QVÆSITA GEOMETRICA

A COMITE RVGERIO DE VIGINTIMILLIIS

OMNIBVS PROPOSITA

AB HIERONYMO SACCHERIO GENVENSI SOC. IESV

SOLVTA

SVB AVSPICIIS

EXCELLENTISSIMI DOMINI

D.DIDACI PHELIPPEZ DE GVZMAN

MARCHIONIS DE LEGANES &c.

TOTIVS MEDIOLANENSIS PROVINCIÆ

STATVS, ET BELLI

PRO CATH. REGE SVPREMI MODERATORIS &c.

MEDIOLANI, MDCXCIII.

In Regio Ducali Palatio, apud Marcum Antonium Pandulphum Malatestam Regium, ac Cameralem Typographum.

Eriſſimum eſt, Excellentiſſime Princeps, quod inquit Plato in libro ſeptimo de Republica, problema illud celeberrimum ab oraculo Apollinis propoſitum iccirco à nemine ſolutum fuiſſe, quòd Geometriæ ſtudia non eſſent in honore, ac proinde in rerum difficilium inueſtigatione nemo vellet laborem impendere. Quod *si Dux aliquis, vt ille opinabatur, Reipublicæ praeesset huiuscemodi studijs addictus, qui animos ad inueniendum excitaret, tum forte extiturum aliquem, qui difficillimum ænigma è suis latebris tandem erueret.* Duæ sunt, *inquit*, causæ quòd cuborum augmenta nondum comperta sint. Quia videlicet in nulla Republica hæc sunt in honore: Deinde quia qui hæc inuestigant Duce aliquo indigent, qui honorificè eos regat, sine quo minimè comperire possunt. *Sic ille de quæstione hucusque geometris inaccessa. Idem ego planè in euoluendis hisce problematis expertus sum. Nam simul ac intellexi te præclarissimum Ducem non modo mathematicis scientijs delectari, sed in ijsdem esse apprime versatum, earumque studiosos plurimum apud te commendari, statim aggressus sum quæstionem arduam, biennio ante à nobilissimo Geometra omnibus propositam, quam in alijs studijs occupatus, nunquam profectò, nisi te auspice, ac patrono, tentassem. Huius verò solutionem bidui commentatione à me inuentam, tuisque oculis iudicioque subiectam, pro ea qua præstas singulari humanitate, & perspicacia ingenij, ità approbasti, vt inde excitatus pleraq; alia ab eodem*

auctore

auctore proposita breui temp: e enodata pariter ad te detulerim. Itaq; gratias refero Mæcenati optimo, armis non minus quam litteris præstantissimo; nec dubito quin matheſis, cæteræq; ſcientiæ, quæ principum patrocinio maximè indigent, mirum in modum proueherentur, ſi plures tui ſimiles tuliſſet noſtra ætas eruditioni deditos, veterum recentiorumque auctorum, bonarumque artium ſtudioſos. Illud certè omnibus compertum eſt, in hoc fatali bello, quo nunc flagrat Europa, quo nullum fortaſſe atrocius à multis retro ſeculis geſtum eſt, cùm in ipſo aditu Italiæ tuendo ac vindicando ita ſis occupatus, vt non modo Ducis, ſed etiam militis partes diu noctuque ſuſtineas; nullum tamen iucundius tibi laborum interuallum contingere, quam aliquid interdum ex litteris decerpere, & Martis opus, intermixto quà licet Mineruæ otio, temperare. Quamobrem non vereor hoc opuſculum geometricum, et importuniſſimo tempore, in tuum tentorium mittere, atq; in ipſo campi puluere, inter arma, expugnationeſque arcium tibi ſiſtere; vt in iſta Subalpina ditione, in qua apud Equites ingenioſiſſimos ſæpe de geometriæ vniuerſæque matheſeos dignitate doctrinaq; diſſerui, tuam in hac facultate præſtantiam

tiam

tiam eruditionemq; palam teſter; publiciſq; gratulationibus, quibus fama nominis tui circumfertur, hunc etiam plauſum litterarium admiſceam. Interim verò, cùm vniuerſi milites, tui amantiſſimi, de ſalute tua magis quam de propria laborent, eoſque omnes ſolicitos teneas, quòd te à præſentiſſimis periculis arcere non poſſint, Deum Optimum Maximum enixè oro, vt te nobis ac litteris incolumem præſtet, ac referat. Vale.

Excellentiæ Tuæ

Humill.mus atq; obſeq.mus Seruus

Hieronymus Saccherius
ex Soc. Ieſu.

AD LECTOREM.

HAbes, Lector Geometra, solutiones problematum Comitis Rugerij de Vigintimillijs, quæ in folio diarij Parmensis omnibus proposita Aprili proximè elapso accepi. Huius nobilissimi iuuenis ingenium, & rerum geometricarum comprehensionem conijcere satis licet ex enodatione duodecim quæstionum, quas olim anonymus post tabulam latens in lucem protulit. Verùm quæ ipse reposuit problemata, seu veriùs ænigmata, hausta ex penitissimis geometriæ arcanis, quantum & nouitatis, & profundæ indaginis habeant, ex ipsa solutione, quam damus, qualiscunq; ea sit, intelliges. Sanè mirum in modum clarissimi nominis auctorem animo complexus sum, atq; hoc certamen alacriter suscepi, tum quòd eiusdem fere ætatis sumus, tum quòd in eundem scopum, in quem puto ipsum inuenta sua destinasse, ego pariter multum operæ studijq; posuerim. Ex propositis quæstionibus, quarum ordinem immutaui, duo theoremata enodauit Ioannes Ceua mihi amicissimus methodo quadam noua, cuius ipse inuentor fuit, constructionemq; typis dedit statico-geometricam, quam inter præclara inuenta ætatis nostræ referre non dubito. Quod ad me attinet, demonstrationes breues & pressas, ne opus in molem cresceret, perspicuè tamen, vt potui, exponere conatus sum; in quibus lector in Euclide & Apollonio versatus dabit vtique veniam si notiora quædam ex vtrisq; elementis indicare interdum neglexi. Cæ-

terum

terum cùm pauci admodum huiuſcemodi ſtudijs animum adijciant, eum optimè de geometria meritum reor, qui arduis quæſtionibus ingenia interdum extimulet atq; exerceat: quo fit vt inter mathematicos, genus hominum ſolitarium atq; diſperſum, inſtituantur commercia, & ad verum inueniendum multiplex aditus aperiatur. Illud etiam non rarò contingit vt eadem viâ plurima proferantur in lucem ſcitu digniſſima; quod eueniſſe etiam in his ſolutionibus cenſeo, in quibus nonnulla Deliaco problemati finitima reſoluuntur, & circa rationes harmonicas (quod egregiè in primis præſtitit Ioannes Ceua) longè plura reperta ſint quam huc vſq; ab antiquis & recentioribus factum fuerit. Denique ingenuè fateor multum mihi luctandum fuiſſe cum problemate quarto, quod vltimo loco reſeruaueram, adeò vt cùm cætera vno fere eodemq; impetu intra pauciſſimos dies abſoluta fuerint, hoc vnum, langueſcente paulatim ardore animi alijs ſtudijs implicati, moram fere bimeſtrem iniecerit, nec dum omni ex parte abſolutum dederim. Neq, enim reor ſatis eſſe ad inueſtigationem eius loci, more Cartheſij genus æquationis (quod facile eſſet) expendere; ſed aut lineas omnes præcipui nominis ſingillatim excludere, aut aliquam ex ijs certam ſtatuere, & quidem geometricè, iuxta mentem proponentis neceſſarium exiſtimo. Quæſita porro (ſic enim appellare libuit propoſitiones continentes theoremata & problemata) ſeruato ordine, quem auctor tenet (ne te diutiùs morer) hîc recenſentur.

PRO-

PROBLEMA VNVM AD OMNES.

SI super datam positione rectam ita anguli dati vertex feratur, vt alterutrum è cruribus semper transeat per datum punctum extra lineam datam; ac in reliquo latere punctum concipiatur ea conditione, vt ad crus inter hoc punctum, & verticem interpositum, crus quod inter verticem & punctum datum est interceptum, rationem obtineat eandem, quam habet inclinata à dato puncto ad datam positione lineam in angulo ei super ipsam dato æquali, ad interiectam verticem inter, atque hanc inclinatam: describetur vtique linea, quam determinare oportet cuius sit generis iuxta Carthesium.

Fuit hoc propositum biennio ante, vt innuitur in diario Parmensi. Sequuntur deinde alia sex, quibus præfixus titulus GEOMETRAM QVÆRO.

1 *DVabus rectis contingentibus circulum, conicamue sectionem, aut oppositas; & à contactibus per bina perimetri puncta ductis quatuor rectis se se decussantibus extra perimetrum in alijs duobus punctis, quæ iungantur recta: dico hanc transituram esse per punctum, vbi contingentes occurrunt, vel, si non occurrant, ijsdem fore parallelam.*

2 *Ab assumpto quouis puncto extra circulum, conicamue sectionem ducantur duæ rectæ perimetrum secantes in quatuor punctis, quorum opposita connectantur rectis, quæ se se decussabunt in puncto intra circulum, vel sectionem conicam, quod cum assumpto puncto iungatur recta; quam dico fore vt sit media harmonica inter eiusdem productæ interceptas à perimetro concaua, & conuexa, & puncto extra assumpto.*

3 *Inuestigare locum puncti assumpti in recta transeunte*

per

per datum punctum, ac secante rectam positione datam, ut inuentâ tertiâ harmonicâ ad interiectam inter punctum datum & assumptum, & interiectam inter punctum datum, & rectam positione datam, sit inter hanc, & tertiam ipsam harmonicam media geometrica recta quædam magnitudine data.

4 *Anguli dati vertex feratur per rectam positione datam, ut crus unum transiens per punctum datum extra rectam, secet alteram rectam positione datam, & in reliquo crure punctum assumatur, ut quadratum interiectæ inter punctum datum, & verticem anguli ad rectangulum sub interiecta inter punctum datum, & rectam, supra quam vertex anguli non fertur, in interiectam inter verticem dati anguli, & punctum assumptum, sit in ratione data, vel (quod idem hîc est) in ratione æqualitatis: inuestigandus igitur esto locus puncti assumpti.*

5 *Duobus circulis positione & magnitudine datis rectam ducere contingentem unum circulorum; secantem verò alterum, ut à peripherijs diuidatur in ratione data.*

6 *Datis positione duabus rectis, & puncto, describere circulum; cuius peripheria transeat per datum punctum, tangat unam rectarum; alteram verò secet, ut subtensa sit magnitudine data.*

PRO-

PROBLEMA EXTRA ORDINEM

CVI TITVLVS

VNVM AD OMNES.

SI ſuper datam poſitione rectam ita anguli dati vertex feratur, vt alterutrum è cruribus ſemper tranſeat per datum punctum extra lineam datam; ac in reliquo latere punctum concipiatur ea conditione, vt ad crus inter hoc punctum, & verticem interpoſitum, crus quod inter verticem, & punctum datum eſt interceptum, rationem obtineat eandem, quam habet inclinata à dato puncto ad datam poſitione lineam in angulo ei ſuper ipſam lato æquali, ad interiectam verticem inter, atque hanc inclinatam: deſcribetur vtique linea, quam determinare oportet cuius ſit generis iuxta Cartheſium.

Expoſitio problematis.

SIT linea recta poſitione data $x z$; datumque extra ipſam punctum a, & datus angulus $a c x$, cuius vertex in recta $x z$. Intelligatur vertex dicti anguli $a c x$ perueniſſe ſuo motu verſus x ad punctum e; fiatque vt $a c$ ad $c e$, ita $a e$ ad $e g$; punctum g pertinebit ad lineam; quam determinare oportet cuius ſit generis iuxta Cartheſium. Quia verò vertex dati anguli $a c x$ intelligi poteſt moueri tum verſus x, tum verſus z; & ſiquidem moueatur verſus x, omnia puncta lineæ genitæ ſunt ſupra lineam poſitione datam; ſin verò moueatur verſùs z, omnia puncta ſunt infra eandem, vt facilè probatur ex elementis; iccirco illam appellabimus ſuperiùs genitam, hanc verò inferiùs genitam. Dico igitur lineam ſuperiùs genitam, de quâ potiſſima eſt quæſtio, eſſe parabolicam, adeoque primi generis iuxta Cartheſium; inferiùs autem genitam eſſe lineam rectam, & quidem eſſe diametrum parabolæ, cuius baſis ſit æquidiſtans rectæ poſitione datæ. *Fig. 1.*

PROPOSITIO PRIMA.

Linea inferiùs genita eſt recta.

SVmatur in linea inferiùs genita quoduis punctum d. Poterunt igitur, ex hypotheſi, ex punctis a, d inclinari ad rectam $c x$ duæ $a b$, $d b$, ita vt angulus $a b d$ ſit æqualis dato angulo $a c x$, ſitque $a b$ ad $b d$, vt $a c$ ad $c b$. Hoc igitur *Fig. 1.*

facto, accipiatur ce æqualis ipsi cb, & iungantur rectæ dc, de, da, ae. Quoniam igitur, est ab ad bd, vt ac ad cb, siue ce, & angulus abd æqualis angulo ace, erunt similia triangula abd, ace; ideoque erit ba ad ad, vt ca ad ae, & permutando ba ad ac, vt da ad ae: & insuper erit angulus bad æqualis angulo cae; demptoque vel addito communi angulo cad (nisi dca sit vna linea recta) erit angulus bac æqualis angulo dae. Sunt igitur etiam similia triangula bac, dae; & propterea angulus aed æqualis angulo acb: est autem angulus acb æqualis angulis aec, cae simul; ergo reliquus angulus ced est æqualis angulo cae. Præterea, ob similitudinem triangulorum, est ce ad ea, vt bd ad da, & ae ad ed, vt ac ad cb, siue ab ad bd; igitur ex æquo in perturbata proportione vt ba ad ad, siue ca ad ae, ita ce ad ed: est etiam angulus cae æqualis angulo ced; igitur similia etiam sunt triangula cae, ced; adeoque angulus ace æqualis angulo ecd. Quamobrem cùm punctum d sit quoduis punctum lineæ inferiùs genitæ, & iunctâ rectâ dc idem semper angulus efficiatur, æqualis nempe dato angulo acx, erit linea inferiùs genita linea recta. Quod &c.

Corollarium.

Fig. 1. CVM recta ac, & linea inferiùs genita, hoc est dc æquales angulos efficiant ad easdem partes cum rectâ cx, infertur quod dca (si datus angulus acx sit rectus) sit vna linea recta. Præterea sequitur quod angulus cad debeat demi, si datus angulus sit acutus, & debeat addi, si datus angulus sit obtusus.

Lemma.

Fig. 1. MAnente eadem figura, si recta de protrahatur, fiatque eg æqualis ipsi ed, punctum g erit in linea superiùs genita.

Cùm anguli aed, aeg simul æquales sint duobus rectis, adeoque æquales angulis acb, ace simul, & angulus aed æqualis angulo acb, erit angulus aeg æqualis dato angulo ace. Rursus, cùm rectæ de, eg sint æquales, erit ae ad eg, vt ae ad ed, hoc est ac ad cb, siue ac ad ce. Est igitur punctum g, iuxta hypothesin, in linea superiùs genita. Quod erat &c.

Corollarium.

Fig. 1. HInc è conuerso patet, quod, si ge protrahatur, fiatque ed æqualis ipsi eg, punctum d erit in linea inferiùs genita; adeoque, si punctum d fuerit in linea inferiùs genita, recta ed erit æqualis ipsi eg.

PROPOSITIO SECVNDA.

Linea superiùs genita est parabolica.

Fig. 2. SVmantur in linea superiùs genita duo quæuis puncta g, h; fiantque anguli aeg, aoh (quorum vertices sint in recta cx) æquales dato angulo acx; sitque ae ad eg, vt ac ad ce, & ao ad oh, vt ac ad co. Protrahantur rectæ ho,

g e vsque ad puncta *m*, *d* lineæ inferiùs genitæ; & demum ducantur rectæ *bn*, *gf* parallela vtraque rectæ *c x*, incidentes in puncta *n*, *f* rectæ *mc* protractæ. Quoniam igitur similia sunt triangula *aee*, *ecd*, & *ac o*, *oem* (vt supra ostensum est) erit *a c* ad *c e*, vt *c e* ad *c d*, & *a c* ad *c o*, vt *c o* ad *c m*; adeoq; quadratum *c e* æquale rectangulo *a c d*, & quadratum *c o* æquale rectangulo *a c m*. Quia verò ex antecedenti corollario, recta *m o* est æqualis ipsi *o b*, & *d e* ipsi *e g*; erit, propter parallelas, recta *mc* æqualis ipsi *c n*, & *d c* ipsi *c f*: rursus erit recta *b n* dupla ipsius *c o*, & *g f* dupla ipsius *c e*. Erit igitur quadratum *b n* ad quadratum *g f*, vt quadratum *c o* ad quadratum *c e*, siue vt rectangulum *a c m* ad rectangulum *a c d*, hoc est vt recta *c m* ad rectam *c d*, siue vt *c n* ad *c f*. Quare linea superiùs genita *c g b* est parabolica. Quod erat &c.

APPENDIX.

Mirabilis sanè proprietas hæc est parabolæ ab ingeniosissimo proponente inuenta; Nam, præter huc vsque demonstrata, facilè ostendi potest, continuatum iri ex altera parte lineam parabolicam, si iisdem conditionibus moueatur vertex anguli deinceps *a c z* versùs punctum *z*; & eandem rectam *m c* genitum iri, si vertex dicti anguli deinceps moueatur versùs *x*; adeòque rectas *gf*, *b n* parallelas rectæ positione datæ, protractas vsque ad alteram partem lineæ parabolicæ, bifariam secari a recta *m c* continuata, quæ propterea est diameter parabolæ, cuius basis sit æquidistans rectæ positione datæ; rursus inclinatam *a c* esse quartam partem lateris recti eiusdem parabolæ. Tandem, cùm quæuis linea parabolica positione data gigni possit per similem motum supra aliquam sui tangentem, facilè ostendi potest punctum extra tangentem, per quod alterutrum è cruribus semper transeat, esse semper idem, nempe focum eiusdem completæ parabolæ; ex quo etiam demonstrari potest rectam iungentem focum parabolæ, & quoduis punctum lineæ parabolicæ esse quartam partem lateris recti illius parabolæ, cuius diameter transit per illud idem punctum assumptum in linea parabolica; quod tamen probari etiam potest ex 49. l. 1. Conic. Fig. 2.

