, ipsis E F, C D, æquales sint, ex constructione.

A . . . . . . G . B
E . . . . . H . F
C . . . . . . D

11. septimi Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem: Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B, & C D.

Ex quibus fit, nec illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit; vt Diapason, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; nec illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu uulgo Secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit. Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo, 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde

Diapason

Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapente, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc vero in ſeſquitertia conſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inæquales. Ita quoque Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, ſecari ſolet. Sed de his plura in Muſicis.

RVRSVM ex his demonſtrari poteſt, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiuſdem, numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1 demonſtrauimus, quadratum diametri duplũ ſit quadrati ex latere deſcripti; quadratorum vero proportio ſit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam ſecet, ut oſtendimus; manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt, diametrum eſſe lateri incõmenſurabilem. qua de re plura ſcribemus in 9. & ultima propos. lib. 10.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrunque eorum, ac unitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos medij continue proportionales C, D. Dico, totidem cadere conti-

nue

nue proportionales inter unitatem,& A, nec non inter unitatem, & B, quot inter A,& B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt, erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, ut K, ipsi A; & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia uero, ut constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans uero ipsum G, fecit K; metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: Metitur autem & unitas ipsum E, per E. Aeque igitur metietur unitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. Per defin. ergo 20. proportionales sunt deinceps, unitas & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum sit, ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, se ipsum multiplicans producat I, multiplicans uero ipsum I, faciat N; metietur F, ipsum I, per F; & I, ipsum N, per eundem F: Metitur autem & unitas ipsum F, per F. Aeque igitur metietur unitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. Per definitionem igitur 20. proportionales sunt continue, unitas & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, una cum unitate æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij continue proportionales numeri inter unitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter unitatem, & numerũ N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.	
Vnitas.	
E, 2. F, 3.	2. octaui.
G, 4. H, 6. I, 9.	
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.	

Marginal notes: 1. octaui. — 7. pron. — 5. pron. — 7. pron. — 5. pron.

SCHO-

SCHOLION.

Perspicuum autem est, numeros, qui continua proportione cadunt inter numeros A, & B, ac unitatem, habere proportiones denominatas a minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad unitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. asseruimus.

Constat quoque ex demonstratione hac, si numerus se ipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum; & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab unitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab unitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipsorum, & unitatē deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

Cadant inter utrunque numerorum A, B, & unitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales; inter A, quidem & unitatem, numeri C, D, E. At vero inter B, & unitatē, numeri F, G, H, illis multitudine aequales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter utrunque A, B, & unitatem. Multiplicantes se mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idē C, multiplicans K, L, & H, faciat

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
Vnitas.

faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter utrunque A, B, & unitatem. Quoniam igitur est, ut unitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æque metietur unitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum

5. pron. A: Metitur autem unitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsū E, & E, ipsum A, per C, metietur.

A, 81.	M, 162.	N, 324.	O, 648.	B, 1296.	
	E, 27.	K, 54.	L, 108.	H, 216.	
		D, 9.	I, 18.	G, 36.	
			C, 3.	F, 6.	
			Vnitas.		

9. pron. Quare C, seipsū multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G; & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, &

17. septimi I; erit, ut C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicās C, & F, fecit I, & G, erit ut C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L, habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt

18. septimi L, & H, erit ut C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, N, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O; habebunt, ex ijs, quæ a nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cū

18. septimi C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, erit, ut C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, uel B, & unitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, uel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLION.

Ex his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri unitati propinquiores, quales sunt C, & F.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, secundum ab unitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, existentibus C, D, E, A, continue proportionalibus ab unitate D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quae tum ad ea, quae sequuntur, tum ad alia multa erunt utilia, hinc initium sumentes.

SI sint ab unitate duo ordines numerorum continue proportionaliũ, & multitudine aequalium; habebunt tertij ab unitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab unitate; quarti uero eiusdẽ triplicatã; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius. I. II.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab unitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H: Dico proportionẽ B, tertij ab unitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam inter utrunque numerorum B, F, & unitatem cadit medius unus proportionalis; inter B, quidem & unitatem, numerus A:

D, 81.	M, 108.	N, 144.	O, 192.	H, 256
C, 27.	K, 36.	L, 48.	G, 64.	
B, 9.	I, 12.	F, 16.		
A, 3.	E, 4.			
Vnitas				

At inter F, & unitatem numerus E; cadet quoque inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem mo- 10. octaui.

do cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter utrunque C, G, & unitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales.

D, 81. M, 108. N, 144 O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
Vni- . tas

Quoniã igitur ex defin. B, ad F, proportione habet duplicatam eius, quã habet B, ad I: Est autem ut B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est ut C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H; rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

Hoc idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II. Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti uero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius.

Sint ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, et ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab unitate, ut constat ex scholio propos. 9. huius lib.

Eademq;

Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab unitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est, rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate, est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q. Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, ut L, ad R, quod utraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R; sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdẽ rationis B, ad F. Nõ secus demõstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

E, 162. Vnitas. I, 512.
D, 54. H, 128.
C, 18. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri unius ordinis desinãt in unitatem, ut ex hac subiecta figura est manifestũ, in qua I, est unitas.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. G, 4.
B, 24 F, 8.
A, 16.
N, 575. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

CAETERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc *modum demonstratis efficiemus propositionem hanc* 10. *Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.*

III. SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT *inter utrunque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot ter E, & C, & inter H, & C. Sumptis n. tribus* K, *L, M, minimis in ratione D, ad* G; *erit ex defin ratio* K, *ad* M, *duplicata rationis* K, *ad L, hoc est D, ad G. Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est ut* K, *ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter* K, *& M, cadat vnus medius proportionalis L,*
8. *octaui.* *cadet quoque vnus medius, nempe N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, unus medius cadit. Similis modo ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt, si sumantur quatuor minimi numeri in ratione D, ad G. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.*

A, 162.	Q, 216.	R, 288.	S, 384.	B, 512.
F, 54.	O, 72.	P, 96.	I, 128.	
E, 18.	N, 24.	H, 32.		
D, 6.	G, 8.			
C, 2.				
K, 9.	L, 12.	M, 16.		

HOC *etiam uerum est, si loco alterius numeri, nempe B, unitas assumatur, veluti perspicuum est in hac subiecta figura;*

in

in qua numer⁹ B, unitas est, caduntque tā inter A, et C, quam inter B, & C, tres numeri

A, 1048576.	Q, 32768.	R, 1024.	S, 32.	B, 1.
F, 65536.	O, 2048.	P, 64.	I, 2.	
E, 4096.	N, 128.	H, 4.		
D, 256.	G, 8.			
C, 16.				
K, 1024.	L, 32.	M, 1.		

cōtinue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 11.

DVORVM quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatā habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, unum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes se mutuo C & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratū, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicans fecit E, ex constructione; erit ut C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione; & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; erit quoque, ut C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. At proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia uero, existentibus A, E, B, continue proportionalibus, numerus A, ad B, duplicatam rationē

A, 9	E, 21.	B, 49.
C, 3.	D, 7.	

17 septimi

17 septimi

.11

Oo 4 habet

habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandũ erat.

SCHOLION.

