Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt

Digitalisierung von Drucken des 17. Jahrhunderts

Christophori Clavii Bambergensis E Societate Jesu Commentaria In Euclidis Elementa Geometrica, & In Sphaerica Theodosii, quibus accessit explicatio Sinuum, Tangentium & Secantium cum Canonibus. ...

Clavius, Christoph

Moguntiae, 1612

VD17 3:607360F

urn:nbn:de:gbv:3:1-596476

Visual Library

Universitäts- und Landesbibliothek
Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0001-5

21.

Wohl Dubl. v. Pb 1487 40 ?

prüfen!

.7

Constat 3 Hc

n. sl.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0002-1

3554

Universitäts- und Landesbibliothek
Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0003-6

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

COMMENTARIA

In Euclidis Elementa Geometrica, &
In Sphærica Theodosij, quibus accessit explicatio Sinuum, Tangentium & Secantium cum Canonibus.
Tractatio item Triangulorum, tum rectilineorum, tum sphæricorum.

OMNIA HAC EDITIONE AB IPSO Authore multis in locis correcta & aucta.



MOGVNTIÆ,
Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat
IOANNES VOLMARI.
Cum Gratia & Priuilegio Sacræ Cæsar. Maiest.

ANNO M. DC. XII.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0005-8

BIBLIOTHECA
LYCEI
WERNIGERO-
DANI.

BIBLIOTHECA
LYCEI
WERNIGERO-
DANI.

2061

Universitäts- und Landesbibliothek
Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0006-3

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

IN DISCIPLINAS MATHEMATICAS PROLEGOMENA.

(o)

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ CVR SIC DICTÆ SINT.

DISCIPLINÆ Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca μάθημα, siue μάθησις, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, qua anima nostra, (vt eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio responderit, vt puer, gradatim tamen ascendens, eo deductus est, vt responderit id quod tandem dicturus fuisset, si diutissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quod solæ modum rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est munus, atque officium doctrinæ siue disciplinæ, vt & Aristoteles 1. posteriorum testatur; neq; vnquam aliquid non probatũ assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum quę ante docuerunt, id sumũt pro concesso, & probato: illud vero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasue non semper obseruare videmus, cum plerunq; in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstrataue adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM DIVISIO.

PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atq; Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas vniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriã, atque Astronomiam. Cum enim omnis quãtitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & vtraque tam secundum se, quam comparatione alterius possit cõsiderari; visum fuit illis consentaneum quatuor prædictas facultates instituere, quæ vtrãque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accurate explicando omnes numerorũ proprietates, ac passiones. Musica tractat eandem quãtitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, siue quantitate continua, secundum se quoque, vt immobilis existit, disputat. Astronomia deniq, eandem magnitudinem, vt est mobilis, considerat, qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica & Geometria puræ, Musica vero atque Astronomia mixtæ dicuntur omnes aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis est Perspectiua, Geographia, & cæteræ huiusmodi, vel facile, vt ad capita, à quibus dependent, reduci possunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, vt auctor est Proclus in Commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematicæ disciplinæ diuiduntur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseque docet, ad quænam sese extendant Mathematicæ disciplinæ, fere ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hic subijcere statui. Volunt itaq; prædicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectilibus duntaxat ab omni materia separatis quasdam vero in sensilibus, ita vt attingant materiam sensibus obnoxiam versari. Prioris generis statuunt duas longe primas, præcipuasque scientias, Arithmeticam & Geometriam: In posteriori vero genere constituunt sex, Astrologiam,

logiam, Perspectiuam, Geodæsiam, Canonicam, siue Musicam, Supputatricem, atque Mechanicã. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis edisserit motibus, de corporum cœlestium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonum exercetur: Metheoroscopica, quæ eleuationum differentias, siderumque reperit distantias, nec non multa alia & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumque stellarum distantias huiusmodi Dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt à Geometria gigni, atque vti radijs visorijs, tanquam lineis, & angulis qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in ea, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub visum cadunt, alios situs & distantias, vt parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam specularem; quæ circa varias, multiplicesque versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc est, vmbrarũ designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesque videantur. Geodæsiam appellant eam scientiam, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos tanquam conos; & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero erassioribus, vt spartis & perpendiculo. Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes concentuum considerat rationes, sensusque vbique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, vt menti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat, non vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materiæque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quædam enim est instrumentorũ effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis idonea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra mariq; obsidentibus resistentia. Quædã mirabilium prorsus rerũ effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ, dicitur; quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status vero æquilibrium esse causam censendum est, vt Timæus etiam determinauit; alia vero neruis, spartisque animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino & eorum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique sphærarum effectrix, quæ σφαιροποιία appellatur, ad cœlestium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est. Atque vt vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandasque pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij voluere, sed vti eam volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæsia, vt in diuidendis, dimetiendisque Castrametationi spatijs in campo. Quemadmodum neque historicam, neque medendi artem Mathematices partem vllam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam medici Mathematicis vtantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus circuitusue colligẽdo: Medici vero quam plurimas res in arte sua huiusmodi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locisque dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, paucissimam ostendere multitudinem, castra suosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum vero ad figuram quadranguli, vel quinquanguli vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere sunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum scientiarum partitione reliqueruut.

INVENTORES MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

OMNES disciplinas Mathematicas à varijs & diuersis auctoribus ortum originemque duxisse, perspicue historiæ testantur: Imo vero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoriæ quoque proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commercia, vt auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq; successores, nec non Ægyptij, Græci deniq; atque Arabes amplificarunt, varijsque problematis, atque theorematis illustrarunt. Musicam deinde à Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt, quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit atque concredidit; Hic autem Thamyri & Lino. Linus vero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra vsq; tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Ægyptijs reperta est ortumq; habuit ab agrorum dimensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaretque, vt nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Ægyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quamquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, siue γεωμετρέω idem significat, quod terram metior. Caterum paulatim deinde Geometria cœpta est expoliri; & non contenta suis finibus, sese ad corpora etiam cœlestia dimetienda conuertit, tradiditque principia vniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quamplurimis, quæ ex ipsa, veluti radice, dependent. Hanc Thales Milesius ex Ægypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutissimisque demon-

demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus: Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum est recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomię cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere. Alij putant Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Ægyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, vt est præstantissima, ita quoq; maxime illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterum præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipsis tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ sunt, atque deductæ.

NOBILITAS ATQVE PRÆSTANTIA SCIENTIARVM MATHEMATICARVM.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis reipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, vt recte à Proclo probatur, Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum, & re, & ratione: Physices vero subiectum & re & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat hoc medium esse inter alia duo. Si vero nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda; haud dubie Mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant: Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorum sectæ, (vt alios interim Philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami è trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnumquam à fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristotcles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe à Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse digniorem, præstantioremq; quæ magis synceritatis, veritatisq: est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque; dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIÆ MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

NON solum vtiles, verum etiam necessariæ admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicam, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si à rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque vllo medio tentemus, nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contingit, qui è carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res Methaphysicas, quæ sunt ab eadem maxime auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales à Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ disciplinæ ad sacras litteras recte percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrime nobis exponit B. Augustinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina Christiana, demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi à multis, quæ translate, ac mysticè posita sunt in Scripturis. Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemquen sententiam longe post pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem docet D. Hieronymus tomo 1. Epist. 5. asserens magnam inesse numeris vim, ad multa mysteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco Geometriam magnam afferre Theologis vtilitatem perhibet. Rursum B. Augustinus loco iam citato, capite 16. quem paulo ante retuli, testatur, Musicam perneccessariam esse doctori Christiano, subiungens paulo post, capite 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, summis laudibus Diuum Basilium Præceptorem suum extollit, quòd in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisq; scientijs

Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfecte acquirendas, vt perspicuè docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philosophorum, maxime Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos ad bene recteque philosophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimum de causa, vt ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse, per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quæ procul dubio nulla ratione percipietis, qui scientiarum Mathematicarum omnino est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitauit affirmare. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copiosè scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Remp. bene administrandam: Cuius rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeo vt etiamsi nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidem experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex aliis scientiis percipere: Contra vero eos, qui ad hasce facultates idonei minime reperiuntur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Timæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & plerisque aliis in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor industria supersedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiusque animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges ac imperatores ad honestissimam, maximeq; liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumq; versari solebant. Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab aliis studiis excæcatur, defoditurque, à Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum Philosophorum, quibus harum disciplinarum vtilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque præstantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIÆ COMMENDATIO.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deque Geometria vniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, vt testatur vulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit à se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondendoq; (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de vitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæst. Acad. lib. 2. vbi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, à quo iidem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset vnum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum à Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius esse crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentissime enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis philosophorum exercitatissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse præterire, vel ab Euclide suo esse compositum ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo Philosopho longe alius est, qui cum in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicarit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes, Phænomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de Superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuscula. Maxime verò hoc volumen Elementorum Geometricorum, numquam

quam omnium consensione satis laudatum, tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, vt summum ingenii acumen demonstrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea duntaxat, quæ visa sunt esse necessaria, atque vtilia ad communem omnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Cæterum, quanta sit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersæ Geometriæ præstantia, atque vtilitas, partim ex iis, quæ ante scripsimus, partim ex iis, quæ nunc dicemus, non obscure perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosios, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa litterarum discit prius, & illis assidue repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene ac perfectè calleat prius necesse est. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in cælo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere variè illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinę totius huius mundanę est inuentum medium, atque centrum; inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius exlorata figura, ac quantitas. Ostenditur atque demonstratur vnius huius scientiæ vi cæli vniuersi, siderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, dici ac noctis, temporumq; toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusq; varii tam expedite cognoscuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis, ac Lunæ defectiones certissime, antequam fiant, in omne posterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingẽs Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse videntur, omniumq; fidem superant, perspicua facere, credibiliaque esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historiæ. Cùm enim Hieron Syracusarum Rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum Regi mittere statuerat, tantæ esset molis fabricatus, vt eam omnes vnà Syracusij à loco dimouere minime valerent: Archimedes Geometra peritissimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promisit, se effecturũ, vt ipsam solus Rex absque vllo labore subduceret. Quod cum præstitisset, in conspectu omnium Rex stupefactus exclamasse perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Nõ dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro argentoque confecta, quam Rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime offendit. Neque silentio præteriri debet, eundem Archimedem robori ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumerò iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, è loco se commouere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere. Et alia id genus, non solùm ab Archimede, verum etiam ab aliis præclaris, & illustribus Geometris patrata esse, memoriæ proditum est. Tantum denique nomen vna hæc Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnatæ vrbis direptione, ac cæde ciuium vnius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium suum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius sepultur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam vtilitatemque Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit vis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidẽ ingenue fatetur Galenus insignis Philosophus, ac Medicorum princeps, in libro, quem de libris propriis inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cum scholas Peripateticorum ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore studioque arripuisset, nihil fere ab ipsis audisse se testatur, quod ad Demonstrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperisse. Ita vt ad Pyrrhoniorum fere (erant Pyrrhonii Philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæque (quibus artibus ab auis & patre fuerat institutus) esset cognitione scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse charactères illos Arithmeticos, & linearum demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quòd eius cognitio maxime sit vtilis, vt aliæ artes facilius & rectius percipiantur. Postremo est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis & inferioribus hisce machinis, à quibus originem traxit, sed euolauit in cælum vsque, & humanas Mentes humi abiectas in illam rursus cælestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIÆ ET ELEMENTORVM EVCLIDIS.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici.

Nam Geometria vniuerſe ſibi hunc ſcopum proponit, vt plana, aut ſolida vel conſtituat, vel conſtituta inter ſe comparet, aut diuidat. Neque verò mirum alicui videri debet, quod cum tria ſint genera magnitudinum, linea, ſuperficies, & corpus, ſolum de duobus poſterioribus extent propriæ contemplationes, vt diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potiſſimum circa figuras verſatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam ſolidis conſiſtunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram vllam conſtituunt ſine planis, aut ſolidis, ac proinde neceſſe non erat, propriam de punctis & lineis ſcientiam inſtituere; Superficiebus vero, ſiue planis, & corporibus, ſolidiſue maxime conueniebat, vt proprias nanciſcerentur tractationes. Volens igitur ſummus harum rerum artifex Euclides in hiſce elementis perfectam, & omnibus numeris abſolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus ſex libris agit de planis, in poſterioribus verò quinque de ſolidis acutiſſime diſputat, eorumque proprietates maxime illuſtres perueſtigat. Quoniam vero cum res omnes Geometricæ, tum præſertim ſolida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici ſolent, perfecte tractari non poterant, abſque linearum commenſurabilium, atque incommenſurabilium notitia; Immo vero quam plurimæ magnitudines ſub menſuram cadere nulla ratione abſque earundem linearum cognitione poſſunt, cum earum latera ſæpenumero ſint talia, vt ea communis & nota menſura data metiri nequeat, vt liquido conſtat iis, qui aliquando demonſtrationes Geometricas in opus contulerunt, atque vſum: id circo vt hiſce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimenſionemque requiſita, Stereometriæ ſuæ præpoſuit decimum librum, in quo ſubtiliter & copioſe de huiuſcemodi lineis diſſerit. Intelligens rurſum Euclides, neque hanc tractationem linearum commenſurabilium & incommenſurabilium ſine numerorum cognitione poſſe conſiſtere, ante decimum librum agit de numerorum paſſionibus, eaſque copioſe & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, eſt perſecutus. Quamobrem totum hoc volumen elementorum Geometricorum quindecim libris comprehenſum (quorum quidem priores tredecim ſine vlla controuerſia Euclidi aſcribuntur ab omnibus; poſteriores vero duo à nonnullis Hypſiclis Alexandrini eſſe creduntur) ſecari recte poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta ſex prioribus libris agat de planis; Secunda tres ſequentes complectens, paſſiones numerorum perſcrutetur; Tertia, quam ſolus decimus conſtituit liber, de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusque diſputet; Quarta denique reliquis quinque libris abſoluta ſcientiam ſolidorum, ſiue corporum complectatur. Prima pars rurſum triplex eſt; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis abſolute, inueſtigando eorum æqualitatem & inæqualitatem: In quinto vero libro de proportionibus magnitudinum in genere diſputatur. In ſexto denique proportiones figurarum planarum diſcutiuntur. Quid vero Euclides in ſingulis aliis libris pertractet, propriis in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, QVID PROPOSITIO, ET QVID LEMMA apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis ſcriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant demonſtrationem, quæ iubet, ac docet aliquid conſtituere. Vt ſi quis conetur demonſtrare, ſupra lineam rectam finitam poſſe triangulum æquilaterum conſtitui, appellabitur huiuſcemodi demonſtratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum conſtitui debeat ſupra rectam lineam finitam. Dictum eſt autem hoc genus demonſtrationum Problema, ad ſimilitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæſtio illa, cuius vtraq; pars contradictionis (vt ipſi loquuntur) eſt probabilis, qualis hæc eſt quæſtio; An totum diſtinguatur realiter à ſuis partibus ſimul acceptis: Sic etiam quæſitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent conſtruere, & cuius contrarium effici etiam poteſt, problema appellatur. Vt ſi quis proponat ſe demonſtraturum, ſupra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum poſſe conſtitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Iſoſceles, vel ſcalenum, ſupra eandem lineam conſtitui poteſt. Pari ratione, qui inſtituit angulum rectilineum ſecare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi poteſt in partes non æquales. Eſt tamen diſcrimen non paruum inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantum probabiliter, ita vt intellectus cuiuſq; ambigat, vtranam illius pars vera ſit: In Mathematico vero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita vt nihil omnino dubij ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineam perpendicularem educere, efficiet vtique hoc ipſum ratione conſtanti, & euidenti: Eodem modo dicendum eſt, ſi ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, quæ ſolum paſſionem aliquam, proprietatemue vnius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur. Vt ſi quis optet demonſtrare, in omni triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis, vocabunt talem demonſtrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodo trianguli cuiuslibet conſtituti paſſionem hanc, quòd anguli illius duobus ſint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipſa, hæc demonſtratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione poteſt, cõtradictionis vtraque pars vera vt ſit. Si enim quis demonſtret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus eſſe rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoque ſint duobus rectis. Eadem ratio in aliis theorematibus eſt intelligenda. Itaque vt vno verbo dicam, quæſitum illud Mathematicum conſtruere aliquid docens, cuius etiam oppoſitum poteſt effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet conſtruere, & cuius pars oppoſita perpetuo falſa exiſtit, Theorema appellatur. Vnde ſi quis proponeret in modum problematis, ſe in ſemicirculo velle angulum rectum conſtituere, irridendus omnino eſſet, & Geometriæ prorſus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in ſemicirculo conſtituti ſunt recti, vt demõſtrabitur libro 3. propoſitione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Cæterum tam problema, quàm theorema dici conſueuit apud Mathematicos Propoſitio, propterea quod vtrumque aliquid nobis proponit, vt in exemplis adductis conſtat. Hæc ideo dixerim, vt ſtudioſus lector non miretur, quando reperiet

reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur his fere verbis: Quod faciendum erat; Theorematum vero hisce: Quod ostendendum, vel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur, & nō vna tantum, quamuis vltimus syllogismus demonstratiuus solum concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM vero ad demonstrationes problematum atque theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facile ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdū à Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, vt breuius demonstrari possint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quod solum assumuntur ad alias demonstrationes; non autem de illis præcipua disputatio instituitur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac breuior.

QVÆNAM SINT PRINCIPIA APVD MATHEMATICOS.

CVM omnis doctrina, omnisque disciplina ex præexistente gignatur cognitione, vt auctor est Aristoteles, atque ex assumptis, & concessis quibusdam principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eiusdem Aristotelis, aliorumque Philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt vtique & Mathematicæ disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reperiuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Aristotele suppositiones, vt vult Proclus, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ non solum in scientia proposita, sed etiam in omnibus alijs ita manifesta sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula recte perceperit. Atque his principijs recte mihi videtur accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles: A ianua quis aberrabit? Vt præclare à Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum præmittit ante demonstrationes suarum conclusionum omnia hæc principia, vt ex ipsis, quæ quidem facile à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquam assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusque sæculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notissimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusque certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porro in huiusmodi principijs tradendis hic ordo ab Euclide seruatur, vt in ipso quidem introitu scientiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque vero omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt, & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuisse videamur rerum Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse.

IN

IN EVCLIDIS ELEMENTA PRÆFATIO.

SI quis forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facile sibi persuadebit, non temere id à nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeo necessitatem horum elementorum, vt frustra quisquam se speret, sine illorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosii, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à plerisque omnino negligi, à perpaucis vero pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elementis ponant; ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obscuritate deterreantur, nullumq; habeant in hac re ducem, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sane eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facile consequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac Methodum peruerterunt, verbaque propositionum eiusdem locis nou paucis immutarunt, vt verus germanusq; auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maxime in 10. lib. perspicitur; Alter (Theonem intelligo) pene innumeris mendis, vitiisq; incuria librariorum ita est deprauatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas ac male expressas adeo impeditus, vt magnam difficultatem in exercitatis ingenijs, perplexitatemq; gignat. Quo fit, vt Euclidem sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram vsq; memoriam maius aliquod studium operamq; in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel sex priores tantum libros exposuerunt: vel si qui in vniuersum Euclidem Commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerumq; non tam firmæ sunt, neq; rem ipsam simpliciter & absolute conficiunt; præsertim quod modo propositionib. voces quasdam perperam detrahunt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, vt merito de vero proprioq; Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamen in re Federicum Commãdinum Vrbinatem, Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem Latine redditum in pristinum nitorem restituit, paucis locis exceptis, in quibus non parum à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resq; ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt, post diuturni temporis in rebus Mathematicis operam collocatam faciendum putauimus, vt lucubrationes nostras ac vigilias studiosis harum rerum nonnihil (nisi fallimur) subsidij allaturas in publicum ederemus. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præstitum sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum plerisq; asseueramus, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, vel certe planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresq; reddere conati sumus. Non enim illas nude, ac totidem verbis, quot erant scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantissimo Poeta dictum est: Breuis esse laboro, obscurus fio. *Interdum etiam cum breuius, atque succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quam satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare vtrumq; vitantes, eas, velut* παραφραστικῶς, *atque ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & voluntati, quantum est in nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius à studiosis, ijs præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore voluptate, vtilitateq; cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata scitu non iniucunda, neque à scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliisque auctoribus decerpsimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, assiduisque meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præsertim obscuriores, & quæ aliquid visæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam incidentes, à recto cursu deflexerunt, & in errores varios atque absurdos, prorsusque ab instituto disciplinæ abhorrentes dilapsi sunt) dilucide atque perspicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facile iudicabunt.*

QVÆ

QVÆ PRÆCIPVE PRIMÆ EDITIONI EVCLIDIS ADDITA SINT.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.] multo euidentior, quam ea, quam Proclus affert. *Ad propos. 28. lib. 1.*

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. propos. lib. 1. absque ope proportionum sexti lib. *Ad prop. 40. lib. 1.*

III.