QVÆSITVM PRIMVM;

Quod est proponentis secundum.

Theorema.

Ab assumpto quouis puncto extra circulum, conicamue sectionem ducantur duæ rectæ perimetrum secantes in quatuor punctis, quorum opposita connectantur rectis, quæ se se decussabunt in puncto intra circulum, vel sectionem conicam, quod cum assumpto puncto iungatur recta; quam dico fore, vt sit media harmonica inter eiusdem productæ interceptas à perimetro concaua, & conuexa, & puncto extra assumpto.

EX IOANNE CEVA.

Hoc theorema methodo nostræ constructionis staticæ, præmisso lemmate, demonstrabimus.

Lemma.

IN angulo *abc* sint lineæ *ce*, *gd*, *af* se interfecantes in puncto *h*. Dico, si *cb* fuerit secta in *f*, *g* ita vt *cb* ad *bf* sit vt *cg* ad *gf*, scilicet diuisa sit in illis duobus punctis harmonicè; etiam *ab* fore vt secta sit harmonicè in *e*, *d*.

Fig.3. Vt *cf* ad *fb* ita sit pondus suspensum ex *b* ad pondus suspensum ex *c*; atque ita, posita *cb* vt quadam libra, erit eius centrum in *f*, atque eodem in puncto *f* grauitabunt pondera suspensa in *c* & *b*, perinde ac si penderent ex *f*. Fiat pariter vt *ae* ad *eb*, ita pondus iam existens in *b* ad pondus, quod suspendatur ex *a*; eritque similiter *e* centrum libræ *ba*; pondera verò *b* & *a* ita grauitabunt, ac si penderent ex eodem *c*. Cùm ita sit, erit in libra *ce* centrum trium ponderum *c*, *b*, *a*; & similiter eorundem ponderum idem centrum erit in libra *af*; quare in communi sectione *h* ipsum centrum reperietur: Ideoque erit *ch* ad *he*, vt duo pondera suspensa in *b* & *a*, ad pondus suspensum in *c*; similiterq; *ah* ad *hf*, vt duo pondera in *b* & *c*, ad pondus in *a*. Hanc figuram quatuor linearum vnà cum ponderibus sic comparatis vocauimus olim in nostra methodo elementum primũ. Nunc considerentur quinque aliæ rectæ *fha*, *ade*, *ebc*, *cgf*, *gbd*; & fiat vt *ed* ad *da*, ita pondus iam existens in *a* ad aliud pondus *o* collocandum in *e*, eritq; *d* centrum libræ *ea*. Fiat etiam vt *ch* ad *he* ita pondus *o* ad aliud pondus *r* collocandum in puncto *c*, eritque in *h* centrum libræ *ce*. Adhuc sit *fg* ad *gc* vt pondus *r* ad aliud pondus *z*, quod ponatur in puncto *f*, eritque *g* centrum libræ *cf*. Quamobrem centrum quatuor ponderum *z*, *r*, *o*, *a* erit in recta *gd*. Cùm autem centrum duorum ponderum *o*, *r*, sit in *h*; etiam ponderum *z*, *a* erit in *b* (vt facilè demonstratur) adeoque erit *ab* ad *bf* vt pondus *z* ad pondus *a*. His breuiter ostensis; ratio *bf* ad *bc*, nimirum ponderis *c* ad *f* componitur ex ratione ponderum *c* ad *e*, *e* ad *a*, & *a* ad *f*, videlicet componitur ex rationibus *eb* ad *bc*, *ab* ad *be*, & *bf* ad *ba*. Rursus ratio *fg* ad *gc*, hoc est ponderis *r* ad *z* componitur ex rationibus ponderum *r* ad *o*, *o* ad *a*, & *a* ad *z*, nimirum rectarum *eb* ad *bc*, *ad* ad *de*, & *bf* ad *ba*. Sunt autem duæ rationes *eb* ad *bc*, *fb* ad *ba* eædem in vtraque compositione, eædemque etiam sunt rationes *bf* ad *bc*, & *fg* ad *gc*, quarum illæ sunt componentes; ergo & reliquæ duæ rationes eædem erunt, nimirum erit *ad* ad *de*, vt *ab* ad *be*. Quod erat &c.

PROPOSITIO.

Fig.4. ESto iam sectio conica quæcunque *abdek*, & à puncto *c* sint duæ rectæ secantes ipsam sectionem in quatuor punctis *b*, *a*, *d*, *e*, quorum iungantur opposita rectis *ad*, *eb* secantibus se se in *f*. Dico, si iungatur *cf*, & producatur vt occurrat sectioni in *k*, fore *fc* mediam harmonicam inter *kc*, & *cl*. Fiat *eg* ad *gd*, vt *ec* ad *cd*; & iuncta *gf* producatur vt secet *ab* in *h*; hæc, ex præmisso lemmate, secabitur ita vt *ac* ad *cb* sit vt *ab* ad *hb*; proinde vtrinque producta ipsa *gh*, vt secet sectionem in *m* & *i*, erunt hæc puncta (a) loca contactuum duarum rectarum *cm*, *ci*: sed recta *clfk* secatur in *f* ab ipsa *im* iungente contactus, ergo (b) *kc* ad *cl* erit vt *kf* ad *fl*. Quod &c.

a 9.l.4. Con. b.37.l. 3. Con.

Scho-

Scholium.

SVperius lemma, ab Ioanne Ceua statica ratione demonstratum geometricè sic ostendo, vnde theorema ipsum geometrica ratione confirmatum remanebit.

Iungatur *b h l*, & ex puncto *c* ducatur ad rectam *h a* protractam *c l x*, ita vt *c l*, æqualis sit ipsi *l x*; iungaturque *b x* secans *h e* protractam in *m*. Tum ad *b x* ducatur parallela ipsi *c x* recta *f o* secans *b l* in *n*; & iungatur *c o* secans *b l* in *k*. Ostendendum est priùs rectam *f o*, adeoque *c x* parallelam esse ipsi *g d*; & rectam *c k o* eandem esse ac *c h m*. Erit enim *c b* ad *b f*, siue *c g* ad *g f*, vt *c l* ad *f n*, siue *l x* ad *f n*, hoc est *l h* ad *h n*; quarè, cùm *c x* parallela sit ipsi *f o*, erit etiam *g d* parallela ipsis *f o*, *c x*. Rursus erit *l b* ad *b n*, vt *c l*, siue *l x* ad *f n*, & vt *l x*, siue *c l* ad *n o*: Vt autem *l x* ad *f n*, ita *l h* ad *n h*; & vt *c l* ad *n o*, ita *l k* ad *k n*; igitur *l h* ad *h n*, vt *l k* ad *k n*. Quamobrem punctum *h* idem est, ac punctum *k*, adeoq; recta *c k o* eadem est, ac *c h m*. Fig. 5.

His præmissis ostendo rectam *b e d a* sectam esse harmonicè, siuè esse *a b* ad *b e* vt *a d* ad *d e*. Ex puncto *e* ducatur ad *b l* recta *e r* parallela ipsi *g d*, siue *c x*; & ex puncto *a* ijsdem parallela ducatur recta *a t u* occurrens *b l* in *t*, & *k c* in *u*, erit ergo *a b* ad *b e*, vt *a t*, siue *u t* ad *e r*, hoc est *t k* ad *k r*, siue *a d* ad *d e*. Quod erat &c.

QVÆSITVM SECVNDVM,

Quod est proponentis primum.

Theorema.

DVabus rectis contingentibus circulum, conicamue sectionem, aut oppositas; & à contactibus per bina perimetri puncta ductis quatuor rectis se se decussantibus extra perimetrum in alijs duobus punctis, quæ iungantur recta: dico hanc transituram esse per punctum, vbi contingentes occurrunt; vel, si non occurrant, ijsdem fore parallelam.

EX IOANNE CEVA.

Antequam arduæ propositionis demonstrationem aggrediar, operæ pretium est nonnulla, quæ sequuntur, lemmata præmittere.

Lemma primum.

SI à tribus rectis in vnum punctum sibi occurrentibus, aliæ duæ ab vno alio puncto deriuantes secentur, sitque earum vna harmonicè secta, altera item harmonicè diuidetur.

Vniantur datæ tres rectæ in puncto *a*, sintque duæ aliæ ipsas secantes *k h b n*, *k i c m*, ab vno puncto *k* deriuantes: ostendendum est, si altera earum, vt *k i c m*, Fig. 6. & 7.

EX IOANNE CEVA.

Hoc theorema methodo nostræ constructionis staticæ, præmisso lemmate, demonstrabimus.

Lemma.

IN angulo abc sint lineæ ce, gd, af se intersecantes in puncto h. Dico, si cb fuerit secta in f, g ita vt cb ad bf sit vt cg ad gf, scilicet diuisa sit in illis duobus punctis harmonicè; etiam ab fore vt secta sit harmonicè in e, d.

Fig. 3. Vt cf ad fb ita sit pondus suspensum ex b ad pondus suspensum ex c; atque ita, posita cb vt quadam libra, erit eius centrum in f, atque eodem in puncto f grauitabunt pondera suspensa in c & b, perinde ac si penderent ex f. Fiat pariter vt ae ad eb, ita pondus iam existens in b ad pondus, quod suspendatur ex a; eritque similiter e centrum libræ ba; pondera verò b & a ita grauitabunt, ac si penderent ex eodem c. Cùm ita sit, erit in libra ce centrum trium ponderum c, b, a; & similiter eorundem ponderum idem centrum erit in libra af; quare in communi sectione h ipsum centrum reperietur: Ideoque erit ch ad he, vt duo pondera suspensa in b & a, ad pondus suspensum in c; similiterq; ah ad hf, vt duo pondera in b & c, ad pondus in a. Hanc figuram quatuor linearum vnà cum ponderibus sic comparatis vocauimus olim in nostra methodo elementum primũ. Nunc considerentur quinque aliæ rectæ fha, ade, ehc, cgf, gbd; & fiat vt ed ad da, ita pondus iam existens in a ad aliud pondus o collocandum in e, eritq; d centrum libræ ea. Fiat etiam vt ch ad he ita pondus o ad aliud pondus r collocandum in puncto c, eritque in h centrum libræ ce. Adhuc sit fg ad gc vt pondus r ad aliud pondus z, quod ponatur in puncto f, eritque g centrum libræ cf. Quamobrem centrum quatuor ponderum z, r, o, a erit in recta gd. Cùm autem centrum duorum ponderum o, r, sit in h; etiam ponderum z, a erit in b (vt facilè demonstratur) adeoque erit ab ad bf vt pondus z ad pondus a. His breuiter ostensis; ratio bf ad bc, nimirum ponderis c ad f componitur ex ratione ponderum c ad e, e ad a, & a ad f, videlicet componitur ex rationibus eh ad hc, ab ad be, & bf ad ba. Rursus ratio fg ad gc, hoc est ponderis r ad z componitur ex rationibus ponderum r ad o, o ad a, & a ad z, nimirum rectarum eh ad hc, ad ad de, & bf ad ba. Sunt autem duæ rationes eh ad hc, fh ad ha eædem in vtraque compositione, eædemque etiam sunt rationes bf ad bc, & fg ad gc, quarum illæ sunt componentes; ergo & reliquæ duæ rationes eædem erunt, nimirum erit ad ad de, vt ab ad be. Quod erat &c.

PROPOSITIO.

Fig. 4. ESto iam sectio conica quæcunque $abdek$, & à puncto c sint duæ rectæ secantes ipsam sectionem in quatuor punctis b, a, d, e, quorum iungantur opposita rectis ad, eb secantibus se se in f. Dico, si iungatur cf, & producatur vt occurrat sectioni in k, fore fc mediam harmonicam inter kc, & cl. Fiat eg ad gd, vt ec ad cd; & iuncta gf producatur vt secet ab in h; hæc, ex præmisso lemmate,
a 9.l.4. secabitur ita vt ac ad cb sit vt ab ad hb; proinde vtrinque producta ipsa
Con. gh, vt secet sectionem in m & i, erunt hæc puncta (a) loca contactuum duarum
b.37.l. rectarum cm, ci: sed recta $clfk$ secatur in f ab ipsa im iungente contactus, ergo
3. Con. (b) kc ad cl erit vt kf ad fl. Quod &c.

Scho-

Scholium.

SVperius lemma, ab Ioanne Ceua statica ratione demonstratum geometricè sic ostendo, vnde theorema ipsum geometrica ratione confirmatum remanebit.

Iungatur $b\,h\,l$, & ex puncto c ducatur ad rectam $h\,a$ protractam $c\,l\,x$, ita vt $c\,l$, æqualis sit ipsi $l\,x$; iungaturque $b\,x$ secans $h\,e$ protractam in m. Tum ad $b\,x$ ducatur parallela ipsi $c\,x$ recta $f\,o$ secans $b\,l$ in n; & iungatur $c\,o$ secans $b\,l$ in k. Ostendendum est priùs rectam $f\,o$, adeoque $c\,x$ parallelam esse ipsi $g\,d$; & rectam $c\,k\,o$ eandem esse ac $c\,h\,m$. Erit enim $c\,b$ ad $b\,f$, siue $c\,g$ ad $g\,f$, vt $c\,l$ ad $f\,n$, siue $l\,x$ ad $f\,n$, hoc est $l\,h$ ad $h\,n$; quarè, cùm $c\,x$ parallela sit ipsi $f\,o$, erit etiam $g\,d$ parallela ipsis $f\,o$, $c\,x$. Rursus erit $l\,b$ ad $b\,n$, vt $c\,l$, siue $l\,x$ ad $f\,n$, & vt $l\,x$, siue $c\,l$ ad $n\,o$: Vt autem $l\,x$ ad $f\,n$, ita $l\,b$ ad $n\,b$; & vt $c\,l$ ad $n\,o$, ita $l\,k$ ad $k\,n$; igitur $l\,h$ ad $h\,n$, vt $l\,k$ ad $k\,n$. Quamobrem punctum h idem est, ac punctum k, adeoq; recta $c\,k\,o$ eadem est, ac $c\,h\,m$. Fig. 5.

His præmissis ostendo rectam $b\,e\,d\,a$ sectam esse harmonicè, siuè esse $a\,b$ ad $b\,e$ vt $a\,d$ ad $d\,e$. Ex puncto e ducatur ad $b\,l$ recta $e\,r$ parallela ipsi $g\,d$, siue $c\,x$; & ex puncto a iisdem parallela ducatur recta $a\,t\,u$ occurrens $b\,l$ in t, & kc in u, erit ergo $a\,b$ ad $b\,e$, vt $a\,t$, siue $u\,t$ ad $e\,r$, hoc est $t\,k$ ad $k\,r$, siue $a\,d$ ad $d\,e$. Quod erat &c.

QVÆSITVM SECVNDVM,

Quod est proponentis primum.

Theorema.

DVabus rectis contingentibus circulum, conicamue sectionem, aut oppositas; & à contactibus per bina perimetri puncta ductis quatuor rectis se se decussantibus extra perimetrum in alijs duobus punctis, quæ iungantur recta: dico hanc transituram esse per punctum, vbi contingentes occurrunt; vel, si non occurrant, iisdem fore parallelam.

EX IOANNE CEVA.

Antequam arduæ propositionis demonstrationem aggrediar, operæ pretium est nonnulla, quæ sequuntur, lemmata præmittere.

Lemma primum.

SI à tribus rectis in vnum punctum sibi occurrentibus, aliæ duæ ab vno alio puncto deriuantes secentur, sitque earum vna harmonicè secta, altera item harmonicè diuidetur.

Vniantur datæ tres rectæ in puncto a, sintque duæ aliæ ipsas secantes $k\,h\,b\,n$, $k\,i\,c\,m$, ab vno puncto k deriuantes: ostendendum est, si altera earum, vt $k\,i\,c\,m$, Fig. 6. & 7.

secta sit harmonicè, etiam k *b h n* fore harmonicè diuisam; scilicet esse *n b* ad *b h*, vt *n* k ad k *b*.

Recta *m c* ad *c i*, hoc est pondus *i* ad *m* (in elemento, cuius libræ *m a n*, *n b h*, *b a i*, *i c m*, *c b a*) componitur ex rationibus ponderum *i* ad *b* ad *n* ad *m*, hoc est rectarum *a b* ad *a i*, *n b* ad *b h*, & *m a* ad *a n*. In alio verò elemento, cui sunt libræ *a m*, *m* k, k *n*, *a i*; est k *i* ad *m* k, siue pondus *m* ad *i*, in ratione composita ponderum *m* ad *n* ad *b* ad *i*, vel rectarum *a n* ad *m a*, k *b* ad *n* k, *a i* ad *a b*. Igitur superioribus cum his rationibus coniunctis, videlicet *a n* ad *m a*, *m a* ad *a n* (æqualitatis), *a i* ad *a b*, *a b* ad *a i* (æqualitatis), k *b* ad *n* k, *n b* ad *b h*: fiet ratio composita ex k *b* ad *n* k, & *n b* ad *b h* similis compositæ ex duabus *m c* ad *c i*, & k *i* ad *m* k; atqui istæ posteriores conficiunt rationem æqualitatis (cùm ex hypothesi sit *m c* ad *c i*, vt *m* k ad k *i*) ergo æqualitatis pariter rationem constituent k *b* ad *n* k, & *n b* ad *b h*; ideoque erit *n b* ad *b h*, vt *n* k ad k *b*. Quod erat &c.

Lemma secundum.

SI recta quædam secet quatuor rectas in vnum concurrentes, & quæcunq; alia easdem vtcunque intersecet; si earum vna à quatuor rectis harmonicè secta fuerit, altera item harmonicè diuisa erit.

Rectæ in vnum punctum *c* conuenientes secentur à recta *a g f e*, sitque hæc ab illis harmonicè diuisa; dico, si ducatur quæcunque alia recta *b h i d*, hanc etiam ab ijsdem harmonicè diuisum iri.

Fig. 8. Ex *b* agatur *b* k *l m* parallela ipsi *a e*; eritque similiter diuisa atque *a g f e*, adeòq; harmonicè. Cùm igitur ab eodem puncto *b* sint duæ rectæ *b* k *l m*, *b h i d* secantes alias tres concurrentes in *c*; & earum *b* k *l m* harmonicè diuisa sit, erit etiam altera *b h i d* harmonicè diuisa. Quod erat &c.