PERSPICVVM *est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.*

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A; Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

11. THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et

cubus

cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans C, seipsum faciat E, & D, seipsum multiplicãs faciat F; At C, & D,

A, 27.	H, 36.	I, 48.	B, 64.
E, 9.	G, 12.	F, 16.	
C, 3.	D, 4.		

se mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes uero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; erit, ut C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; erit quoque ut C, ad D, ita G, ad F; proptereaq; E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H; erit ut E, ad G, hoc est, ut C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicãs uero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; erit quoque, ut G, ad F, hoc est, ut C, ad D, ita I, ad B: Est autem & H, ad I, ut C, ad D; quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerunt ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam uero, existentibus A, H, I, B, continue proportionalibus, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus; cũ sit C, ad D, ut A, ad H. Quã ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

17. *septimi*

17. *septimi*

18 *septimi*

SCHOLION.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros

numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, ut C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo et ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C; atque adeo inter se compositi sunt. Similiter cum sit A, ad H, vt C, ad D; metitur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem. Metitur autem & latus D, cubum suum B; immo & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D; Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C; latus cubi prioris A; posteriorum vero triũ H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi B.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

12. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisq; seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT

SINT continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rursum multiplicantes ipsos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue esse proportionales. Multiplicantes A, & B, se mutuo faciant N; & B, C, se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat R, S. Simili

A,2. B,4. C,8.

D,4. N,8. E,16. O,32. F,64.

G,8. P,16. Q,32. H,64. R,128. S,256. I,512.

K,16. T,32. V,64. X,128. L,256. Y,512. Z,1024. ℞,2048. M,4096.

modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, ℞. Quoniam igitur A, multiplicans seipsum, & B, fecit D, & N; erit ut A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum, fecit N, & E; erit etiam, ut A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; erit ut B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit, ut B, ad C, ita O, ad F; proptereaque & E, O, F, continue proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione sint continue proportionales, in qua E, O, F, erit ex æquo D, ad E, ut E, ad F; atque adeo D, E, F, continue proportionales sunt. 17. septimi

DEINDE, quia A, multiplicãs D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc est in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; erit quoque, ut A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F; fecit H, R, S; erunt ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc est B, ad C, seu A, ad B. Et eodem modo, cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita S, ad I; proptereaq; 17. septimi 18. septimi

& H,

& H, R, S, I, proportionales sunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, ut H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue sunt proportionales.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. R, 2048. M, 4096.

NON dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, esse continue proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

SVNT autem, ut ex demonstratione liquet, numeri primo producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri secundo geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio procreati, in quadruplicata, & sic deinceps semper uno amplius.

BREVIVS propositionem totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F; & in hos ex eisdem numeri G, H, I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, esse quoque continue proportionales. Nam

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. E, 16. F, 64.
G, 8. H, 64. I, 512.
K, 16. L, 256. M, 4096.

ex scholio propos. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue sunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theoremate scholii propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiusdem rationis B, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad

A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G, H, I esse proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

Ex qua rursum demonstratione apparet, numeros primum productos esse in duplicata ratione datorum numerorum; secundo vero procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius elicitur ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib.

Qvamvis autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eandem tamen propositionem demõstrabimus, etiã si plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quã tres A, B, C, D, continue proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciãt E, F, G, H; postea vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps.

A, 2.	B, 4.	C, 8.	D, 16.
E, 4.	F, 16.	G, 64.	H, 256.
I, 8.	K, 64.	L, 512.	M, 4096.

Quoniam igitur E, F, G, ex demonstratis, proportionales sunt in ratione A, ad B: Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc est, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in se ipsos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in se ipsos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodẽ modo producti.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 13.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Metiatvr quadratus A, cuius latus C, quadratũ B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, ut vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; metietur quoque A, primus secundũ E. Quare cum sit ut A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

7. octaui.

A, 4.	E, 12.	B, 36.
	C, 2.	D, 6.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, ut C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerũ metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

14.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, ut A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8.	H, 24.	I, 72.	B, 216.
E, 4.	G, 12.	F, 36.	
	C, 2.	D, 6.	

7. octaui

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri

metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, ut C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter metiente C, latere latus D, metietur & A, ipsum H; ac idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neq; latus unius metietur alterius latus. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius: neq; quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metietur latus D. 14. octaui

A, 16.	B, 81.
C, 4.	D, 9.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; metietur quoque C, latus illius D, latus huius. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum. 14. octaui

THEOR.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

15. octaui.

A,8.	B,27.
C,2.	D,3.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

15. octaui.

SCHOLION.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et si unius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si uero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus

dratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex.

Nam si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit. 14. & 15. octaui.

Quod si latus C, lateris D, multiplex sit; metietur latus D, latus C. Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur; Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex. 14. & 15. octaui.

A, 36.	B, 9.
C, 6.	D, 3.
A, 64.	B, 8.
C, 4.	D, 2.

At vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex; nō metietur B, ipsum A, quadratus quadratū, aut cubus cubū. Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex. 16. & 17. octaui.

A, 49.	B, 9.
C, 7.	D, 3.
A, 125.	B, 8.
C, 5.	D, 2.

Similiter si C, latus lateris D, non sit multiplex; non metietur D, latus latus C. Igitur nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit. 16 & 17. octaui.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 16.

DVORVM similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius uero illis proportionalia E, F, ita ut C, D, se mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B; sitque ut C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere unum numerum medium proportionalem, &

proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterũ homologorum C, F, uel D, F. Multiplicantes se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, ut E, ad F; erit permutando C, ad E, ut D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; erit A, ad G, ut C, ad E, hoc est, ut D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit quoque G, ad B, ut D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, uel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12.	G, 18.	B, 27.
C, 6. D, 2.		E, 9. F, 3.

17. septimi

Qvia uero, existentibus A, G, B, continue proportionalibus, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, uel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C. ad E, uel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Qvia ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, uel D, F, assumptorum.

Constat *etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, ut C, ad E, uel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, uel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, ut C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, ut C, ad E, uel D, ad F: metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Qui-*

re cum & E, F, latera suum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem mensuram tam E, quam F, ideoque erunt inter se compositi.

Ex qua demonstratione etiā manifestum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E, F, latera plani posterioris B.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

DVORVM similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT solidi numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, E, huius uero illis proportionalia F, G, H, ita ut sit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, sicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, esse triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, uel D, G, uel E, H. Multiplicantes se mutuo C, D, faciant I; & F, G, se mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, se mutuo multiplicantes faciant L. Postremo E, H, ipsum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipsis F, G, H, proportionales sunt; erunt & permutando proportionales, nimirum ut C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam uero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; erit ut C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; erit quoque ut D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H. Et quoniam A, solidus factus est ex mutua multiplicatione la- 17. septimi

A, 30.	M, 60.	N, 120.	B, 240.
	I, 6.	L, 12.	K, 24.
C, 2. D, 3 E, 5.			F, 4. G, 6. H, 10.

terum C, D, E; factus est autem I, ex multiplicatione mutua C, D; sit ut E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; nunc tus H, ipsum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M; erit A, ad M, ut I, ad L, hoc est, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H.

A, 30.	M, 60.	N, 120.	B, 240
I, 6.	L, 12.	K, 24.	
C, 2. D, 3. E, 5.	F, 4. G, 6. H, 10.		

17 septimi

Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; erit N, ad B, ut L, ad K, hoc est, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad N. Est autem & M, ad N, ut E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

18. septimi

QVONIAM uero, existentibus A, M, N, B, proportionalibus continue, proportio A, ad B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, uel E, ad H; liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, assumptorum.