QVO pacto construenda sint triangula amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propos. 12. & 13. lib. 2. *Ad propos. 12. & 13. lib. 2.*

IV.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarij, de angulo contactus. *Ad prop. 16. lib. 3.*

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris planis æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoque æquilatera. *Ad finem lib. 4.*

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. *Ad defin. 4. lib. 5.*

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquè multiplicia definierit. *Ad defin. 8. lib. 5.*

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur; Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contra; Et denique alia scitu iucundissima perficiuntur. *Ad finem lib. 6.*

IX.

QVO pacto pleraque theoremata lib. 7. demonstrentur quoque de numeris fractis, siue ipsis adhæreant numeri integri, siue non. *Ad propos. lib. 7.*

X.

MINVTIARVM, siue numerorum fractorum demonstrationes clarissimæ. *Ad finem lib. 7.*

XI.

DE Proportionum compositione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio ac Diuisio fieri debeat: aduersus quosdam Recentiores. *Ad finem lib. 9.*

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data sphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quam ea, quam nobis tradidit Euclides. *Ad fin. lib. 16.*

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & superficierum conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter se. *Ad finem lib. 16.*

Cætera quæ passim hisce commentarijs adiecta sunt non pauca, quæ in alijs editionibus desunt, cuiusmodi est præsertim accuratior inuentio vltimorum punctorum Quadratricis per lineas perpendiculares, non autem per obliquas linearum intersectiones, &c. diligens Lector nullo negotio notabit.

EVCLI-

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0015-3

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

TOTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus proprietatesq; triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdum, interdum vero vnumquodq; per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera. secundum æqualitatem atq; inæqualitatem, rimatur. Idemq; variis rationibus inquirit in duobus quandoq; triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq; vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositam exorditur à principiis, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem cõtinuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemve alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adiiciat partes etiam latitudinis; quædam demiq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa solùm est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neq; aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaq; quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neque longum, neque latum, neque profundum esse cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Instans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum verò indiuiduum prorsus debet existimari. Denique in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodque in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua. punctum

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam dũtaxat, non autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbræ extensa, carens omni latitudine, cum sit limes vtriusque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, è loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, vestigium effectum AB, lineæ



appella-

appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vt pote secundum longitudinem secari, atque diuidi.

III.

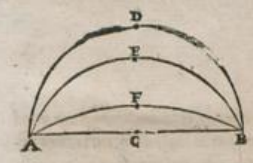
LINEÆ autem termini, sunt puncta.

DOCET, quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinque punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea quælibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea AB, extrema habet puncta A, & B. Idemque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IV.

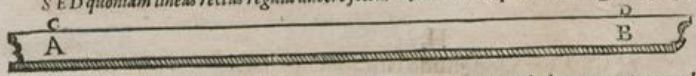
RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraque. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior. Sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea ACB, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcisè spatium, quanta est distantia puncti A, à puncto B, Lineæ vero ADB, AEB, AFB, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spatia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ ACB, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in aliis lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B.



Plato rectam lineam perpulchre sic definit: Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea ACB, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis ADB, AEB, AFB. Archimedes vero ait, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est ACB, comparata cum ADB, AEB, AFB. Si enim ACB, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ minor diceretur, quam ACB. Campanus denique describens rectam lineam, vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum recta fluere concipiatur per breuissimum spatium, ita vt neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem quendam motum, atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atque hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu, non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodã motu, atq; distantiaà certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaq; si duo puncta moueantur similibus prorsus motibus ita vt semper æqualiter inter se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si vero vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides. Sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autẽ primum genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoides, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & aliæ huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libro de Cælo, iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices rectum & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum.

SED quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula AB, secun-



dum cuius latus CD, recta CD, describatur ex puncto C, in punctum D. Deinde conuertatur regula, vt manente eadem parte superiore, punctum C, statuatur in D, & punctum D, in C, & secundum idem latus regulæ CD, recta ducatur ex eodem puncto C, in punctum D. Nam si posterior hac linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regulæ AB, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud CD, perfecte rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

POST lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundũ latitudinẽ. Nam in super-

superficie reperitur, non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehensa, considerataque secundum longitudinem AB, vel DC, & secundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in trasuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea AB, fluat versus DC, efficietur superficies ABCD. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem interuallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.



VI.

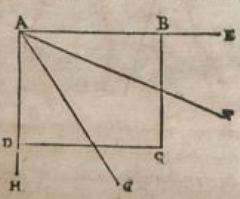
SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ

NON dissimilis ist hæc definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei ABCD, extrema sunt lineæ AB, BC, CD, DA. Eodemque modo in quacunque altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HÆC quoque definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumue subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorue, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extremas: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extremas: vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies ABCD: tum demum plana dici debet, quando linea rectæ AE, circa punctum A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem, quæ AF, nunc eadem, quæ AG, & nunc eadem, quæ AH, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum. Sed omnia puncta superficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alius humilior a linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaque vt sit plana, requiritur vt omnibus modis posit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari posit recta linea secundum AB, & AF, & denique secundum omnes partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas consicitur. Vt si linea recta AB, per duas rectas AD, BC, feratur, efficietur superficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæue rotundæ, vel etiam coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficies columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari posit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest. Idemque dicendum est de aliis. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

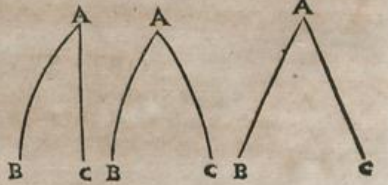




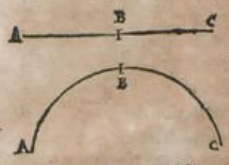
VIII.

PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ linea non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta, circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quamquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circulus illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus



constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ vnam integrã lineam constituẽt. Vt quia recta AB, producta conuenit cum recta BC, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis AB, BC, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaque vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productæ se mutuo secent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotæ cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrẽtes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quique in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæræ constituuntur ex circulorum maximorum circumferentiis, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.



IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides: aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua & altera recta, qui nõ inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearũ curuarum, vtpote secundum conuexum, concauum, seu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur: Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisue linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.



X.

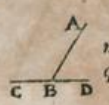
CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quisnam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quanam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea AB, recta CD, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis esse deinceps, quod eos eadem linea CD protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod tum demum fiet, quando recta AB, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed æquabiliter rectæ CD, insistet, vocabitur vterque angulus B, rectus, & recta AB, perpendicularis rectæ CD, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta CB, perpendicularis rectæ AB: quamuis enim CB, tantum faciat cum AB, vnum angulum, tamen si AB, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius primi libri. Itaque vt in Geometria concludamus angulũ aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur vterq; illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex consequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.



QVANDO recto AB, rectæ CD, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.

XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eũ efficiens non debeat magis in vnã partẽ inclinare, quam in alterã: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui

& minui in infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis eriam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD, quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.



IAM vero proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusue, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A. Ducta recta BC, vtcunque, quæ angulum subtendat, & diuisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro ad interuallum DA, circumferentia circuli; quæ si per puncta B, C, transeat, [a] erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo BAC, existat: si vero idem semicirculus rectam BC, secet in E, F, erit angulus BAC, obtusus; propterea quod, ductis rectis EA, FA, [b] angulus EAF, in semicirculo EAF, rectus est, qui quidem pars est anguli BAC. Si denique idem semicirculus rectam BC, productam secet in E, F, erit angulus BAC, acutus; propterea quod ductis rectis EA, FA, [a] angulus EAF, in semicirculo EAF, rectus est, qui quidem maior est angulo BAC.



a 31. tertij.

b 31. tertij.

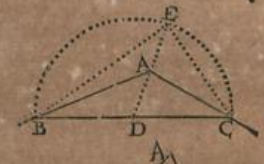
a 31. tertij.

ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam BC, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus ad interuallum DB, vel DC, qui si transeat per punctum A, [b] datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si vero idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta DA, secante circumferentiam in E, iungantur rectæ EB, EC, [c] erit quæ angulus BEC, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus BAC, datus [d] maior sit angulo BEC, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas AB, AC, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas AB, AC, in circumferentia, iungantur rectæ EB, EC, [c] erit quæ angulus BEC, rectus in semicirculo: [f] qui cum maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commode differri, donec propositiones requisitæ sint demonstratæ. Satis est, vt praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim præpris in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessariæ sint propositiones posterius demõstratæ.

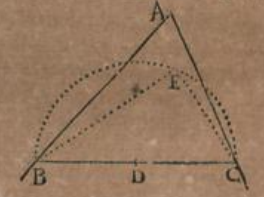


b 31. tertij.

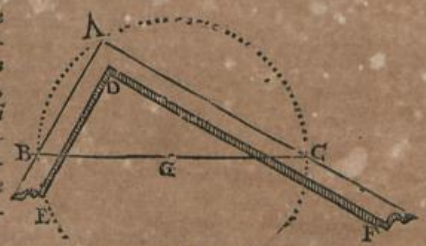
c 31. tertij. d 21. primi.



c 31. tertij. f 21. primi.



FACILIVS idem cognoscemus beneficio normæ alicuius accurate fabricatæ, qualem refert instrumentum ABC, constans duabus regulis AE, AF, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam si latus AB, huius normæ, rectæ, AB, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; si quidem & normæ latus AC, rectæ AC, congruat, erit angulus A rectus: si vero citra rectam AC, cadat normæ latus AC, erit angulus A, obtusus: si denique latus normæ AC, vltra rectam AC, cadat, acutus erit angulus, vt perspicuum est.



ITA autem normam examinabimus, num accurate sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo BAC, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaque diametro BC, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, vt in A, latusque vnum normæ, vt AB, per B, punctum extremum diametri transeat. Nam si alterum tunc latus AC, per alterum punctum extremum C, transeat, rite fabricata erit norma ABC; [a] quod tunc angulus BAC, in semicirculo BAC, rectus sit: si vero latus AC, non per C, transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circumferentiæ applicemus, & latera DE, DF, punctis extremis B, C, &c. a 31. tertij.

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuũ est ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

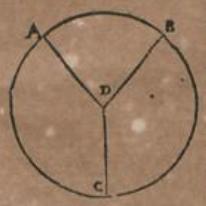
NON Omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea

solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ, & quæ profunditatem adeptæ quoq; sunt, vt solida finita. Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaq; termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest, Figuræ vnico comprehensa termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus vero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circunscripta, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur vnica linea ABC, habeatque hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum ABC, quales sunt DA, DB, DC, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana, circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est ABC, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circumferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidem descriptio per similis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. 11. Vt si intelligatur recta AD, circa punctum D, quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoueri cœpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam ABC: Erit quoque punctum quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta AD, circumducta, omnes lineas, quæ ex D. possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circumscripta, tamen quia in ea non datur punctum, à quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.



XVI.

HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

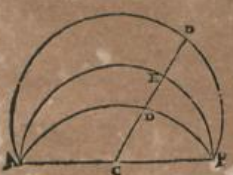
DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, à quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, nõ autem in superficie circuli; quæ tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes alia ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.

XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

SI in circulo ducatur recta linea AB, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari à diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinque æquales circumferentiæ abscindantur. Quod tamen Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem ADB, accommodari, & coaptari portioni reliquæ AEB, ita vt diameter AB, communis sit vtrique portioni: Si igitur circumferentia ADB, congruat penitus circumferentiæ AEB, manifestum est, duas illas portiones à diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circumferentia ADB, non omnino ex parte cadere dicatur super circumferentiam AEB, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C. secante, circumferentiam ADB, in D, & circumferentiam AEB, in E, erunt duæ rectæ CD, CE, ductæ ex centro ad circumferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideoque æquales erunt, quod demonstrandum proponebatur.





EX hac demonstratione constat, diametrum non solum circumferentiã, verumetiam totam aream circuli secare bifariam. Cũ enim semicircumferentiæ sibi mutuo congruant, vt ostensum est, cõgruent etiã superficies ipsæ inter diametrum, & vtramq; circunferentiã comprehensæ, cũ neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.

XVIII

SEMICIRCVLVS vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in superiori circulo figura ADB, contenta sub diametro AB, & peripheria ADB, dicitur semicirculus, quia

quia, vt in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura AEB, semicirculus. Idem autem punctum C, diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.



QVOD si recta linea BD, non transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas portiones inæquales BAD, BCD, quarum ea, in qua centrum circuli existit, cuiusmodi est portio BAD, maior est, quam alia BCD, extra quam centrum E, reperitur. Esse autem portiones BAD, BCD, inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam BD, perpendicularis AC. Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio BCD, intelligatur moueri circa rectam BD, vt super portionem BAD, cadat, congruet illa portio huic, & recta FC, rectæ FA, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter se æquales sunt ex defin. 10. cum sint sibi mutuo deinceps. Recta ergo FC, quæ nunc eadem est, quæ FA, maior erit, quam EA, pars ipsius FA. Cum ergo ipsi EA, sit æqualis EC, quod ambæ ducantur è centro ad circumferentiam, erit quoq; FC, maior quam EC, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur portio BCD, portioni BAD, congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio BGD, vt recta FG, eadem tunc existens, quæ FC, minor posßit esse quam EA, vel EC. Si namque diceretur cadere extra, vt si circulus esset BCDG, cuius centrum E, & portio BCD, caderet extra BGD, qualis est portio BAD, esset rursus FA, eadem tunc existens, quæ FC, maior quam EG, hoc est, quam EC, atque ita pars FC, maior rursum foret toto EC, quod absurdum est. Ex quo patet, portionem BAD, in qua centrum E, existit, maiorem esse reliqua portione BCD, cum hæc æqualis sit portioni BGD, quæ pars est portionis BAD. Cum enim ostensum sit, portionem BCD, circa rectam BD, circumductam non posse congruere portioni BAD, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis est BGD.

XIX.

RECTILINEÆ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potißimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndiq; rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERÆ quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, aperte nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERÆ quidem, quæ sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERÆ autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinq; tertiam componunt speciem; sex quartam, atq; ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortaßis eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atq; Quandrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes à quolibet definiri posßint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ septangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoque esse, ceu ad quintam propositionem huius libri demonstrabimus.



XXIV.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

EX hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius, & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.



XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales, vel duorum tantum angulorum æqualium: vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum vero Isoscheli, tertium deniq; Scaleno respondet triangulo. Cæterum quanam arte construenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.



XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt supra diximus,) fit vt tres quoque species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusq; obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse Isosceles, vel scalenum, vt hæ figuræ indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoq; cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtusum angulum habet.

TRIANGVLVM Amblygonium, siue obtusangulum esse quoque potest vel Isosceles, vel scalenum, vt in his figuris cernitur, non autem æquilaterum, alias eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quæ propos. 5. ostendemus, æquales, ideoque cum vnus ponatur obtusus, omnes res obtusi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.



XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, esse necessario Oxygonium: At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque Isosceles Oxygonium rursum duplex, Isosceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, atque Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus: Vt vnica sit species trianguli æquilateri, quatuor vero Isoscelis, & tres Scaleni: Atq; in vniuersum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles Amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. Posse autem dari triangulum Isosceles Oxygonium, cuius duorum laterum æqualium vtrumuis tertio sit minus, vt recte animaduertit Franciscus Bauocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mysterij in base trianguli, intelligeresque quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.



POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinque tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesque anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quenam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.

XXX.

XXX.

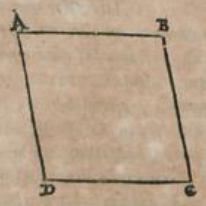
ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.



SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori ABCD, latera AB, DC, inter se, & AD, BC, inter se quoq; æqualia sunt, cum ABCD, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



HÆC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas à conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo ABCD, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoq; inter se æquales sunt, cum ABCD, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.



RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.

EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neq; eius latera omnia æqualia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt AB, DC, & AD, BC, in Rhomboide ABCD, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; sint, irregulares.

XXXIII.

PRÆTER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

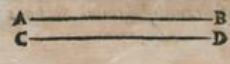


RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera bina opposita; neq; angulos binos oppositos habeant inter sese æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, recte irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus obtusus, alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera: Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas asseremus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

XXXIV.

PARALLELÆ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conuenient, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoq; accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis AB, CD, si superficies aliqua plana rectæ AB, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoq; omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamsi infinite producãtur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide vtramq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur à quopiam esse parallelæ,

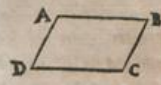


lela, is necesse est concedat, illas in vna, eademque superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodem existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

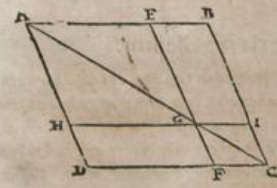
PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.



VT figura quadrilatera ABCD, si quidem latus AB, æquidistet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum: in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulnm, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior: & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera oppsita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, dicitur q; Trapezium Isosceles: vel inæqualia, Trapezium q; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrũ cõsistere dicuntur.



SIT parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC, & linea EF, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus AD, BC. Item linea HI, secans diametrum in eodem puncto G, parallela q; lateribus AB, DC, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non transit, vocantur a Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vtà quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.



PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si recte considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, at q; adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodem q; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeræ aliæ ab eodẽ puncto educi possunt ad alia at q; alia puncta.

II.

ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.



QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam. Sic linea recta AB, producta est primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c.

III.



ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.

IAM vero, si terminatam rectam lineam cuiuscunq; quantitatis mente concepe-rimus applicatam esse secundum alterum extremum ad quoduis punctum, ipsamq; circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectumq;, quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinq; lineis AB, AC, AD, AE, AF, quæ singulæ citra centrum A, circumvolutæ singulos circulos descripserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRÆTER hac tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia

æque

æque facilia, è quibus dunt axat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.

IV.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neq; tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.

COMMVNES NOTIONES SIVE Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVÆ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoq; æqualium eadē magnitudine maius est, aut minus.

FIERI nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum. Et si maior æqualis fuerit propositæ quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoq; esse. Reliquæ quoq; partes Axiomatis à nobis adiectæ, quod frequentem vsum habeant, clarissimæ sunt.

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI enim quantitates constitutæ, siue compositæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAM si reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quam à maiore.

IV.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia. Et, si inæqualibus inæqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas additæ vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adjungantur, compositæ quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam simpliciter, & absolute gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in secunda parte Axiomatis dictum est, quam nos ob insignem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim compositæ quantitates, vel residuæ, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adjiciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adjiciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, deficeret vtiq; minus à duplici, vel tripliei. &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex, &c. quātitatis cuiuspiā, excederet sane maius duplex ipsum; vel triplex, &c. Hoc autē & ex secundo axiomate comprobari potest, ad hunc modum. Si n. duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtriq; tertia illa addatur, erunt compositæ duplices illius tertiæ, [a] sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si

a 2. pron. vur sum

b 2. pron. *Vrsum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ. Cum* [b] *igitur & æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademque sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porro partem huius Axiomatis nos apposuimus, quod non raro eius vsus in rebus Geometricis requiratur.*

VII.

ET quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt. Et contra, Quæ æqualia sunt, eiusdem sunt dimidia.

PARI ratione, quæ eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoq; sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt. Partem quoque secundam huiusce Axiomatis nos adiunximus, propterea quod non minus frequenter, quam prima, à Geometris vsurpatur.

VIII.

ET quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOC est, duæ quantitates, quarum vna superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando vna alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita vt eã nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter se inæquales existant.

E CONTRARIO, Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuo congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse æquales, secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt. Congruit autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

ET totum sua parte maius est.