Lemma tertium.

SEcent se rectæ (vt exhibet figura) *b c e*, *c i b*, *e b f*, *c* k *f*, *b* k *h*, *b l f*. Dico semper *e i* k *l* diuidi harmonicè, ita vt *l* k ad k *i* semper sit vt *e l* ad *e i*.

Fig. 9. Recta *l* k ad k *i* (in elemento, in quo libræ *b* k *b*, *b i c*, *c* k *f*, *f l b*, *l* k *i*) hoc est pondus *i* ad *l*, est in ratione ponderum *i* ad *c* ad *f* ad *l*, scilicet rectarum *b c* ad *b i*; *f* k ad k *c*, *b l* ad *b f*. In elemento autem, cuius libræ *b e c*, *c i b*, *b e f*, *f l b*, *l e i*, est recta *e i* ad *e l*, hoc est pondus *l* ad *i*, in ratione composita ponderum *l* ad *f* ad *b* ad *i*, hoc est rectarum *b f* ad *b l*, *b e* ad *e f*, *i c* ad *c b*; ergo rationes *l* k ad k *i*, & *e i* ad *e l* efficient simul rationem compositam ex *i c* ad *c b* ad *b i* (hoc est *i c* ad *b i*), *b f* ad *b l*, *b l* ad *b f* (æqualitatis) & ex *f* k ad k *c*, *b e* ad *e f*. Atqui in elemento librarum *b i c*, k *e i*, k *c f*, recta *i c* ad *b i*, hoc est ratio ponderis *b* ad *c*, componitur ex rationibus ponderùm *b* ad *f* ad *c*, hoc est rectarum *e f* ad *b e*, k *c* ad *f* k, ergo rursus ratio, quæ componitur ex duabus *l* k ad K *i*, *e i* ad *e l*, erit similis compositæ ex rationibus *b f* ad *b l*, *b l* ad *b f* (æqualitatis) *f* K ad K *c*, K *c* ad *f* K (æqualitatis), & demum pariter æqualitatis *b e* ad *e f*, & *e f* ad *b e*: Quamobrem ratio composita ex *l* K ad K *i*, & *e i* ad *e l* erit ipsa etiam æqualitatis, ideoque erit *l* K ad K *i*, vt *e l* ad *e i*. Quod erat &c.

Lemma

Lemma quartum.

Iisdem positis, non sint cb, hf parallelæ, sed productæ conueniant in d. Dico vtramque $cibd$, $hlfd$ diuisam esse harmonicè. Fig. 9.

Ducatur $dmKn$. Erit in triangulo cdb recta $nKmd$ harmonicè secta. Cùm igitur ipsa $nKmd$ harmonicè diuidatur à tribus rectis; etiam ipsæ $cibd$, $hlfd$ ab ijsdem tribus ef, el, eb harmonicè diuidetur. Quod &c.

Lemma quintum.

Sint harmonicè sectæ $fgha$, $dcba$ concurrentes in a, iunctisque df, cg, bh; & productis, dico eas (dummodo non sint parallelæ) conuenire in vnicum punctum.

Conueniant cg, df in k, & ab eodem puncto k ducatur ad punctum b recta kb secans af (si fieri potest) in puncto i diuerso ab h; erit igitur $fgia$ harmonicè secta à tribus bik, ck, dk, nam ab ijsdem ponitur diuisa harmonicè etiam $dcba$; sed eadem $fgha$ est etiam ex hypothesi harmonicè secta in punctis g, h, ergo ga est media harmonica tam duarum fa, ah, quàm eiusdem fa, & ai. Quod fieri non potest, nisi i cadat in h, atque adeò bh conueniat cum ipsis cg, df in k. Quod erat &c. Fig. 10.

Lemma sextum.

Si tres lineæ fd, cb, eg secuerint harmonicè duas $fcgh$, $ebdh$ conuenientes in h; dico tres illas se inuicem secare omnes in vno eodemque puncto. Fig. 11.

Punctum, in quo se secant duæ rectæ fd, eg sit a, & iuncta ca producatur, vt secet he (si fieri potest) in alio puncto quam b, nempe in k. Igitur, ex lemmate primo, recta $hdkc$ erit secta harmonicè in punctis k, d; sed eadem, ex hypothesi, ponitur secta harmonicè etiam in b, & d; ergo kh, bh erunt duæ mediæ harmonicæ inter duas easdem eh, hd. Quod est absurdum. Si igitur tres lineæ &c. Quod erat &c.

Lemma septimum.

Si sint quatuor rectæ tangentes circulum, conicamque sectionem, aut oppositas, vt ca, ab, be, ef; & iuncta cb transeat per occursum e duarum contingentium be, fe: dico etiam ab transituram per reliquum contactum f. Sed oportet in oppositis sectionibus tangentes ca, ab esse ad partes oppositas tangentibus eb, ef, alias fieri non posset.

Si enim fieri potest, non transeat ab per f, sed occurrat sectioni in g. Ducatur $adkf$, & ec secet ipsam ahg in i. Erit (a) vtraque $abig$, $adkf$ secta harmonicè; proinde iunctis rectis hd, gf, coibunt illæ cum ik pariter producta in aliquo alio puncto l. Itaque si rectam gfl contigerit esse supra tangentem fe, erit in oppositis hdl infra, & in reliquis sectionibus supra tangentem eb; quod fieri nequit: etenim iuncta dh supra tangentem eh in oppositis, infra verò in alijs sectionibus reperiri debet. Quod si recta gfl ponatur infra tangentem fe, simile absurdum viceuersa concludetur; quamobrem ab necesse est transire per f. Quod &c. Fig. 12. & 13. a. 37. & 39. l. 3. Con.

Corol-

Corollarium I.

Fig. 11. & 13. Hinc patet, si ducantur iungentes contactus fb, cb, non tantùm transire per puncta concursuum a, c respectiuè; verùm etiam ipsas fba, cbe secari harmonicè à communi earum sectione, contactibus, & occursu.

Corollarium II.

Fig. 12. & 13. Hinc pariter deducitur, si ce secta sit harmonicè in k, & b, & iungatur ak secans sectionem in d fore, vt iuncta ed contingat sectionem in d; ex quo rursus infertur, quod tangens producta, vt secet vtramque contingentem ba, ea, harmonicè diuidatur ab ipsis tangentibus, contactu d, & puncto e: Nam cùm à tribus ab, adk, ac secetur harmonicè recta $ebkc$, secabitur quoque ab eisdem harmonicè contingens ab eodem puncto e deducta. Sed etiam conuersum patet, nempe, si ab aliquo puncto e iungentis contactus c, b, ducatur tangens sectionem, vt in d, secansque tangentes ab, ac, fore vt si iuncta ad producatur, secet harmonicè ipsam ebc in k.

Corollarium III.

Fig. 12. & 13. Similiter deducitur, quod si ebc harmonicè secta sit in k, producaturq; ak vt secet sectionem in aliquo puncto f, iunctam ef tangere sectionem in f; quamobrem, si producatur ef, vnà cum contingentibus ab, ac, ab his, & contactu harmonicè secabitur; nam à tribus ba, akf, ac secatur harmonicè ipsa $ebkc$, ergo etiam ab ijsdem harmonicè diuidetur producta ef.

His præmissis, iam demonstremus quod ab initio propositum fuit.

PROPOSITIO.

Fig. 14. In circulo, conicaue sectione, & oppositis sint tangentes db, ab; & à contactibus d, a ducantur ad duo perimetri puncta i, h rectæ di, dh, ah, ai, quæ se interfecent extra curuam in duobus punctis g, k, quæ iungantur rectâ: Dico gk transituram per b, adeòque gkb vnicam esse rectam; sin autem tangentes parallelæ fuerint, esse gk vtrisque parallelam.

Claritatis gratia, sectiones oppositas à circulo, reliquisque sectionibus seorsum considerabimus. In circulo autem, conicaue sectione (exclusis oppositis) triplex esse potest casus propositionis. Primus est, si puncta i, h sumpta fuerint vtraque aut supra rectam da iungentem contactus, aut infra eandem, & protractæ ih, ad inter se conueniant. Quod si non conueniant, erit secundus casus. Tertius est, si puncta i, h sumpta fuerint vnum supra, alterum infra rectam iungentem tactus. Quia verò in vnoquoque casu possunt contingentes sibi occurrere, vel esse inter se parallelæ; Demonstrabimus priùs per singulos casus, si contingentes inuicem occurrant, vt in b, puncta b, g, k in vnica esse recta. Deinde ostendemus gk contingentibus parallelam fore, si illæ inter se parallelæ fuerint.

Primò. Puncta i, h sumpta fuerint vtraque aut supra rectam iungentem contactus, aut infra eandem; & protractæ ih, ad sibi inuicem occurrant in e.

Cadent

Cadent igitur puncta b, g vel ad easdem partes, vel ad partes oppositas. Cadant
priùs ad easdem. Ex puncto e ad punctum c, in quo gk curuam secat, ducatur *Fig.* 14.
ec, quæ secet tangentes db, ab in f, s; & similiter ducatur bk occurrens ade & 15.
in q; secetque demum recta ek sectionem in o, p, & rectas gia, gbd in m, l.
Quoniam igitur $gbld$, $gima$ (a) secantur harmonicè à tribus rectis ehi, $elkm$, a. *lem.*
eda, erunt (ex conuersa 37. *lib.* 3. *conic.*) go, gp, si iungantur, tangentes se- 4.
ctionem in o, p; & quia (ex antecedenti theoremate) est $pkoc$ harmonicè secta,
erit (*ex* 2. *Coroll. Lem.* 7.) ec tangens sectionem in c, adeòque (*ex eodem Coroll.*)
harmonicè secabitur $efcs$ à contactu c, & tangentibus dfb, asb; igitur quæ
ducitur recta ex b in c, secabit pariter (b) harmonicè ipsam adc in q; quam- b. *lem.*
obrem vnica recta erit, quæ iungit puncta b, c, q. Deinde quia, si producatur 1.
gck, secatur eadem $aqde$ (c) harmonicè à tribus rectis gld, gck, gma; erit c. *lem.*
propterea vnica recta $gckq$: sed erat vnica etiam recta bcq, ergo in vtraque 4.
recta communia sunt duo puncta c, q; adeòque in vnica recta sunt puncta
b, g, k.

Cadant deinde puncta b, g ad oppositas partes. Ex puncto e ducantur ad *Fig.* 16.
sectionem tangentes ec, ef. Iam, si iungatur bc, transibit (d) per alterum con- d. *lem.*
tactum f; & quia ex antecedenti theoremate, ek est media harmonica inter mc, 7.
el, transibit (*vt ex* 37. *lib.* 3. *Con.*) eadem bcf per k, adeòque vnica erit recta
$fkcb$. Rursus quia, si ducantur contingentes go, gp, vnica pariter (c) erit e. *lem.*
recta eop, quæ (*ex corol.* 1. *lem.* 7.) harmonicè secabit ipsam gc; estque ex 7.
eodem antecedenti theoremate, gk media harmonica inter gf, gc; transibit
ipsa eop etiam per k; quarè non est alia recta $elkm$ ab $eokp$. Cùm igitur gl,
gm sint tangentes, & tangentes etiam ef, ec, transibit gf (f) per reliquum f. *lem.*
contactum c; ac proinde gkc, siue gkb vnica erit recta. Quod erat &c. 7.

Hactenus Ioannes Ceua. Interea verò, dum cætera transmittit, ne opus diu-
tiùs protrahatur, libuit reliquos casus aggredi, quos, præmisso corollario, ita
soluo.

Corollarium.

Ex his, quæ demonstrata sunt in primo casu, colligitur per reductionem ad *Fig.* 14.
impossibile, quod si gkb vnica fuerit recta, fueritque bd tangens, etiam 15. &
iuncta ba futura sit tangens. 16.

Secundò. Iunctæ ih, ad sint inter se parallelæ. Diuidantur bifariam ad, ih
in punctis q, r; iungaturque qr. Constat ex elementis rq protractam transire *Fig.* 17.
per k, & g, cùm autem rq sit diameter, sitque ad applicata, tangentes ab, db
conuenient (ex conuersa 30. *l.* 2. *Con.*) in vnum atque idem punctum ipsius rq
protractæ, nempe in b. Quare puncta b, g, k in vnica sunt recta. Quod erat &c.

Tertiò. Puncta i, b sumpta fuerint vnum supra, alterum infra rectam iungen- *Fig.* 18.
tem tactus. Iunctæ ad, ib se se intersecent in e; & ducatur recta $klem$ secans
gh in l, & ga in m; protrahaturque tangens bd, vt secet km in o, & kh in f.
Iam, si ex puncto b ducatur tangens, ipsa (ex primo casu huius Propos. iam de-
monstrato) per punctum o transibit. Quoniam igitur $hldg$ est (g) harmonicè g. *lem.*
secta, atque etiam harmonicè secta $fodb$, vt ostendetur in sequenti lemmate; 4.
iunctæque lo, hf in punctum k conueniunt; etiam iuncta bg (h) in idem k con- h. *lem.*
ueniet. Quare bgk est vnica linea recta. Quod erat &c. 5.

Lemma octauum.

Fig.19. Siquidem tangentes $a\,b$, $b\,o$ protractæ in aliquod punctum conueniant, vt in p, ducta $p\,d\,q$ occurrente ipsi $f\,a$ in q, erit (*ex coroll. 1. lem. 7.*) $f\,b\,a$ harmonicè secta in q, adeòque (*ex lem. 1.*) harmonicè secta ipsa $f\,o\,d\,b$. Si autem pa-
Fig.20. rallelæ fuerint, ducta $d\,q$ contingentibus parallelâ, erit pariter (*ex 36. l.1. con.*) ipsa $f\,b\,a$ harmonicè secta in q; adeòque, ex elementis, harmonicè etiam secta erit $f\,o\,d\,b$. Quod supererat demonstrandum.

Corollarium.

Fig.14. 15.16. 17. & 18. Hinc, per reductionem ad impossibile, vniuersaliter infertur, quod si $b\,g\,k$ vnica fuerit recta, fueritque $b\,d$ tangens, etiam iuncta $b\,a$ futura sit tangens; siue iunctæ $i\,b$, $a\,d$ fuerint inter se parallelæ, seu non; siue puncta i, b existant vtraque aut supra, aut infra rectam $d\,a$ iungentem contactus, siue vnum supra, alterum infra. Atque hæc ita se habent quoties tangentes sibi occurrunt.

Fig.21. Iam verò in circulo, & ellipsi parallelæ sint contingentes $a\,x$, $d\,b$. Ostendendum est iunctam $g\,k$ vtrisque parallelam esse. Si non est parallela, conueniat cum $d\,b$ in b, & iungatur $b\,a$. Erit igitur (ex proximè antecedenti corollario) $b\,a$ contingens; quod est absurdum; cùm ponatur contingens $a\,x$ ipsi $d\,b$ parallela. Non igitur $g\,k$ cum ipsa $d\,b$ conuenit; Quamobrem vtrique contingenti parallela est. Quod erat &c.

Diversâ prorsus methodo soluta, & quidem demonstratione affirmatiua, hæc eadem subinde ad nos misit Ioannes Ceua, adiecto etiam casu de sectionibus oppositis. Sic autem procedit.

Sit nunc pro tertio casu propositionis recta $d\,a$ iungens contactus interiecta
Fig.22. inter puncta i, h. Dico iterum $g\,b\,k$ vnicam rectam esse. Ducatur tangens ex h, quam secet $b\,d\,l$ altera ex propositis tangentibus in m, conueniatq; eadem $h\,m$ in p cum altera contingente $a\,b$; iuncta verò $p\,d$ secet $a\,h\,l$ in q. Ostendam infra
k.lem. rectam $a\,q\,h\,l$ harmonicè diuisam; adeòq; harmonicè etiam (k) diuisa erit $l\,m\,d\,b$.
1. Quoniam verò, si intelligatur in n harmonicè diuisa $b\,d\,g$, & iungatur $k\,r\,n$, se-
i.lem.1. catur (i) pariter harmonicè recta $a\,r\,i\,g$; iccirco, ducta ex g contingente $g\,o$, tran-
l.9.l 4. sibit (l) ipsa $k\,r\,n$ per contactum o: Insuper, quæ ducitur ex concursu m tan-
Con. gentium $d\,m$, $h\,m$ ad punctum n, quo nempe harmonicè diuisa est $b\,n\,d\,g$, transit (*ex 2. coroll. lem.7.*) per eundem contactum o; igitur in eadem recta linea reperientur omnia puncta k, r, n, o, m. Sunt igitur $l\,m\,d\,b$, $h\,m\,d\,g$ duæ rectæ
m.lem. harmonica ratione diuisæ; & ideò (m) rectæ $l\,h$, $m\,n$, $g\,b$ in idem punctum
5. conuenient; atqui duæ $l\,h$, $m\,n$ vniuntur in puncto k, ergo & $g\,b$ producta in idem k coibit. Quod erat &c.

Assumptum.

Fig.22. Esse verò $a\,q\,h\,l$ harmonicè sectam, sic ostenditur. Si enim à contingente $d\,l$, & recta $p\,d$ non secatur harmonicè ipsa $a\,q\,h\,l$, erit aliud punctum in eadem recta citra, vel vltra l, quo harmonicè eadem recta terminetur; atqui, si ducatur ab hoc alio puncto ad idem d recta, hæc (*ex coroll.2.lem.7.*) inibi sectionem continget, ergo $l\,d$ non erit contingens; quod est contra id quod ponebatur. Igitur &c.

Corol-

Corollarium.

Liquet ex superiùs ostensis, rectam *kn*, quæ nimirum ducta fuit ex concursu *Fig.22.*
k duarum secantium *d i k*, *b a k* ad punctum *n*, vbi *b n d g* harmonicè secatur, transire etiam per concursum *m*; vel quæ ducitur à puncto *m* concursu tangentium *b m*, *d m* ad punctum *n*, aut ad contactum *o*, eandem productam peruenire ad concursum *k*.