EX iis, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M, N, & utrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, uel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera suum solidum B, conse-

quentes

quentes consequentem; si de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem; quod sit N, ad B, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur; (cum enim M, factus sit, per constructionem, ex F, in L; metietur F, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt ipsis I, L, K; metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M. Metiuntur autem & C, D, latera planum suum I. Igitur & C, D, ex 5 pronunciato 11. metientur ipsum M. Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nempe latera suum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram tam C, quam D, quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A, ad M, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipsum M, consequentes cõsequentem. Metiuntur uero & F, G, H, ipsum N, (cum enim N, factus sit ex H, in L, per constructionem; metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F, G, ipsum N; atque adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Nec non & ipsum B, nimirum latera suum solidum. Igitur M, N, B, communem habent mensuram tam E, quam G, quam H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A; At vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum trium numerorũ M, N, B.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

SI inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ra

tione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A,
21. septimi ad C; metientur D, & F, ipsos A, & C, æque: metiantur per
F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G.

Itaque F, multiplicans D, & E,
9. pron. A, 18. C, 24. B, 32. faciet A, & C: Item G, eosdem
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8. D, & E, multiplicans facit C, &
B. Quia ergo E, multiplicans F,
17. septimi & G, fecit C, & B; erit, ut C, ad B, ita F, ad G; Vt autem C,
ad B, ita erat D, ad E: Igitur erit ut D, ad E, ita F, ad G; & permutando ut D, ad F, ita E, ad G. Quoniam uero F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, nempe D, ad F, ut E, ad G; erunt ex defin. A, B plani similes. Quare si inter duos numeros unus, &c. Quod demonstrandum erat.

19. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter
20. octaui E, & G, medius cadit proportionalis F; erunt E, & G, plani similes. sint ipsius E, latera H, I; ipsius uero G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, minimi in ratione A, C, D, existentes, æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cũ illis; metiantur per M. Eodemque modo, quia E, F, G, æque metiuntur C, D, B, eandem habentes

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

21. septimi

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

habentes rationem cum illis; metiantur per N; ita ut M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia uero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, ut ostendimus; erit C, ad D, ut M, ad N: Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F, quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem quam H, K, uel I, L; Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll propos 19. huius lib in ratione laterum homologorum H, K, uel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L ut M, ad N; & permutando H, ad I, ut K, ad L; & I, ad M, ut L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rem, si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum. 9. pron. 18. septimi 17. septimi

SCHOLION.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet improprie, ut in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem a numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generaliter proponat, demonstretque sine vlla exceptione.

THEOR. 21. PROPOS. 22. 20.

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

20. octaui

A, 9. B, 24. C, 64.

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medii proportionales B, C; erit A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

21. octaui

SCHOLION.

HAEC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio praecedentium duarum propositionũ; quam qui diligenter examinare velit, inueniet sane mancam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quaedam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, ut duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4, & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoque æqualia, atque adeo esse quadratum; quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, nempe & inter se æqualia? Idem dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad unitatem; atque adeo cum inter

A, 36.	B, 48.	C, 64.
D, 6.	E, 8.	
Vnitas.		

numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nempe unus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, nimirum unus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri sunt continue proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum

sum C, aeque, ex iis, quae ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; cadet inter A, et D, quadratos medius unus proportionalis, ut G. Quia vero est, ex aequo, ut A, ad C, ita D, ad F; & permutando, ut A, ad D, ita C, ad F; cadet quoque inter C, & F, unus proportionalis medius, nempe H. Cum ergo F, primus metiatur C, ultimum; metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, ita ut H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. Itaque quia ratio L, ad F; quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I; lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quod convertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, ut C, ad F; Ac proinde I, & C, aequales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

	A,36.	B,48.	C,64.
	G,18.		H,32.
11. octaui.	D,9.	E,12.	F,16.
	L,64.	K,8.	I,4.

8. octaui. 7. octaui. 11. octaui. 20. octaui.

ALITER. Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C, ita ut sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se; erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, ut D, ad E, cadatque inter D, & F, medius proportionalis H; cadet quoque inter F, & G, unus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione.

	A,36.	B,48.	C,64.	
	H,6.		I,8.	
20. septimi	D,3.	E,12.	F,4.	G,16.

	A,36.	B,48.	C,64.	
	H,6.		I,8.	
8. octaui	D,6.	E,6.	F,8.	G,8.

20. septimi

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum

sum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. F, F, A; continuè proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas.

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.
	F, 16.		H, 100.
	E, 4.	G, 10.	
	Vni. tas.		

Itaque cum inter numerum D, & vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue sunt proportionales; fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. à nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D; metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, æque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demõstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorũ, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem & A, cubus, ex hypothesi; cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K.

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.
K, 32.			M, 500.
I, 16.			L, 250.
E, 8.	F, 20.	G, 50.	H, 125.
	P, 1000.	O, 10.	N, 5.

Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L; ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: fit quoque P, cubus ipsius O. Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, ut D, ad H; Ac proptereà P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus

12. octaui

8. octaui

7. octaui

12. octaui

cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

SIT A, ad B, ut C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus, Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D; cadat autem

11. octaui inter C, & D, quadratos unus medius proportionalis, nempe E;

8. octaui cadet quoque inter A, & B, medius unus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit

22. octaui & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

A, 36.	F, 48.	B, 64.
C, 9.	E, 12.	D, 16.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportio-

24. octaui nis exhibitæ, etiam quadrati, cũ primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente

24. octaui quadrato, esset & 8. quadratus; Igitur & 16. & 32. &c. quod est absurdum.

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum,

merum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

SIT A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum: sitque A, cubus. Dico & B cubum esse. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D; cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, nimirum E, F; 12. octaui

A,8.	G,12.	H,18.	B,27.
C,64.	E,96.	F,144.	D,216.

cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt cōtinuè proportionales, & A, primus est cubus; erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat. 8. octaui 23. octaui

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiuslibet numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cùm primus ponatur cubus: Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus. 25. octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratū. Cum enim A, & B, sint plani similes cadet inter eos unus medius proportionalis, uidelicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi 18. octaui

A,20.	C,30.	B,45.
D,4.	E,6.	F,9.

tremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, ut D. ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, ut est quadratus aliquis, nempe D, ad quadratum alium, ut ad F. Ergo similes plani numeri rationẽ inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

A,20.	C,30.	B,45.
D,4.	E,6.	F,9.

SCHOLION.

FACILE etiam demonstrabimus conuersam huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quã quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. Quoniam inter quadratos C, D, cadit vnus medius 11. octaui *proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita A, ad B; cadet quoque medius proportio*8. octaui*nalis inter A, & B. Quare A, & B,* 20. octaui *plani similes sunt.*

A,8.	B,18.
C,16.	D,36.

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratũ. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, ut A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. 19. octaui Quia A, B, sunt solidi similes, cadent inter eos duo medii

propor-

proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H, constat ita esse A, ad B, ut est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, nempe ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLION.

CONVERSVM *huius etiam demonstrabimus; scilicet.*

NVMERI, qui proportionem habent, quā cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI *A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D; cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; cadent quoque inter A, B, duo medij. Sunt ergo A, & B, solidi similes.* 12. octaui 8. octaui 21. octaui

A, 16.	*B, 54.*
C, 64.	*D, 216*

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, uel sesquialteram, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri nō posse iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadē ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales; Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, ut in scholio prædicto traditum est; inter quos certum est non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales. 18. octaui 8. octaui

SIMILITER *nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus,*

mus, latera habet solummodo vnitatem, & seipsum, quamuis impropriè. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quiuis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantum habet duas unitates, & se ipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horũ multiplicatione producantur. Perspicuum autem est ea non posse esse proportionalia.