CVM pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

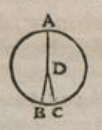
IN sequentibus porro pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inferenda esse censuimus valde necessaria, cum ex ijs Axioma 12. quod Euclidis est decimum, demonstrari possit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

o. ## X.

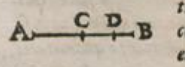
DVÆ lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

NON est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA, [a] *describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C;* [b] *Erunt igitur duæ circunferentiæ AB, ABC, inter se æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualium, cum ADB, ADC, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.*

a 3. petit
b 17. def.



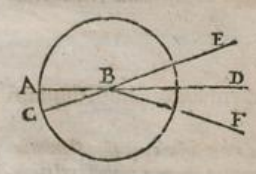
POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac figura, rectæ AD, BC; commune habent segmentum CD, quia ambæ vnam rectam constituunt lineam AB. At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere AB, AC, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte à Proclo fuit demonstratum.



o. ## XI.

DVÆ rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ AB, CB, in B. Dico illas productas se mutuo secare in B, nempe CB, productam cadere in E, supra rectam AB, productam. Nam si CB, producta non cadit supra AB, productam, congruet cum AB, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ ABD, CBD, habebunt idem segmentum commune BD, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certe infra AB, productam cadet, ita vt CB, producta cadat in F, sitq; vna recta linea CBF. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus ACFD, secans rectas AB, CB, productas in D, F. Quia ergo vtraq; recta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quam CF, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ ACD, CF. vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.



DVO proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessaria sunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.

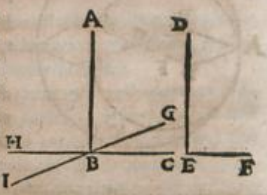
XII.

XII.

x.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

HOC axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuive nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac ratione. Sint duo anguli recti ABC, DEF, quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sit q; ABC, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam DE, rectæ AB, cadet recta EF, inter rectas AB, BC, qualis est BG, propterea quod angulus DEF, minor ponitur angulo ABC. [a] Producatur CB, in rectum & continuum vsq; ad H. Cum igitur angulus ABC, sit rectus, [b] erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoq;: quare maior etiam angulo ABC. [a] Producta autem GB, in rectum & continuum vsq; ad I, cadet portio producta BI, infra CB, producta, vt in præcedenti Axiomate est demonstratum. Quare cum angulus ABG, ponatur rectus, [b] fiet angulus ABI, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoq; erit angulo ABI, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademq; est ratio in cæteris.



a 2. pet.
b 10. def.
a 2. pet.
b 10. def.

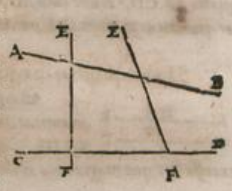
RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus est, cum & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

XIII.

xj.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

VT si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas esse ad aliquod punctum vnum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali semper spatio protenduntur, vt propos. 28. huius lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verum quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, immo à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facile quiuis ei assensum præbeat; præsertim cum reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Idcirco pleniorem illius explicationem in scholium propos. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometrice demonstrabimus, vt firme, ac sine vlla dubitatione tanquam verissimum, ad propositionis 29. huius lib. (vbi primum eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quam Proclus, & quidem magis Geometrice demonstrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.



XIV.

xij.

DVÆ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

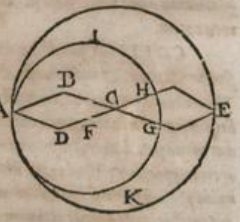
NVLLAM prorsus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte semper magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiumue quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principium, hoc modo. Si fieri potest, vt duæ lineæ rectæ claudant superficiem, comprehendant duæ rectæ ABC, ADC, superficiem ABCD, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis, A, & C. Facto deinde centro C, [a] describatur circulus interuallo CA, [b] & producantur rectæ ABC, ADC, in rectum & continuum vsq; ad circumferentiam, nempe ad puncta, E, & F. Itaq; quia rectæ ACE, ACF, transeunt per centrum C, [c] erunt semicirculi AE, AEF, inter se æquales, & idcirco circumferentia quoq; AE, circumferentiæ AEF, æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum.





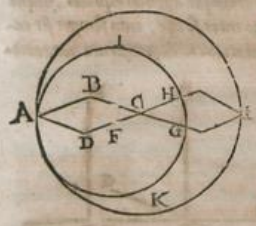
a 3. pet.
b 2. petit.
c 17. def.

SED quia fortasis aduersarius dicet, rectas ABC, ADC, productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in E, vel F, atq; adeo non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tunc idem Axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterum, si fieri potest, in E. Sumpto puncto F, in recta ADC, quocunq;, erit AF, minor, quam FE, cum minor sit, quam AFC, hoc est, quam CHE, quæ ipsi AFC, æqualis est, atq; adeo multo minor, quàm FE. Circulus igitur ex F, ad interuallum FA, descriptus secabit rectam FE, in H, atq; adeo CGE, in G. Quoniam igitur AFH, diameter circuli est, erit AIH, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus: Portio autem AIG, quam aufert recta ABG, & in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defi. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia AIG,



minor quam AIH, totum quam pars, quod est absurdum. Quòd autem minor sit portio AIG, semicirculo, ostendemus, vt supra. Nam ducta ex centro F, ad rectam ABG, perpendiculari, & circumuoluta portione AIG, circa rectam ABG, cadet circumferentia AIG, intra circumferentiam AKG, ne pars maior sit quam totum, vt supra demonstrauimus.

CONSTAT hoc etiam Axioma ex definitione lineæ rectæ. Cum enim recta linea sit breuissima extensio ab vno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantum linea ab vno puncto ad aliud. Quare si ABC, recta est, non erit ADC, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si ABC, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta lineæ ADC, non obumbrant extrema, cum visus per rectam ABC, feratur. Non ergo recta est ADC.



HIS Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cum Euclidis, tum caterorum Mathematicorum, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides.

O. XV.

SI æqualibus inæqualia adiiciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.



HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaq; quantitatibus AB, CD, addantur inæquales BE, DF, sitq; BE, maior quàm DF. Et ex BE, auferatur BG, æqualis ipsi DF, vt sit GE, excessus, quo quantitas addita BE, superat quantitatem additam DF. Quoniam igitur æqualibus AB, CD, addita sunt æqualia BG, DF, [a] erunt tota AG, CF, æqualia. Quare constat, totam quantitatem AE, superare totam CF, eodem excessu GE, quo magnitudo DF, adiuncta, à magnitudine adiuncta BE, superatur. Quod est propositum.

a 2. pron.

O. XVI.

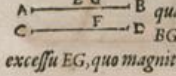
SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, DF, addantur æquales AB, CD. Et ex maiore BE, auferatur BG, æqualis ipsi DF, vt GE, sit excessus; quo quantitas BE, quantitatem DF, superat. Quoniam igitur æqualibus BG, DF, addita sunt æqualia AB, CD, [a] erunt tota AG, CF, æqualia. Quamobrem tota quantitas AE, superabit totam CF, eodem excessu GE, quo maior quantitas proposita BE, minorem DF, superat. Quod est propositum.

a 2. pron.

XVII.

O. SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

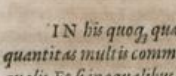


AB æqualibus AB, CD, auferantur inæqualia BE, DF. Sitq; EG, excessus, quo quantitas BE, superat quantitatem DF; ita vt BG, æqualis sit ipsi DF. Quia igitur ab æqualibus AB, CD, ablata sunt æqualia BG, DF, [b] remanebunt AG, CF, æqualia. Perspicuum ergo est, residuum AE, superari à residuo CF, eodem excessu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, superat. Quod est propositum.

b 3. pron.

XVIII.

O. SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.



AB inæqualibus AB, CD, auferantur æqualia AE, CF. Sitq; BG, excessus, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD, ita vt AG, æqualis sit ipsi CD. Quoniam igitur ab æqualibus AG, CD, ablata sunt æqualia AE, CF, remanebunt EG, FD, æqualia. Quare residuum EB, superabit residuum FD, eodem excessu BG, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD. Quod est propositum.

IN his quoq; quatuor proximè positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adiiciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Deniq; si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

XIX.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.

XX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus 12. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus est etiam reliqui huius 7. In vniuersum autem hoc demonstrabitur 10. prop. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atq; ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atq; tota totius.

COLLIGI potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen inter postulata, & Axiomata, quod cum vtraq; sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri exposcant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, sed solum sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem postulatum à problemate, quod constructio postulati non indigeat vlla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eo quod difficile aliquod nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonstrari non debet, hoc vero concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter se quoq; æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idē iudicium habeto de reliquis Axiomatis, atq; Theorematis, nec non postulatis, problematisq;

CONSTAT

CONSTAT quoq;, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quadam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt numquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, tertiumdecimum, & quartumdecimum soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; ita quoq; numeri æquales detracti è numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HÆC dicta à nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQVAM porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus Græcis. Id vero eo consilio à nobis est factum: quoniam cum à quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie, atq; ordine propositionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quando numerus propositionum à Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in margine præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis signo, cui similis literula, seu signum respondet in demonstratione, vt facilius cognoscatur, ad quem locum quælibet citatio sit referenda. Porro citationes intelligendæ sunt hoc modo.

1. def.	Prima definitio. & sic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.
1. pet.	Prima petitio, vel primum Postulatum.
1. pron.	Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.
1. primi.	Prima propositio primi libri.
23. Vndec.	Vigesimatertia propositio vndecimi libri.
6. tertijd.	Sexta tertijdecimi libri.
9. sextid.	Nona sextidecimi libri.
13. duod.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quind.	Septima libri quindecimi.
5. quartid.	Quinta libri quartidecimi, &c.

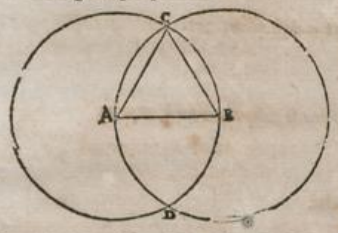
Ex his aliæ citationes à quolibet facile poterunt intelligi.
Eadem enim in omnibus est ratio.

PROPLEMA I.
PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunq;, ita vt linea recta proposita sit vnũ latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principiis concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in aliis problematibus perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, atque efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca vero admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

SIT igitur proposita recta linea terminata AB, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ AB, [a] describatur circulus CBD: Item centro B, & interuallo eiusdem rectæ BA, alius circulus describatur CAD, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, [a] ducantur duæ rectæ lineæ CA, CB, ad puncta A, & B; Eritque super rectam AB, constitutum triangulum ABC, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse æquilaterum. Quoniam rectæ AB, AC, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli CBD, [b] erit recta AC, rectæ AB, æqualis: Rursus, quia rectæ BC, BA, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli CAD, erit recta BC, rectæ BA, æqualis. Tam igitur AC, quam BC, æqualis est rectæ AB. [c] Quare & AC, BC, inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum ABC, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.



a 3. pet.
a 1. pet.
b 15. def.
c 1. prom.

SCHOLIVM.

Vt autem videas, plures demonstrationes in vna propositione contineri, placuit primam hanc propositionem resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demonstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum ABC, constructum methodo prædicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, [d] *est æquilaterum.*
Triangulum ABC, tria habet æqualia latera.
Triangulum igitur ABC, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Quæ eidem æqualia sunt, [e] *inter se quoque sunt æqualia.*
Duo latera AC, BC, æqualia sunt eidem lateri AB.
Igitur & duo latera AC, BC, inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia existunt.

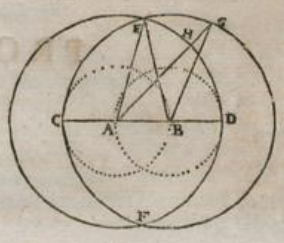
Minorem vero huius syllogismi hac ratione colliget:

Lineæ rectæ à centro ductæ ad circumferentiam circuli, [f] *inter se sunt æquales.*
Lineæ AB, AC, sunt ductæ à centro A, ad circumferentiam CBD.
Sunt igitur lineæ AB, AC, æquales inter se.

Eademque ratione erunt lineæ AB, BC, æquales, cum ducantur à centro B, ad circumferentiam CAD. Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propositiones, non solum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum. Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod breuius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

Si quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea AB, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. [a] *Deinde producatur AB, in vtramque partem ad circumferentias vsque ad puncta C, & D. Atq; centro A, interuallo vero AD,* [b] *describatur circulus EDF. Item centro B, interuallo vero BC, circulus ECF, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E,* [c] *ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ EA, EB. Factumq; erit super rectam AB,* [d] *triangulum ABE; quod dico esse Isosceles; nimirum duo latera AE, BE, esse & æqualia inter se, & maiora latere AB. Cum enim rectæ AE, AD, ducantur è centro A, ad circumferentiam EDF,* [e] *erit AE, æqualis rectæ AD. Item cum rectæ BE, BC, ducantur è centro B, ad circumferentiam ECF,* [f] *erit BE, æqualis rectæ BC. Sunt autem rectæ AD, BC, æquales inter se, (vtraque enim AC, & BD, æqualis*



a 2. petit.
b 3. pet.
c 1. pet.
d 20. def.
e 15. def.
f 15. def.

æqualis est rectæ AB; cum AB, AC, ex eodem centrô A, ad circumferentiam ducantur; Item BA, BD, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediantur. [g] Quare AC, BD, æquales inter se erunt. Addito igitur communi rectâ AB, [h] erit tota AD, toti BC, æqualis.) [i] Igitur AE, BE, æquales quoque inter se erunt. Quod vero vtraque AE, BE, maior sit, quam AB, perspicuum est, cum AD, æqualis ostensa ipsi AE, [a] maior sit, quam AB; Item BC, æqualis demonstrata ipsi BE, [b] maior quoq; sit, quam AB. Constitutum igitur est super rectâ AB, Isosceles ABE, habens duo latera AE, BE, æqualia inter se, & maiora latere AB, quod faciendum erat. Atque hæc est demonstratio Procli, aliorumque interpretum Euclidis.

g 1. pron.
h 2. pron.
i 1. pron.
a 9. pron.
b 9. pron.

Breuius tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum ABE, esse Isosceles, hac ratione. [c] Quoniam AE, æqualis est rectæ AD, & recta AD, est dupla rectæ AB, propterea quod BA, BD, æquales inter se sunt; erit & AE, dupla rectæ AB. Rursus [d] quia BE, æqualis est rectæ BC, & BC, dupla est ipsius AB, propterea quod [e] AB, AC, æquales sunt inter se, erit & BE, dupla ipsius AB. Cum igitur vtraque AE, BE, dupla sit eiusdem AB, erunt [f] AE, BE, inter se æquales, maioresq; propterea recta AB. Isosceles ergo est triangulum ABE.

c 15. def.
d 15. def.
e 15. def.
f 6. pron.

Iam vero, si ex puncto A, [g] ducatur linea recta AG, ad circumferentiam EGF, quæ non sit eadem quæ AE, vel AD, secans circumferentiam EHD, in puncto H, & ex G, ad B, [h] ducatur alia recta GB, [i] constitutum erit triangulum ABG, super recta AB, quod dico esse scalenum. [k] Quoniam AG, maior est, quam AH: [l] Sunt autem AH, AE, ex centro A, ductæ, inter se æquales; erit & AG, maior quam AE, hoc est, quam BE, quæ ostensa est æqualis ipsi AE; igitur & maior erit AG, quam BG, [m] cũ BG, sit æqualis ipsi BE. Est autẽ & BG, maior quam AB, propterea quod tota BC, æqualis ipsi BG, [n] maior est, quam AB, pars. Omnia ergo tria latera trianguli ABG, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.

g 1. pet.
h 1. pet.
i 20. def.
k 9. pron.
l 15. def.
m 15. def.
n 9. pron.

Breuius quoque ostendemus, triangulum AGB, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam [o] AH, AD, ex centro A, ductæ, sunt æquales, quam BG, BC, ex centro B, ductæ: Sunt autem AD, BC, ipsius AB, duplæ, quod AB, vtrique BD, AC, æqualis sit; erunt quoque AH, BG, ipsius AB, duplæ, ac propterea maiores, quam AB. Cum ergo [p] AG, maior sit, quam AH, siue quam BG, scalenum erit triangulum AGB, habens latus AG, maximum; BG, medium, & AB, minimum.

o 15. def.
p 9. pron.

PRAXIS.

Conabimur in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & breuem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere; Idque in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorem vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.

Itaque triangulum æquilaterum ita facile construetur super data recta AB. Ex centris A, & B, interuallo vero datæ rectæ AB, describantur duo arcus circulorum se intersecantes in puncto C, siue hoc infra lineam contingat, siue supra. Post hæc ducantur duæ rectæ AC, BC, ex puncto C, ad puncta A, & B; factumque erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessario per puncta A, & B.



Isosceles ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore, quam AB, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandẽ in latus maius eligamus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ AC, & BC; constructumque erit Isosceles: quoniam AC, BC, æquales erunt propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet aut minus, quam recta AB.



Scalenum denique hoc modo fabricabitur super data recta AB. Ex centro B, interuallo vero maiore, quam BA, describatur arcus aliquis. Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ AC, BC; constitutumque erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.

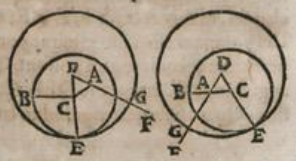


Cæterum, quo pacto triangulum constitui debeat, habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latius explicabimus propositione 22. huius libri.

PROBLEMA 2. PROPOSITIO 2. ij.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

SIT punctum datum A, & data recta linea BC, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ BC, nempe C, centro *a* describatur circulus BE, interuallo rectæ BC. Et ex A, ad centrum C, *b* recta ducatur AC; (nisi punctum A, intra rectam BC, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur AC, vt secunda figura indicat.) Super recta vero AC, *c* constituatur triangulum æquilaterum ACD, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta DA, DC, versus rectam AC, *d* extendantur; DC, quidem oppositũ puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; DA, vero oppositũ centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ DE, per C, centrum transeuntis, *e* alter circulus describatur EG, secans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ BC. Quoniam DE, DG, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam EG, *f* ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur DA, DC, æqualibus lateribus trianguli æquilateri ACD, *g* remanebit AG, æqualis rectæ CE. Sed eidem CE, *a* æqualis est recta BC. (cum ambæ rectæ CB, CE, cadant ex centro C, ad circumferentiam BE.) Igitur rectæ AG, BC, quandoquidem vtraque æqualis est ostensa rectæ CE, inter se *b* æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.



a 3. pet.
b 1. pet.
c 1. primi.
d 2. pet.
e 3. pet.
f 15. def.
g 3. pron.
a 15. def.
b 1. pron.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo CB, *c* describatur circulus, ad cuius circumferentiam recta *d* ducatur vtcunq; CE, erit hæc posita ad punctum datum C, *e* æqualis datæ rectæ BC, cum vtraque & BC, & CE, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam BE.

c 3. petit.
d 1. pet.
e 15. def.

SCHOLIVM.

HVIVS problematis varij esse possunt casus vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumq; iacebit extremũ. Si vero extra ipsam, erit vel è directo datæ lineæ, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat, vel non è directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam AG, rectæ B C, æqualem esse.

iij. ## PROBL. 3. PROPOS. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.



SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatque ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, *a* ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus *b* describatur secans B C, in E. Dico BE, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, *c* æqualis est rectæ B D, & eidem B D, æqualis est recta A, per constructionem; *d* erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

a 2. primi.
b 3. per.
c 15. def.
d 1. pron.

QVOD si duæ rectæ datæ coiungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusque B; describendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris BD. Hic enim auferet BE, æqualem ipsi BD, vt constat ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuo secent, vel certe altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

THEOREMA 1. PROPOS. 4.

iiij. SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

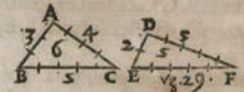


SINT duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumque latus AB, AC, æquale sit alterius vtrique lateri D E, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim B C, æqualem quoque esse basi E F; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus A C, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta A B, rectæ D E, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, *a* ipsæ sibi mutuo congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, *b* quod est impossibile. Quod si quis dicat, posito puncto, A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam A B, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram D E, claudent duæ rectæ lineæ superficiem. *c* quod fieri non potest. Quare recta A B, rectæ DE, congruet, vt dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, *d* congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur B C, basi E F, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, vt efficeretur recta E G F, vel E H F, clauderent duæ rectæ E F, E G F; vel E F, E H F, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quàm E H F, rectam esse, cum vtraque ponatur esse eadem, quæ recta B C.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem *e* claudere non possunt. Quocirca *f* basis BC, basi EF, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis ob eadem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. pron.
b 10. pron.
c 14. pron.
d 8. pron.
e 14. pron.
f 8. pron.