Iam tangentes *a b*, *d b* sibi æquidistent, & puncta *i*, *h* sint ad eandem partem *Fig.23.*
rectæ *a d* iungentis contactus. Dico in hoc casu *g K* parallelam esse tangentibus *d b*, *a b*; quod tamen euenire tantummodo potest in circulo, ellipsi, & sectionibus oppositis, de quibus infra. Ducantur ergo in circulo & ellipsi ex puncto *g* contingentes *g m*, *g o*. Iam, si iungatur *m o* secans *g a* in *p*, & *g d* in *l*; harmonicè (*n*) sectæ erunt rectæ *g i p a*, *g h l d*; Atqui eædem (*o*) harmonicè secan- n.37.*l.*
tur à recta *e k*; ergo vnica recta est *e m p l o*. Quoniam verò, si ducantur tangen- 3. *con.*
tes *e f*, *e c*, recta *c f* harmonicè (*p*) diuidet ipsas *e i h*, *e a d*, quas pariter har- o. *lem.*
monicè secat recta *g k* (est enim ex 3. *lem.* *e p K l* harmonicè diuisa à tribus lineis 4.
in *g* concurrentibus, adeoque ex 1. *lem.* ab iisdem tribus harmonicè secabuntur p.37.*l.*
ipsæ *e i h*, *e a d*) igitur vnica recta est *g f K c*. Cùm autem, propter parallelas 3.*con.*
contingentes, recta *a d* (ex conuersa 27. *l.* 2. *con.*) sit diameter sectionis; & *fc* vniens contactus sit applicata ad diametrum *d a*, quæ scilicet protracta transit per *e* occursum contingentium *f e*, *c e* (quod infertur ex 30. *l.* 2. *con.*) erit *g f K c* (*q*) parallela contingenti *a b*, vel *d b*. Quod erat &c. q.32.*l.*

Quod si, existentibus parallelis *a b*, *d b*, recta *d a* iungens contactus cadat in- 1.*con.*
ter puncta *i*, *h*; dico adhuc *g K* ipsis tangentibus parallelam esse. Quoniam in *Fig.24.*
superioribus casibus ostensum est tres rectas *K g*, *d b*, *a b* in vnicum punctum, quantumuis remotissimum, semper concurrere; hinc fit, vt si concursus rectarum *d b*, *a b* euanescat, hoc est, si parallelæ inter se fuerint ipsæ *d b* *a b*, etiam *K g*, vtrique parallela esse debeat. Quod erat &c.

Scholium.

Svperesset alius casus, cùm nempe *i h* parallela est ipsi *a d*: item, vbi in tertio casu accidat tangentes *a b*, *h m* inter se parallelas esse; attamen, quia facilis est demonstratio, consultò negligimus; neque enim vacat tot persequi minutias.

In oppositis sectionibus res multò latiùs patet, quàm in demonstratis huc vsque. Possunt enim tangentes sumi in vna oppositarum, & duo puncta *h*, *i*, in altera. Rursus ipsæ tangentes possunt ad ambas oppositas duci; itemque ipsa puncta *h*, *i*, adeò vt geminentur casus in reliquis sectionibus expositi. Cùm ita sit, tædet hac in re tantum laboris, & temporis impendere; propterea vnicum casum, eumque inter difficiles exhibebimus, vt, eo demonstrato, viam reliquis casibus aperiamus.

Sint in oppositis sectionibus tangentes *d b*, *a b*, assumpta puncta *h*, *i*; iunctisque *a i*, *d h*, item *a b*, *d i*, hæ occurrant inuicem in *x*, illæ verò in *g*. Dico etiam in istis sectionibus puncta *g*, *b*, *K* in vna recta reperiri. Conueniant *h i*, *d a*, in *e*. *Fig.25.*
Ducaturque *e o x f K c y l*; & iungatur *g K*, quæ protracta secet *d e* in *m*, & *h e* in *u*. Erit igitur (*r*) *g u K m* harmonicè secta; adeòque harmonicè etiam (*s*) sectæ r.*lem.*3
erunt *g h l d*, *g i o a*; propterea, si iungantur *g x*, *g y*, erunt (ex conuersa 37.*l.*3. s.*lem.*1
con.)

con.) tangentes. Quamobrem, si ex puncto *h* ducatur tangens, hæc (vt ex *lem.*7.) secabit in puncto *c* rectas *d b*, *e l*, eademque ratione tangens ex puncto *i* ducta secabit in puncto *f* rectas *a b*, *e f*. Iam producantur tangentes *c h*, *f i*, quoad conueniant in *r*; per quod punctum (vt mox ostendetur) transibit *m* κ *g* continua-
t.*lem.* 4. ta. Denique iungatur *m b*. Quoniam igitur harmonicè (*t*) secta est *e i u h*, harmonicè etiam (*u*) secta erit *e f* κ *c*; atqui (*ex lem.*4.) harmonicè secta est *e a m d*,
u.*lem.* 1. igitur ab eadem *b m* (*ex lem.*1.) harmonicè secabitur ipsa *e f c*. Sunt igitur puncta *m*, κ communia rectarum *m b*, *m r*; adeoque vnica recta est *m* κ *u b g r*. Quamobrem puncta *b g* κ in vnica sunt recta. Quod erat &c.

Assumptum.

Fig.26. QVod autem κ *g* continuata transeat per punctum *r*, sic ostenditur. Transeat, si fieri potest, per aliud punctum *n*, in quo secet alterutram ex tangentibus, vt *i r*. Eadem igitur κ *g* continuata secabit in aliquo puncto, vt in *p*, tangentem *a b*. Iungantur *n b*, *p d*, quæ protractæ secent rectam *e l* in punctis *q*, *t*, quæ non erunt vnum atque idem punctum, vt facilè ostenditur. Erit ergo, vt priùs, recta *e q* harmonicè secta in punctis *f*, κ, in quibus harmonicè pariter secta erit altera recta *c t*; quod est absurdum. Transit igitur κ *g* continuata per punctum *r*. Quod supererat demonstrandum.

Scholium.

Fig.25. HInc, siue puncta sumpta fuerint vtraque supra, siue infra rectam iungentem contactus, in vnica recta erunt tria puncta intersectionum. Nam ostensum est non modò puncta κ, *b*, *g*, sed etiam κ, *g*, *r* in vnica recta esse.

Huc vsque eximius geometra. Antequam verò alios casus aggredior, libuit minuta quædam, quæ ad plenissimam demonstrationem desiderari possent, vlteriùs explicare.

Fig.25. Et primò; si *b i* parallela fuerit ipsi *d a*, bifariam diuisis *b i*, *d a* in punctis *n*, *m*, protracta *m n* transibit (ex elementis) per puncta κ, *g*; & (ex conicis) per *b*; quarè puncta *b*, *g*, κ in vnica erunt recta. Deinde, si tangentes *c b*, *f i* fuerint inter se parallelæ, idem euincetur; nam priùs ostendetur, deducendo ad idem absurdum, rectam κ *g* ipsis *c b*, *f i* parallelam esse; tum ex parallelis ea omnia demonstrabuntur, quæ ex lemmate primo deducta fuerunt. Postremò, si tangentes *d b*, *a b* fuerint inter se parallelæ, facilè ostendemus, per reductionem ad impossibile (vt supra ratiocinati sumus in reliquis sectionibus) iunctam κ *g* contingentibus parallelam esse. Quamobrem absolutus omnino remanet hic casus.

Vt verò dilucidè procedamus in demonstratione reliquorum casuum, eosdem distinctè subijciemus. Sex igitur casus habent sectiones oppositæ. Primus est, si puncta *i*, *b* sumpta fuerint vnum in vna, alterum in altera oppositarum, vtraque verò aut supra, aut infra rectam iungentem contactus: quod si iungens contactus inter ea puncta interijciatur, erit secundus casus. Tertius est, si puncta sumpta fuerint in vna tantùm hyperbola, vtraque supra aut infra ipsam iungentem: quod si iungens inter puncta assumpta interijciatur, erit quartus casus. Hi autem quatuor casus considerantur, quoties contingentes ad ambas oppositas ductæ sunt. Quintus est, si contingentes in vna, puncta verò *i*, *b* in altera opposita sumantur: quod si puncta *i*, *b*, vnum in vna, alterum in altera

oppo-

opposita sumpta fuerint, erit sextus & vltimus casus.

Primus casus superiùs ostensus est ab Ioanne Ceua. Iam reliquos præmisso lemmate demonstrabimus.

Lemma nonum.

SI oppositas sectiones contingant duæ *a b*, *d b*, sumaturq; in alterutra sectionum quoduis punctum *h*, quod cum opposito contactu iungatur recta *h a*, ducaturque tangens *h c*, erit tangens *d b* harmonicè secta à recta *h a*, & tangente *h c*.

Sumatur in altera sectione aliud punctum *i*; sintque puncta *b*, *i* vtraq; supra, aut infra rectam *d a*, & protractæ *d b*, *a i* conueniant in *g*; iungaturque *d i*, quæ secet *h a* in k. Ostendetur, vt priùs, *g b* K vnicam rectam esse, & rectam *g b l d* harmonicè secari à quatuor rectis in K concurrentibus; ergo ab ijsdem (*x*) harmonicè secabitur ipsa *b d*, adeòq; eadem *b d* harmonicè secabitur à recta *h a*, & tangente *h c*. Quod erat &c. Fig. 25. x. lem. 2

Iam pro secundo casu protrahatur tangens *d b*, quoad secet tangentem *i r* in z. Intelligantur tangentes *d z*, *i z*; sintque puncta assumpta *a*, *b*, vnum supra, alterum infra rectam *d i* iungentem contactus. Ostendendum est *g z e* vnicam rectam esse. Demonstrabitur, vt priùs, *g b l d* harmonicè secari in *b*, *l*, siuè à rectis *e b*, *e l*; & rectam *z d* (*y*) harmonicè secari à recta *i b*, & tangente *b c*, siue ab ijsdem duabus rectis *e b*, *e l*; igitur iuncta *g z* (*z*) in idem punctum *e* conueniet. Quare vnica est recta *g z e*. Quod erat &c. Fig. 25. y. lem. 9 z. lem. 5

Pro tertio casu puncta *i*, *b* sumpta fuerint in vna tantùm hyperbola, vtraque supra aut infra rectam *d a* iungentem contactus; secentque *d b*, *d* K ipsam *b a* in punctis *n*, *l*. Ducatur tangens *b c y* secans iunctam K*g* in *c*, & *b a* in *y*; iungaturque *c i*, quæ protracta secet *b a* in *e*: eritque (vt videbimus in sexto casu) recta *c i* tangens. Demum iungantur *b b*, *b i*. Quoniam igitur tangens *b a* harmonicè (*a*) secatur à tribus rectis *i a*, *i e*, *i l*; & (ex eodem lemmate) harmonicè secatur à tribus rectis *b a*, *b y*, *b n*, fit vt, si protrahatur K *c g*, quoad secet ipsas *b b*, *i b*, fit, inquam, vt K*g* protracta harmonicè (*b*) secari debeat à quatuor rectis *b* K, *b c*, *b g*, *b b*; & harmonicè pariter (*c*) à quatuor rectis *i* K, *i c*, *i g*, *i b*. Conueniet igitur K*g* protracta in punctum *b* commune linearum *b b*, *i b*. Quamobrem puncta K, *g*, *b* in vnica sunt recta. Quod erat &c. Fig. 27. a. lem. 9 b. lem. 2 c. lem. 1. 2.

Hoc idem aliter demonstrari potest hoc pacto. K*g* secet hyperbolam in *o*; iungaturque *b i*, quæ protracta secet K*g* in *m*, & *a d* in *f*. Erit igitur (*d*) *f i m b* harmonicè secta; & iuncta *f o* (vt ex lem. 7.) tangens. Propterea (ex conicis) *m o* protracta occurret in alio puncto eidem hyperbolæ *a b*, vel oppositæ (quod idem est) vt in *x*; eritque iuncta *f x* tangens. Quoniam igitur *a d* iungens contactus transit per *f*, in quo conueniunt tangentes *o f*, *x f*; etiam *o x* iungens contactus (*e*) transibit per *b*, in quo conueniunt tangentes *a b*, *d b*. Quare K*g b* vnica est recta. Quod erat &c. d. lem. 3 Fig. 27. e. lem. 7

Pro quarto casu, puncta *i*, *b* sumpta fuerint in vna tantùm hyperbola, vnum supra, alterum infra rectam *d a* iungentem contactus; secentque *a i*, *a h* ipsam *b d* protractam in punctis *e*, *o*. Ducatur tangens *b l* secans iunctam K*g* in *l*, & *b o* in *n*; iungaturque *l i* secans *b d* in *c*: eritque (vt videbimus in sexto casu) recta *l i* tangens. Denique iungantur *b i*, *b b*. Quoniam igitur tangens *b d* Fig. 28.

harmo-

f. *lem.* 9. harmonicè (*f*) secatur à quatuor rectis *id*, *ic*, *ie*, *ib*; & (ex eodem lemmate) recta *bo* harmonicè secatur à quatuor rectis *bo*, *bn*, *bd*, *bb*, fit vt, si protrahatur K *lg*, quoad secet ipsas *bb*, *ib*, fit, inquam, vt K*g* protracta harmonicè g. *lem.* 2. secari debeat (*g*) à quatuor rectis *h*K, *bl*, *bg*, *bb*, & harmonicè pariter (ex eodem lemmate) à quatuor rectis *i*K, *il*, *ig*, *ib*. Conueniet igitur K*g* protracta in punctum *b* commune linearum *bb*, *ib*. Quarè vnica est recta K*gb*. Quod erat &c.

Fig. 25. Ad completam demonstrationem horum quatuor casuum superesset ostendendum rectam K*g*, siue aliam iungentem puncta intersectionum, futuram contingentibus parallelam, quoties illæ inter se parallelæ sint. Attamen, quia non vacat demonstrationem affirmatiuam afferre, sufficiat innuere, posse id facilè confirmari ratione negatiua, qua scilicet in superioribus vsi sumus.

Pro quinto casu, *dc*, *be* eandem hyperbolam contingant, sumanturque puncta *i*, *a* in opposita; iunctæque *di*, *ba* se se intersecent in K, & productæ *bi*, *da* sibi inuicem occurrant in *e*. Ostendendum est *c*K*e* vnicam rectam esse. Vel igitur iunctæ *ai*, *db* sunt inter se parallelæ, vel non. Si primum: bifariam diuisis *ai*, *db* in punctis *o*, *l*, iungatur, & protrahatur *lo*, quæ (ex conicis) transibit per punctum *c* occursum contingentium, & (ex elementis) per puncta K, *e*; quare *c*K*e* vnica erit recta. Si secundum, productæ *ai*, *db* sibi occurrant h. *lem.* 4. in *g*; ducaturque *eoxyl*. Erunt igitur (*h*) harmonicæ diuisæ *gbld*, *gioa*; adeòque, si iungantur *gy*, *gx*, erunt (*ex conu.* 37. *l.* 3. *con.*) tangentes. Quamobrem tangentes *dc*, *bc* (*vt ex lem.* 7.) in eodem puncto *c* secabunt rectam *xy* iungentem puncta contactuum; & propterea puncta *c*, K, *e* in vnica erunt recta. Quod erat &c.

Sextus, & vltimus casus dupliciter accidere potest. Nam punctum, quod assumitur in hyperbola, ad quam sunt ambæ contingentes, potest existere vel in curua contactibus *i*, *b* terminata (vt punctum *d* in *Fig.* 28.) vel extra eandem (vt punctum *a* in *Fig.* 27.) Ostendendum est igitur K*cg* (in *Fig.* 27.) & k*lg* (in *Fig.* 28.) vnicam rectam esse; siue, positis contingentibus *bc*, *bl*, terminatis ad rectas *kg*, iunctas *ci*, *li* sectionem contingere. Hoc autem negatiuè demonstrare, ex hucusque ostensis, præsertim ex *lem.* 9., facile erit cuiuis. Quare & superuacaneum est demonstrationem affirmatiuam afferre, & mihi præterea graue multiplicare figuras adeò implexas, vel iam exaratas nouis lineis implicare.

Scholium.

IAM Geometricè demonstranda à nobis sunt, quæ Ioannes Ceua statica ratione confirmauit, videlicet lem. primum, & tertium.

Lemma primum sic ostendo. Videatur *Fig.* 6. & 7. Siquidem anguli *nab*, *iam* sint ad verticem (vt in 6. *Fig.*) patet ex lem. antecedentis theorematis à nobis geometricè demonstrato, rectam *kicm* esse harmonicè sectam, ex hypothesi quod *knbb* sit harmonicè secta. Si autem anguli *nab*, *iam* vnus angulus sint (vt in *Fig.* 7.) ducatur recta *klor*, ita vt anguli *nab*, *lar* sint ad verticem; erit *klor* harmonicè diuisa; ergo, ex eodem lemmate superioris theorematis, erit harmonicè diuisa *kicm*. Quod erat &c.

Fig. 6. & 7. Hoc idem expressè demonstratur à Pappo l. 7. Coll. Math. prop. 145.; quod etiam inferri potest ex eodem Pap. prop. 129. eiusdem lib.: nam ibi ostendit (vbilibet sumptum fuerit punctum *k*) ita esse rectangulum sub *kb*, *nb* ad rectangulum

gulum sub k *n*, *b b*, vt rectangulum sub k *m*, *i c* ad rectangulum sub k *i*, *m c*; igitur, si rectangulum sub k *b*, *n b* æquale fuerit rectangulo sub k *n*, *b b*, hoc est, si fuerit k *b* ad *b b*, vt k *n* ad *n b*; erit etiam rectangulum sub k *m*, *i c* æquale rectangulo sub k *i*, *m c*, hoc est erit k *m* ad *m c*, vt k *i* ad *i c*. Quarè si harmonicè diuisa fuerit ipsa k *n b b*, harmonicè etiam secta erit ipsa k *i c m*.

Lemma quintum, quo indigeo ad demonstrationem tertij, est geometricè ostensum ab eodem Ioanne Ceua, quarè in huius demonstratione non immoror.

Lemma tertium ita probatur. Videatur *Fig. 9.*, nempè lemmatis quarti. Sit *e f* harmonicè diuisa in punctis *m*, *b*; iungaturque *m* k *n* occurrens ipsi *e b* in *n*; eritque pariter *c b* harmonicè diuisa in punctis *n*, *c*. Vel igitur *b c* est parallela ipsi *f b*, vel non. Si primum, erit etiam *m n* parallela ipsis *b c*, *f b*, vt constat ex elementis; adeòque etiam *e i* k *l* erit harmonicè diuisa. Si secundum, conuenient (*ex lem.* 5.) protractæ *b c*, *m n*, *f b* in idem punctum, vt in *d*. Quoniam igitur recta *e b m f* harmonicè secatur à tribus rectis in *d* concurrentibus, etiam *e i* k *l* ab eodem puncto *e* deriuans, ab ijsdem tribus rectis harmonicè diuidetur. Quod erat &c.