VNDE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel sesquialteram, uel superbipartientem, vel certe duo numeri primi, erunt illi ipsi per ea, quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter vero non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, haberent pro-
26. octaui portionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur
24. octaui 16 quadrato, esset & 20. quadratus. quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. 40. Si
27. octaui enim essent solidi similes, haberent proportionem, quam cubus
25. octaui ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit, esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM IX.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVo numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter D, & C, unus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, ut sint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

I. | 17. septimi | 18. octavi | 8. octavi | II | 22. octavi

A,6. B,54.
D,36. E,108. C,324.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

Dvo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratū.

A,6. B,54.
17. septimi D,36. C,324.

Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter D, & C, quadratos
11. octaui unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter A, & B,
8. octaui. unus medius proportionalis cadet; Ac propterea A, & B,
20. octaui similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Ex his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I. **Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.**

A,4. *B*,25.
C, 100.

Dvo quadrati A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nempe quadrati; erit C, ex eis productus, quadratus.
8. noni.

II. **Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.**

D v o *numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus.*

A,9. D,12. B,16.
C,144.

Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; erunt
2. noni. *A, & B, similes plani: atque adeo inter eos unus medius ca-*
18. octaui *det proportionalis, nempe* D. *Quare A, existente quadrato,*
22. octaui *erit & B, quadratus.*

III. **Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant**

ciant non quadratum; alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Dvo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; sitque A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20.
C, 80.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit. IIII.

Dvo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20.
C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI cubus numerus seipsum multiplicãs procreet aliquem; Productus cubus erit.

Faciat cubus A, se ipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D; metietur C, ipsum D, per C: Metitur autem & unitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est unitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nempe denominata a C; Ac 7. pron. 5. pron.

A, 8.
E, 16., D, 4.
F, 32. C, 2.
B, 64. Vnitas.

20. defin. proinde ut unitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multi-
7. pron. plicans D, fecit A; metietur D, ipsum A, per C: Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ
20. defin. D, ipsius A; ideoque ut C, ad D, ita D, ad A: sed ut C, ad D, ita erat unitas ad C. Igitur ut unitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atq; adeo inter unitatem & numerum A, duo medij proportiona-
7. pron. les cadunt numeri C, D. At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A, se ipsum multiplicans fecerit B; metitur uero & uni-
5. pron. tas ipsum A, per A: Eadem erit pars unitas ipsius A, quæ
20. defin. A, ipsius B; Ac propterea erit ut unitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter unitatem & numerũ A, cadant duo me-
8. octaui dij proportionales C, & D; cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales; & A, primus sit cubus; erit
23. octaui. quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8.	
E, 16.	D, 4.
F, 32.	C, 2.
B, 64.	Vni-. tas.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; eritq;
3. noni. D, cubus. Quoniam uero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut
17. septimi A, ad B, ita D ad C. At inter A, & B,
12. octaui. cubos duo medij proportionales ca-
8. octaui dunt. Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales
23. octaui cadent; Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quo circa si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C; At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. Totidem igitur & inter A, & B, cadent; Ac proinde existente A. cubo, & B, cubus erit. Quamobrẽ si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat. 3. noni. 17. septimi. 12. octaui. 8. octaui. 23. octaui

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

SCHOLION.

Ex his & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I. SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico *C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; & multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.* 5. noni.

A, 8.	B, 20.
	C, 160.

II. SI cubus numerus numerum quendã multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, nnumerum B, non cubus C. Dico *& B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus; & factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim.* 4. noni.

A, 8.	B, 17.
	C, 136.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus se ipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS se ipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, ut perspicuum est ex iis, quæ ad definitionem cubi scripsimus.

A, 8. B, 64. C, 512.

5. noni. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.

A, 8. B, 64. C, 512.

12. octaui
17. septimi *Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit; cadent*
8. octaui *quoque inter A, & B, duo medij proportionales; Atque adeo*
23. octaui *existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio breuior est, & planior, ut perspicuum est.*

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim

A, sit

A, sit compositus, metietur eum, præter unitatem, numerus aliquis: metiatur D. ipsum A per E. Quo posito; multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C, procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum. 13 defin. 9. pron.

A,6. B,11. C,66.
D,2. E,3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus uero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertiũ quidẽ B, ab vnitate esse quadratum, & unũ intermittentes

Vnitas. A,3 B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. K,59049, L,177147. M,531441.

omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum uero F, cubũ simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam est unitas ad A, ut A, ad B, æque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum B; Metitur autem unitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B, 5. pron. 9. pron.

quadratus est. Quia uero tres deinceps proportionales sunt
22. octaui B, C, D; & est B, quadratus; erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, sit quadratus, & F, quadratus erit; Nec non & omnes unum intermittentes.

RVRSVS quia est unitas ad A, ut B, ad C; æque metietur unitas numerum A, & numerus B, numerum C: Me

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

5. pron. titur autem unitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C,
9. pron. per A, metietur; atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, se ipsum multiplicās faciat B, multiplicans uero B, faciat C, ut est ostensum; erit C, cubus. Quia uero quatuor deinceps proportionales
23. octaui sunt C, D, E, F, & est C, cubus; erit & F, cubus. Eodem argumento assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cum F, sit cubus; & I, cubus erit; atque omnes semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab unitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

HOC theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunque numeri ab unitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, undecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autē, qui sequuntur proxime numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimus sextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes uero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimo octauo, uigesimo quarto, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, uigesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes semper unum intermittunt post tertium ab unitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab unitate. Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post vnitatem sit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus unitati quadratus.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab unitate, & omnes unum intermittẽtes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, iam demonstratũ est. Quod 8. noni.

uero

8. noni. uero & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuũ fiet. Cum tres continue proportionales sint A, B, C; sitque

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

22. octaui A. quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, sit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales.

SIT iam A, proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

8. noni. intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, iam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit unitas ad A; ut A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur, 5. pron. & A, ipsum B, per seipsum metietur; Atque adeo cubus A, se ipsum multiplicans numerum B, procreabit. Quare B, cu- 9. pron. bus est. Quoniam uero quatuor continue proportionales 3. noni. sunt A, B, C, D, estque A, cubus; & D, cubus erit. Eademq; 23. octaui ratione assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E. cum B, cubus sit, & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post unitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua uero parte est quadratus, ea ratione & reliqui

reliqui omnes quadrati erunt, ut demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatẽ, non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatẽ, non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I; & primum A, proximus unitati non sit quadratus. Dico nec alium ullum esse quadratum, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, nempe præter B, D, F, H. Si enim præter hos alius

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

est quadratus, sit quadratus E. Cum ergo & D, sit quadratus, sitque ut D, ad E, uel E, ad F, ita A, ad B; & conuertendo ut E, ad D, uel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, uel quadratus F, ad quadratum E: sed B, tertius ab unitate est quadratus. Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus nullum alium, præter dictos, quadratum esse. 8. noni. 8. noni. 24. octaui

SED iam A, proximus unitati non sit cubus. Dico nec alium ullum esse cubum, præter quartũ ab unitate, & duos intermittentes omnes, uidelicet præter C, F, I. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo ut D, ad F, ita A, ad C, (quod tres 8. noni.

D, E,

D, E, F, eandem habeant rationem; quam tres A, B, C,) & conuertendo ut F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, ratio-
8. noni. nem, quam cubus F, ad cubum D: Sed C, est cubus, nempe

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

25. octaui quartus ab unitate. Igitur & A, primus ab unitate cubus erit. quod est contra hypothesini. Non igitur D, cubus est.
8. noni. Quod si E, credatur esse cubus; cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, ut C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo ut cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo, erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est.
25 octaui Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque ullos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab unitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Non est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab unitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab unitate cubo simul, & quadrato.

Sit enim primum A, qui post unitatem, cubus quidem, non autem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem,

Vnitas. A, 8. B, 64.