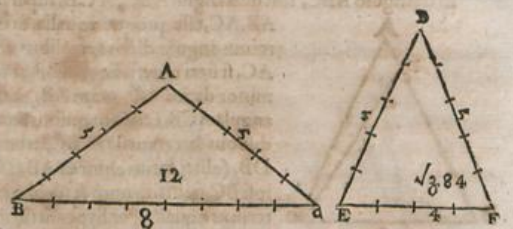
SCHOLIVM.

RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, vt duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ ipsis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt vnquam esse æquales, vt probe hoc loco à Proclo demonstratur: Triangula vero ipsa licet possint esse æqualia, posteriore duntaxat conditione deficiente, vt ex scholio propos. 37. huius lib. constabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum ABC, DEF, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, non quidem vtrumq; vtrique, sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitq; AB, 3. AC, 4. vt ambo simul efficiant 7. At vero DE, sit 2. & DF, 5. vt ambo quoq; simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis BC, 5. & basis EF, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem est quam 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli ABC, erit 6. area vero trianguli DEF. 5. Anguli deniq; super basim BC, inæquales erunt angulis super basim EF. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea, quod non vtrumq; latus vtrique, lateri æquale existit in dictis triangulis ABC, DEF.



RVRSVS

RVRSVS triangulorum ABC, DEF, latera AB, AC, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, sitque vnumquodque 5. anguli vero A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sitque A, maior quam D. Quibus concessis, erit basis BC, maior base EF, vt propos. 24. huius libri ostendetur. Quod si basim BC, ponamus esse 8. basim autem EF, 4. erit area triãguli ABC, 12. area vero trianguli DEF, radix quadrata huius numeri 8. quæ maior quidem est quam 9. minor vero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa æqualia inter se sint, necesse est, vt vtrumq; latus vnius æquale sit vtriq; lateri alterius, & anguli quoq; dictis lateribus contenti æquales existant, vt optime dixit Euclides.



THEOR. 2. PROPOS. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

SIT triangulum Isosceles ABC, in quo latera AB, AC, inter se sint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, supra basim BC, æquales inter se esse: Ité si latera æqualia AB, AC, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque DBC, ECB, infra basim eãdem BC, esse æquales. Ex linea enim AE, producta infinite [a] abscindatur AF, æquales ipsi AD, [b] & ducantur rectæ BF, CD. Considerentur deinde duo triangula ABF, ACD. Quia ergo duo latera AB, AF, trianguli ABF, æqualia sunt duobus laterib. AC, AD, trianguli ACD, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi AC, ex hypothesi, & AF, & ipsi AD, ex constructione; angulusq; A, contentus lateribus AB, AF, æqualis est angulo A, contento lateribus AC, AD, immo angulus A, communis est vtriq; triangulo: [c] Erit basis BF, æqualis basi CD, & angulus F, angulo D, & angulus ABF, angulo ACD; cum & priores duo, & posteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet: Rursus considerentur duo triangula BDC, CFB. Quoniam vero rectæ AD, AF, æquales sunt, per constructionem, sit vt, si auferantur ex ipsis æquales AB, AC, [d] & reliquæ BD, & CF, sint æquales. Quare duo latera BD, DC, trianguli BDC, æqualia sunt duobus lateribus CF, FB, trianguli CFB, vtrumque vtrique, videlicet BD, ipsi CF, & DC, ipsi FB, vt probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, cõtenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt ostensum etiam fuit. Igitur erit angulus [e] DBC, angulo FCB, æqualis; & angulus BCD, angulo CBF. Tam enim priores duo, quam posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntque supra communem basim BC, vtriusque trianguli BDC, CFB. Quod si ex totis angulis æqualibus ABF, ACD, (quos æquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBF, BCD, (quos itidem in posterioribus triangulis modo probauimus esse æquales) [f] remanebunt anguli ABC, ACB, supra basim BC, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos DBC, FCB, qui quidem sunt infra eandem basim BC, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt æquales; ac propterea Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

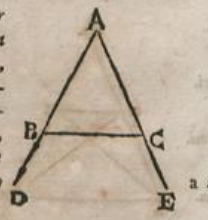


a 3. primi.
b 1. peti.
c 4. primi.
d 3. pron.
e 4. primi.
f 3. pron.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis videatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus AB, AC, trianguli ABC, æqualibus; siue reliquum latus BC, ipsis quoq; sit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, vt in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basin inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, vt constat ex demonstratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum sunt assueti. Verumtamen, si diligenter theorematis præcedentis vis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præmanibus habemus, à quolibet percipietur, si modo maior sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem, quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.

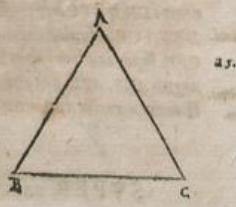
VERITAS porro huius theorematis, quoad vtramq; partem, facile quoq; demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursus in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, quæ producantur quantumlibet vsq; ad D, & E. Dico tam angulos ABC, ACB, supra basim BC, inter se æquales esse, quam angulos DBC, ECB, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC triangulo ACB, (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta AB, rectæ AC, superponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum AB, AC. Quo posito, cadet recta AC, super rectam AB, ob æqualitatem, siue identitatem anguli A; atque punctum C, in punctũ D, incidet, propter æqualitatẽ laterũ AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo ECB, [a] congruet, ac proinde tantilli, quam hi, inter se æquales erunt.



a 8. pron.

COROLLARIVM.

EX hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterũ ABC. Quoniam igitur duo latera AB, AC, sunt æqualia, [a] erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera AB, BC, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erũt. Quod ostendendum erat.



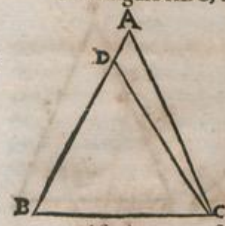
a 5. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

vi.

In triangulo ABC, sint duo anguli ABC, ACB, super latus BC, æquales. Dico duo latera illis opposita AB, AC, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur AB, maius quã AC, si fieri potest: Et ex AB, [b] abscindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur esse quam AB,) ducaturque recta CD. Considerentur iam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia sint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, vtrumque vtrique, nempe AC, ipsi DB, (abscidimus enim ex AB, ipsi AC, concessu aduersarij, æqualem DB,) & CB, ipsi BC, cum sit vnum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: [c] Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum & pars, quod fieri non potest. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, si anguli B, & C, super latus BC, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.



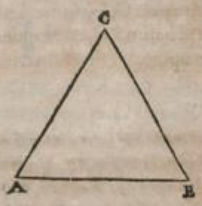
b 3. primi.

c 4. primi.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se æqualia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque æquales: Hic vero, si anguli ad basim sint æquales, latera quoque angulis illis opposita esse æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, si Mathematici interdum conuertunt propositiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam concesso colligant per demonstrationem consequens aliquod. nunc vero rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens. Nam in propositionibus necessariis, quales sunt propositiones Geometricæ, potest interdum prædicatum esse vniuersalius subiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propositio. Nam necessaria est hæc propositio; (Omnis homo est animal) non tamen conuerti potest vniuersaliter, cum non omne animal sit homo. Ita quoq; fieri potest in propositionibus Geometricis necessariis: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocantur. Non enim sequitur. si figuræ cuiusuis rectilineæ vno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cum possit etiam esse quadrilatera figura, vt ad propos. 16. huius lib. ostendemus. Eodemq; modo multæ aliæ propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, vt prius demonstret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens, & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones quæ conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.

COROLLARIVM.



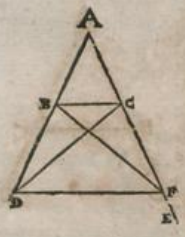
a 6. primi.

SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarii quintæ propositionis, vt liquet. Sint enim trianguli ABC, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, [a] erunt latera AB, AC, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera AC, BC, æqualia, & idcirco omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia. Quod ostendendum erat.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.

SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.



b 3 primi.

c 4. primi.

a 3. pron.

TRIANGVLI enim ABC, productis lateribus AB, AC, ad D, & E, fiant anguli DBC, ECB, infra basim BC, æquales. Dico latera AB, AC, esse quoque inter se æqualia. Ex CE, quantumlibet producta [b] abscindatur CF, æqualis ipsi BD, & ducantur rectæ BF, FD, DC. Considerentur deinde triangula DBC, FCB. In quibus cũ latera DB, BC, æqualia sint lateribus FC, CB, vtrumq; vtrique, nempe DB, ipsi FC, per constructionem, & BC, ipsi CB, quod sit vnum & idem: sint autem & anguli DBC, FCB, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim: [c] erunt & bases CD, BF, & anguli BCD, CBF, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus BD, CF, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus BCD, CBF, ex angulis FCB, DBC, per hypothesin, æqualibus; [a] remanebunt anguli FCD, DBF, æquales. Considerentur rursus triangula DBF, FCD. In quibus quoniam latera DB, BF, æqualia sunt lateribus FC, CD, vtrumque vtrique, nempe DB, ipsi FC, per constructionem, & BF, ipsi CD, vt modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus DBF, FCD, æquales, vt etiam fuit nuper demonstratum: [b] erit angulus BDF, super basim DF, trianguli DBF, æqualis angulo CFD, super eandem basim FD, trianguli FCD. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, sint æquales, vt nunc ostendimus, [c] erunt latera AD, AF, æqualia. A quibus si rectæ BD, CF, per constructionem, æquales demantur, [d] remanebunt AB, AC, latera trianguli ABC, æqualia. Quod erat ostendendum.

b 4. primi.

c 6. primi.

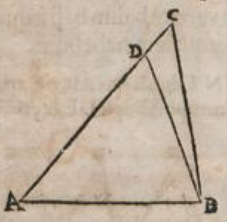
d 3. pron.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque

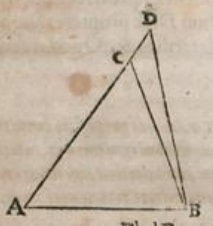
vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum: ad easdem partes, eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta AB, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico super eandem rectam AB, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis AC, BC, vtraque vtrique, nempe AC, ipsi AD, quæ eundem habent terminum A; & BC, ipsi BD, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ AC, AD, inter se, & rectæ BC, BD, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita vt recta AD, in ipsam rectam AC, vel BD, in ipsam BC, cadat; aut intra triangulum ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, vt AD, sit pars ipsius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC; & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, vsque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia, [a] erunt anguli ACD, ADC, super basim CD, æquales; [b] Est autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipsius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rursus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, [c] erunt anguli CDF, DCE, sub basi CD, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo sit minor angulo DCE. Idem ergo Angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alteram cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C. ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minorem esse angulo CDE, & eidem æqualem, vt perspicuum est. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum ABC, vt altera linearum posteriorum, nempe AD, secet alteram priorum, vt ipsam BC. Ducta igitur recta CD, cum in triangulo ACD, latera AC, AD, ponantur æqualia, [d] erunt anguli ACD, ADC, supra basim CD, æquales: Ac proinde [e] cum angulus ADC, minor sit angulo BDC, pars toto, erit & angulus ACD, minor eodem angulo BDC. Quare multo minor erit angulus BCD, pars anguli ACD, angulo eodem BDC. Rursus, cum in triangulo BDC, latera BC, BD, ponantur æqualia, [a] erunt anguli BCD, BDC, super basim CD, æquales: Est autem iam ostensum, angulum BCD, multo esse minorem angulo BDC. Idem igitur angulus BCD, & minor est angulo BDC, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se AC, AD, & inter se quoque BC, BD. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

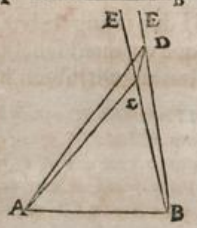




a 3. primi.
d 9. pron.



c 5. primi.



d 5. primi.
e 9. pron.
a 5. primi.

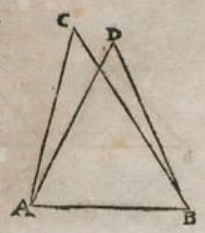




SCHOLIVM.

FIERI potest, vt duæ lineæ AD, BD, æquales sint duabus AC, BC, vtraque vtrique, vt AD, ipsi BC, & BD, ipsi AC, vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, vt constat. Solæ enim AC, AD, eundem limitem possident A; Item BC, BD, eundem B; optimeque demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, vt AC, AD, inter se sint æquales, ita vt BC, BD, quoq; inter se æquales existant; Recte igitur in propositione apposita sunt hæc verba: eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse duæ lineæ simul sumptæ AD, BD, æquales duabus lineis AC, BC, simul sumptis, vt in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse vtramq; vtriq; esse æqualem, &c.

Eadem ratione possunt ex A, & B, infra AB, basim trianguli ABC, hoc est, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ AD, BD, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt AD, exiens è puncto A, æqualis sit ipsi AC; & BD, egrediens ex B, æqualis ipsi BC, vt perspicuum est in apposita figura. Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad easdem partes. Denique esse poterunt duæ lineæ AC, AD, æquales inter se eundem terminum A, possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ BC, BD, terminum habentes eundem B; inter se quoque sint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratum. Appositè igitur dictum est in propositione: duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane scopus Euclidis in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.



THE-

viij.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia, vtrumq; vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; sit autem & basis BC, basi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum videlicet vterq; dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis BC, superponi basi EF, [a] neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum ABC, cogitetur cadere super triangulum DEF, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadet, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea [a] angulus A, æqualis erit Angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocumque id contingat, hoc est, siue in latus ED, siue intra triangulum EDF, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem est, quæ BA,) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA,) æqualis ipsi FD, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, iamdudum [b] demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, terminum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 8. pron.



a 8. pron.

b 7. primi.

SHOLIVM.

VT vides, hæc propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

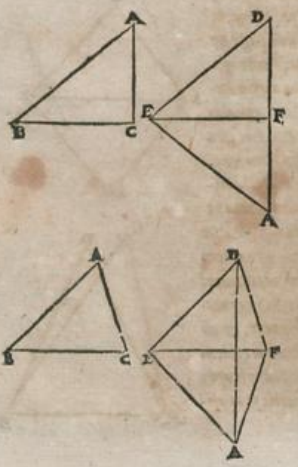
a 8. pron.

SIT enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusque C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumque A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, [a] congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea que omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema à nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumq; vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.



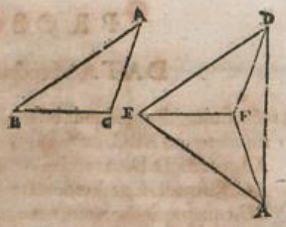
a 5. primi.

b 5. primi.

c 2. pron.

PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis BC, basi EF, ita vt triangulum ABC, cadat in diuersas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulum AEF. Aut igitur duo latera, nempe DF, FA, constituunt vnam lineam rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si constituant vnam lineam rectam, veluti DA, ita propositum concludetur. Quoniam in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia (est enim nunc AE, recta eadem, quæ AB, quæ per hypothesin rectæ DE, æqualis est) [a] erunt anguli A, & D, super basin AD, æquales, quod erat ostendendum. Si vero neque DF, FA, neque DE, EA, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta DA, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primum intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, æqualia ponuntur, [b] erunt duo anguli EAD, EDA, æquales ad basin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli FAD, FDA, super basin DA, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, [c] fient toti anguli

anguli EAF, EDF, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat deinde recta DA, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia, [d] erunt anguli EAD, EDA, æquales super basin DA. Eademratione, cum duo latera AF, DF, in triangulo AFD, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli FAD, FDA, super basin DA, æquales. His ergo à prioribus ablatis, [e] remanebunt anguli EAF, EDF, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.



d 5. primi.

e 3. pron.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam facere.

ix.

SIT diuidendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, [a] secetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturque recta DE. Deinde super DE, [b] constituatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, diuidens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, vtrumq; vtrique, quod DA, ipsi EA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, constructum est æquilaterum: [c] Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, diuisus bifariam, quod erat faciendum.

a 3. primi.

b 1. primi.



c 8. primi.

SCHOLIVM.

Quod si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilominus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt BAC, bifariam secabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abscindantur rectæ æquales AD, AE, cuiuscunque magnitudinis. Et circino non variato (posses tamen ipsum variare, si velles) ex centris D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta igitur ducta AF, secabit angulum BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum DAF, æqualem esse angulo EAF. Non descripsimus autem dictas lineas, vt nuda praxis haberetur: Id quod in aliis quoq; praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatque confusionem.



QVOD si quando angulus rectilineus breuissimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani positus diuidendus sit bifariam, describemus ex D, & E, duos arcus sese mutuo intersecantes in F, supra angulum A, quia infra puncta D, & E, spatium deest, in quo describi possint. Recta enim ex F, per A, vsque ad B, ducta secabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in apposita figura apparet.



SCHOLIVM.

HINC aperte colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi posse etiam in 4 angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum vterque iterum bifariam secetur, habebimus 4 angulos æquales. Quod si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps; Non docuit autem Euclides vsquam quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales posset diuidi, quia id à nemine vsq; ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiusdam lineæ curuæ, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim vero, si quis angulum rectilineum quemcunq; propositum in quotuis partes æquales diuidere desideret rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxim ipsam, ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus BAC, diuidendus in 5 angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunq; interuallum, secans rectas AB, AC, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitã habeant distantiã) diuidatur in tot partes æquales, in quot angulus propositus est diuidendus, vt in exemplo proposito in quinque partes in punctis D, E, F, G. Si namq; ad hæc puncta ex A, rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus BAC, in quinq; æquales angulos. Cũ enim circino sumpta sint æqualia interualla BD, DE, &c. si ducantur rectæ BD, DE, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera BA, AD, trianguli BAD, [a] æqualia duobus lateribus EA, AD, trianguli EAD, vtrumq; vtriq;, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vsque. Basis autem BD, basi quoq; DE, vt dictum fuit, æqualis est: [b] Angulus igitur BAD, angulo EAD, æqualis existet; Eademq; ratione demonstrabitur, angulum EAD, angulo EAF, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentiæ BD, DE, &c. acceptæ sunt omnes æquales inter sese. Nemo vero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula propriis in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiuscunq; in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales. Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neq; enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demõstrationes, sed solum, vt probetur rectæ esse per ipsas effectũ, quod imperabatur. Quãobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.



a 15. defin.

b 8. primi.

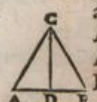
PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 10.

x.

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

a 1. primi. b 9. primi. c 4. primi.



Sit recta finita AB, diuidenda bifariam, id est in duas partes æquales.[a] Describatur super AB, triangulum æquilaterum ABC, cuius angulus C, per rectam CD, [b] diuidatur bifariam, rectaque CD, rectam AB, secet in D. Dico rectam AB, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia sunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD, vtrumque vtrique, nempe AC, ipsi BC, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & CD, est commune; Est autem & angulus ACD, angulo BCD, æqualis, per constructionem:[c] Erit basis AD, basi BD, æqualis. Datam ergo rectam AB, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.

PRAXIS.

d 8. primi. a 4. primi.



EX centro A, ad quoduis interuallum, quod tamen dimidium lineæ AB, excedat, describantur duo arcus, vnus superne, alter inferne; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secent in C, & D. Recta enim ducta CD, secabit rectam AB, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualiũ circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera AC, CD, æqualia sunt lateribus BC, CD, vtrumque vtrique, & basis AD, basi BD, [d] erit angulus ACD, angulo BCD, æqualis. Rursus quia latera AC, CE, æqualia sunt lateribus BC, CE, vtrumque vtrique, & angulus ACE, angulo BCE, vt ostensum fuit;[a] erit basis AE, basi BE, æqualis.



IAM vero si linea bifariam diuidenda posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commode duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuo in D, siue hoc fiat infra punctum C, vt in apposita figura, siue supra C. Nam recta per C, D, ducta secabit rectam AB, bifariam in E.

SCHOLIVM.