Atque hæc sufficiant ad plenissimam demonstrationem pulcherrimi æquè ac difficillimi theorematis.

Lubet postremò ex P. Thoma Ceua Soc. Iesu duas Appendices apponere ad ea, quæ in hoc theoremate demonstrata sunt, vlteriùs promouenda.

APPENDIX PRIMA.

DAto quouis triangulo *e n i*, cuius basis *n i* bifariam secetur in k à recta *e* k; *Fig. 29.* ductaque ex vertice *e* recta *e d* parallela basi *n i*: si ducatur recta quæcunq; *m o c d*, dico hanc harmonicè diuidi in *o*, *c*, hoc est ita esse *m o* ad *o c*, vt *m d* ad *d c*. Ducantur ex punctis *c*, *m* rectæ *c q b*, *m a*, parallela vtraque basi *n i*. Erit igitur *c b* bifariam diuisa in *q*; adeòque erit *m o* ad *o c*, vt *m a* ad *c q*, siue *q b*, idest vt *m e* ad *e b*, hoc est *m d* ad *d c*. Quod erat &c.

Corollarium.

HInc constat, quod datis tribus quibuscunque lineis ex eodem puncto *e* deriuantibus, & ducta quacunque *m o c d* harmonicè diuisa in punctis *o*, *c*, *Fig. 29.* fore vt ducta *c q b* parallela iunctæ *d e* bifariam secetur in *q*.

Constat pariter, datis tribus lineis quibuscunque *e n*, *e* k, *e i*, ex dato quouis puncto *b* duci posse lineam *b x t u*, ita ut intercepta *u t* ad interceptam *t x* datam habeat rationem. Nam sumpto in recta *e i* quouis puncto *m*, factaque *m e* ad *e b* in proposita ratione, ducatur *b q c*, ita vt bifariam diuidatur in *q*, & iungatur *m c*, cui parallela ducatur *b u*; factumque erit quod quæritur, vt constat ex superiùs ostensis.

APPENDIX SECVNDA.

IN circulo, conicaue sectione, aut oppositis sint tangentes *a b*, *d b*, in punctum *b* concurrentes, sumanturque in perimetro duo alia puncta *i*, *b*, ita vt *Fig. 30.* protractæ *a b*, *i d*, conueniant in k, iunctæ verò *a i*, *b d* sint inter se parallelæ. Dico iunctam *b* k ipsis *a i*, *b d* parallelam esse. Si enim fieri potest, protractæ

b k,

bk, bd inter se conueniant, vt in g, ita vt bkg sit vna linea recta. Iungatur ga occurrens sectioni in e, protrahatur iuncta ed, quoad secet ak in o, & iungantur bo, og. Erit igitur, ex hucusque demonstratis, bog vnica linea recta: Sed etiam ponebatur bkg linea recta, ergo duæ lineæ rectæ claudent spatium; quod est absurdum. Non igitur bk protracta conuenit cum ipsis bd, ai. Quare eisdem parallela est. Quod erat &c.

QVÆSITVM TERTIVM.

Problema.

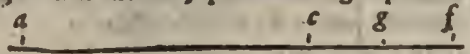
INuestigare locum puncti assumpti in recta transeunte per datum punctum, ac secante rectam positione datam, vt inuentâ tertiâ harmonicâ ad interiectam inter punctum datum & assumptum, & interiectam inter punctum datum, & rectam positione datam, sit inter hanc, & tertiam ipsam harmonicam media geometrica recta quædam magnitudine data.

Expositio problematis.

Fig. 31. 32. 33. SIT data positione recta xz, datum punctum a, data magnitudine recta K. Ducantur à puncto a quæuis rectæ ag secantes xz in g: si fiant singula rectangula gac æqualia quadrato K; & protrahantur rectæ ag ad puncta f, ita vt ac, ag, af sint tres harmonicè proportionales, puncta f erunt illa, quorum quæritur locus. Ego tamen ad pleniorem & clariorem solutionem admirabilis problematis determinabo etiam locum punctorum c. Dico igitur puncta c esse ad circulum; puncta verò f, de quibus est quæstio, esse ad hyperbolam. Vt clarior euadat vtriusque loci determinatio, à sequentibus lemmatis incipiemus. Locum punctorum f vocabimus locum quæsitum.

Lemma primum.

SI fuerint tres rectæ harmonicæ proportionales ac; ag, af; minima ac erit maior rectâ cg, scilicet excessu, quo media ag superat minimam ac.



Erit enim minima ac ad maximam af, vt cg excessus, quo media ag superat minimam ac, ad gf excessum, quo maxima af superat mediam ag; & permutando, ac ad cg, vt af ad gf: est autem af maior ipsâ gf, ergo & ac maior est ipsâ cg. Quod erat &c.

Lemma secundum.

SI ex puncto a dato ducatur ad rectam xz positione datam quædam recta ad, cuius quadratum duplum sit quadrati rectæ K magnitudine datæ, nullum punctum ipsius ad in infinitum protractæ erit ad locum quæsitum.

Fig. 31. 32. 33. Si enim fieri potest, aliquod punctum e ipsius ad protractæ sit ad locum quæsitum. Igitur, si ad ipsas ae, ad reperiatur tertia harmonica aq, (poterit autem

repe-

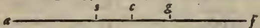
reperiri, si punctum e fuerit ad locum quæsitum (vt patet ex hypothesi) erit ex eadem hypothesi rectangulum daq æquale quadrato k; quare, cùm quadratum ad duplum sit quadrati k, erit aq dimidium ipsius ad, adeòque æqualis ipsi qd. Quia verò aq, ad, ae sunt tres harmonicè proportionales, erit, ex superiori lemmate, minima aq maior ipsâ qd, nempe excessu, quo media ad superat minimam aq; quod est absurdum. Nullum igitur punctum ipsius ad protractæ est ad locum quæsitum. Quod erat &c.

Corollarium.

Hinc, vt problema sit possibile, debet quadratum rectæ k magnitudine datæ maius esse dimidio quadrati rectæ ab perpendiculariter ductæ ex puncto dato a ad rectam xz positione datam.

Lemma tertium.

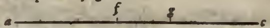
Si recta ac maior fuerit ipsa cg, ad rectas ac, ag reperiri potest tertia harmonica. Quoniam ac maior est ipsâ cg, ex ca abscindatur cs æqualis ipsi cg; fiatq; vt as ad sc ita ag ad gf. Dico af esse tertiam harmonicam ad ipsas



ac, ag. Erit enim componendo ac ad sc, siue cg, vt af ad gf; & permutando, minima ac ad maximam af, vt cg excessus mediæ supra minimam, ad gf excessum maximæ supra mediam. Potest igitur reperiri &c. Quod erat &c.

Lemma quartum.

Si fuerint duæ quæuis rectæ inæquales ac maior, ag minor, reperiri potest tertia harmonica ad ipsas ac, ag.



Diuidatur minor ag in duo segmenta af, fg, ita vt af sit ad fg, vt ac ad gc. Patet af esse tertiam harmonicam ad ipsas ac, ag. Quod erat &c.

Lemma quintum.

Si à puncto a dato ducatur ad rectam xz positione datam quæuis ag, cuius quadratum minus sit quam duplum quadrati rectæ k magnitudine datæ aliquod punctum ipsius ag protractæ erit ad locum quæsitum.

Siquidem quadratum k æquale fuerit quadrato ag, punctum ipsum g erit ad Fig. 31.
locum quæsitum; si autem maius fuerit, facto rectangulo gac æquali quadra- 32. 33.
to k, erit ac maior ipsa ag: si verò minus fuerit, facto rectangulo gac æquali eidem quadrato k, erit quidem ac minor ipsâ ag, sed maior dimidio ipsius ag; adeòque maior ipsâ cg, cùm quadratum ag ponatur minus quàm duplum quadrati k. Atqui, siue ac maior sit ipsâ ag, seu maior ipsâ cg, potest, ex quarto & tertio lemmate, reperiri ad ipsas ac, ag tertia harmonica af; igitur aliquod punctum, nempe f ipsius ag protractæ, est ex hypothesi ad locum quæsitum. Quod erat &c.

Corollarium.

Fig. 31. 32. 33. Hinc sequitur, si ex puncto *a* ducantur ad rectam *x z* duæ *ad* inter se æquales, quarum vniuscuiusque quadratum duplum sit quadrati *k*, rectas omnes ex puncto *a* ductas, & secantes rectam *x z* intra puncta *d*, non modò conuenire cum loco quæsito, sed vlterius productas eundem secare, cæteroquin duæ rectæ lineæ clauderent spatium, vt patet consideranti; adeòque ex puncto *a* non posse duci rectam, quæ tangat locum quæsitum. Vnde vlteriùs etiam infertur locum quæsitum neque esse ad parabolam, neque ad circulum, neque ad ellipsim. Cùm enim punctum *a* sit extra concauum loci, vt constat; si ille esset ad aliquam ex prædictis sectionibus, posset ex puncto *a* duci tangens, quod fieri non posse ostendimus.

PROPOSITIO PRIMA.

Locus punctorum c *est ad circulum.*

Recta k magnitudine data vel est æqualis rectæ *a b* perpendiculariter ductæ ex puncto *a* ad rectam *x z* positione datam, vel maior, vel minor.

Fig. 31. Sit primò æqualis. Diametro *a b* fiat circulus: tum ex puncto *a* ducantur quæuis *a c g* secantes circulum in *c*, & rectam *x z* in *g*. Dico singula rectangula *g a c* esse æqualia quadrato *K*, siue *a b*. Nam singula quadrata *g a* æqualia sunt quadratis correspondentibus *a b*, *g b* simul. Atqui singula rectangula *a g c* æqualia sunt singulis quadratis tangentium *g b*; igitur singula rectangula *g a c* æqualia sunt quadrato *a b*, siue k.

Fig. 32. Sit secundò maior. Ex puncto *a* ducantur ad rectam *x z* duæ *a r*, *a l*, æqualis vtraque rectæ k: tum fiat circulus transiens per puncta *r*, *a*, *l*; & ducantur ex puncto *a* quæuis *a g c* secantes circulum in *c*, & rectam *x z* in *g*. Dico singula rectangula *g a c* esse æqualia quadrato k, hoc est *a l*, siue *a r*.

Punctum *g* erit vel intra circulum, vel extra, vel in perimetro. Sit primò intra circulum. Quoniam rectangulum *a g c* æquale est rectangulo *l g r*, & quadratum *a g* est æquale quadratis *a b*, *g b* simul, erunt quadratum *a g*, & rectangulum *a g c* simul, siue vnicum rectangulum *g a c* æquale rectangulo *l g r*, & quadratis *g b*, *a b* simul: Sunt autem rectangulum *l g r*, & quadratum *g b* simul æqualia quadrato *l b*; igitur rectangulum *g a c* est æquale quadratis *l b*, *a b* simul, siue vni quadrato *a l*, hoc est quadrato k. Quod si punctum *g* coincidat cum puncto *b* res est manifesta. Sit deinde punctum *g* extra circulum. Quoniam quadratum *g a* æquale est quadratis *g b*, *a b* simul, & rectangulum *a g c* æquale rectangulo *r g l*, erit reliquum rectangulum *g a c* æquale reliquis quadratis *a b*, *l b* simul, siue vni quadrato *a l*, hoc est quadrato k. Si autem postremò punctum *g* fuerit in perimetro, adeòque puncta *g*, *c* idem fuerint, ac punctum *l*, aut *r*, res est clarissima; quod similiter obseruari potest in primo casu.

Fig. 33. Sit tertiò k minor perpendiculari *a b*, & æqualis ipsi *a h*. Fiat vt *a b* ad *a h*, ita *a h* ad *a m*. Tum diametro *a m* fiat circulus; & ducantur ex puncto *a* quæuis *a c g* secantes circulum in *c*, & rectam *x z* in *g*; ex puncto verò *m* tangens *m n*,

quæ

quæ secet ipsas ag in puncto n. Dico singula rectangula gac esse æqualia quadrato ab, siue k. Nam singula rectangula nac ad singula rectangula correspondentia gac sunt vt an ad ag, siue vt am ad ab, siue vt quadratum am ad quadratum ab: Sunt autem (vt ostensum est) singula rectangula nac æqualia quadrato am; igitur & singula rectangula gac æqualia sunt quadrato ab, siue k. Quod erat ostendendum. Locus igitur punctorum c est ad circulum. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

HIC nota rectangulum gac esse æquale quadrato k, quantæcunque magnitudinis sit ipsa ag; attamen ad hoc vt in ipsa ag protracta reperiri possit punctum f pertinens ad locum quæsitum, necesse esse vt quadratum ipsius ag minus sit quàm duplum quadrati rectæ k magnitudine datæ; vt superiùs ostensum est.

PROPOSITIO SECVNDA.

Locus quæsitus punctorum f est ad hyperbolam.

RECta k magnitudine data vel est æqualis rectæ ab perpendiculariter ductæ ex puncto a ad rectam xz positione datam, vel maior, vel minor.

Sit primò æqualis. Diametro ab fiat circulus: tum sumatur in recta xz rectæ *Fig. 34.* bd æqualis ipsi ab; & intelligatur hyperbola bf, cuius axis ab, latus rectum bd, & iungatur ad. Demum ducantur quæuis $acgf$ secantes circulum in c, rectam xz in g, & hyperbolam in f. Dico, non solùm singula rectangula gac æqualia esse quadrato k, siue ab (quod iam ostensum est) sed præterea rectas af diuisas esse harmonicè in punctis g, c, hoc est esse af ad fg, vt ac ad cg. Ex punctis f ducantur rectæ bfm parallelæ rectæ xz tangenti, & secantes ipsas ab, ad protractas; ab quidem in h, & ad in m; eruntque fh applicatæ. Iam, quoniam ab est æqualis ipsi bd, & ah æqualis erit ipsi hm; quarè, cùm quadratum * hf æquale sit rectangulo mhb, æquale etiam erit rectangulo ahb: ** 12. lib. 1. Conic.* adeòque erit quadratum ab ad rectangulum ahb, hoc est ab ad hb, siue af ad fg, vt quadratum ab ad quadratum hf, siue vt quadratum ab ad quadratum bg, hoc est rectangulum gac ad rectangulum agc, siue vt ac ad cg. Quod erat demonstrandum.

Sit secundò maior. Ex puncto a ducantur ad rectam xz duæ al, ar, æqua- *Fig. 35.* lis vtraque rectæ k; fiatque ae ad eb vt quadratum al ad quadratum lb, tum describatur circulus transiens per puncta r, a, l; & intelligatur hyperbola ler, cuius axis ae; ducantur quæuis $afgc$ secantes circulum in c, rectam xz in g, & hyperbolam in f; sitque punctum g intra circulum, & applicentur fb. Dico non solùm singula rectangula gac æqualia esse quadrato k, siue al, (quod superiùs ostensum est) sed insuper ipsas ac diuisas esse harmonicè in punctis g, f, hoc est esse af ad fg, vt ac ad cg, siue, sumpta communi altitudine ag, vt rectangulum gac ad rectangulum agc, siue vt quadratum al ad rectangulum lgr. Quoniam est quadratum al ad quadratum lb, vt ae ad eb, erunt componendo quadrata al, lb simul ad quadratum lb, vt ab ad be, hoc est, sumpta

 com-

* 21. lib. 1. Conic. communi altitudine ab, vt quadratum ab ad rectangulum abc: * Vt autem quadratum lb ad quadratum fh, ita rectangulum abe ad rectangulum abc; igitur ex æquo quadrata al, lb simul ad quadratum fh, vt quadratum ab ad rectangulum abe. Atqui rursus est quadratum fh ad quadratum gb, vt quadratum ab ad quadratum ab; igitur ex æquo in perturbata proportione sunt quadrata al, lb simul ad quadratum gb, vt quadratum ab ad rectangulum abe, hoc est vt ab ad be; & per conuersionem rationis quadrata al, lb simul ad quadratum al, & rectangulum lgr simul, vt ab ad ae: vt autem quadratum al ad quadrata al, lb simul, ita ae ad ab (cùm sit quadratum al ad quadratum lb, vt ae ad eb) igitur ex æquo in perturbata proportione erit quadratum al ad quadratum al, & rectangulum lgr simul, vt ab ad ab; & diuidendo, quadratum al ad rectangulum lgr, vt ab ad hb, hoc est af ad fg; quare erit af ad fg, vt ac ad cg. Eadem ratione ostendetur idem, si fuerit punctum g extra circulum.

Fig. 36. Sit tertiò minor, & æqualis ipsi an; fiatq; quadrato an æquale rectangulum bam. Tum diametro am describatur circulus, & fiat vt am ad mb, ita ae ad eb. Rursus ex ma abscindatur recta mr æqualis ipsi mb; factaque ae ad ed, vt ba ad ra, intelligatur hyperbola, cuius axis ae, & latus rectum ed; iungaturq; ad. Demum ducantur quæuis $acgf$ secantes circulum in c, rectam xz in g, & hyperbolam in f, & applicentur bfo occurrentes, axi quidem in h, & ad protractæ in o. Dico, non solùm singula rectangula gac æqualia esse quadrato k, siue an (quod superiùs ostensum est) sed insuper ipsas af, diuisas esse harmonicè in punctis g, c, hoc est esse ac ad cg, vt af ad fg. Ex punctis c ducantur cs perpendiculares ad am: & fiat vt as ad sm, ita ab ad quandam rectam y. Quoniam est quadratum as ad quadratum sc, siue as ad sm, hoc est ab ad y, vt quadratum ab ad quadratum hf, erit rectangulum sub ab, & y æquale quadrato hf, hoc est rectangulo ohe; quare erit reciprocè ab ad bo, siue ae ad ed, hoc est ba ad ra, vt he ad y. Propterea, cum sit ex constructione am ad mb, vt ae ad eb, & as ad sm, vt ab ad y; ostensumque sit esse be ad y, vt ba ad ra, erit etiam (vt ostendemus in corollario sequentis lemmatis) as ad sb, vt ab ad hb; siue ac ad cg, vt af ad fg. Quod erat ostendendum. Locus igitur punctorum f est ad hyperbolam. Quod erat &c.