9. noni. *quod primo existente cubo, omnes cubi sunt; quadratum uero,*
8. noni. *quod tertius sit ab unitate.*

Sit deinde A, post unitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul & quadratum; Cu-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

8. noni. *bum quidem, quod quartus sit ab unitate; quadratum uero,*
9. noni. *quod primo existente quadrato, omnes sunt quadrati.*

Sit postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus.

dratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratũ, præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

enim primo non existente quadrato, nullus alius quadratus sit, præter tertium ab unitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, undecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo 10. noni.
autem non existente cubo, nullus alius sit cubus præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, ut ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hæc loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, ut liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit. 10. noni.

THEOR. 11. PROPOS. 11. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorẽ, ut

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

C, quemlibet maiorem, ut G, metiri per aliquem numerorũ A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo ut C, ad G, ita unitas ad D; (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem cum unitate & numeris A, B, C, D,) æque metietur unitas numerum D, atque numerus C, nu- 20. defi.
merum

5. pron. merum G: Sed unitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit ut E, ad F, ita unitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cum sit ex æquo ut A, ad G, ita unitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

PERSPICVVM *autem est ex his, quantum abest maior numerus a minore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, ut ex demonstratio-*

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

ne apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nempe per se ipsum, &c.

HINC *rursus efficitur, quemlibet numerum, qui se ipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab unitate. Si vero minor aliquis maiorem quempiã multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab vnitate; propterea quod si numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, producatur ille, quem metitur.* 9. pron. *Ergo C, se ipsum multiplicans gignet F, cum F, tantum absit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.*

11.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque pri-

morum

morum numerorum ultimum metiuntur, ijdem & eum, qui unitati proximus est, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A. Si namque non metitur ipsum A; erit E, cum primus sit, ad A, primus. 31. *septimi*

Metiat̃ autem E, ipsum D, per	Vnitas.	A,10.	B,100.	C,1000.	D,10000.
		E,5.	H,20.	G,200.	F,2000.

F, atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia uero & A, ipsum D, metitur per C, ac proinde A, multiplicans C, facit D, ut in scholio praecedentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. Quare erit ut A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; metietur aeque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia uero & A, ex scholio eodem, metitur C, per B, atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. Erit igitur ut A, primus ad E, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cũ A, & E; sint inter se primi; metietur aeque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B, per H, ita ut E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, ac idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, ut ex eodem scholio apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex A, medio in se, & ex E, primo in H, tertium. Quare erit ut E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium; atque adeo, cũ E, & A, inter se primi sint, aeque metietur E, ipsũ A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum

Marginal references (right margin, top to bottom): 9. *pron.* — 19. *septimi* — 21. *septimi* — 9. *pron.* — 19. *septimi* — 21. *septimi* — 9. *pron.* — 20. *septimi* — 21. *septimi* sum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri. Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus, quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes, metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, uel B, ultimus numerus statuatur. Si igitur ab unitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

ALITER. Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico, & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; erit
31. *septimi* E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, se ipsũ multiplicans facit B, ut apparet ex scholio propos. præceden-

Vnitas. A, 6. B, 36 C, 216. D, 1296.
E, 3.

27. *septimi* tis; erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt, fit autem C, ex A, in B, per idem scholion; erit C, ad
26. *septimi* E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt, & fit D, ex A, in C, per idem scholiõ; erit D, ad
26. *septimi* E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est cõtra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A.

SCHOLION.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod uidetur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium uideatur afferre. Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturque se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse; Quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius uim huius demonstrationis expẽdisset, vel certe, si expendit, eam in memoriam reuocasset; quãdoquidem ipso longe prior Euclides vsus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum.

CAETERVM *ex demonstratis perspicuum est, quemcunque* *cumque numerũ primũ, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes, quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris; manifestum est, quod & ille omnes metiatur.* 12.noni 11 noni

THEOR. 13. PROPOS. 13. 13.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit; Maximũ nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab unitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum ergo est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; metietur quoque ipsum A, unitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quàm A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; metietur quoque ille alius primus eundem D, atque adeo & ipsum A, primum existentem, nimirum unitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; & uicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nempe is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per 12.noni 33.septimi 11.pron. 12.noni 8.pron.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E — H — G — F —

11. noni per E. Cum ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesim. ponitur enim E, nõ idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniam uero E, metitur D, per

8. pron. Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E --- H --- G --- F ---

F; metietur uicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus. si enim sit primus, & metiatur D, ultimum; 12. noni metietur, & A, proximum unitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; 33. septimi atque adeo eum aliquis numerus primus metietur, quem rursus dico nullum alium esse posse praeter primum A. Si namque alius primus quam A, metiatur F; cum F, metia- 11. pron. tur D, extremum; metietur quoque ille alius primus eun- 12. noni dem D, atque adeo & ipsum A, proximum unitati, qui primus est: quod est absurdum. Ergo non alius primus quã A, ipsum F, metitur. Iam uero quoniam E, metitur D, per 9. pron. F; fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, ut in scholio propos. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, ter- 19. septimi tium; Ac proinde erit ut A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Metitur autem A, ipsum E, ut ostensum est: Ergo & F, ipsum C, metietur: Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, ultimum, (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter G, diuersum esse ab A, B, & non primum, sed compositum, quem solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, ultimum.

Si enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B; metieturq; F, ipsum C, per G; metietur utique F, ipsum C, per 8. pron. aliquẽ ipsorum A, B; & uicissim aliquis ipsorum A, B (nempe is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. Cũ 11. noni ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorũ A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B. quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, qui aliquis ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui aliquis ipso-

rum

rum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; metietur uicissim G, ipsum C, per F. Non erit autē G, primus. Si enim primus sit, metiaturque ultimum C; metietur quoque numerum primum A, unitati proximū. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur. quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quā A, metiatur G; cum G, metiatur C, ultimum; metietur quoque ille alius primus eundem C; atque adeo & ipsum A, unitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metitur. Iam uero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. Quare erit ut A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, ut demonstratum est: Igitur & G, ipsum B, metietur: metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, ultimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; ostendemus similiter H, diuersum esse ab A; quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G. Nam si H, idem sit qui A, metiaturque G, ipsum B, per H; metietur utique G, ipsum B, per A; Et uicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, ut constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem qui A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus Iam uero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, ut in scholio dicto docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiū, & ex A, medio in se ipsum. Quare erit ut H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium. At A, metitur ipsum G, ut est demonstratum: Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare existente A, primo, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C: Ac proinde si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

8. pron.
12. noni
33. septimi
11. pron.
12. noni
9. pron.
19. septimi
8. pron.
9. pron.
20. septimi

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim, si fieri potest, primus numerus E, diuersus a B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per

A............................

B.. C... D.....

E.... F.....

9. pron. F; multiplicans E, ipsum F, faciet A. Quare singuli B, C,
32. septimi D, alterum ipsorum E, F, metientur; non quidem ipsum E, primum existentem, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

15. SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, compositus erit ad alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primum H, primum eorum, nempe A. Dico H, compositum esse vel ad F, vel ad G. Sumantur enim in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & sic deinceps, donec habeantur tot vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E. — 2. octaui

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H —— F, 2. G, 3.

Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. A, fit ex F, in M; metitur autem H, ipsum A; erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum; si uero ad M, qui quidem fit ex F, in I, ut constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio dicto, rursus H, compositus uel ad F, vel ad I. si ad F, habetur propositũ; si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum; erit H, compositus ad F, ex dicto scholio.

DEINDE metiatur H, secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit ut prius H, compositus vel ad F, uel ad N. si ad F, habetur propositum; si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K; erit H, eodem modo compositus vel ad F, uel ad K. si ad F, habetur propositum; si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G; erit quoque H, compositus uel ad F, vel ad G.