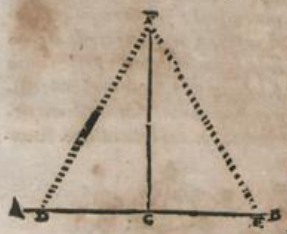
PERSPICVVM est, eodẽ modo diuidi posse eandem lineam rectam AB, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quæuis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, vberrime trademus ad propos. 40. huius lib. Idemque longe facilius postea efficiemus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, & non injucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demonstrentur. Neque vero vnquam diuisione lineæ in plures, quam in duas partes æquales, ad eum locum vsque indigebimus.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

xj.

DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

a 3. primi. b 1. primi. c 8. primi. d 10. defin.



RECTA linea data sit AB; & in ea punctum C, à quo iubemur erigere super AB, lineam ad Angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta CD,[a] cui æqualis auferatur CE. Deinde super DE, [b] constituatur triangulum æquilaterum DEF, atq; ex F, ad C, ducatur recta FC, quam dico esse perpendicularem ad AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF, æqualia sunt lateribus EC, CF, trianguli ECF, vtrumque vtrique, nempe DC, ipsi EC, per constructionem, & CF, commune; Est vero & basis DF, basi EF, æqualis, ob triangulum æquilaterum:[c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeo FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

PRAXIS.



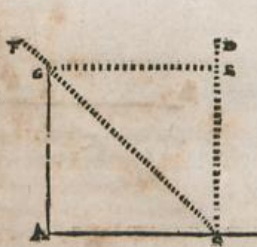
EX puncto C, abscindantur vtrinque lineæ æquales CD, CE, & ex D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta namque ducta FC, erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ DF, EF, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim datam lineæ perpendicularis. Vt si linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit AC, in B, & sumendæ æquales CD, CE, &c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & E, quibuscunque lineæ propositæ describantur tam superne, quam inferne duo arcus sese intersecantes in C, & D. Nam recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra praxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases AE, BE, consistant, opponanturque æqualibus lateribus AC, BC, quæ ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.



EX

EX PROCLO.

SI punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta AB, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis CD, vt docuit Euclides; & [a] abscindatur CE, æqualis ipsi AC: Deinde [b] diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta CF: Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur EG, perpendicularis ad CD, secans rectam CF, in G. Ducta enim recta GA, perpendicularis erit ad AB. Quoniam cum latera AC, CG, trianguli ACG, æqualia sint lateribus EC, CG, trianguli ECG, vtrumq; vtrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: [c] Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri CG, æquales; Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, [d] ideoq; AC, ad AB, perpendicularis.



a 3. primi.
b 9 primi.
c 4. primi.
d 10. defin.

SCHOLIVM.

BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea AB, punctumq; in ea A. Ex centro C, extra lineam assumpto, vbi libuerit, (dummodo recta AB, producta cum ipso non conueniat) interuallo vero accepto vsq; ad A, describatur arcus circuli secans AB, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta enim ducta EA, erit perpendicularis ad AB. Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo DAE, vt ostendemus propositione 31. lib. 3.

ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo lineæ, inuenies in scholio propos. 31. huius lib.



PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

SIT recta AB, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectã AB. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans AB, in D, & E, (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam AB; alias eam non secaret.) [a] Diuisa autem recta DE, bifariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem esse ad AB. Si enim ducantur CD, CE, erunt duo latera DF, FC, trianguli DFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC, vtrumq; vtrique, per constructionem; est autem & basis CD, basi CE, æqualis, cum hæ sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare *b* erit angulus DFC, angulo EFC, æqualis, & propterea vterque rectus: Ducta est igitur CF, perpendicularis, quod faciendum erat.



a 10. primi.
b 8. primi.

SCHOLIVM.

PROBE apposuit Euclides hanc particulam: infinitam. Si enim linea esset finita, non posset semper à puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset BE, & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans BE, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad BE. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam producta perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si BE, producatur, donec circulus ex C, descriptus, secet totam BA, productam in D, & E, &c.

PRAXIS.

CENTRO facto C, & interuallo quouis, eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemque interuallo, vel alio, si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta CD, secans AB, in E, erit perpendicularis ad AB. Demonstratio huius operationis non differt à demonstratione tradita in praxi propositionis 10. Nam anguli ad E, erunt recti, [a] nempe inter se æquales.



a 4. primi.

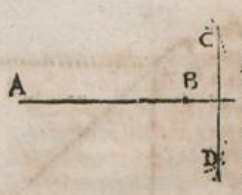
IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet vsque ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interualloq; vsque ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D; Eritque ducta recta CD, secans AB, in E, perpendicularis ad AB. Demonstratio eadem est, quæ prior. Non est autem necesse, vt interuallum BC, æquale sit interuallo AC, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio, si idem semper interuallum accipiatur.



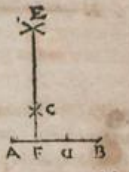
QVOD si punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ AB, ita agendum erit. Centro C, ad quoduis interuallum secetur recta AB, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quam AC, vel BC, bini arcus tam supra, quam infra describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta DCF, quæ producta necessario per punctum E, transibit, perpendicularis erit ad rectam AB, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis AD, BD, AC, BC. Quoniam duo latera DA, DC, trianguli ACD, duobus lateribus DB, DC, trianguli BCD, æqualia sunt, nec non & bases AC, BC, æquales sunt, [a] erunt anguli ad D, æquales. Quare cum duo latera DA, DF, trianguli ADF, duobus lateribus DB, DF, trianguli DBF, æqualia sint, contineantque angulos ad D, æquales, vt ostendimus; [b] erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.



a 8. primi.
b 4. primi.

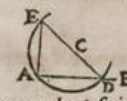


IAM vero si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est fere in extremitate lineæ datæ AB, describantur duo arcus supra, & infra lineam AB, ad interuallum BC. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B (Quo autem magis distabunt inter se puncta A, & B, eo commodius puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum AC, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta CD, perpendicularis erit ad datam rectam AB.



SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commode se intersecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum lineæ AB, siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum AC, vbicumque punctum A, sumatur, describatur ex C, arcus secans rectam AB, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus puncta C, se se intersecantes in E. Recta namque ex E, per C, ducta secans AB, in F, perpendicularis erit ad AB, vt suprà demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineam AB.

QVO vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commode se intersecare possint in D, infra datam rectam AB, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.



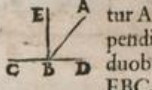
VERVM hoc etiam efficiemus hoc modo. In figura scholij propos. 11. sit ad rectam AB, ex puncto E, deducenda perpendicularis ad extremum quodammodo lineæ. Ducta vtcunque recta ED, a *secetur bifariam in C; & centro C, per E, arcus circuli describatur secans rectam datam in A. Quòd si non secet, producenda erit, donec ab arcu secetur. Recta enim EA, erit ad AB, perpendicu-*

a 11. prim.

b 31. tertij. *laris;* b *cum angulus A, sit in semicirculo rectus.*

xiij. ## THEOR. 6. PROPOS. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea AB, consistens super rectam CD, faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur AB, fuerit perpendicularis ad CD, c erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. d Educatur enim BE, ex B, perpendicularis ad CD, vt sint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD, e æqualis est duobus angulis DBA, ABE; f erunt, appositio communi angulo recto EBC, duo recti EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Rursus quia g angulus ABC, duobus angulis ABE, EBC, æqualis est; a erunt, appositio communi angulo ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos EBD, EBC; quæ autem eidem æqualia, b inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli ABC, ABD, æquales sunt duobus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea supra rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

c 10. defin.
d 11. primi
e 13. pron.
f 2. pron.
g 13. pron.
a 2. pron.
b 1. pron.

SCHOLIVM.

VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus ABC, superat rectum angulum EBC, eo reliquus angulus ABD, superatur ab angulo recto EBD. Nam sicut ibi excessus est anguli ABE, ita hic defectus est idem angulus ABE. Quocirca anguli ABC, ABD, duobus rectis æquales esse comuincuntur: siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

xiv. ## THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.



Ad punctum C, lineæ rectæ AB, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ CD, CE, facientes cum AB, duos angulos ACD, ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas CD, CE, inter se esse constitutas in directum, ita vt DCE, sit vna linea recta. Si enim non est recta DCF; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra CE, vt sit recta DCF, aut infra CE, vt sit recta DCG. Si cadit supra, cum AC, cõsistat super rectam DCF, a fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales. Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; b & omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales, Ablato igitur communi angulo ACD, c remanebunt anguli ACF, ACE, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta DC, producta cadet supra CE; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propterea quæ, si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 13. primi.
b 12. pron.
c 3. pron.

SCHOLIVM.

EST hæc propositio præcedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si DCE, sit recta, angulos ACD, ACE, duobus esse rectis æquales. In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis æquales, rectas DC, EC, esse vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hac (& non ad easdem partes.) Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri potest, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad easdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductæ partes. Sit enim punctum C, in lineâ AB, datum. Ducatur CD, [d] perpendicularis ad AB, [e] diuidaturque rectus angulus ACD, bifariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ CD, [f] ducatur DE, perpendicularis ad CD, secans rectam CE, in E. Productâ autem ED, ad partes D, & sumatur DF, æqualis rectæ DE, & ducatur recta FC. Quoniam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia sunt lateribus FD, DC, trianguli FDC, vtrumq; vtrique, & anguli D, ipsis cõtenti æquales, nempe recti; [a] erit basis EC, basi CF, æqualis, & angulus ECD, angulo FCD. Sed angulus ECD, dimidium est recti. (Est enim rectus ACD, diuisus bifariam.) Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC, facit angulum ACF, constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti. Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad easdem partes faciunt rectæ CF, CE, cum AB, æquales sunt duobus rectis: Et tamen CF, CE, non sunt vna linea recta, propterea quod non sunt ductæ ad diuersas partes, sed ad easdem.



d 11. primi.
e 11. primi.
f 11. primi.
g 3. primi.
a 4. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 15. XV.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SECENT se duæ rectæ AB, CD, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED. Quoniam recta DE, consistit super rectam AB, [b] erũt duo anguli AED, DEB, æquales duobus rectis. Rursus quia recta BE, super rectam CD, consistit, erunt eadem ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis æquales. Cum igitur [c] omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, æquales. Dempto igitur communi angulo DEB, [d] remanebit angulus AED, angulo BEC, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC, BED, inter se æquales esse. Nam duo anguli AEC, CEB, [e] qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis DEB, BEC, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC, [f] remanebunt anguli AEC, BED, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.



b 13. primi.
c 12. pron.
d 3. pron.
e 13. primi.
f 3. pron.

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuo secantes, efficere ad punctum sectionis quatuor angulos, quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM II.

EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti, in plurimas partes, [a] quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores afferunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

a 29. pron.

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint: ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

EX puncto C, rectæ AB, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter se æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis est angulo BCD; addito communi angulo BCE, [b] erunt duo anguli ACE, ECB, duobus angulis DCB, BCE, æquales: Sed [c] anguli ACE, ECB, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo DCB, BCE, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem CD, CE, [a] erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæquintæ.



b 2. pron.
c 13. primi.
a 14. primi.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.

EX puncto A, quatuor lineæ eductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppositos BAE, CAD, inter se æquales: Item duos BAC, DAE, inter se æquales. Dico tam BA, AD, facere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales sunt anguli BAE, CAD, si æqualibus illis addantur anguli BAC, DAE, [b] erunt duo anguli BAE, BAC, æquales duobus angulis CAD, DAE. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli BAE, BAC, æquales sunt duobus rectis; [c] atque adeo CA, AE, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas BA, AD, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB. Quare, vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.



b 2. pron.
c 14. primi.

xvj. ## THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno,& opposito,maior est.

TRIANGVLI ABC,latus BA,producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem esse interno,& oppositis ACB,itemque maiorem interno, & opposito ABC. Diuidatur *a* enim AC, bifariam in E;& ex B,per E,extendatur recta BEF,ita vt EF,*b* abscissa sit æqualis rectę EB;ducaturque recta FA. Quoniam igitur latera CE, EB, trianguli CEB, æqualia sunt lateribus AE, EF, trianguli AEF, vtrumque vtrique,per constructionem;Sunt autem & Anguli ad E,dictis lateribus comprehensi, *c* inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit *d* basis CB, æqualis basi AF, & angulus ECB, angulo EAF; Est autem angulus DAC, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno,& opposito angulo ACB. Quod si latus CA, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta CHI, vt HI, æqualis sit rectæ HC, & ducatur recta IA: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum GAB, maiorem esse interno angulo, & opposito ABC; Est autem *e* angulus DAC,angulo GAB,æqualis, cum lineæ BD, CG, se mutuo secent in A. Igitur & angulus DAC, maior erit interno & opposito angulo ABC. Est autem idem angulus DAC, maior quoque ostensus angulo interno & opposito ACB. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.



a 10.primi. b 3.primi. c 15.primi. d 4.primi. e 15.primi.

SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum DAC, maiorem esse angulo BAC, interno, qui sibi est deinceps: sed solum magnitudine superare vtrumlibet ACB, ABC, internorum, sibique oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est. Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus. Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. per quam anguli externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

I D vero, quod in scholio propos 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; cum & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quolibet interno, & opposito possit esse maior; hac ratione absoluemus.

SIT figura quadrilatera ABCD, cuius angulus BAD, obtusus, & ABC, rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ AB, DC, productæ ad partes B, & C, in puncto E, necnon & rectæ DA, CB, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum ADE, obtusangulum, & productæ DA, versus A, ducatur ex quouis puncto F, ad AE perpendicularis FB, secans latus DE, in C. Dico, si AD producatur ad G, angulum externum CDG, maiorem esse quolibet trium internorum BAD, ABC, BCD, sibi oppositorum. Cum enim ADE, triangulum sit, [a] *erit angulus externus EDG, maior interno opposito DAE. Rursus cum DAB, obtusus maior sit recto ABC, maior quoque multo erit EDG, ipso ABC. Postremo, quia & in triangulo CDF,* [b] *angulus externus CDG, maior est interno, & opposito FCD; manifestum est, in quadrilatero ABCD, externum angulum CDG, maiorem esse internis, & oppositis BAD, ABC, BCD. Quamobrem propositio hæc 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.*



a 16.primi. b 16.primi.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemque lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC, sunt æqualia, [a] *erunt anguli ACB, & ABC, æquales super basim BC. Rursus quia latera AB, AD, sunt æqualia,* [b] *erunt anguli ADB, & ABD, super basim BD, æquales. Quare cum vterque angulus ACD, & ADB, æqualis sit angulo ABC,* [c] *erit angulus ADB, æqualis angulo ACD, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad BC, possunt duci. Quod est propositum.*



a 5. primi. b 5. primi. c 1. prop.

xvij. ## PROBL. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

SIT triangulum ABC; Dico duos angulos ABC,& ACB,minores esse duobus rectis; Item duos CBA,& CAB; Itemque duos BAC,& BCA. Producantur enim duo quæuis latera, nempe CB, CA, ad D,& E. Quoniam igitur *d* angulus ABD, externus maior est interno & opposito angulo ACB; si addatur communis angulus ABC, *e* erunt duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB: *f* Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA,& CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, *g* maior sit angulo CAB, interno, & opposito; *h* erunt, appositio communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo *i* duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. Cum enim angulus externus BAE, *m* maior sit interno & opposito angulo BCA; si apponatur communis angulus BAC, *n* erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, maiores: ac proinde cum illi duo *o* sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod demonstrandum erat.



d 16.primi. e 4. prop. f 13. primi. g 16.primi. h 4. prop. i 13.primi. m 16.prim. n 4. prop. o 13. primi.

EX

EX PROCLO.

HINC perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quam vnam. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum ſint duo recti, quod eſt abſurdum. [a] *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque oſtenſi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex A, ad BC, deduci poſſunt. Quod eſt propoſitum.*



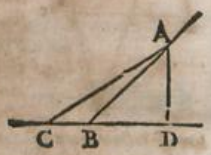
a 17. primi.

COROLLARIVM I.

Conſtat etiam ex his, in omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propoſ. duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, ſi vnus fuerit rectus, vel obtuſus, quemcunque reliquorum eſſe acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores eſſe fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propoſ. ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutũ, & obtuſum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtuſum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam ſi non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat ſi fieri poteſt, ad partes anguli obtuſi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtuſus & rectus, in triangulo ABC, maiores ſunt duobus rectis; [b] ſed & duobus rectis ſunt minores, quod eſt abſurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtuſi. Quare ad partes acuti anguli cadet.



b 17. primi.

COROLLARIVM III.

PARI ratione fit ex hac propoſ. manifeſtum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli iſoſcelis ſupra baſin, eſſe acutos. Nam [c] cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in iſoſcele ſupra baſin ſint inter ſe æquales; [d] ſintque ſimul tam illi duo, quam hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc eſt, acutus. Si enim rectus foret, aut obtuſus, eſſent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.

c 5. primi.
d 17. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 18.

xviij.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

IN triangulo ABC, ſit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, ſubtenſum à maiori latere AC, maiorem eſſe angulo ACB, qui à minori latere AB, ſubtenditur. Nam ex AC, [a] auferatur AD, æqualis ipſi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia ſunt per conſtructionem, [b] erunt anguli ABD, ADB, æquales: Eſt autem [c] angulus ADB, maior angulo ACB. Igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrem cum [d] angulus totus ABC, maior adhuc ſit angulo ABD; erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione, ſi latus AC, maius ponatur latere BC, oſtendes angulum ABC, maiorem eſſe angulo BAC; ſi nimirum ex CA, abſcindatur linea æqualis ipſi CB, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. Quod demonſtrandum erat.



a 3. primi.
b 5. primi.
c 16. primi.
d 9. pron.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni eſſe inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiuſdem omnes angulos inæquales eſſe. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit per hanc propoſ. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter vtrumq; tenens.



THEOR. 12. PROPOS. 19.

xix.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

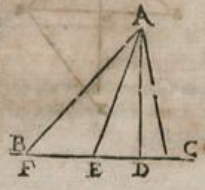
IN triangulo ABC, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus AC, ſubtendens maiorem angulum B, maius eſſe latere AB, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus AC, maius non eſt latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale eſſe ipſi AB, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si vero AC, minus eſſe dicatur latere AB, erit angulus B, ſubtenſus à minori latere AC, minor angulo C, ſubtenſo à maiore latere AB; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale ſit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius eſſe latere BC, ſi angulus B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum proponebatur.



a 5. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propoſ. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunq; ductarum, eam, quæ perpendicularis eſt, eſſe minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarũ AD, ſola ſit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam ſola vna perpendicularis duci poſſit, vt ex Proclo ad propoſ. 16. demonſtrauimus. Dico omnium minimam eſſe AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, [b] ſint duobus rectis minores, ponaturq; ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare [c] maius erit



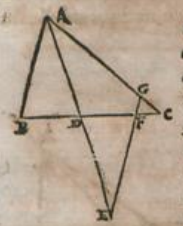
b 17. primi.
c 19. primi.

ius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD, ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

EX PROCLO.

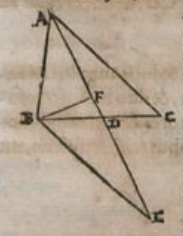
POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmativa demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cum minori.



a 3. primi.
b 15. primi.
c 4. primi.
d 1. pron.
e 6. primi.

TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin BC, in partes inæquales, maiusque segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse latere AB. Producatur enim AD, ad E, [a] vt sit DE, æqualis ipsi AD. Deinde ex maiori segmento DC, auferatur recta DF, æqualis minori segmento DB, & per F, ex E, extendatur recta EFG. Quoniam igitur latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia sunt lateribus ED, DF, trianguli EDF, vtrumq; vtrique, per cõstructionem; sunt autem & [b] anguli ADB, EDF, dictis lateribus contenti æquales: [c] Erunt bases AB, & EF, æquales, & angulo BAD, angulus FED, æqualis: Est vero & angulus CAD, angulo BAD, æqualis, per hypothesin: Igitur [d] anguli CAD, GEA, trianguli AGE, æquales erunt: [e] ideoque latera AG, EG, æqualia erunt. Est autem recta AC, maior quam AG: quare & AC, maior erit, quam EG. Et quia EG, maior est, quam EF, erit & AC, multo maior, quam EF. Cum igitur demonstratum sit rectam EF, æqualem esse rectæ AB, erit AC, latus maius latere AB, quod erat ostendendum.



f 3. primi.
g 15. primi.
h 4. primi.
b 9. pron.
c 9. pron.