Lemma sextum.

Fig. 35. Videatur figura secundi casus huius Propositionis. Protrahatur ab vsque ad circumferentiam in n, & ducatur cm perpendicularis ad ipsam an. Cum sit af ad fg, vt ac ad cg, erit etiam ab ad hb, vt am ad mb; Rursus erit, ex ostensis superiùs, ae ad eb, vt an ad nb. Iam dico, quod si fiat vt ae ad eh, ita an ad quandam rectam u, erit etiam nm ad ipsam u, vt ab ad ipsam ab mulctatam dupla hb.

Iungatur cn; & ex puncto e ducatur es parallela ipsi cn, & secans ac in s. Quoniam ostensum est in secundo casu esse quadrata al, lb simul ad quadratum al, & rectangulum lgr simul, vt ab ad ae; erit etiam conuertendo, & diuidendo quadratum al, & rectangulum lgr simul ad quadratum gb, vt ae ad eb, siue, sumpta communi altitudine ae, vt quadratum ae ad rectangulum aeb: atqui vt quadratum gb ad quadratum ag, ita quadratum es ad quadratum ac (sunt enim triangula similia agb, aes) igitur ex æquo in perturbata proportione, vt quadratum al, & rectangulum lgr simul ad quadratum ag, ita quadratum es ad rectangulum ach. Quoniam verò est ab ad bb (quod similiter ostensum est) vt quadratum al ad rectangulum lgr, erit componendo ab ad bb, vt quadratum al, & rectangulum lgr simul ad rectangulum lgr; adeoque ab ad duplam bb, vt quadratum al, & rectangulum lgr simul ad duo simul rectangula lgr; & per conuersionem rationis ab ad ipsam ab mulctatam dupla bb, vt quadratum al, & rectangulum lgr simul ad quadratum ag. Rursus, quia est cn ad an, vt es ad ae; & an ad u, vt ae ad eb, erit quadratum cn, hoc est rectangulum anm ad rectangulum sub an & u, hoc est nm ad u, vt quadratum cs ad rectangulum ach, siue vt quadratum al, & rectangulum lgr simul ad quadratum ag, hoc est, vt ab ad ipsam ab mulctatam dupla bb. Quod erat ostendendum.

Corollarium.

Habes primò veritatem propositionis vniuersaliter acceptæ, quod nempe, si fuerit ab ad bb, vt am ad mb; & quæuis ae (minor ipsa ab) ad eb, vt an (maior ipsa ab) ad nb; fiatque vt ae ad eb, ita an ad quandam rectam u: erit nm ad u, vt ab ad ipsam ab mulctatam dupla bb. Nam, si ducatur bl ad angulos rectos ipsi an, & diametro an fiat circulus secans bl in l, iungaturq; al, & intelligatur hyperbola, cuius axis ae, transiens per puncta l, e; demonstrabitur, vt supra, æqualitas rectangulorum cum quadrato al, diuisio harmonica linearum; & demum (vt in superiori lemmate) esse nm ad u, vt ab ad ipsam ab mulctatam dupla bb. Fig. 35.

Habes secundò veritatem propositionis conuersæ, quod scilicet, si fuerit (vt in tertio casu antecedentis propositionis) am ad mb, vt ae ad eb; & as ad sm, vt ab ad y; fueritque be ad y, vt ba ad ra, siue vt ba ad ipsam ba mulctatam dupla mb: erit etiam as ad sb, vt ab ad bb. Quod supererat demonstrandum. Fig. 36.

APPENDIX PRIMA.

Quandoquidem data positione, ac magnitudine hyperbola quauis, reperiri potest recta linea, & circulus; ita vt omnes rectæ ab extremitate axis ad hyperbolam ductæ secentur in proportione harmonica à recta linea, & circulo, libet hîc insinuare modum reperiendi ad hunc finem, & rectam lineam & circulum.

Exhibeatur hyperbola primi casus secundæ propositionis, in quo axis ab æqualis est lateri transuerso bd, quod intelligatur vtrinque indeterminatè protractum. Iam diametro ab, fiat circulus; qui erit circulus quæsitus; & recta quæsita ipsum latus transuersum bd protractum. Nam ex ostensis superiùs constat rectas omnes ex puncto a extremo axis ad hyperbolam ductas secari in proportione harmonica à circulo ab, & recta bd protracta. Quod si latus transuersum hyperbolæ maius fuerit, aut minus eiusdem axe (vt in secundo, & tertio casu secundæ propositionis) facilis etiam erit inuentio circuli, & rectæ lineæ ad eundem finem, ex ijs quæ ibi demonstrantur. Sed hæc innuisse sufficiat. Fig. 34. Fig. 35. & 36.

LIbet postremò apponere demonstrationem Ioannis Ceuæ de loco punctorum *c* & *f*, quoties quadratum *k* æquale esse debeat rectangulo *f a c*, contento nempe sub tertia & prima harmonica. Oportet autem rectam *k* magnitudine datam maiorem esse perpendiculari *a b*. Dicit igitur puncta *c* & *f* esse ad eundem circulum; quod sic demonstrat.

Ex puncto *a* ducantur ad rectam *x z* positione datam duæ *a l*, *a r* æqualis vtraque rectæ *k*. Tum describatur circulus tangens ipsas *a l*, *a r* in punctis *l*, *r*. Fig. 37. Demum ex puncto *a* ducantur quæuis *a c g f* secantes circulum in punctis *c*, *f*, & rectam *x z* in *g*. Dico non solùm singula rectangula *f a c* æqualia esse quadrato *k*, siue *a l*, aut *a r* (quod constat ex 36. *l*. 3. *Eucl.*) sed etiam rectas *a f* diuisas esse harmonicè in punctis *c*, *g*; quod patet ex 37. *l*. 3. *Con.* Hoc autem erat demonstrandum.

QVÆSITVM QVARTVM,

Quod est proponentis quintum.

Problema.

Duobus circulis positione & magnitudine datis rectam ducere contingentem vnum circulorum; secantem verò alterum, vt à peripherijs diuidatur in ratione data.

Fig. 38. DAti sint positione, ac magnitudine duo circuli, quorum centra *e*, *d*. Oportet rectam ducere contingentem alterum ipsorum, vti *e*, secantem verò alterum *d*, vt subtensa in circulo *d* habeat ad reliquam contingentis partem, datam rationem *b m* ad *m n*. Dimidium ipsius *b m* sit *o m*; & iungantur centra circulorum recta *e d*. Fiat vt *o m* ad *o n*, ita semidiameter circuli *d* ad rectam *k*, & semidiameter circuli *e* ad rectam *q*. Erunt quadrata rectarum *q*, *e d* simul sumpta vel æqualia, vel minora, vel maiora quadrato rectæ *k*.

Fig. 38. Sint primò æqualia. Excitetur ad ipsam *e d* perpendicularis *e c* occurrens peripheriæ in puncto *c*, ex quo ducatur tangens *c b a* occurrens circumferentiæ circuli *d* in duobus punctis *b*, *a*. (Occurret autem, cum *q* minor sit ipsa *k*, adeoque & semidiameter *e c* minor semidiametro circuli *d*.) Dico factum esse quod quæritur; scilicet subtensam *a b* esse ad *b c* reliquam partem contingentis, vt *b m* ad *m n*. Iungatur *d b*, & ducatur *d g* parallela ipsi *e c*, quæ bifariam secabit in puncto *g* ipsam *a b*. Quoniam quadratum *d b* est æquale quadratis *d g*, *g b* simul; si fiat *g b* ad *y*, vt *o m* ad *o n*, siue vt *d g*, hoc est *e c* semidiameter circuli *e* ad *q*, siue vt *d b* semidiameter circuli *d* ad *k*, quadratum rectæ *k* erit æquale quadratis rectarum *q*, *y*: est autem æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum *q*, *e d*, igitur *y* est æqualis ipsi *e d*, siue *g c*; adeoque erit *g b* ad *g c* vt *g b* ad *y*, siue vt *o m* ad *o n*, & consequenter *a b* ad *b c*, vt *b m* ad *m n*.

Sint

Sint secundò quadrata rectarum q, ed simul sumpta minora quadrato rectæ k. Reperiatur recta tr, cui addita rs æquali semidiametro circuli e, factâque ts ad z vt om ad on, quadrata rectarum ed, z æqualia sint quadratis rectarum k, tr; eritque ts minor semidiametro circuli d, & tr minor ipsa ed (secus problema erit impossibile.) Ducantur df, cf, sitque df æqualis ipsi tr, & angulus efd rectus; excitataque ad rectam fe perpendiculari ec ad partem oppositam perpendiculari fd, fiant reliqua vt priùs. Dico esse ab ad bc, vt hm ad mn. Erit enim dg æqualis ipsi ts; & quoniam quadratum db æquale est quadratis dg, gb, si fiat gb ad u vt db ad k, hoc est om ad on, siue vt dg, hoc est ts ad z, erit quadratum rectæ k æquale quadratis rectarum u, z, additoque communi quadrato tr, erunt quadrata u, z, tr æqualia quadratis k, tr, siue quadratis ed, z: Sunt igitur quadratum ed, siue quadrata ef, df æqualia quadratis u, tr, hoc est df; quare recta u est æqualis ipsi ef, hoc est gc. Erit ergo bg ad gc vt gb ad u, hoc est om ad on, & consequenter ab ad bc vt hm ad mn. Fig. 39.

Sint tertiò quadrata rectarum q, ed simul sumpta maiora quadrato rectæ k; quod tripliciter accidere potest, vel vt quadratum rectæ k cum quadrato rectæ rs æqualis semidiatro circuli e, sit æquale, vel maius, vel minus quadrato solius rectæ ed. Sit primò æquale: agaturq; per centrum d tangens abc, & iungatur ce. Dico esse ab ad bc vt hm ad mn. Quoniam quadrata rectarum k, rs, siue ec æqualia sunt quadrato ed, hoc est quadratis ec, dc; recta k erit æqualis rectæ dc; adeoque erit db ad dc vt db ad k, siue vt om ad on, & consequenter ab ad bc, vt hm ad mn. Fig. 40.

Sit deinde quadratum rectæ k cum quadrato rectæ rs æqualis semidiametro circuli e, sit, inquam, maius quadrato solius rectæ ed. Reperiatur recta rx (quæ minor erit ipsa rs) ita vt factâ reliquâ xs ad p vt om ad on, quadrata rectarum k, rx æqualia sint quadratis ed, p. Ducantur df, ef, sitque df æqualis ipsi rx, & angulus efd rectus (poterit autem fieri, cùm rx debeat esse minor ipsa ed, ne problema sit impossibile;) excitataque ad rectam fe perpendiculari ec ad easdem partes perpendicularis fd, fiant reliqua vt supra. Dico esse ab ad bc, vt hm ad mn. Quoniam quadratum db est æquale quadratis dg, gb, si fiat gb ad i, vt db ad k, siue om ad on, siue dg, hoc est xs ad p, erit quadratum k æquale quadratis i, p: additoque communi quadrato rx, erunt quadrata i, p, rx æqualia quadratis k, rx, siue quadratis ed, p; igitur quadrata i, rx, æqualia sunt quadrato ed, siue quadratis ef, df, hoc est rx; quare recta i, est æqualis ipsi ef, hoc est gc. Erit ergo gb ad gc, vt gb ad i, hoc est om ad on, & consequenter ab ad bc, vt hm ad mn. Fig. 41.

Sit postremò quadratum rectæ k cum quadrato rectæ rs minus quadrato rectæ ed. Reperiatur recta lr, ita vt factâ lr ad $\mathcal{A}$, vt om ad on, quadrata rectarum k, ls, sint æqualia quadratis ed, $\mathcal{A}$; eritque lr minor semidiametro circuli d, & ls minor ipsa ed, secus problema erit impossibile. Ducantur df, ef, sitque df, æqualis ipsi ls, angulusque efd rectus: excitataque ad rectam fe perpendiculari ec ad easdem partes perpendicularis fd, fiant reliqua vt supra. Dico esse ab ad bc, vt hm ad mn. Quoniam quadratum db est æquale quadratis dg, gb; si fiat gb ad E, vt db ad K, siue om ad on, siue dg, hoc est lr ad $\mathcal{A}$, erit quadratum K æquale quadratis E, $\mathcal{A}$: additoque communi quadrato ls, erunt quadrata E, $\mathcal{A}$, ls æqualia quadratis K, ls, hoc est quadratis ed, $\mathcal{A}$; igitur quadrata E, ls æqualia sunt quadrato ed, siue quadratis ef, df, hoc est ls; quare recta E est æqualis ipsi ef, hoc est gc. Erit ergo gb ad gc, vt gb ad Fig. 42.

E,

E, siue *o m* ad *o n*, & consequenter *a b* ad *b c*, vt *h m* ad *m n*. Quod erat demonstrandum. Datis igitur positione, ac magnitudine &c. Quod erat faciendum.

Scholium.

POtuissem determinare quænam ratio esse debeat subtensæ ad reliquam partem contingentis, vt problema sit possibile. Ne verò nimis longa euaderet demonstratio, satiùs fuit tantummodo monuisse rectas *d f*, *d g* (siue alias eisdem correspondentes) debere in omni casu esse minores, *d f* quidem ipsa *c d* iungente centra circulorum, & rectam *d g* semidiametro circuli secandi. Propter eandem rationem omitto docere modum reperiendi rectas *t r*, *r x*, *l r* cum conditionibus in antecedente propositione expositis; præsertim cùm facilè à quouis etiam vulgari geometra reperiri possint, & faciliùs etiam ab analysta, cùm æquationes sint quadraticæ.

QVÆSITVM QVINTVM.

Quod est proponentis sextum.

Problema.

Datis positione duabus rectis, & puncto, describere circulum, cuius peripheria transeat per datum punctum, tangat vnam rectarum; alteram verò secet, vt subtensa sit magnitudine data.

Fig. 43. DAtæ sint positione rectæ *a b*, *c d*, datum punctum *o*, & data magnitudine recta k. Oportet circulum describere transeuntem per datum punctum *o*, tangentem alterutram ex datis rectis, vti *a b*; secantem verò alteram *c d*, ita vt subtensa æqualis sit datæ magnitudine rectæ k. Vt problema sit possibile, debet punctum *o* esse vel in recta *a b*, vel in recta *c d*, vel extra vtramque; ita tamen vt recta *a b* tangenda (si alteri *c d* sit parallela) non interijciatur inter datum punctum *o*, & alteram rectam *c d*. Quia verò, vbicunque sit datum punctum *o*, datæ rectæ *a b*, *c d* possunt esse vel parallelæ, vel non parallelæ, ideo per sex casus problema absoluemus.

Sint primò rectæ *a b*, *c d* parallelæ, & punctum *o* existat in recta *a b*. Ad rectam *a b* excitetur perpendicularis *o m* secans rectam *c d* in puncto *m*; & inuenta *m n* tertia proportionali ad rectam *o m*, & rectam *m q* æqualem dimidio

Fig. 43. ipsius k, fiat circulus *o q n* secans rectam *c d* in punctis *q*, *r*. Dico factum esse quod quæritur. Nam circulus *o r n* transit per punctum *o*, tangit rectam *a b*, & secat ipsam *c d*, ita vt subtensa *r q* sit æqualis datæ k; vt patet ex elementis.

Fig. 44. Sint secundò parallelæ, & punctum *o* existat in recta *c d*. Sumatur in recta *c d* recta *o m* æqualis dimidio ipsius k: excitatáque perpendiculari *m h* secante ipsam *a b* in puncto *b*, fiat vt *h m* ad *m o*, ita *m o* ad *m n*, & describatur circulus *h o n* secans rectam *c d* in punctis *o*, *q*. Erit *o q* æqualis datæ k &c.

Sint

Sint tertiò parallelæ, & punctum o sit extra vtramque ab, cd, ita tamen vt ipsa tangenda ab non interijciatur inter punctum o, & rectam cd. Ducatur ex puncto o ad ipsas ab, cd perpendicularis tof secans ab in f, & cd in t. Tum fiat vt ft ad dimidium ipsius K ita dimidium ipsius K ad te; eritque fe maior ipsa of (cæterum problema esset impossibile; nisi punctum o idem esset ac punctum e: quo casu, si diametro fe, seu fo, circulus describatur, factum erit quod quæritur, vt constat ex elementis). Rursus inter ipsas eo, of reperiatur media proportionalis fb: excitataque ad ipsam ab perpendiculari bm secante cd in m, repertaque tertia proportionali mn ad rectam bm, & mq æqualem dimidio ipsius k, fiat circulus bqn secans ipsam cd in punctis r, q. Dico factum esse quod quæritur. Nam circulus bqn tangit rectam ab, & secat ipsam cd, ita vt subtensa rq sit æqualis datæ k. Rursus punctum o est in circumferentia dicti circuli; est enim rectangulum fte æquale quadrato ex dimidio ipsius k, hoc est quadrato mq, hoc est rectangulo bmn: quare fe est æqualis diametro bn; propterea, cùm & eidem sit parallela, & ad easdem partes, sitque rectangulum foe æquale quadrato tangentis fb, erit punctum o in circumferentia circuli bqn. Fig. 45.

Sint quartò non parallelæ, & punctum o existat in recta ab. Se se intersecent prædictæ lineæ in g: & reperiantur in recta gd rectæ qg, rg, quarum differentia rq æqualis sit datæ k, & inter quas sit media proportionalis og; factoque circulo orq, factum erit quod quæritur, vt facilè ostenditur ex elementis. Fig. 46.

Sint quintò non parallelæ se se intersecantes in g, & punctum o existat in recta cd. Sumatur in recta gd recta oq æqualis datæ k: & reperiatur inter rectas qg, og (si punctum o sit inter puncta q, g) vel inter rectas og, qg (si punctum q sit inter puncta o, g) reperiatur, inquam, media proportionalis gb, quæ sumatur in recta ab; factoque circulo boq, factum erit quod quæritur; vt facile probatur ex elementis. Si autem punctum o idem sit ac g; si fiat circulus tangens ab in g, & transiens per q, factum erit quod quæritur, vt constat; quod etiam valet pro quarto casu. Fig. 47.