RVRSVS metiatur H, tertium C, qui cum fiat ex F, in O; erit H, compositus uel ad F, uel ad O. Si ad F, habetur propositum; si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compositus vel ad F, vel ad L. si ad F; habetur propositum; si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se; compositus quoque erit H, ad G.

PRAETEREA metiatur H, quartum D, qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, uel ad P. si ad F, habetur propositum; si uero ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus uel ad G, uel ad L. si ad G, habetur propositum; si uero ad L, cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus.

EODEM modo si H, metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

Itaque si H, metitur primum A; erit H, compositus ad F: Si vero secundum B, metitur; erit compositus vel ad F, vel ad G: Si denique metitur tertium C, vel quartũ D, vel quẽcunque alium insequentem; compositus erit H, ad G. Id quod perspicue ex demonstratione apparet.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM *in theoremate sequente demõstrando theoremata quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, tanquam si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse a nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.*

I. SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris, æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT *duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex G H, H I, I K, composito. Quoniam C, multiplicans A B, fecit F;*

A . . . D . . E . B . C . .
F . . . .
G . . . . . H . . . . I . . K

7. pron. *metietur A B, ipsum F, per C; hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata a C. Eadem ratione A D, ipsius G H; nec non*

DE,

D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit a C, denominata, nempe eadem quæ A B, ipsius F. Quia uero, per ea quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K: Quod est propositum. 4. pron.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur. II. IIII.

NVMERVS A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quam in duas secetur; ut ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nempe quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

E . . . .

A . . . C . . D . . B

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, & quadrato, qui a prædicta parte efficitur. III.

SIT numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem esse & ei, qui sub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C.

Sumpto enim numero D, qui dicta parti A C, aequalis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex A C, in A B; vel (quod idem est) ex A B, in A C, aequalis numeris factis ex D, hoc est, ex A C, in C B, & ex D, hoc est, ex A C, in A C, quadrato scilicet ipsius A C. Quod est propositum.

D

A C B

IIII. Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus aequalis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum quadratum ex A B, factum aequalem esse quadratis partium A C, C B, vna cum numero, qui fit bis ex parte A C, in partem C B. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius A B, aequalis est numeris, qui fiunt ex A B, in A C, & in C B. Est autem numerus, qui fit ex A B, in A C, per 3. theorema, aequalis numero genito ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius A C: Item numerus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo aequalis numero producto ex A C, in C B, vna cum quadrato ipsius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus aequalis est quoque numeris quadratis partium A C, C B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod est propositum.

A C B

V. Si numerus secetur in duas partes aequales, & non aequales: Numerus planus sub partibus inaequalibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, aequalis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus A B, secetur in partes aequales A C, C B; & non aequales A D, D B. Dico numerũ sub partibus inaequalibus A D, D B, contentum, una cum quadrato numeri inter-

medij

medij C D, esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius C B, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, vna cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B; numero vero comprehenso sub C D, D B, vna cum quadrato ipsius D B æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; erit numerus quadratus ipsius C B, æqualis etiam reliquo quadrato ipsius CD, vna cum reliquo numero facto ex C D, in D B, & numero ex C B, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis est numerus, qui fit ex A D, in D B. Igitur quadratus ipsius C B, æqualis erit quadrato ipsius CD, una cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc est, numerus factus ex A D, in D B, vna cum quadrato ipsius C D, æqualis est quadrato ipsius CB. Quod est propositũ.

A . . . . . C . . D . . B

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur; Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, una cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS A B, secetur in partes æquales A C, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, in adiectum BD, una cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem esse quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam vno. Cum enim quadratus ipsius C D, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C B, BD, vna cum numero bis comprehenso sub CB, B D, hoc est, una cum numeris sub C B, B D, & sub A C, BD, comprehensis; numeris autem contentis sub C B, BD, & sub A C, B D, & sub B D, B D, hoc est, quadrato ipsius B D, æqualis sit, ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; erit quadratus ipsius C D, æqualis reliquo quadrato ipsius C B, una cum numero facto ex A D, in B D; hoc est, numerus factus ex

A . . . C . . B . . D

ex A D, *in* B D, *una cum quadrato ipsius* C B; *æqualis est quadrato ipsius* C D. *Quod est propositum.*

VII. SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR *numerus* A B, *in partes* A C, C B. *Dico quadratum totius* A B, *vna cum quadrato partis* C B, *æqualem esse numero bis, qui fit ex toto* A B, *in dictam partem* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C.

A . . . . . . C . . . B

Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius A B, *æqualis sit quadratis partium* A C, C B, *una cum numero, qui fit bis ex* A C, *in* C B; *si quadratus ipsius* C B, *addatur communis; erunt quadrati numerorum* A B, C B *simul, æquales quadratis numerorum* A C, C B, C B, *vnà cum numero qui fit bis ex* A C, *in* C B. *Atqui ei, qui fit ex* A C, *in* C B, *unà cum quadrato ipsius* C B, *æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex* A B, *in* C B; *Ac proinde ei, qui fit bis ex* A C, *in* C B, *vna cum quadrato ipsius* C B, *bis, æqualis est, qui fit bis ex* A B *in* C B. *Igitur quadrati numerorum* A B, C B, *simul, æquales sunt numero, qui fit bis ex* A B, *in* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C. *Quod est propositum.*

VIII. SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR *numerus* A B, *in partes* A C, C B. *Dico numerum, qui fit quater ex toto* A B, *in partem* C B, *vna cum quadrato reliquæ partis* A C, *æqualem esse quadrato numeri, qui ex toto* A B, *& prædicta parte* C B, *cōponitur. Addito enim numero* B D, *qui æqualis sit di-*

A . . . C . . . B . . . D

Cta

tae parti C B; cum quadratus totius A D, compositi ex A B, & B D, sine dicta parte C B, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vna cum numero qui fit bis ex A B, in B D, hoc est, quadratis numerorum A B, C B, vna cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum A B, C B, simul æquales numero bis comprehenso sub A B, C B, vna cum quadrato numeri A C; Erit quadratus factus ex A D, æqualis numero, qui fit quater ex A B, in C B, vna cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur. IX.

Divisus sit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos esse quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio efficiuntur. Cum enim A . . . C . . D . . B quadratus numeri A D, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex C B, in C D. Atqui quadrato ipsius D B, vna cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales sunt, ex 7. theorem. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc est, ex A C, & C D. Igitur quadrati partium A D, D B, æquales sunt quadratis partium A C, C D, bis; Ac propterea quadrati partium A D, D B, dupli sunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod est propositum.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli X.

pli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio, & adiecto.

Sit numerus A B, diuisus in partes duas æquales A C, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compositi ex toto A B, & adiecto B D, & quadratum adiecti numeri B D, vtrosque simul, duplos esse quadratorum, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex

A....C....B..D

CD, composito ex C B, dimidio, & adiecto B D. Cum enim quadratus ipsius A D, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex CB, in C D; si communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, una cum numero bis, qui fit ex C B, in CD. Sed per 7. theorema, quadrato ipsius B D, una cum numero bis, qui fit ex C B, in CD, æquales sunt quadrati numerorũ C B, C D; & quadrato ipsius C B, æqualis est quadratus ipsius A C. Igitur quadrati numerorum A D, B D, æquales sunt quadratis numerorum A C, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, BD, dupli sunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod est propositum.