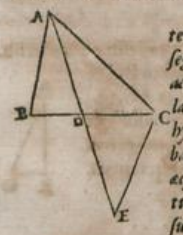
HOC ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo ABC, angulus ABC, maior sit angulo C. Dico latus AC, maius esse latere AB. Diuisa enim recta BC, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales) bifariam in D: ex A, per D, extendatur recta ADE, [f] vt sit DE, æqualis ipsi AD: ducaturque recta BE. Quoniam igitur latera AD, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus ED, DB, trianguli EDB, vtrumque vtrique, per constructionem, [g] sunt autem & anguli ADC, EDB, dictis comprehensi lateribus æquales: [a] Erunt bases AC, & BE, æquales, angulusque ACD, angulo EBD, æqualis: Et quia angulus ACD, ponitur esse minor angulo ABC, erit & angulus EBD, minor eodem angulo ABC. Ideoque angulus ABE, per rectam BD, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam BF, cadet BF, supra ED, eo quod angulus ABD, maior sit angulo EBD. Quia vero EF, [b] maior est, quam ED, & ED, posita est æqualis ipsi AD, erit EF, maior, quã AD. [c] Sed adhuc AD, maior est, quam AF. Multo igitur maior erit EF, quam AF. Itaque quia recta BF, diuidens angulum ABE, bifariam, secat basin AE, inæqualiter in F, est q; maius segmentum EF, minus autem AF; erit per theorema à Proclo proxime demonstratum, latus BE, maius latere AB. Ostensum est autem BE, æquale esse lateri AC. Igitur & AC, latus latere AB, maius erit. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HÆC propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.

POTERIMVS quoque theorema à Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusque segmentum erit prope maius latus.



a 3. primi.
b 15. primi.
c 4. primi.
d 6. primi.
e 1. pron.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, sint inæqualia; AC, maius, & AB, minus. Recta autem AD, diuidens angulum BAC, bifariam, secet basin BC, in D. Dico segmentum DC, maius esse segmento DB. Si enim non est maius, erit vel æquale, vel minus. Si dicatur esse æquale; producatur AD, ad E, [a] vt DE, æqualis sit ipsi DA, ducaturque recta EC. Quoniam igitur latera AD, DB, æqualia sunt lateribus ED, DC, vtrumque vtrique; AD, videlicet ipsi ED, per constructionem, & DB, ipsi DC, per hypothesin aduersarij. Sunt autem & [b] anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales: [c] erit basis AB, basi EC, æqualis, & angulo BAD, angulus CED. Positus autem est & angulo BAD, angulus CAD, æqualis. Igitur & anguli CED, CAD, æquales erunt. [d] Ideoq; latus AC, lateri EC, æquale. Cum igitur ostensum sit, lateri EC, æquale esse quoque latus AB, [e] erunt latera AC, AB, æqualia; quod est absurdum, quia AC, maius ponebatur, quam AB. Non erit igitur segmentum DC, segmento DB, æquale. Quod si DC, dicatur esse minus, & DB, maius; erit per theorema Procli, latus AB, maius latere AC. Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit DC, quam DB. Quare erit necessario maius.

Eodem modo demonstrari poterit hoc theorema.

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.



a 15. primi.
b 4. primi.
c 6. primi.
d 4. primi.

PRIMVM recta AD, secans angulum BAC, bifariam, diuidat quoq; basin BC, in D, bifariam. Dico latera AB, AC, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus AC, æquale esse lateri AB, si DC, segmentum segmento DB, æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera AD, DB, æqualia sint lateribus ED, DC, [a] & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales; [b] erunt bases AB, EC, æquales, & angulus CED, angulo BAD, hoc est, angulo CAD, æqualis. Quare [c] AC æquale erit ipsi EC, hoc est, ipsi AB.

Deinde sint latera AB, AC, æqualia, & recta AD, secans basin BC, in D, diuidat angulum BAC, bifariam. Dico segmentum DC, æquale esse segmento DB. Cum enim latera AD, AB, æqualia sint lateribus, AD, AC, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin, [d] erunt bases BD, DC, æquales.

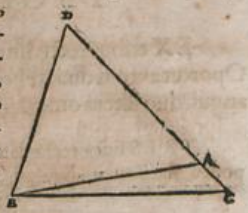
THE-

THEOR. 13. PROPOS. 20. xx.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

SIT triangulum ABC. Dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, simul maiora esse reliquo latere BC. Producatur vnum ex illis, vt CA, vsque ad D, *e* sitque recta AD, æqualis alteri lateri non producto AB, & ducatur recta DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia inter se sunt, per constructionem, *f* erunt anguli ABD, ADB, æquales inter se: Est autem angulo ABD, *g* maior angulus CBD. Igitur & angulus CBD, maior erit angulo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppositum maiori angulo CDB, *b* maius erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi CD, (si enim æqualibus AB, AD, commune addatur AC, *i* fient tota æqualia; nimirum linea composita ex AB, AC, & linea composita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, simul maiora latere BC. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.

c 3. prim.



f 5. primi.
g 9. pron.
h 19. primi
i 2. pron.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema à familiaribus Heronis, & Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera AB, AC, trianguli ABC, maiora esse latere BC. Diuidatur angulus BAC, illis lateribus contentus [a] *bifariam per rectam AD. Quoniam igitur trianguli CDA, latus CD, protractum est ad B,* [b] *erit angulus externus BDA, maior interno & opposito CAD. Igitur & maior angulo BAD. Quare in triangulo ABD, latus AB, maiori angulo ADB, oppositum* [c] *maius erit latere BD, quod minori angulo BAD, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus AC, maius esse, quam CD, quia angulus CDA,* [d] *maior est angulo BAD, hoc est, angulo CAD, &c. Quamobrem duo latera AB, AC, maiora erunt latere BC. Eademq; est ratio quorumcunq; duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*



a 9. prim.
b 16. primi
c 19. primi
d 16. primi

THEOR. 14. PROPOS. 21. xxj.

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, super extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ BD, CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, simul minores esse duobus lateribus BA, CA, simul; At vero angulum BDC, maiorem angulo BAC. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo BAE, duo latera BA, AE, *e* maiora sunt latere BE, si addatur commune EC, *a* erunt BA, AC, maiora, quam BE, EC. Rursus quia in triangulo CED, duo latera CE, ED, *b* maiora sunt latere CD, si commune apponatur DB, *c* erunt CE, EB, maiora, quam CD, DB. Ostensum vero iam fuit, AB, CA, maiora esse, quam BE, EC. Multo igitur maiora erunt BA, CA, quam BD, CD, quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus BDC, *d* maior est angulo DEC, externus interno; & angulus DEC, angulo BAC, maior quoque est, eandem ob causam. Erit angulus BDC, multo maior angulo BAC, quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.



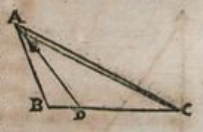
e 20. primi
a 4. pron.
b 20. pri.
c 4. pron.
d 16. primi.

SCHOLIVM.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

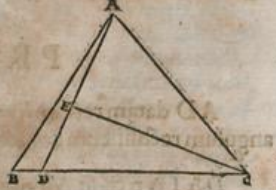
EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum ABC, obtusum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris BC, duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus BA, AC. Ducatur enim recta DA: Et quoniam in triangulo ABD, duo anguli ABD, ADB, [c] *minores sunt duobus rectis. Ponitur autem ABD, maior recto, nempe obtusus; erit ADB, minor recto, ideoq; minor angulo ABD. Quare latus AD,* [a] *maius erit latere AB. Ex DA,* [b] *abscindatur recta DE, æqualis rectæ AB. Et reliqua linea AE,* [c] *bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur CF, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ CF, DF, intra triangulum maiores duobus lateribus BA, AC. Quoniam enim in triangulo AFC, duo latera AF, FC,* [d] *maiora sunt latere AC. Est autem recta AF, ipsi FE, æqualis, per constructionem; erunt CF, FE, maiores quoq; latere CA. Si igitur æqualia addantur ED, & AB, sient rectæ CF, FD,* [e] *maiores lateribus CA, AB. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B extremo, recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ CF, BF, minores duobus lateribus CA, AB, vt Euclides demonstrauit.*



e 16. primi.
a 19. primi
b 3. primi.
c 10. primi.
d 20 primi
e 4. pron.

Rursus sit triangulũ scalenũ ABC, cuius latus maximũ BC, minimũ AB. Ex BC, [f] *auferatur BD, æqualis rectæ AB, & ducatur AD, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur CE. Constitutæ igitur erunt intra triangulum duæ lineæ CE, DE, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera AB, AC. Cum enim duo latera BA, BD, æqualia sint,* [g] *erunt duo anguli BAD, BDA, æquales: Sed BDA, angulus* [h] *maior est angulo CED. Maior igitur erit & angulus BAD, angulo CED. Quare multo maior erit totus angulus BAC, angulo CED. Quod est propositum.*



f 3. primi.
g 5. primi.
h 16. primi

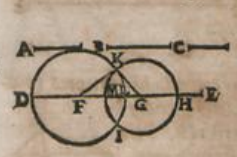
Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.

VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

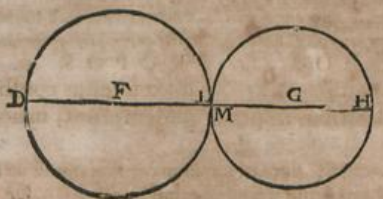
xxij. # PROBLEMA 8. PROPOSITIO 22.

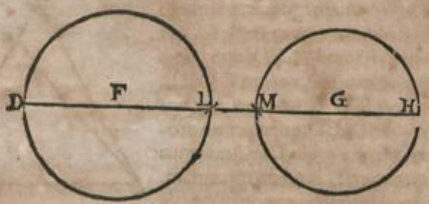
EX tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, vt constat ex propositione. 20. in qua ostensum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quauis DE, infinitæ magnitudinis *a* abscindatur recta DF, æqualis rectæ A. Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo vero FD, circulus describatur DIK. Item centro G, interuallo autem GH, alius circulus describatur HIK, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, maiores ponantur recta FG; si ex FE, sumatur recta FL, æqualis ipsi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipsi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in L, punctum, essent GL, FL, hoc est, GH, & FD, æquales rectæ FG: Si vero M, caderet inter G, & L, essent eædem duæ FL, GM, hoc est, DF, GH, minores recta FG, quorum vtrumque est contra hypothesin. Id quod ex appositis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta, F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A, B, & C. Cum enim recta FK, *b* æqualis sit rectæ FD, & recta A, per constructionem eidem FD, æqualis; *a* erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.



a 3. primi.





b 15. def.
a 2. pron.

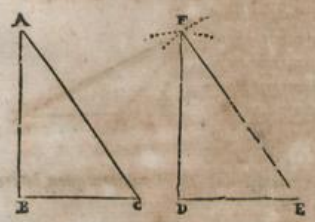
PRAXIS.

SVMATVR recta DE, *æqualis cuicunq; rectarum datarum, nempe ipsi* B, *quam nunc volumus esse basin. Deinde ex* D, *ad interuallum rectæ* A, *arcus describatur: Item ex* E, *ad interuallum rectæ* C, *alter arcus secans priorem in* F. *Si igitur ducantur rectæ* DF, EF, *factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus* DF, *æquale rectæ* A, *propter interuallum ipsius* A, *assumptum: & latus* FE, *ipsi* C, *propter assumptum interuallum* C: DE, *vero latus, acceptum est rectæ* B, *æquale ab initio.*



SCHOLIVM.

HAC arte cuicunq; triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq; & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namq; triangulum quodcunq; ABC, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas AB, BC, CA, quarum quælibet duæ b *maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam DE, æqualem vni lateri, nempe BC; & ex D, interuallo lateris AB, arcum describo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris CA, qui priorem secet in F, &c.*



I 20. primi

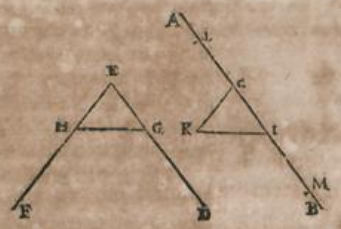
xxiij. # PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF. Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta GH, coñectantur: Deinde *a* constituatur triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita vt CI, æquale sit ipsi EG; & CK, ipsi EH; & IK, ipsi GH. (Quod facile fiet, si CI,

a 22. prim.

si CI, sumatur æqualis ipsi EG, & CL, ipsi EH, & IM, ipsi GH. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero CL, & IM, circuli describantur secantes sese in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, vtrumq; vtrique, & basis IK, basi GH, per constructionem; *b* erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulũ ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.



b 8. primi.

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data AB, punctumq; in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur GH: Eodemq; internallo ex centro C, arcus describatur IK, sumaturq; beneficio circini arcus IK, arcui GH, æqualis. Recta enim ducta CK, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ IK, GH, essent ipsis æquales, propterea quod circino non variato vtrãq; distantiã IK, GH, accepimus. Cũ ergo & duo latera IC, CK, æqualia sint duob. GE, EH, ob æqualia interualla, quib. arcus sunt descripti; [a] *erũt anguli ICK, GEH, æquales.*



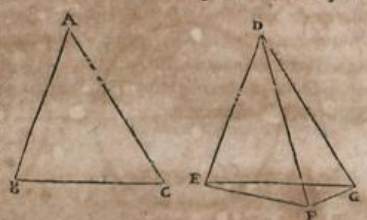
a 8. primi.

CÆTERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propos. 31. huius lib.

THEOREMA 15. PROPOS. 24. xxiv.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Angulus vero A, maior sit angulo EDF. Dico Basin BC, maiorem esse basi EF. Ad lineam enim DE, ad eiusque punctum D, *b* constituatur angulus EDG, æqualis angulo A; (cadetque recta DG, extra triangulum DEF, cum angulus EDF, minor ponatur angulo A) ponaturque DG, æqualis ipsi DF, hoc est, ipsi AC. Ducta deinde recta EG; *c* cadet ea aut supra rectam EF, aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum supra EF, ducaturq; recta FG. Quia ergo latera AB, AC, æqualia sunt lateribus DE, DG, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo EDG, per constructionem: *d* Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG, inter se sunt æqualia; *e* erunt anguli DFG, DGF, æquales: Est autem angulus DGF, *f* maior angulo EGF. Igitur & angulus DFG, eodem angulo EGF, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur EFG, *a* maius erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, quam EF. Quod est propositum.



b 23. primi.
c 3. primi.
d 4. primi
e 5. primi.
f 9. pron.
a 19. prim.

CADAT deinde EG, in ipsam EF. Et quia rursus, vt prius, basis EG, *b* æqualis est basi BC. & EG, *c* maior quam EF, erit & BC, maior, quam EF, quod est propositum.

b 4. primi
c 9. pron.

CADAT tertio EG, infra EF, producanturque rectæ DF, DG, vsque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rursus, vt prius, *d* basis EG, basi BC, æqualis. Deinde quia duo latera DF, DG, æqualia sunt inter se, per constructionem, *e* erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG, æquales: Est autem angulus FGI, *f* maior angulo FGE. Igitur & angulus GFH, eodem angulo FGE, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangulo ergo EFG, *g* maius erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC basis, basi EF. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

d 4. primi.
e 5. primi.
f 9. pron.



g 19. primi.

SCHOLIVM.

Si quis forte roget, cur in 4. propos. Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtriq;, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtriq;, anguli vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum. Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli est; non autẽ necesse est, triangulũ illud maius hoc esse. Vt n. clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. huius 1. libri, Triangulũ maiorẽ habẽs angulũ, aliquando æquale est triangulo minorẽ habenti angulũ, aliquando vero minus eodẽ, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri, ex eo, q; angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiã maius esse cũ modo æquale sit, modo minus, & modo maius. Idẽ dici potest de angulis reliquis. Nã in prima figura huius theorematis angulus ABC, minor est semper angulo DEF; cũ angulus DEG, (qui æqualis est per 4. propos. angulo ABC,) [a] minor sit eodem angulo DEF, pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus ABC, angulo DEF, æqualis, per 4. propos. At vero angulus ACB, minor est angulo DFE, cum angulus DFE, [b] maior sit angulo DGF, externus interno, & opposito; & angulus DGF, æqualis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC, maior quidem est angulo DEF, propterea quod angulus DEG, (æqualis existens per 4. propos. angulo

a 9. pron.
b 16. pri.

c 9. pron. angulo ABC,) c maior est eodem angulo DEF, totum parte. Sed angulus ACB, minor est eodem angulo DFE. Nam si recta
d 16. primi. EF, producatur secans rectam DG, in K. fiet angulus DFE, d maior angulo DKE, externus interno; Est autem & angulus



DKE, maior adhuc angulo DGE, externus quoq; interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus DFE, angulo DGE, qui per 4. propos. æqualis est angulo ACB. Quod etiam constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores lineæ DF, EF, continent angulum maiorem angulo DGE, quem exteriores lineæ DG, EG, continent. Quare neq; certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.

a 17. primi. QVONIAM verò in triangulo DEF, duo anguli E, F, a semper minores sunt duobus rectis, erit necessario saltem alter eorum acutus. Si igitur ad partes acuti anguli (vt in 1. figura ad partes anguli DFE, in 2. verò & 3. ad partes anguli DEF.) fiat angulus EDG, æqualis angulo A, & reliqua fiant, vt in propos. dictum est, cadet semper ducta recta EG, supra punctum F. Nam



b 13. primi. cum angulus DFE, acutus sit, b erit eideinceps, producto latere EF, obtusus. Producta ergo recta
c 19. primi. DG, secante latus EF, productum in H; c maior erit recta DH, latere, DF, cum opponatur angulo obtuso in triangulo DFH; ac proinde recta EG, auferens DG, æqualem ipsi DF, cadet necessario supra F. Si namq; vel per F, transiret, vel infra caderet, abscinderet ex DG, maiorem lineam latere DF; nimirum vel DH, vel maiorem, quam DH. Hoc si obseruetur, satis erit primus casus propositionis, quæ fortassis causa fuit, vt Euclides apud Theonem primo casu contentus fuerit.

XXV.

PROBL. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.



DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF; vtrumque vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, maior sit basi EF. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypothesin; a erit & basis
a 4. pri. BC, æqualis basi BF; quod est absurdum. Ponitur enim basis BC, basi EF, maior: Si vero angulus A, dicatur
b 24. primi esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis EF, b maior basi BC; quod magis est absurdum, cum EF, ponatur esse minor quam BC. Quare angulus A, cum neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuersum est præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostensum fuit, angulum illi respondentem maiorem esse. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata sunt propos. 18. & 19. Nam in 19. demonstratum est, in vno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq; discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

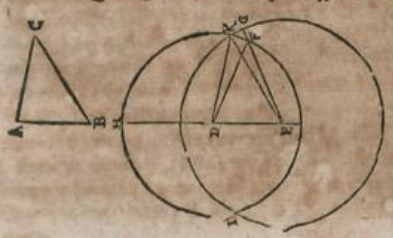
MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonstrat hoc idem theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex basi maiore BC, c *abscindatur recta BG, æqualis basi minori EF.*



c 3. pri. d 23 primi. c 3. pri. *Fiat quoq; angulus GBH,* d *æqualis angulo DEF,* c *& sit BH, æqualis ipsi BA, atq; adeo ipsi DE. Ducta autem recta linea AH, ducatur quoq; recta per G, ex H, secans AC, in I. Quoniam igitur duo latera BA, BH, æqualia sunt,* f *erunt anguli BAH, BHA, æquales. Rursus quia latera BG, BH, æqualia sunt lateribus EF, ED, vtrumq; vtrique, & angulus GBH, æqualis angulo DEF, per constructionem:* a *erit basis HG, basi DF, atq; adeo ipsi AC, æqualis, angulusq; GHB, angulo EDF. Et quoniam recta HI,* b *maior est quam HG, quæ est ostensa æqualis ipsi AC, erit quoq; maior HI, quam AC: Sed AC,* c *maior est adhuc, quam AI. Multo ergo maior erit HI, quam AI. Quare*

f 5. pri. a 4. pri. b 9. pron. c 9. pron. d 12. pri. e 4. pron. *angulus IAH,* d *maior erit angulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui ostensi sunt æquales, fiet* e *totus angulus BAC, toto angulo BHG, maior: Sed angulus BHG, demonstratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus BAC, angulo D. quod est propositum. Quod si quando contingat, rectam AH, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli æquales BAH, BHA, &c. vt reliquus fiat angulus BAC, maior reliquo angulo BHG. Quando autem recta AH, per punctum B, transit, nihil addendum erit, aut demendum, vt perspicuum est.*

HERON autem idē ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor EF, ad G, vt sit
f 3. pri. *EG,* f *æqualis basi maiori BC. Deinde centro D, interuallo autem DF, describatur circulus, producaturq; ED, ad H, in circum-*
g 23. def. 1. *ferentiam. Quoniā igitur DH,* g *est æqualis ipsi DF, erit quoq; DH, æqualis ipsi AC. Additis igitur æqualibus DE, AB,* h *fient*
h 2. pron. i 20. pri. *AC, AB, simul æquales toti HE: Sed AC, AB,* i *simul maiores sunt, quam BC, atq; adeo quam EG. Igitur & HE, maior erit, quam EG. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo EG, intersecabit rectam FH, atq; adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis: ad K, autem ducantur rectæ DK, EK. Et quoniam duo latera AB, AC, æqualia sunt duobus lateribus DE, DK, vtrumq; vtrique, (est enim DK, æquale ipsi DF, per definitionem circuli: DF, autem positem est æquale lateri AC.) & basis BC, basi EK, æqualis: (cum EK æqualis sit ipsi EG, per definitionem circuli: EG, verò recta per con-*



struc-

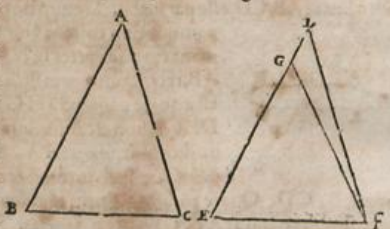
structionem facta sit æqualis basi CB.) [a] *Erit angulus BAC, angulo EDK, æqualis: Sed angulus EDK, maior est* [b] *angulo EDF. Quare & angulus A, angulo EDF, maior existet. Quod est propositum. Atq; hæc demonstratio generalior est priore, cum omnibus casibus conueniat.*

a 8. primi.
b 9. pron.