Sint sextò non parallelæ se se intersecantes in g, & punctum o extrà vtranq; existat. Ducatur quæuis recta bol secans gb in b, & gd in l. Tum rectangulo blo, & quadrato dimidij ipsius k simul, fiat æquale quadratum rectæ gn sumptæ in recta gc. Erit igitur quadratum gb, & quadratum dimidij ipsius k simul, vel æquale, vel maius, vel minus quadrato nl. Sit primò æquale; sumptaque lm versus punctum d æquali ipsi ng; & facta rq, cuius dimidium rm, æquali rectæ k, fiat circulus brq: factumque erit quod quæritur. Cùm enim rectangulo blo, & quadrato dimidij ipsius k, siue quadrato rm simul, æquale sit quadratum ng, siue lm; hoc est rectangulum qlr, & quadratum rm simul; dempto communi quadrato rm, erit rectangulum blo æquale rectangulo qlr; quare punctum o erit in circumferentia circuli. Rursus quoniam quadratum gb, & quadratum dimidij ipsius k, siue quadratum rm simul æquale est quadrato nl, siue gm; hoc est rectangulo qgr, & quadrato rm simul; dempto communi quadrato rm, erit quadratum gb æquale rectangulo qgr; quare circulus brq tanget ipsam ab in b. Est etiam subtensa rq æqualis rectæ k; Igitur &c. Fig. 48.

Sit deinde quadratum gb, & quadratum dimidij ipsius k simul, vel maius, vel minus quadrato nl. Iam dico me non videre quomodo in hoc casu per solam regulam, & circinum vniuersaliter solui possit problema; scilicet non video artem ducendi rectam $h o l$, ita vt quadratum $g h$, & quadratum dimidij ipsius k simul æquale sit quadrato rectæ $n l$, nempe compositæ ex recta $g l$, & recta $n g$ potente rectangulum $h l o$, & quadratum dimidij ipsius k simul. Certè ego casum hunc calculo analytico sæpiùs expendens, semper in æquationem solidam incidi; quare à Proponente ipso Geometricam solutionem desidero, atque expecto. Cæterùm per Sectiones Conicas, vel etiam lineas magis compositas, quas adhibere in promptu esset, nullum problema non soluitur.

QVÆSITVM SEXTVM, ET VLTIMVM.

Quod est Proponentis quartum.

Problema.

Anguli dati vertex feratur per rectam positione datam, vt crus vnum transiens per punctum datum extrà rectam, secet alteram rectam positione datam, & in reliquo crure punctum assumatur, vt quadratum interiectæ inter punctum datum, & verticem anguli ad rectangulum sub interiecta inter punctum datum, & rectam, supra quam vertex anguli non fertur, in interiectam inter verticem dati anguli, & punctum assumptum, sit in ratione data, vel (quod idem hîc est) in ratione æqualitatis: inuestigandus igitur esto locus puncti assumpti.

EXPOSITIO PROBLEMATIS.

Sint datæ duæ rectæ $c d$, $x z$, & ratio quæcunque y ad k; datumque sit quoduis punctum a extrà prædictas lineas, per quod transeat crus $s a e$ dati an-
Fig. 51. guli $s e z$. Eiusdem verò dati anguli vertex ità intelligatur ferri super rectam $x z$, vt, cum peruenerit ad quoduis punctum f, habeat quadratum rectæ $a f$ (nempe interiectæ inter punctum datum, & verticem anguli) ad rectangulum sub $p a$ (nempe interiecta inter punctum datum, & rectam $c d$, suprà quam vertex anguli non fertur) in $f o$ (nempe interiectam inter verticem dati anguli, & punctum o in reliquo latere assumptum) habeat, inquam, datam rationem y ad k. Quæritur locus puncti o, quem vocabimus locum quæsitum.

Quia verò datæ rectæ $c d$, $x z$ possunt esse parallelæ, vel sibi inuicem occurrere; &, siquidem sibi occurrant, potest intelligi moueri tùm angulus $s e z$, tùm angulus deinceps $s e x$ ad partes vbi datæ rectæ diuergunt, vel ad partes vbi datæ rectæ conuergunt; icircò pro triplici casu inuestigandus est locus puncti assumpti.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Si datæ rectæ c d, x z *fuerint parallelæ, locus quæsitus est linea recta.*

DAtus angulus *s e z* intelligatur suo motu versùs punctum *z* peruenisse ad quoduis punctum *f*; & assumptum fuerit in reliquo crure punctum *o*, sitq; quadratum *af* ad rectangulum sub *pa*, *fo*, vt *y* ad *k*; punctum *o* assumptum pertinebit ad locum quæsitum. Iam fiat vt *y* ad *k*, ita quadratum *ae* ad rectangulum sub *sa* in *eb* sumptam in recta *ez* (eritque punctum *b* initium loci quæsiti) & iungantur *ab*, *bo*, *oa*. Quoniam parallelæ sunt *cd*, *xz*, erit *ae* ad *sa*, vt *af* ad *pa*; quare, cùm sit quadratum *ae* ad rectangulum sub *sa*, *eb*, vt *y* ad *k*, siue vt quadratum *af* ad rectangulum sub *pa*, *fo*, ratio composita ex rationibus *ae* ad *sa*, & *ae* ad *eb* similis erit rationi compositæ ex *af* ad *pa*, & *af* ad *fo*; atqui similes etiam sunt rationes *ae* ad *sa*, & *af* ad *pa*; similes igitur & eædem erunt reliquæ rationes *ae* ad *eb*, & *af* ad *fo*. Propterea cùm angulus *afo* æqualis sit, ex constructione, angulo *aeb*, erunt similia triangula *aeb*, *afo*; adeoque angulus *fao* erit æqualis angulo *eab*, eritque *ea* ad *ab*, vt *fa* ad *ao*, & permutando *ea* ad *af*, vt *ba* ad *ao*: quare, cùm, addito, vel dempto (nisi punctum *f* idem sit, ac *b*) communi angulo *baf*, æquales etiam sint anguli *eaf*, *bao*; erunt triangula similia *eaf*, *bao*, & angulus *aef* æqualis angulo *abo*. Quamobrem, cum punctum *o* sit quoduis punctum assumptum, & iuncta *ob* eundem semper angulum efficiat cum recta *ab*; æqualem nempe dato *aef*; manifestum est locum quæsitum esse rectam lineam *ob*, quæ scilicet angulum efficiat cum ipsa *ab* æqualem dato angulo *aeb*. Fig. 51.

Eadem prorsùs ratione, si vertex anguli *sez* moueatur versùs punctum *x*, ostendetur locum quæsitum esse rectam *tb* efficientem cum recta *ab* angulum æqualem angulo deinceps *sex*; adeòque (siue motus fuerit versùs *z*, siue versùs *x*) locum quæsitum esse vnicam rectam *obt* vtrinque in infinitum protractam. Quod erat &c.

Corollarium I.

HInc, si datum fuerit quoduis punctum *a* extrà rectam *xz* positione datam, ad quam ducantur tres quæuis rectæ *ae*, *ab*, *af*; ducaturque recta *obt* efficiens cum *ab* angulum *abo* æqualem angulo *aeb*, diuidatque recta *ba* angulum *ebo*; demum angulo *aeb* æqualis sit, & ad easdem partes, angulus *afo*, punctumque *o* existat in recta *ot*, ostendetur, reducendo ad impossibile, esse *af* ad *fo*, vt *ae* ad *eb*. Fig. 50.

Corollarium II.

HInc etiam constat, quòd si in recta *bo* superiori sumatur quoduis punctum *o*, neque sit *ab* ad *bo*, vt *ae* ad *eb*, quòd, inquam, ex punctis *a*, *o* possint ad quoddam punctum *f* diuersum à puncto *b*, duci ad *xz*, siue *ez*, duæ *af*, *of*, ità vt angulus *afo* æqualis sit angulo *aeb*, siue *abo*. Sin autem Fig. 50.

 pun-

punctum o sumptum fuerit in recta bt inferiori, poterunt semper ex punctis a, o, ad quoddam punctum f diuersum à puncto b duci ad zx, siue ex dux af, of, ità vt angulus afo æqualis sit angulo acb.

Corollarium III.

COrollarij loco libet ex superiori propositione tria problemata absoluere, & quidem vtilissima, quippe quæ locis planis continentur.

I.

DAtis duabus rectis xz, to se se inuicem secantibus in puncto b, ex dato extrà ipsas quouis puncto a ducere ad xz quandam af, ità vt iuncta ab, factoque angulo afo æquali ipsi abo, & ad easdem partes, recta fo occurrens ipsi to in puncto o sit æqualis rectæ k magnitudine datæ.

Ducatur ad rectam xz recta ae, ità vt angulus aeb æqualis sit angulo abo, diuidatque recta ba angulum cbo. Tum fiat vt ae ad eb, ità quædam
Fig. 50. recta y ad rectam k magnitudine datam. Demùm ducatur ad xz recta af æqualis rectæ y; factoque angulo afo æquali angulo abo, siue aeb, & ad easdem partes, punctum o existat in recta to. Dico factum esse, quod quæritur, & rectam fo æqualem esse rectæ k magnitudine datæ. Hoc enim manifestum est ex primo corollario.

I I.

IIsdem positis ex puncto a ducere ad xz quandam af, ità vt facto angulo afo æquali cuiuis dato angulo c, habeat af ad fo datam rationem y ad k.

Ex puncto a ducatur ad xz recta ae, ità vt angulus aez æqualis sit angulo dato c. Tum fiat, vt y ad k, ità ae ad ed, quæ sumatur in recta ez; iunctaque ad, ducatur recta gdb, ità vt angulus adg æqualis sit angulo
Fig. 50. aez, diuidatque recta da angulum edg. Iam punctum d vel est idem ac punctum b, vel diuersum. Si est idem ducta quauis af, factum erit quod quæritur, vt constat ex 1. coroll.; si est diuersum, vel rectæ gb, to protractæ sibi
Fig. 49. inuicem occurrunt, vel sunt inter se parallelæ. Si primum, gb occurrat ipsi to in puncto o: tùm (nisi punctum o fuerit in recta dg, sitq; ad ad do, vt ae ad ed, siue y ad k) ducantur ad xz duæ af, of, ità vt angulus afo æqualis sit dato angulo c, siue angulo aez, & ad easdem partes; factumq; erit quod quæritur, hoc est, erit af ad fo, vt y ad k; quod manifestum est ex antecedentibus. Si secundum, ex puncto a (nisi datus angulus sit rectus) ducatur ad xz alia recta ae, ità vt angulus aex æqualis sit dato angulo c; factáque, vt y ad
Fig. 52. k, ità aliâ recta ae ad ed, quæ sumatur in recta ex, fiant reliqua, vt suprà. Quod si & alia recta gdb ipsi to parallela fuerit, problema erit impossibile, vt facilè probatur ex antecedenti propositione. Itaque quando problema est possibile, ex dato quouis puncto a &c. Quod erat &c.

III.

I I I.

Data positione recta xz, datoque positione, ac magnitudine circulo, cuius centrum l, ex quouis dato puncto a ducere ad xz quandam af, ità vt facto angulo afo æquali cuiuis dato angulo c, recta af ad fo occurrentem circumferentiæ circuli in puncto o habeat datam rationem y ad k.

Ex puncto a ducatur ad xz recta ae, ità vt angulus aez æqualis sit dato angulo c. Tum fiat vt y ad k ità ae ad ed, quæ sumatur in recta ez. Demùm iuncta ad, ducatur recta gdh, ità vt angulus adg æqualis sit angulo aez, diuidatque recta da angulum edg. Iam, vel recta gh protracta occurrit circumferentiæ circuli, vel non. Siue autem occurrat, siue non, fiant omnia, vt in proximè antecedenti problemate; &, nisi problema sit impossibile, factum erit quod quæritur, vt constat ex ostensis superiùs. Itaque, quando problema est possibile, ex dato quouis puncto a &c. Quod erat &c. Fig. 53. & 54.

Plura hinc vtilia problemata, scituque iucunda absolui possent, sed pauca hæc delibasse sufficiat. Iam veniamus ad reliquos duos casus, in quibus, claritatis gratia, quadratum interiectæ inter punctum datum, & verticem anguli æquale ponemus rectangulo correspondenti; idem enim est quoad præsens, siue æqualitatis, siue inæqualitatis, modò eandem rationem habeant singula quadrata ad singula correspondentia rectangula; quod optimè potauit eximius Geometra Proponens, & patebit consideranti.

Lemma primum.

Si datæ rectæ cd, xz inter se conueniant, vt in d, & intelligatur vertex dati anguli aez moueri versùs punctum z, ad partes nempe vbi datæ rectæ diuergunt; ducaturque ex puncto b initio loci quæsiti recta bo, quæ angulum efficiat angulo aez æqualem cum recta ba diuidente angulum cbo; conueniet recta bo protracta in vnico puncto diuerso à puncto b cum loco quæsito.

Quadrato ae æquale fiat rectangulum sub sa in cb sumptam in recta ez: punctum b erit, ex hypothesi, initium loci quæsiti. Iam, quoniam angulus abo est æqualis angulo aez, diuiditque recta ba angulum cbo, si protrahatur ba quoad secet cd in p, fiatque quadrato ab æquale rectangulum sub pa, bo, punctum o pertinebit, ex hypothesi, ad locum quæsitum. Quod autem recta bo protracta in alio puncto diuerso à punctis o, b non conueniat cum loco quæsito, sic ostenditur. Ex puncto s ducatur recta su parallela rectæ xz; tùm sumatur intra puncta e, b quoduis punctum m, ad quod intelligatur suo motu peruenisse angulus acz, cui propterea angulus amf sit æqualis; protractáque ma quoad secet sd in n, & su in q, quadrato am æquale sit rectangulum sub qa, mf, & æquale pariter rectangulum sub na, mg. Punctum g pertinebit, ex hypothesi, ad locum quæsitum; & punctum f existet, ex antecedenti propositione, in recta bo: erit autem, ex elementis, punctum g vltra punctum f; quare punctum f non existit in loco quæsito. Eadem ratione ostendetur nullum aliud punctum rectæ bo interiectum inter puncta o, b pertinere ad locum quæsitum. Præterea in eadem recta cz sumatur vltra punctum b Fig. 55.

quoduis

quoduis punctum k, ad quod intelligatur suo motu peruenisse angulus aez, cui propterea æqualis sit angulus akr; protractaque ka quoad secet sd in l, & su in y, quadrato ak æquale sit rectangulum sub ya, kr, & æquale pariter rectangulum sub la, kb. Punctum b pertinebit, ex hypothesi, ad locum quæsitum; & punctum r existet, ex antecedenti propositione, in recta bo protracta: erit autem, ex elementis, punctum b vltrà punctum r; quare punctum r in loco quæsito non existit. Eadem ratione ostendetur nullum aliud punctum rectæ bo vlteriùs protractæ pertinere ad locum quæsitum. Constat igitur rectam bo protractam in vnico puncto diuerso à puncto b, lineæ genitæ occurrere. Quod erat &c.

Lemma secundum.

Iisdem manentibus, si angulo aez æqualis ponatur, & ad easdem partes angulus ebi, recta bi vlteriùs protracta non conueniet in alio puncto cum loco quæsito.

Si enim fieri potest, conueniat in puncto b. Non erit autem punctum b in curua punctis o, b terminata; secùs angulus ebb maior esset angulo cbo (vel eidem æqualis, si punctum b idem sit ac punctum o) adeòque maior angulo Fig. 55. abo, siue aez; quod est contra hypothesin. Quare, si ex punctis a, b ducantur ad xz duæ ak, bk, ità vt angulus akb æqualis sit dato angulo aez; protractaque ka quoad secet sd in l, quadratum ak æquale sit rectangulo sub la, kb; punctum k erit vltrà punctum b; si enim punctum k existeret in recta eb, punctum b (vt infertur ex antecedenti lem.) existeret in curua punctis o, b terminata, cuius oppositum ostensum est. His demonstratis, erit angulus bkb maior angulo akb hoc est aez, siue ebb, internus maior externo; quod est absurdum. Recta igitur bi vlteriùs protracta non conuenit cum loco quæsito. Quod erat &c.

Lemma tertium.

Si datæ rectæ cd, xz inter se conueniant, vt in d, intelligaturque vertex dati anguli aez suo motu peruenisse ad punctum k; sitque angulus akb angulo aez æqualis, protractaque ka quoad secet cd in l, quadrato ak æquale sit rectangulum sub la, kb; sitque punctum k vltra punctum b initium loci quæsiti: dico rectam kb vel tangentem locum quæsitum, vel vlteriùs protractam in alio puncto diuerso à puncto b eundem secare.

Quadrato ae æquale fiat rectangulum sub ek, an: eritque an minor ipsa as, cùm quadratum ae æquale etiam sit rectangulo sub eb, as. Iam iuncta Fig. 56. nl vel erit parallela rectæ xz, vel non. Sit primum parallela; sumptoq; intrà puncta e, k quouis puncto m, iungatur ma, quæ protracta secet nl in r, & sd in u; factoque angulo umg æquali angulo aez, recta ma diuidat angulum emg, sitque quadrato am æquale rectangulum sub ra, mg, & æquale pariter rectangulum sub ua, mf. Punctum f existet, ex hypothesi, in curua genita, & punctum g, ex antecedenti Propositione, erit in recta kb; eritque, ex elementis, recta mg maior recta mf; quare sumpto in curua punctis b, b

termi-

terminata quouis puncto f, ostendetur illud non existere in recta kh. Præterea sumatur in loco quæsito quoduis punctum q, quod non existat in curua punctis h, b terminata; ducanturque ex punctis a, q ad rectam xz duæ ai, qi, ità vt angulus aiq æqualis sit angulo aez; protractâque ia quoad secet sd in t, & nl protractam in y, quadrato ai æquale sit rectangulum sub ta, iq, & æquale pariter rectangulum sub ya, io. Punctum o, ex antecedenti propositione, existet in recta kh protracta; eritque, ex elementis, recta iq maior recta io, adeòque punctum q non erit commune & loco quæsito, & rectæ kb protractæ. Constat igitur, si iuncta nl parallela sit rectæ xz, rectam kh tangere locum quæsitum.