Iam vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

Diuidatur, si fieri potest, numerus A B, in C, ita vt numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contentus sub extremis A B, CB, æqualis est quadrato numeri medij A C,

20. septimi *erit vt A B, ad A C, ita AC, ad CB: Est autem A B, maior quam A C. Igitur & A C, maior est quam C B. Ablato igitur CD, qui ipsi CB, sit æqualis, erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad CD. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, est vt A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum;*

11. septimi *erit quoque vt totus AB, ad totum A C, vel vt detractus A C,*

ad detractum C D, ita C B, ex A B, residuus, hoc est, C D, illi æqualis, ad A D, ex A C, residuum. Quia igitur est vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & est A C, maior quam C D; erit quoque C D, maior quam A D. Ablato ergo D E, qui ipsi A D, sit æqualis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaque quia est, vt totus A C, ad totũ C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; erit quoque vt totus A C, ad totum C D, vel vt detractus C D, ad detractum D E, ita A D, 11. septimi
ex A C, residuus, hoc est D E, illi æqualis, ad E C, ex C D, residuum. Quare cum sit vt C D, ad D E, ita D E, ad A C; sit autem C D, maior, quam D E; erit etiam D E, maior, quam E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipsi E C, æqualis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum; cum numerus non possit diuidi infinite. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam numerus A B, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex A B, in C B, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipsius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B,

in C B, vna cum quadrato ipsius A C, quincuplus erit quadrati partis A C. Est autem numerus contentus quater sub A B, C B, vna cum quadrato ipsius A C, quadratus; quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is qui quater continetur sub A B, C B, vna cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C;) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis sit quadrato ipsius A C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum

ipsis

ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, se ipsum multiplicantem facere C.

A, 9 B, 12.
C, 16.
D, 3. E, 4.

Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; erit & uterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam uno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E tanquam uno in D, aequalis est per 3. theorema scholij praecedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

24. septimi
30. septimi
26. septimi
27. septimi

DEINDE quia, ut prius, uterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E; efficitur (cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) numerum factum ex D, E, tanquam uno in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam uno in E, aequalis est per 3. theorema scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi sunt; atque adeo ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

B, 12. C, 16.
A, 9.
D, 3. E, 4.

30. septimi
26. septimi
27. septimi

POSTREMO quia, ut prius, uterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est; atque adeo e contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E; erit quoque qui fit ex D, in E, ad compositum ex D, E, primus; Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E,

30. septimi
26. septimi
27. septimi

ex D, E, tanquã uno, in se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam uno, in se, æqualis est, per 4. theorema antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D,

& E, in se ipsos, una cum eo qui ex D, in E, bis: Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis.

A, 9.		C, 16.
	B, 12.	
D, 3.		E, 4.

Quoniam ergo duo numeri simul, nempe compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorũ, ut ad eum, qui fit ex D, in E, ut ostensum est; Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E; atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, uidelicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, ut ad eum, qui fit ex D in E, primi sunt, ut ostensum est; erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erũt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quamobrem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

30. septimi

30. septimi

SCHOLION.

CAMPANVS hoc theorema aliter demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos esse primos; uidelicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad ad A: Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumanturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E — F, 2. G, 3. H, —

Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum nempe D; erit E, compositus ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius lib. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib 8. metietur quoque H, medios B, C; ac propterea, & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, ut demonstrauimus; metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest; Non igitur cõpositi inter se sunt, cõpositus ex A, B, C, & numerus D. ergo inter se primi.

11. pron.
11. pron.
10. pron.
12. pron.
3. octaui

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D; metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C; metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum B; metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi

11. pron.
11. pron.
12. pron.
11. pron.
12. pron.
3. octaui

positi sunt. ergo primi. Quod est propositum.

NON *aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B, primos; nec non, & B, C, D, simul ad A.*

THEOR. 16. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse ut A, ad B, ita B, ad alium numerum. si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita B, ad alium, nempe ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, atque adeo in sua proportione minimi; ipsi aeque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C. Metitur autem & A, se ipsum: Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se existētes. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . .
B . . . . 23. *septimi*
C ———————— 21. *septimi*

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorū primi inter se sint: Non erit ut primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E

ut A, ad B, ita D, ad alium, uidelicet ad E. Erit igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint

23. septimi inter se primi, minimi in

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27 E —— sua proportione. Igitur

21. septimi aeque metientur ipsos B, & E; nempe A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est ut A, ad B, ita B, ad C: Ergo cū A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C,

11. pron. metietur; atq; ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est ut B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipsum C; metietur &

11. pron. C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, metietur quoque ipsum D. Metitur uero & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos existentes. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita D, ad alium numerū E. Eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

19.

PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, considerare an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

Dati duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerū, ut

A, 4. B, 7. A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt inter se primi;

16. noni perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si uero non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C,

A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, immo ipsum D, esse tertiū proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D; fiet C,

9. pron. ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, aequalis

lis est ei, qui ex medio B, describitur; Ac proinde erit ut A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B. *20. septimi*

Si D non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D; ita ut sit A, ad B, quemadmodū B, ad D. Quoniam igitur est, ut A, ad B, ita B, ad D; erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; metietur A, ipsum C, per D; sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem uia considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, ut B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat. *20. septimi* *7. pron.*

A, 6. B, 4. D. C, 16.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem aliū numerum, ut A, ad B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, imo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & ter- *9. pron.*

A, 8.	B, 12.	C, 18.	E, 27.	D, 216.
A, 4.	B, 8.	C, 9.	E, 18.	D, 72.

19. septimi. tio continetur; Ac propterea erit ut A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

Sed iam non metiatur A, ipsum D. Dico, ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalē. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita, ut sit quemadmodū A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt; erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur nō metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus nō metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, ut C, ad B. Quoties ca tribus numeris datis cōsiderauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

A, 4. B, 6. C, 9. E —— D, 54.

A, 4. B, 4. C, 10. E —— D, 40.

19. septimi

7. pron.

SCHOLION.

Ex his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

Theon, & qui illum sequuntur, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi. Aut nō deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, cumq; non leuem, inciderint. Dicunt enim, si tres numeri dati nō sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi,

non

non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicua in his numeris non continue proportionalibus apparet. 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita ut sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, & ob id minimi. Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At uero & A, se ipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se existentes. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E ---

23. & 12. septimi

HAEC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, uidelicet ad E; quod quidem fieri posse nusquam demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus hic inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (ut cum dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquã concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione nullæ exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, ut B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi utuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nõ tamen deinceps, sintque A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B,

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E ——

ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipsi ostenderũt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdũ. Non ergo fieri potest, ut D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

PRIMVM vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; manifestum est, ex demonstra-
17. noni. tis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus.

21. THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorũ.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. Sumpto enim numero D E, minimo, quem A,
38. septimi B, C, metiantur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. Sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures ꝓposita multitudine A, B, C.

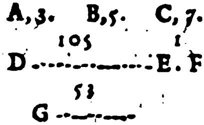
A, 2. B, 3. C, 5.

30 1

D ———— E . F

SED iam non sit primus D F. Metietur ergo eum aliquis

quis numerus primus, nempe G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui unus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundẽ D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, metietur quoque E F, reliquum, numerus unitatẽ. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui unus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademq; uia plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat. 33. septimi



SCHOLION.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A, B, C, *inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, nempe* DF, *si primus est, uel certe* G. *Atque eodem modo quatuor primis alium quintũ, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotcunq; quis uolet, inueniemus.*

THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

SI pares numeri quotcunque componãtur: totus par erit.