THEOR. 17. PROPOS. 26. xxvj.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi EFD; Sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adiacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE, sit DE, maius, à quo [c] abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, EF, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin: [d] Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed æquale. Quamobrem, cum latera AB, BC, æqualia sint lateribus DE, EF, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [a] erunt & bases AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.



c 3. primi.
d 4. primi.
a 4. primi.

SINT deinde latera AB, DE, subtendentia æquales angulos C, & EFD, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, BC, ipsi EF, & CA, ipsi FD; reliquumque augulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non est æquale lateri EF, sit EF, maius; [b] ex quo sumatur recta EG, æqualis ipsi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus DE, EG, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; [c] Erit angulus C, angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis; Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. [d] Est enim maior. Non ergo est latus BC, lateri EF, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.



b 3. primi.
c 4. primi.
d 16. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nã si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, [e] erunt tota quoque triangula æqualia inter se.

c 4. primi.

SCHOLIVM.

PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium BC, EF, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus æqualia esse, reliquumq; angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quem admodum eo loco monuimus.



HOC loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet

IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum, vel basin bifariam, perpendicularis est ad basim, & si quidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si vero basim secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad basin ducta, diuidit & basin, & angulum bifariam.

SINT in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, diuidatq; primum recta AD, angulum A, bifariam. Dico rectam AD, esse ad BC, perpendicularem secareq; basin BC, bifariam. Cum enim duo latera AB, AD, duobus lateribus AC, AD, sint æqualia, angulosq; æquales contineant, ex hypothesi, [a] *erunt & bases BD, CD, æquales, & anguli ad D, atq; adeo recti.*

DIVIDAT deinde recta AD, basin BC, bifariam. Dico rectã AD, ad BC, perpendicularem esse, & angulum A, secare bifariam. Cum enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sint, & basis AB, basi AC, ex hypothesi, [b] *erunt quoq; anguli ad D, æquales, atq; adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, æquales erunt.*



a 4. primi.
b 8. prim.

SED iam recta AD, sit ad BC, perpendicularis. Dico & basim BC, & angulum A, secari bifariam. [c] *Erunt enim anguli B, C, supra basin BC, æquales. Itaq; quoniam duo anguli D, B, trianguli ABD, duobus angulis D, C, trianguli ACD, æquales sunt, vterq; vtriq;, latusq; AD, æqualibus oppositum angulis B, C, commune;* [a] *erunt & reliqua latera BD, CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonstrandum.*

c 5. primi.

SED & hoc theorema verum est.

a 26. primi.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur: si vero angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

IN

IN eodem triangulo ABC, sit AD, ad BC, perpendicularis, diuidat q3 primum basin BC, bifariam. Dico & latera AB, AC, esse æqualia, & angulos ad A, æquales. Quoniã enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sunt, angulosq3 comprehendunt æquales, nempe rectos; b *erunt quoq3 & bases AB, AC, & anguli ad A, æquales, quod est primum.*

b 4. primi.

SECET deinde perpendicularis AD, angulum A, bifariam. Dico & latera AB, AC, æqualia esse, & rectas BD, CD. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli ABD, duobus angulis D, A, trianguli ACD, æquales sunt, latusq3 AD, illis adiacens, commune; c *erunt quoq3 & latera AB, AC, & latera BD, CD, æqualia. Quod est secundum.*

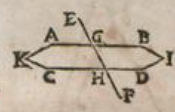
c 26. primi.

xxvij.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent vnquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est GIH, (cum AB, recta continuata sit, item recta CD, vsque ad punctum I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & oppositi DHG; quod est absurdum; a quoniam externus interno maior est. Quod si AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis interno & oppositi, AGH, quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni BGH, CHG, æquales, demonstrabitur, lineas AB, CD, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.



a 16. primi.

SCHOLIVM.

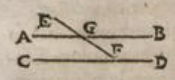
NECESSE est, vt lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existant plano, vt ex definitione constat. Quare non satis est, duos angulos alternos æquales inter se esse, vt duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in vno, eodemq3 existere plano. Fieri enim potest, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano existentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim CD, perpendicularis ad AB, rectam, quæ in subiecto plano existit; & ex C, in alio plano, ad CD, ducatur alia perpendicularis CE, ita vt punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito, perspicuum est, rectam CD, incidentem in rectas CE, AB, facere duos angulos ECD, ADC, alternos æquales, cum sint recti; & tamen CE, AB, non sunt parallelæ, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neq3 in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, vt supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In vndecimo vero libro, & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis, quia in illis libris differitur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas & superficies, &c.



xxviij.

THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.



IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim angulo EGA, æqualis ponitur angulus GHC; & eidem angulo EGA, a æqualis est angulus HGB; b erunt anguli alterni GHC, HGB, æquales. Quare lineæ AB, CD, c parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus EGB, æqualis ponatur interno GHD.

a 15. pri.
b 2. pron.
c 27. pri.

DEINDE faciat recta EF; angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli AGE, AGH, a duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis AGE, AGH, æquales. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 13. pri.

SCHOLIVM.

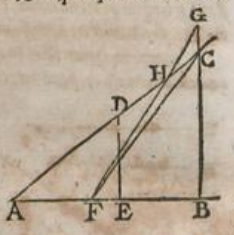
IAMDVDVM pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propos. 29. cum multis alijs illis ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, operæ pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, at q3 problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accurate, atque euidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonstret, duo præmittit. Primum est.

SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT à puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G. Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectæ lineæ AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinitè ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & lineæ ipsæ vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinitè iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ AB, AC, producantur infinitè, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cælo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

Quod autem rectæ AB, AC, quo longius protrahantur, eo magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare, quam F, & G. Item B, & C, plus quã D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunq; in rectam AC, acceptis, ad AB, perpendiculares CB, DE, quæ distantias punctorum C, D, à recta AB, metientur, cum sint minimæ omniũ rectarũ ex C, D, ad AB, ductarũ, vt in coroll. propos. 19. ostendimus. Dico CB, maiorẽ esse, q̃ DE; ac proinde plus distare rectã AC, à recta AB, in puncto C, remotiore, q̃ in puncto propinquiore D. Si n. CB, non est maior, q̃ DE, erit vel æqualis, vel minor: Sit primũ æqualis, & rectæ AE, abscindatur æqualis BF, ita vt punctum F, cadat vel inter A & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducatur q̃ recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, æqualia sunt, vtrumq; vtriq;, angulosq; continent æquales. vtpote rectos: [a] *erunt & bases AD, FC, & anguli DAE, CFB, inter se æquales. Igitur externus angulus CFB, interno DAE, æqualis erit;* [b] *quod est absurdum. Vel cum externus angulus CFB, interno DAE, æqualis sit,* [c] *parallelæ erunt AC, FC, quod etiam absurdum est, cum in C, concurrant.*



a 4. pri.
b 16. primi.
c 27. primi

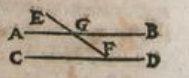
Sit deinde CB, minor quam DE, si fieri potest, & producta BC, fiat BG, ipsi DE, æqualis, iungatur q̃ recta FG. Quia igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BG, æqualia sunt, vtrumq; vtriq;, angulosq; continent æquales, puta rectos; [d] *erunt & bases AD, FG, & anguli EAD, BFG, inter se æquales. Igitur externus angulus BFG, interno EAD, æqualis erit, quod est absurdum. Vel cum externus angulus BFG, interno EAD, æqualis sit,* [a] *erunt AC, FG, inter se parallelæ, quod absurdum est, cum se mutuo secent in H. Quocirca BC, ipsa ED, maior erit, cum neq; æqualis, neq; minor esse possit, vt demonstratum est.*

d 4. primi.
a 27. prim.

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiusmodi est.

Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

SINT duæ parallelæ AB, CD, & recta EF, secet ipsam AB, in G. Dico rectam EF, si producatur, secturam esse quoq; ipsam CD. Quoniam duæ rectæ GB, GF, in puncto G, angulum faciunt, si producantur infinitè, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela AB, à parallela CD, distat, cum hac distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia GB, à GF, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam GF, productam secuisse rectam CD. Nam quamdiu GF, continebitur inter duas parallelas, minori distantia à GB, remouebitur, quam CD, ab eadem GB, vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.



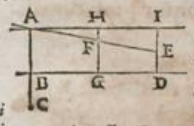
SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinitè productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

In rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt BGH, DHG, duobus rectis minores. Dico rectas AB, CD, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli BGH, DHG, minores ponuntur esse duobus rectis: Sunt autem duo anguli DHG, DHF, [a] *duobus rectis æquales: Erunt duo anguli DHG, DHF, maiores duobus angulis DHG, BGH. Ablato ergo communi angulo DHG, remanebit angulus DHF,* [b] *maior angulo BGH. Si igitur ad rectam FG, & ad punctum G,* [c] *constituatur angulus KGH, æqualis angulo DHF, cadet GK, supra GB,* [d] *secabit q̃ producta rectam AB. Quoniam igitur in duas rectas IK, CD, recta incidens EF, facit angulum externum DHF, æqualem interno, & opposito KGH.* [c] *Erunt rectæ IK, CD, parallelæ. Secat autem recta AB, ipsam IK, in G. Producta igitur secabit quoq; ipsam CD, vt demonstratum est. Quare AB, cum CD, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L, quod est propositum.*



a 13. primi.
b 5. pron.
c 23. pri.
d 11. pron.
e 28. primi

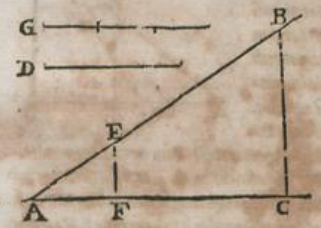
Hac ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, æque dubium, & obscurum esse videtur, atque illud Axioma, afferemus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia, sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuo fiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens faciat internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuo appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus. Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quòd dari possunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, sibi semper mutuo magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum ambæ producantur, quorum illud ab Apollonio Pergæo, hoc vero à Nicomede demonstratum est: Ita quoq; non videtur sine demonstratione admittendum esse, (quamquam verissimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, si in infinitum producantur ambæ, licet semper magis ac magis inter se distent, vt nos supra demonstrauimus. Nam exhiberi possunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, semper magis ac magis inter se distantes, quarum tamen distantia data quamcumque rectam lineam nunquam superet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namq; sit recta AB. Dico describi posse lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earum



nunquam æqualem esse rectæ AB, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Productæ enim rectæ AB, quantumlibet vsq; ad C, ducatur per B, ad AC, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem AB, describatur linea conchoideos AE, inflexa nimirum linea, quæ rectæ BD, fiat quidem semper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta AI, ad AC, perpendicularis, [a] quæ ipsi BD, parallela erit. Postremo ex duobus punctis HI, vtcunq; in recta AI, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares HG, ID, [b] quæ parallelæ, [c] atq; adeo æquales inter se erunt, anguloſq; [d] constituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate 13. non penderent, aut etiam si pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud iam sit demonstratum ante propos. 29. huius lib. vbi primum vsus illius apparere incipit, vti vere à nobis mox ante propos. 29. demonstratum abstrabitur. Itaq; quoniam FG, maior est, quam ED, vt Nicomedes demonstrauit, erit FH, reliqua minor, quam reliqua EI. Magis ergo inter se distant lineæ AI, AE, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atq; ita semper eas probabimus magis ac magis distare, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit, quam recta AB, hoc est, quam perpendicularis ex recta AI, ad rectam BD, demissa, cum inflexa linea AE, ad rectam BD, nunquam perueniat, vt demonstratum est à Nicomede.

a 28. primi
b 28. primi
c 34. primi.
d 29 prim

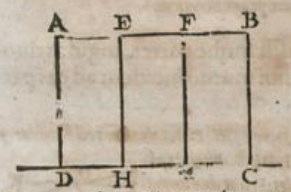
Scio principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex quouis puncto E, in recta AB, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quæ si maior fuerit, quàm D, constat propositum: si vero non est maior, sumatur eius multiplex proxime maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem AB, ipsius AE, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius EF, demittatur ex B, ad AC, perpendicularis BC, quam dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim [e] est, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF, (quod ex coroll. propos. 4. lib. 6. Eucl. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas BC, EF, quæ [f] parallelæ sunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad EF: erit ita multiplex BC, ipsius EF, vt multiplex est AB, ipsius AE, hoc est, vt multiplex est G, ipsius EF. Cum ergo BC, & G, æque multiplices sint ipsius EF, ipsæ erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G, quam D. Igitur & BC, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. Quod est propositum.



e 4. sexti.
f 28. primi.

Verum demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cum ita sint, sedulo dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex ijs solum, quæ ante propos. 29. primi libri demonstrata sunt. Ante enim propos. 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixe illud iterum atq; iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoq; sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessario, multo tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione excluſa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi. I.

LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



Vt si omnia puncta lineæ AB, à recta DC, æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC ad DC, demissæ æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum minima, ex coroll. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit AB, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquido constare potest. Nam si omnia puncta lineæ AB, æqualiter distant à recta DC, ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel hue, atq; illuc deflectendo subsultabit, nihilq; in ea flexuosum reperietur, sed æqualiter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta DC. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta DC, distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neq; vero cogitatione apprehendi potest aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existat, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concesso, vna cum ijs, quæ vsq; ad propos. 29. huius lib. ostensa sunt, Axioma 13. demonstrabimus, adeo clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoq; sanæ mentis illud negare possit. Aut certe citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longe facilius ei quilibet assentiatur, quam illi axiomati 13. Euclidis.

Idem prorsus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoq; est; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodũ linea æqualiter semp à recta linea distãs, naturã lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, propterea q; recta est, vt diximus. Quòd aut ẽ inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoq; perfecte circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales, & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire. Sit igitur circulus ABCDEF, cuius centrum G. Dico rectam GC, ex centro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter se æquales. Producta enim IG, vsq; ad A. si semicirculus ABC, circa diametrũ AC, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo AEC, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se æquales. Quod si quis dicat, vnum semicirculum alterum intersecare, ducenda erit recta linea ex centro G. secans vtramq; circumferentiam, colligendumq; partem toti esse æqualem, nimirum semidiametrum vsq; ad interiorem circumferentiam, semidiametro ad exteriorẽ vsq; circumferentiam ductæ, quod absurdum est. Anguli igitur ad C, tam interni, quam externi inter se congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta HAK, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta GA, quæ ex proximè demonstratis angulos GAB, GAF, constituet æquales. Non ergo æquales sunt KAB, KAF. Quod est contra hypothesin.



HOC

HOC ostenso, ambiat inflexa linea HLIMNO, circularem lineam ABCDEF, omniaq; eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesq; angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt HA, LB, IC, MD, NE. OF. Hæ enim cum, vt demonstratum est, per centrum transeant, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonstratum est ab Eucl. propos. 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri posit) atq; adeo eorum distãtias à subiecta linea circulari metientur. Dico lineam HLIMNO, esse circularem. Cum enim omnes illæ, vt proxime ostendimus, per centrum G, transeant; si æqualibus HA, OF, addantur æquales AG, FG, erunt totæ HG, OG, æquales; eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa HLIMNO, ad G, ductæ æquales erunt & rectis HG, OG, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum: videlicet.

II.

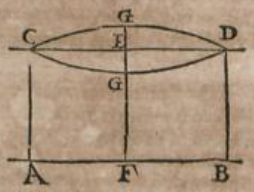
SI recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

VT si in priore figura recta AD, ad DC, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam DC, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoq; lineam, nempe AB. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus; propterea quod omnia puncta lineæ AB, descriptæ æqualiter à recta DC, distant, nimirum per rectã AD. Ex quo fit, ipsam lineam rectã esse, cum, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed æqualiter inter ipsa iaceant, quippe cum nullum eorum magis aut minus à recta CD, abscedat sursum, aut deorsum vergendo, quam aliud. Patet hoc etiam ex ijs, quæ ad definitionem lineæ rectæ scripsimus. Cum enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur, (quod recta AD, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D. A, æque velociter incedant, æqualiterq; semper inter se distent.) describent vtiq; lineas similes, vt in eadem definitione docuimus. Cum ergo punctum D, rectam DC, describat, erit quoq; linea AB, quam punctum A, describit, recta. Neque vero imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoq; ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, æquabilemq; motum vtriusq; puncti extremi. Est principium hoc æque clarum, & euidens, atq; antecedens.

CONTINGIT autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineam circularem in transuersum fluens æquabiliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari æquales semper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atq; illuc, circularem lineam altero suo extremo describit, ita vt naturam circularis lineæ subiectæ, à qua æqualiter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodum linea recta AD, super rectam DC, in transuersum fluens æquabiliter, constituens nimirum cum ea in suo extremo D, angulos semper rectos, ita vt nusquam declinet, huc atq; illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam AB, altero extremo A, delineat: adeo vt linea descripta AB, naturam induat rectæ lineæ subiectæ DC, à qua æqualiter semper recedit. Rectam autẽ, quæ super lineam circularem in transuersum fluit æquabiliter, describere altero suo extremo lineam quoq; circularem, facile demonstrabimus. Moueatur enim in figura posteriore recta HA, in transuersum super peripheriam ABCDEF, æquabiliter, faciens semper in extremo A, cum ea angulos æquales. Dico lineam HLIMNO, ab altero extremo H, descriptam esse quoq; circularem. Cum enim recta HA, in omni situ motus illius imaginarij faciat æquales angulos cum peripheria ABCDEF, fit, vt ea producta in centrum G, cadat, vt supra ostendimus. Quare additis rectis æqualibus HA, OF, ad rectas æquales AG, FG, fient totæ rectæ HG, OG, & omnes aliæ, inter se æquales: ac propterea ex defin. circuli HLIMNO, circumferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.

III.

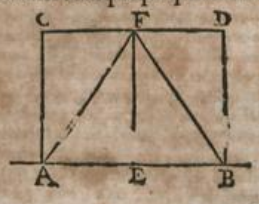
SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



SINT ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares AC, BD, inter se æquales: Et ducta recta CD, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad AB, perpendicularis EF. Dico EF, vtriq; AC, BD, esse æqualem. Si namq; æqualis non est, erit vel maior, vel minor. Absitsit ergo æquali FG, si intelligatur recta AC, moueri in transuersum per rectam AB, faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum C, lineam rectam per G, transeuntem, vt supra ostensum est, qualis est CGD. Duæ ergo rectæ CED, CGD, superficiem claudent. Quod est absurdum. Æqualis igitur est EF, vtriq; AC, BD. Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.