Sit secundò iuncta nl non parallela rectæ xz. Parallela ipsi xz ducatur nr secans sd in r; & iungatur ra, quæ protracta secet xz in m; factoque angulo amf æquali angulo aez, recta ma diuidat angulum emf, sitque quadrato am æquale rectangulum sub ra, mf. Punctum f erit, ex hypothesi, in curua genita, &, ex antecedenti propositione, in recta kb protracta. Vel igitur punctum f est diuersum à puncto b, vel non. Si primum; igitur kb protracta in alio puncto diuerso à puncto h locum quæsitum secat; Si secundum, eadem ratiocinatione, qua superiùs vsi sumus, ostendetur rectam kb tangere locum quæsitum. Manifestum est igitur quod recta kb, vel tangit locum quæsitum, vel vlteriùs protracta in alio puncto diuerso à puncto b eundem secat. Quod erat &c. Fig. 57.

Corollarium I.

HInc facilè ostendi potest curuam genitam à nulla linea recta in tribus punctis secari posse; adeòque eam esse in easdem partes cauam.

Corollarium II.

SI iuncta nl parallela sit rectæ xz, erit vtique æqualis ipsi ae. Nam, quoniam quadratum ae est æquale rectangulo sub na, ek, erit na ad ae, vt ae ad ek; vt autem ae ad ek, ità, ob similitudinem triangulorum, an ad nl; igitur na ad ae, vt na ad nl. Quare nl æqualis erit ipsi ae. Quod si iuncta nl parallela non sit rectæ xz, maior erit, aut minor ipsâ ae, vt constat. Fig. 56. & 57.

Lemma quartum.

IIsdem manentibus, si ex puncto b initio curuæ genitæ ducatur recta bi, sitque angulus ibe ad easdem partes anguli aez, & minor quidem angulo, quem curua efficit cum recta be, maior autem angulo aez; ipsa bi vlteriùs protracta in alio puncto diuerso à puncto b curuam secabit.

Ex puncto a ducatur ad xz recta ak, ità vt angulus ake minor sit excessu, quo angulus ibe superat angulum aez; factoque (iuxtà leges problematis) angulo akb æquali angulo aez, punctum b existat in curua genita. Iam, Fig. 57.

quo-

quoniam angulus akc minor est excessu, quo angulus ibc superat angulum aez, siue bka, angulus bke minor erit angulo ibe; adeòque duo simul anguli bke, ibk minores erunt duobus simul angulis ibe, ibk, siue duobus rectis minores; quare rectæ kb, bi vlteriùs protractæ sibi inuicem occurrent ad partes angulorum duobus rectis minorum. Occurrant sibi in puncto i. Erit autem punctum i vel extrà, vel intrà concauum loci quæsiti. Si primum; manifestum est curuam iam anteà sectam fuisse in alio puncto à recta bi. Si secundum; recta kb, ex antecedenti lemmate, curuam in duobus punctis secabit; quare punctum i existet in recta bf iungente puncta intersectionum, adeòque ipsa bi vlteriùs protracta curuam in alio puncto secabit. Itaque, si ex puncto b initio curuæ genitæ &c. Quod erat &c.

Corollarium.

Fig. 57. EX his demonstrari potest, quòd, si ex quouis puncto curuæ genitæ, vt b, ducatur quædam recta bq parallela rectæ efficienti cum recta be angulum ad easdem partes anguli aez, eidemque æqualem, quòd, inquam, ipsa bq vlteriùs protracta cum curua genita non conueniat: & contrà quòd quæuis bt eidem rectæ non parallela, & diuidens angulum, quem recta bq efficit cum superiori parte curuæ, vlteriùs protracta in alio puncto diuerso à puncto b curuæ genitæ occurrat.

PROPOSITIO SECVNDA.

SI datæ rectæ cd, xz inter se conueniant, vt in d, datusque angulus aez intelligatur moueri ad partes, vbi datæ rectæ diuergunt; locus quæsitus neque ad circulum est, neque ad ellypsin, neque ad hyperbolam.

De circulo quidem, & ellypsi constat, cùm manifestum sit, curuam genitam Fig. 58. in infinitum protendi. De hyperbola autem sic ostenditur. Sit locus, si fieri potest, ad hyperbolam, cuius asymptoti fg, rg. Ex puncto b initio curuæ genitæ ducatur recta bi efficiens cum recta be angulum ad easdem partes anguli aez, eidemque æqualem. Ostendendum est priùs rectam bi parallelam futuram alteri asymptotorum, nempe fg. Hoc autem manifestum est ex eo, quod recta bi (ex 2. lem.) vlteriùs protracta cum curua genita non conueniat; adeòque neque ad eas partes cum asymptoto fg conueniat: & contrà quæuis alia recta (ex lem. 4.) efficiens cum be angulum maiorem angulo aez, siue ibe, vlteriùs protracta in alio puncto diuerso à puncto b conueniat cum curua genita; & propterea ad easdem partes asymptoto fg occurrat.

Hoc ostenso, recta xz positione data asymptoto fg parallela non erit; quare eandem in aliquo puncto secabit, vt in o. Iam in recta ez vltrà punctum o sumatur quoduis punctum k, & iungatur ak, factoque angulo akh æquali angulo aez, recta ka diuidat angulum ekh, protractaque ka quoad secet sd in l, quadrato ak æquale sit rectangulum sub la, kb. Punctum b; ex hypothesi, existet in curua genita; & recta kb (ex 3. lem.) vel tanget locum quæsitum, vel vlteriùs protracta eundem in alio puncto diuerso à puncto b secabit: atqui, ex conicis, si locus esset ad hyperbolam, eundem in vno tantùm puncto secaret; quæsitus igitur locus non est ad hyperbolam. Quare, si datæ rectæ cd, xz &c. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO TERTIA.

SI datæ rectæ *cd*, *xz* inter se conueniant, vt in *d*, intelligaturque vertex anguli *aed* moueri versus punctum *d*, ad partes nempe, vbi datæ rectæ conuergunt; quæsitus locus vniuersaliter non est ad circulum.

Quadrato *ac* æquale sit rectangulum sub *sa* in *eb* sumptam in recta *ed*; eritque punctum *b* initium loci quæsiti. Iam parallela rectæ *xz*, & æqualis ipsi *ae* ducatur recta *cn* occurrens ipsi *dc* in *c*, & *es* protractæ in *n*; tùm iungatur *ca*, quæ protracta secet *ed* in *k*; factoque angulo *akb* æquali angulo *aed*, recta *ak* diuidat angulum *ekb*, sitque quadrato *ak* æquale rectangulum sub *ca*, *kb*. Punctum *b* pertinebit, ex hypothesi, ad locum quæsitum. Quoniam verò *nc* æqualis est ipsi *ae*, erit *an* ad *nc*, vt *an* ad *ae*: vt autem *an* ad *nc*, ità, ob similitudinem triangulorum, *ae* ad *ck*; igitur *an* ad *ae*, vt *ae* ad *ek*; quare quadratum *ae* æquale est rectangulo sub *na*, *ek*. Propterea, eadem ratiocinatione, qua superiùs in lem. 3. ostendimus *kb* tangere locum quæsitum, quoties iuncta *nl* parallela est rectæ *xz* positione datæ, idem hic euincetur. Hoc ostenso, iungatur *ba*, quæ protracta occurrat *nc* protractæ in *m*. Si igitur *ba* parallela sit rectæ *dc*, erit punctum *b*, & initium, & terminus lineæ genitæ, vt constat; eritque k *b* tangens, & æqualis tangenti k *b*, si linea genita sit circumferentia circuli. Quòd autem linea genita esse non possit vniuersaliter circumferentia circuli, siuè quòd accidere possit tangentem k*b* æqualem non esse tangenti k*b*, sic ostenditur. Angulus *aed* non sit minor recto, neque *ae* minor ipsâ *bd*: hæc enim accidere posse manifestum est. Quoniam igitur est, ex constructione, *ca* ad *a*k, vt *a*k ad k*b*: vt autem *ca* ad *a*k, ità, ob similitudinem triangulorum, *na* ad *ae*, siue *nc*, erit *a*k ad k*b*, vt *an* ad *nc*. Rursùs, quia angulus *aed*, siue *anc* non est minor recto, erit *ac* maior quam *an*, habebitque *ac* ad *cn* maiorem rationem, quam *an* ad *nc*, siue *ak* ad k*b*. Præterea, quia *ae*, siue *nc* non est minor quam *bd*, siue *cm*, non habebit *ac* ad *cm* minorem rationem quam *ac* ad *cn*: vt autem *ac* ad *cm*, ità, ob similitudinem triangulorum, *a*k ad k*b*: & *ac* ad *cn* maiorem rationem habet, quam *a*k ad k*b*; igitur etiam *a*k ad k*b* maiorem rationem habebit, quam *a*k ad k*b*. Non est igitur tangens k*b* æqualis tangenti k*b*; quare locus quæsitus non est vniuersaliter ad circulum. Quod erat &c. Fig. 59.

Scholium.

HInc habes quòd, si locus quæsitus in secundo casu sit ad sectionem conicam, necesse est esse ad parabolam; quod etiam conijci potest ex eo quòd rectæ omnes vni certæ parallelæ in vno tantum puncto locum secent; cæteræ autem non parallelæ in duobus. Neque enim scio de vlla curua Geometris nota, cui hæc proprietas competat. Præterea, quod ostendimus in tertio casu, rectam k*b* tangere locum quæsitum, id vniuersaliter verum est, etiamsi punctum *b* non sit & initium, & terminus loci quæsiti. Denique reliquum esset, vt aliquid diceremus de lineis genitis, si vertices angulorum *aez*, *aex* ad partes oppositas mouerentur: verùm, quia non admodum dissimilis est speculatio, his immorari superuacaneum duxi.

Hucusque persecutus sum hanc feram sua per vestigia, eamque indagine septam teneo. Verùm, quem poscis locum, auctor ingeniosissime, hoc est intimum, ipsius latibulum, scrutari nondum licuit, neque vlteriùs inuestigandi facultas datur in studijs longè dissimillimis occupato. Habes vtique in hoc qualicunq; progressu nostro imaginem illius fabulosi fluminis vestrorum poetarum carminibus celeberrimi, cuius pars quidem patente alueo, pars altera sub terris fluit, ac denique iuxta Syracusas è suis latebris exit. Quamobrem huius ego reconditi problematis, cuius & primam scaturiginem, & partem itineris non exiguam in lucem dedi, reliquum cursum, & postremum exitum ex Sicilia tua, immo à te, vnde emanat, enixè rogo. Sic te nouis in diem inuentis fortunent sydera; sic insulam istam non minùs frugum omnigenûm quàm ingeniorum feracissimam superi imposterum quietam atque inconcussam seruent.

ADNOTATIO.

In primum Problema extrà ordinem.

DAta sit positione recta xz, datum extrà ipsam punctum a, datusque angulus aeg, cuius vertex in recta xz, ità tamen vt crus eg non congruat rectæ xz. Iam ex puncto a inclinetur ad xz recta ac in angulo dato angulo aeg æquali, ità vt, si vertex anguli aeg intelligeretur moueri versùs c, cùm peruenisset ad punctum c, crus eg congrueret rectæ xz. Hoc posito fiat vt inclinata ac ad ce, ità ae ad eg. Punctum g pertinebit ad lineam genitam; quam ostendimus fore parabolicam, si angulo aeg æqualis sit angulus ace, & rectam, si eidem angulo aeg æqualis sit angulus deinceps acz. Quia verò (nisi datus angulus aeg sit rectus) alia recta ab inclinari potest ad xz in angulo æquali dato angulo; propterea diuersa oritur speculatio, si recta ab statuatur pro inclinata. Huius autem rei considerandæ auctor mihi fuit Nobilis Geometra Georgius Steigerthal; à quo etiam accepi enodationem sexti casus Quæsiti apud nos quinti, beneficio parabolæ, & cuiusdam alterius lineæ secundi generis absolutam.

Sex igitur casus habere potest problema hoc modo conceptum. Primus est, si vertex anguli acuti acx moueatur versùs punctum z. Secundus, si eiusdem anguli vertex moueatur versùs punctum x quousque perueniat ad punctum b. Tertius, si ex puncto b vlterius progrediatur versùs x. Quartus casus est, si vertex obtusi anguli acz moueatur versùs z. Quintus, si eiusdem anguli vertex moueatur versùs x quousque perueniat ad punctum b. Sextus demùm, si ex puncto b vlteriùs progrediatur versùs x. Fig. 60. & 61.

Dico igitur lineam genitam in primo, secundo, & sexto casu esse lineam rectam, & quidem ipsam ab protractam: in reliquis autem casibus gigni curuas, quas exquisitè perscrutari non vacat. Ostendemus nihilominus communem earum proprietatem, ex qua fortasse non admodum difficile erit curuas genitas determinare.

Pro primo casu intelligatur vertex anguli acx suo motu versùs z peruenisse ad quoduis punctum d; & existente angulo adm æquali angulo acx, protrahatur dn quoad occurrat ipsi ab protractæ in m. Occurret autem, quoniam angulus bdm minor est angulo adm, siue acb, hoc est abc, adeoque duo simul anguli bdm, dbm minores sunt duobus simul angulis abc, dbm, siue duobus rectis minores. Dico esse ad ad dm, vt ad ab bd. Nam angulus adm æqualis est angulo abd, & angulus dab communis; sunt ergo similia triangula abd, adm; quare est ab ad bd, vt ad ad dm. Quod erat &c. Fig. 60.

Pro secundo casu vertex anguli acx intelligatur suo motu versùs punctum b peruenisse ad quoduis punctum e, & existente angulo aeg æquali angulo acb, siue abc, punctum g sit in recta ab. Dico esse ab ad be, vt ae ad eg. Sunt enim similia triangula aeg, abe propter angulum bae communem, & æquales angulos aeg, abe; quare erit ae ad eg, vt ab ad be. Quod erat &c. Fig.

 Pro

Pro tertio casu intelligatur vertex anguli acx suo motu ex puncto b versùs x peruenisse ad quoduis punctum k, & existente angulo akf æquali angulo acx recta ak diuidat angulum bkf, sitque ak ad kf, vt ab ad bk.
Fig.61. Punctum f pertinebit, ex hypothesi, ad lineam genitam. Iam protrahatur fk quoad occurrat ab protractæ in h. Occurret autem, quoniam duo simul anguli bkh, kbh minores sunt duobus rectis, vt facilè ostendi potest. Dico kh æqualem esse ipsi kf. Nam, quoniam angulus akf est æqualis angulo acb, siue abc, erit angulus akh æqualis angulo abk: est etiam communis angulus bak; sunt igitur similia triangula abk, akh. Quamobrem erit ak ad kh, vt ab ad bk, siue ak ad kf; adeòque kf æqualis erit ipsi kh. Quod erat &c.

Pro quarto casu vertex obtusi anguli acz intelligatur suo motu versùs z peruenisse ad quoduis punctum d, & existente angulo ado æquali angulo
Fig.61. acz, recta ad diuidat angulum cdo, sitque ad ad do, vt ab ad bd. Punctum o pertinebit, ex hypothesi, ad lineam genitam. Iam protrahatur od, quoad occurrat ipsi ab protractæ in m. Occurret autem, quoniam anguli bdm, dbm minores sunt duobus rectis, vt superiùs ostensum est. Dico md æqualem esse ipsi do. Nam, quoniam angulus ado æqualis est angulo acz, erit angulus adm æqualis angulo acb, siue abc: est etiam communis angulus bad; sunt igitur similia triangula abd, adm. Quare erit ad ad dm, vt ab ad bd, siue ad ad do; adeòque dm æqualis erit ipsi do. Quod erat &c.

Pro quinto casu vertex eiusdem anguli acz intelligatur suo motu versùs
Fig.60. punctum b peruenisse ad quoduis punctum e, & existente angulo aef æquali angulo acz, recta ce diuidat angulum aef, sitque ab ad bc, vt ae ad ef. Punctum f pertinebit, ex hypothesi, ad lineam genitam. Iam protrahatur fe quoad secet rectam ab in g. Dico fe æqualem esse ipsi eg. Nam, quoniam angulus aef est æqualis angulo acz, erit angulus aeg æqualis angulo acb, siue abc: est etiam communis angulus bae; sunt igitur similia triangula aeg, abe. Quare erit ae ad eg, vt ab ad bc, siue ae ad ef, adeòque ef æqualis erit ipsi eg. Quod erat &c.

Fig.60. Pro sexto, & vltimo casu vertex eiusdem anguli acz intelligatur ex puncto b versùs x peruenisse suo motu ad quoduis punctum k, & existente angulo akh æquali angulo acz, recta bk diuidat angulum akh, & protrahatur kh quoad occurrat ipsi ab protractæ in h. Dico esse ak ad kh, vt ab ad bk. Hoc autem manifestum est ex tertio casu.

Fig.61. & 60. Ex proprietate, quam communem ostendimus lineis genitis in tertio, quarto, & quinto casu, ostenditur eas non esse rectas, sed curuas. Si enim recta esset linea genita in tertio casu, cùm omnes rectæ bf, bifariam diuidantur à rectâ bx, sequeretur eas esse inter se parallelas; quod falsum esse manifestum est. Eadem ratiocinatione idem euincetur de lineis genitis in quarto, & quinto casu. Hæc autem omnia erant demonstranda.

AD

AD AVCTOREM PROBLEMATVM.

HÆC ſunt, nobiliſſime Iuuenis, quæ pro anguſtijs temporis ſpeculari licuit. Mihi verò non eſt quærendus Geometra, cùm in te habeam Syracuſium illum ſenem principem geometriæ, iterum, vt reor, in Siciliâ rediuiuum. Quandoquidem verò ad amœbœum carmen prouocaſti, imitabor paſtorem illum apud Virgilium, qui propoſito ſibi arduo ænigmate aliud aduerſario ſoluendum, iuxta legem alterni carminis, repoſuit. Itaque inuicem ambo decertabimus, ſi non ingenio, quantum ad me attinet, at ſaltem (vti cecinit Theocritus veſter) *Ambo ætate pares, & reſpondere parati*. Eſto igitur

PROBLEMA.

SI recta linea in plano ducta, manente altero eius termino æquè velociter circumferatur, quouſque rurſùs in eum locum reſtituatur, à quo moueri cæperat: eodemque tempore punctum aliquod incipiens à termino manente, in dicta linea ità feratur, vt duo quæuis ſpatia percurſa, ſumpta vtraque à termino manente, ſint in ſubduplicata ratione temporum; punctum hoc lineam in plano deſcribet, quam cicumſpiralem appello. Quæcunque igitur de ſua ſpirali oſtendit Archimedes, eadem ego proportione accommodâ de hac mea circumſpirali quæro.