COMPONANTUR quotcunque pares numeri AB, BC, CD. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cũ enim AB, BC, CD, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius AB; & F, ipsius BC; & G, ipsius CD. Quoniam igitur est ut AB, ad E, ita BC, ad F; & CD, ad G; (quod semper sit proportio dupla.) erit quoque ut AB, ad E, ita AD, ad E, F, G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus. Igitur & totus AD, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea AD, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G. compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . C . . . . D
E . . . . F . . G . . . . .

12. septimi

23.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositum AE, parem esse. Cum enim AB, BC, CD, DE, sint impares; differet quilibet unitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit. Quare, & compositus ex ipsis par erit.

A . . . B . . . . . C . . . . D . . . . E

21. noni.

Est autem & multitudo unitatum detractarum par: Igitur & totus AE, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

21. noni.

24.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOT-

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totũ A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat unitate a pari, ex definitione; ablata unitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par: Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . B . . . C . . . . E . D

22. noni.
21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24. 25.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quã dimidia pars, uel minor. Sit primum, dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A . . . . . . C . . . . . . B

SED iam C B, par detractus maior sit, uel minor, dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit ut A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando ut A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo ut A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rursusque permutando, ut A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detraha-

A . . . . . . C . . D . . . E . . . . . B
A . . . . . . D . . . C . . E . . B

trahatur, &c. Quod erat ostendendum.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim unitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; erit &

A . . . . C . D . . . . B

24. noni. reliquus A D, par. Dempta ergo unitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, unitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui

A . . . . C . . . . . D . B

A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur

24. noni. C D; erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem esse. Detracta enim A D, unitate ex impare

A B;

A B, erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus D C, par quoque erit; Ac proinde addita unitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat. 24. noni.

A . D . . . . C . . . . . . B

THEOR. 26. PROPOS. 28. 29.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt unitates. Quare cum B, sit par, cōponetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A; Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat. 21 noni.

A . . .   B . . . .
C . . . .

SCHOLION.

EADEM *demonstratione ostendemus & hoc.*

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM *rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur unitates, &c.*

A . . . .   *B* . . . .
C . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparē numerū multiplicans fecerit aliquē. Factus impar erit.

Ex

Ex impari A, in imparē B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nempe æqualis multi-

A ... B .....

C ....

23. noni. tudini unitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerū multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

EX CAMPANO.

31. NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

A ... C ....

29. noni. B ....

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cū ponatur par. Est ergo C, par.

32. NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

A ... C .....

B ....

28. noni. METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparē esse. Si enim sit par; erit B, factus ex A, impari in C, parē par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

33. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI impar numerus parem numerū metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiū quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex iis, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstramonstrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A, metiatur B, per C; metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, ut ad 3. definitionem lib. 7. documus. Quoniam uero est ut C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando ut C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B: Est autē C, pars ipsius B, denominata ab A, ut ostensum est; erit & dimidiū ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodē A, denominata; Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum. 8. pron. 40. septimi

A... C....
B ....

THEOR. 29. PROPOS. 31. 34.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoque primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D; qui necessario impar erit. Nam si sit par, cū metiatur imparem A; erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. 28. noni. ponitur enim A, impar. Quare D, impar est. Quia igitur D, impar parem C, metitur; (est enim C, par, cum dimidiū habeat B,) metietur quoque numerum B, eius dimidium. 30. noni. Metitur autem & A: Igitur D, ipsos A, B, primos inter se existentes, metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est: Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquē numerū primus sit, &c. Quod erat ostē dendum.

A...... B........
C................. D—

THEOR.

35. THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM a binario duplorũ unusquisque pariter par est tantum.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita unitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab unitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, utpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16. E,32.

11. noni.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab unitate continue proportionales, sitque A, proximus unitati numerus primus, nempe binarius; nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

13. noni

SCHOLION.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inveniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint n. A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur;

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.

I — H — G —

nentur; Atque adeo si ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidiæ partis dimidia pars numerus par; donec ad unitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars unitas, ita ut sit I, binarius. Igitur H, G, sunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B; C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, præter eos, qui a binario sunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33. 36.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem; metietur binarius, numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem

A . . . .

9. pron. rem E. Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, Ac propterea erit ut C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . .
19. septimi B . . . . C . . .
D ——— E ———

SCHOLION.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum.

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantū.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantum, constat ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec a binario sint dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed uel esse pariter parem tantum, uel certe pariter parem & pariter imparem.

37. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR

PAR numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidiũ. Igitur ex definitione, pariter par est.

A . . . .

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostẽdemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nã si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cũ in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo uicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neq; a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat. 29. noni.

SCHOLION.

FACILE ex dictis inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secundo, & ultimo æquales ipsi primo: Erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, ultimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse ut B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis.

A . . . .
B . . . G C
D . . . .
E . . . . K . . . . . . I . . . H . . . . F

A .
B . . G . C
D . . . .
E . . . . K . . . . . . I . . H . F

Quoniã igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia uero est ut A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque ut E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque ut E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur ut E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I,
12. septimi I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) ut I H, ad H F, hoc est, ut B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Ex hoc theoremate ueniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum continue proportionalium, si modo primus, secundus, & ultimus fuerint noti. Cum enim sit excessus secundi ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & ultimo dematur, fiatque ut reli-

quus

quus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium. Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt.

Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota summa. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi. Id quod ex regula proportionum apud Arithmeticos manifestum est. Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirum vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus 2. 2186. Quoniam igitur debet esse ut 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto vltimo; si 1. multiplicetur per 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summa inuenta 1093. procreabitur summa omnium 3280.

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus fit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerum perfe-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G —— 62. H, 124. I, 248. F —— 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O —— P ——

ctum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nempe E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, ean-

dem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, ut A, ad D, ita E, ad I; Ac propterea numerus factus ex A, primo
19. septimi in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E; igitur idem F, fiet ex A, in I;
7. pron. ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F,

Vnitas .. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ...... 62.. H, 124. I, 248. F 496
K, 31. M, 31 .... L, 31. N, 465.
O ...... P ......

ipsum I, duplum erit: Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt; Detrahantur ex G, secundo, & ex F, ultimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. Erit
35. noni. igitur ut M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nempe numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex unitate, & A. B, C, D numeris; (qui compositus eidem E, est æqualis) erit compositus ex L N, nimirum ipse F, æqualis unitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cū unitas, & omnes numeri A. B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (cum enim
7. pron. F, factus sit ex E, in D; metietur D, ipsum F; atque adeo
11. pron. eundem F, metietur unitas, & numeri A, B, C, ipsum D, metientes. Rursus cum E, ipsum F, metiatur, ut ostensum est; metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, ipsum I, propter proportionem duplam, metientes.) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, ut mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur si fieri potest, aliquis numerus O, præter illos, ipsum F,
9. pron. per P; atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium; ac propterea est

ut

ut E, ad P, ita O, ad D. Quoniam uero, cum A, B, C, D, ab unitate sint proportionales, & A, proximus unitati, primus; ultimum D, nullus alius, praeter A B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; Neque igitur E, ipsum P, metietur. Existente ergo E, primo, erunt E, & P, inter se primi; ideoque in sua proportione minimi: Ac proinde aeque metietu E, ipsum O, & P, ipsum D. Nullus uero alius praeter A, B, C, ipsum D, metitur: Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex aequo, ut B, ad D, ita E, ad H; Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, aequalis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H; atque adeo erit. ut P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

19. *septimi* 13. *octaui* 31. *septimi* 23. *&* 21. *septimi* 19. *septimi* 19. *septimi*

SCHOLION.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi aequales sunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in unam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa unitate, omnes partes aliquota, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quae omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3 in 2.

vltimum

ultimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At uero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE *quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inuenimus.*

FINIS ELEMENTI NONI.