IV.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarũ extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.



a 4. pri.

SINT ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter se, ducaturq; recta CD. Dico vtrumq; angulum C, D, rectum esse. Secta namq; recta AB, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iunganturq; rectæ AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, æqualia sunt, vtrumq; vtriq;, angulosq; continent æquales, puta rectos [a] erunt quoq; & bases AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quam AFE, BFE, inter se æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli

CAF,

a 4. primi. CAF, DBE. Itaq; cum duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, æqualia sint, angulosque complectantur æquales, vt ostendimus, [a] erunt quoq; & bases CF, DF, & tam anguli C, D, quam CFA, DFB, inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis CFA, DFB, addantur anguli AFE, BFE, ostensi æquales, fient toti anguli CFE, DFE, æquales, ac proinde recti. Quia vero perpendicularis EF, vtriq; AC, BD, æqualis est, vt proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter se æquales. Quare, vt de angulis C, D, proxime probatum est, anguli C, & EFC, æquales inter se erunt. Est autem EFC, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, æqualis.

Cæterum angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmisso.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutũ, duæ illę rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.



Rectæ linea AB, in rectas AC, BD, incidens, faciat angulum ABD, rectum, & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minus semper inter se distare versus C, D, productas, magis b 12. primi. *vero, si versus E, F, producantur.* [b] *Ducatur enim ex B, ad AC, perpendicularis BG, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli BAC, cadet, ac propterea angulus GBD, pars recti anguli ABD, acutus erit. Demissa ergo ex G, ad BD, perpendicularis GH, cadet quoq; ad partes anguli acuti GBD, ex eodem coroll. angulusq; propterea HGC, pars recti anguli BGC, acutus erit. Rursus ergo ducta perpendicularis HI, ad AC, per idem coroll. ad partes acuti anguli HGC, cadet, ideoq; angulus IHD, pars recti anguli GHD, acutus erit. Atq; ita deinceps in infinitum, si ex I, ad BD, perpendicularis IK, ducatur, & ex K, perpendicularis KC, ad AC, & ex C, ad BD, perpendicularis CD, &c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna post aliã. Quoniã igitur in* c 19. primi. *triangulo ABG, angulus BAG, acutus est, & AGB, rectus* [c] *erit recta AB, maior q̃ BG. & in triangulo BGH, recta BG, angulo recto GHB, opposita, maior q̃ GH; & in triangulo GHI, recta GH, maior q̃ HI: Atq; ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ipsi AB, appiores sunt, maiores ijs, q̃ remotiores sunt, & nunquã finis erit huius decremẽti ppendicularium. Quapropter recta AC, in G, minus distabit à recta BD, q̃ in A, & in I, minus q̃ in G, & in C, minus q̃ in I, &c. quãdoquidẽ perpendiculares AB, GH, IK, CD, &c. quæ ordinatim decrescũt, vt ostẽdimus, minimæ sunt omniũ à punctis A, G, I, C, in rectã BD, cadentiũ, vt ex coroll. propos. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundẽ punctorũ distantias ab eadem recta BD, metiuntur. Constat ergo, rectas AC, BD, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter se distantes, quod est primum.*

d 11. primi. e 17. pri. *Ducatur rursus d ex A, ad AC, perpendicularis AL, quæ angulum obtusum BAE, partietur in rectum EAL, & acutũ LAB, hoc est, cadet inter AB, & AE, eritq; angulus ALB, acutus, cum ambo ABL, ALB, c sint duobus rectis minores, atq; ABL, rectus sit: ac proinde angulus ALF, obtusus erit. Eadẽ ratione perpendicularis LM, ex L, ad BF, ducta, cadet inter LA, LF, facietq; angulum LMA, acutum, & LME, obtusum: Item perpẽdicularis MN, ex M, ad AE, erecta cadet inter ML, ME, angulumq; MNB, acutum, & MNF, obtusum constituet. Atq; ita deinceps in infinitum, si ex N, ad BF, perpendicularis erigatur NO, & ex O, ad AE, perpendicularis OP, & ex P, ad BF, perpendicularis PE, & ex E, ad AE, perpendicularis EF, &c. dnident omnes figillatim angulos obtusos, vnæ post aliam.*

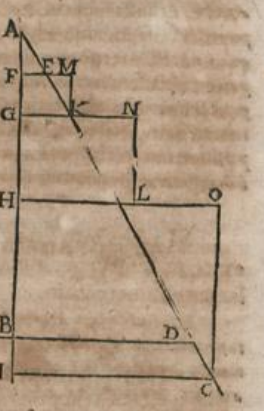
f 19. pri. *Quoniam igitur in triangulo ABL, angulus ABL, rectus est, & ALB, acutus* [f] *erit AL, recta maior, quã AB, & in triangulo ALM, recta LM, angulo recto LMA, oppositæ, maior quam AL, atq; in triangulo LMN, recta MN, recto angulo MLN, oppositæ, maior quam ML: atq; ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ab AB, longius absunt, maiores ijs, quæ propinquiores sunt, in infinitũ. Quamobrem recta AE, in M, magis à recta BF, distabit, quam in A, & in O, magis, quam in M, & in E, magis, quam in O, &c. quandoquidẽ perpendiculares AB, ML, ON, EP, &c. quæ ordinatim augeri ostensum fuit, minimæ sunt omniũ ex punctis A, M, O, E, in rectã BF, cadentiũ, &c. Liquido ergo constat, rectas AC, BD, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter se distantes, quod est secundum. Quod si proteruus quispiã vellet cõtendere, rectã AL, quæ ad AC, perpendicularis est, non concurrere eĩ DB, productæ, constabit multo magis id, q̃ demõstrandũ proponitur. Nã linea DB, vltra punctũ B, multo magis à recta CA distabit, quã in puncto B, quãdoquidẽ AL, ad AC, perpendicularis in infinitũ producta non occurrit eĩ DB, eĩ tamẽ GB, ad eandẽ AC, perpendicularis eĩ DB, concurrat in B, &c.*

Hæc cũ ita sint, nullo negotio demõstrabimus, in superiori figura angulos C, D, esse rectos. Nã si angulus C, verbi gratia, non dicatur esse rectus, erit vel acutus, vel obtusus. Sit primũ acutus. Quoniã ergo recta CA, in rectas AB, CD, incidens efficit angulũ CAB, rectũ, & C, acutũ, minus semper inter se dist, abũt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, h. e. perpendiculares ex CD, in AB, demissæ ordinatim minores fient, quã CA, vt proxime demonstratũ est. Minor ergo est perpendicularis DB, q̃ CA, quod est absurdũ, cũ ponatur æqualis. Non igitur acutus est angulus C. Eademq; ratione neq; angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtusus. Quia igitur recta CA, in rectas CD, AB, incidens facit angulũ CAB, rectũ, & B, obtusum, magis semper inter se distabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, h. e. perpendiculares ex CD, in AB, demissæ continenter augebũtur, vt proximè ostendimus. Maior ergo est perpendicularis DB, q̃ CA, quod est absurdũ, cum æqualis ponatur. Non igitur obtusus est angulus C. Eademq; ratione neq; angulus D, obtusus erit. Sed neq; acutus est ostensus. Rectus igitur vterq; est, quod erat ostendendum.

Ex his demonstratis facile iam Axioma 13. demonstrabimus hoc modo.

V.

Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



Hoc est Axioma 12. apud Euclidem in nostris commentrijs: apud alios est undecimũ, quod demonstrandũ suscepimus. Incidens ergo recta AB, in rectas AC, BD, faciat internos, ad easdemq; partes angulos ABD, BAC, duob. rectis minores. Dico rectas AC, BD, ad partes C, D, productas coire. Sit n. primũ alter angulorũ, nempe ABD, rectus, & alter BAC, acutus. Sumpto in recta AC, pũcto quolibet E, g ducatur ex eo ad rectã AB, perpendicularis EF, & rectæ AF, æqualis accipiatur g 12. primi. *FG, & GH, æqualis ipsi AG, & HI, ipsi AH, ita vt AG, ipsius AF, & AH, ipsius AG, & AI, ipsius AH, dupla sit. Et quoniam si rectæ AE, abscindantur continue æquales rectæ ex AB, aliqua tãdẽ pars vltra B, punctũ cadet, q̃ finita recta AB, per continuã ablationẽ vnius eiusdẽq; quãtitatis absumatur tandẽ quandoquidẽ linea AF, ita multiplicari potest, (q̃ fit, sumendo ipsę in AB, continenter partes æquales) vt tandẽ aliquando finitã lineã AB, superet. Id q̃ Euclid. frequenter assumit in lib. 5. & alijs sequentib. vbi datis duab. magnitudinib. inæqualib. proportionẽ inter se habentib. quibet plerunq; minorem ita multiplicari, donec maiorẽ superet. Fit vt multo magis, si ipsi AF, æqualis abscindatur FG, & toti deinde AG, non autẽ soli AF, æqualis auferatur GH: Itẽ toti AH, nõ autẽ soli AF, vel AG, æqualis dematur HI, & sic deinceps, cadat tandẽ pars aliqua vltra punctũ B. Statuatur ergo punctũ I, terminans tertiã duplã in dato exẽplo, existere vltra punctũ B.*

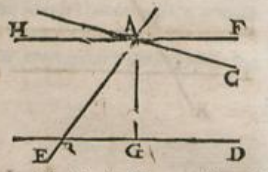
Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipsi AE, & KL, ipsi AK, & LC, ipsi AL, æqualis, ita vt tot sint partes in recta AC, quot in recta AI: ducanturq; rectæ KG, LH, CI, producanturq; vna cũ EF, vt EM, KN, LO, ipsis EF, KG, LH, fiant æquales, ac tandẽ rectæ iungantur MK, NL, OC. Itaq; quoniam duo latera KE, EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF, per h 15. primi. i 4 primi. *constructionem æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulosque ad verticem E, continent æquales, i erit & basi MK,*

basi AF, & angulus M, angulo F, æqualis. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & MK, FG, [c] æquales inter se erunt, & angulus M, quo[q] rectus. Quare cum ad FM, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt, ex constructione, [d] angulos[q] comprehendunt æquales ad K, verticem, [e] erit & basis NL, basi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, æqualis, & angulus G, rectus, vt proxime demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se [f] erunt æquales, & angulus N, quo[q] rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atq[ue] ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autē & angulus B, per hypothesin rect[us] igitur rectæ IC, BD, [g] parallelæ sunt: ac propterea BD producta, rectam AC secabit, supra punctū C; atq[ue] adeo in puncto illo sectionis rectæ AC, BD, coibūt. Quod erat demonstrandū.

c 1. pron.
d 15. primi
e 4. prim.
f 1. pron.
g 28. primi

SIT deinde neuter angulorum ABD, BAC, rectus, sed ABD, quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponuntur minores; [h] sunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE, reliquo BAC. [a] constituatur in A, ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, æqualis: Cadet[q] recta AF, supra rectam AC, cum AF, maiorem angulum cum AB, constituat, quàm AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno BAF, ex eadem parte opposito æqualis est, [b] erunt rectæ AF, BD, inter se parallelæ. Demittatur quo[q] ex A, ad BD, [c] perpendicularis AG, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Eritque angulus quo[q] GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum, ac proinde, vt proxime demonstrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum. Ostensæ enim sunt p trallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proxime demonstratis, coibunt rectæ AF, BD, ad partes H, B, productæ, quod est absurdum, cum parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ, vt proxime demonstrauimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens, faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsæ rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum. Quòd si quando accidat, rectam AC, existere inter AB, & perpendicularem AG, liquido constat, rectas AC, BD, coire, quòd tunc AC, basem BG, trianguli ABG, secaret. Quod vt facilius capias, ducere poteris rectam AC, inter AB, AG.

h 13. primi
a 23. pri.
b 28. primi
c 12. primi.



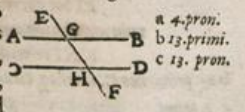
QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optime à nobis demonstratum sit tertiumdecimum hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quam nostrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia posit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29. xxix.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB, CD, recta incidat EF. Dico primum, angulos alternos AGH, DHG, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe AGH, maior. Quoniam igitur angulus AGH, maior est angulo DHG, si addatur communis angulus BGH, *a* erũt duo AGH, BGH, maiores duobus DHG, BGH: At duo AGH, BGH, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur duo DHG, BGH, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes, B, & D, *c* coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes, quod est absurdũ, cũ ponãtur esse parallelæ. Non est igitur angulus AGH, maior angulo DHG: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli, alterni AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis alternis BGH, CHG.

a 4. pron.
b 13. primi.
c 13. pron.



DICO secundò, angulum externum AGE, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito CHG. Quoniam enim angulo BGH, æqualis est alternus CHG, vt ostensum est; & eidem BGH, *d* æqualis est angulus AGE. Erunt anguli AGE, CHG, *e* inter se quoq; æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum BGE, æqualem esse angulo DHG.

d 15. pri.
e 1. pron.

DICO tertiò, angulos internos ad easdem partes, AGH, CHG, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse angulo CHE, interno; si addatur communis AGH, *a* erunt duo AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo AGE, AGH, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. pron.
b 13. pri.

SCHOLIVM.

CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

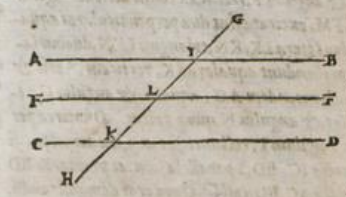
THEOR. 21. PROPOS. 30. xxx.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela ipsi EF, *c* erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursus quia CD, ponitur

c 29. pri.

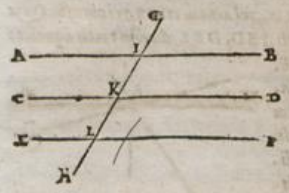
d 29. primi
e 1. pron.
f 27. primi.



ponitur etiam parallela ipsi EF, *d* erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, *e* æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, *f* erũt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igit̃ eidẽ rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandũ erat.

SCHOLIVM.

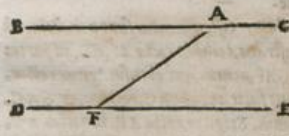
QVOD si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI, non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Constat autem AI, productam coincidere cum BL. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.



QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certe, quando inter se coeunt, vnam eandemq; lineam constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipsi DE. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex pũcto enim A, ducatur recta AF, secans DE, in F, vtcũq;. Quoniam igitur AB, DE, sunt parallelæ, [a] *erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo communi angulo CAF,* [b] *erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis CAF, AFE. Sed hi duo* [c] *æquales sunt duobus rectis, cum sint interni inter duas parallelas AC, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erunt rectis æquales; ac propterea* [d] *in rectum erunt constitutæ ipsæ AB, AC. Quod est propositum.*

a 29. pri.
b 2. pron.
c 29. primi.
d 14. primi.



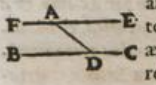
xxxj.

PROBLEMA 10. PROPOSITIO 31.

A Dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallelæ lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, vtcumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, *e* æqualis constituatur EAD. Dico rectam EA, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionem, *f* Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

e 23. primi.
f 27. pri.



SCHOLIVM.

DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quam vna, duci nequeunt: Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipsæ in a 30. primi. *puncto illo eodem, quod est absurdum,* [a] *cum sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ.*

EX hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illũ comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim datæ rectæ A, B, oporteat q; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta DE, quæ rectæ A, sit æqualis, [b] *fiat angulus EDF, angulo C,* [c] *& rectæ DF, rectæ B, æqualis. Deinde per E,* [d] *agatur recta EG, ipsi DF, parallela, & per F, recta FG, ipsi DE, parallela secans EG, in G. Quoniam ergo & latera DF, EG, & DE, FG, parallela sunt, ex constructione;* [e] *parallelogrammũ erit DEGF. Quod cum ex constructione habeat angulũ D, angulo dato C, æqualẽ, & latera DE, DF, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factũ erit, quod proponitur.*

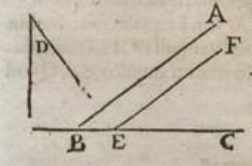
b 23. prim.
c 3. primi.
d 31. primi.
e 35. defin.



PARI ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam proposito lineæ rectam, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propos. 23. pollicitì sumus.

SIT enim datum punctum A, extra rectam BC, & datus angulus rectilineus D, oporteat q; ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea BC, [a] *constituatur in eo angulus CEF, angulo D, æqualis. Si igitur recta EF, per datum punctum A, transeat, factum erit, quod iubetur. Si vero non transeat per A,* [b] *ducatur per A, recta AB, ipsi EF, parallela secans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, æqualem esse. Cum enim parallelæ sint, AB, EF,* [c] *erit angulus CEF, externus interno ABC, ex eadem parte opposito æqualis. Cum ergo & angulus D, angulo F, per constructionem sit æqualis,* [d] *æquales inter se erunt anguli ABC, & D, quod est propositum.*

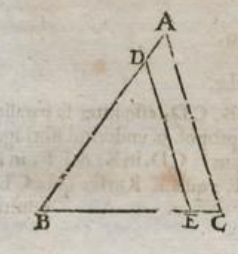
a 23. primi.
b 31. prime.
c 29. primi.
d 1. pron.



NON videtur autem alienum ostendere hoc loco, recte Euclidem propos. 26. vt demonstraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepisse, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certe subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

Sit enim triangulum ABC, sint q; latera AB, AC, latere BC, maiora. Abscindatur BD, æqualis ipsi BC, [c] *ducaturq; DE, ipsi AC, parallela,* [f] *eritq; angulus BED, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, æquales sunt, vterque vtrique, latusq; BC, lateri DB, æquale; cum tamẽ reliqua*

c 31. pri.
f 29. pri.



latera

latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim BE, minus, quam BC, atq; adeo neque lateri AC, neque lateri AB, æquale esse potest; quod hæc latera maiora ponantur latere BC. Causa huius rei est, quod latus BC, in triangulo ABC, adiacet angulis dictis, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur vni angulorum dictorum; nimirum angulo DEB, qui angulo C, æqualis est.

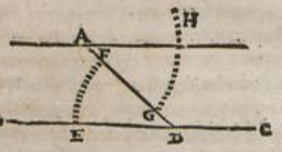


SIT rursus triangulum FGH, sintque iterum latera FG, FH; latere GH, maiora, & FH, maius quam FG. Abscindatur HI, ipsi FG, æqualis, [g] ducaturque IK, ipsi FG, parallela: [h] erit que angulus HKI, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli FGH, duobus angulis H, K, trianguli IKH, æquales, vterque vtrique, latusque FG, lateri IH, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim HK, minus, quam HG, atque adeo neque lateri HG, neque lateri FH, æquale esse potest; quod latus FH, maius etiam ponitur, quàm GH. Ratio huius rei est, quod latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, at latus IH, opponitur angulo K, in triangulo IKH, qui non ponitur æqualis angulo H, sed angulo G, est æqualis, [i] qui maior est angulo H, propterea quod latus FH, maius posuimus latere FG. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

g 31. primi.
h 29. prim.
i 28. primi.

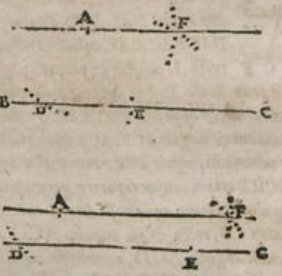
PRAXIS.

SIT ducenda parallela ipsi BC, per punctum A. Ducatur recta AD, vtcunque ad BC, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C. Deinde beneficio circini arcui EF, abscindatur ex arcu altero arcus GH, æqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, [k] erit hæc parallela ipsi BC. Nam alterni anguli EDF, HAG, sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c.

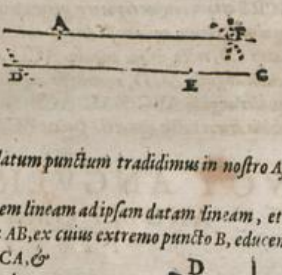


k 27. prim.

ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela lineæ datæ BC, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans BC, in puncto D; & eodem interuallo ex D, sumatur punctum E, in eadem rectæ BC. Deinde eodem interuallo ex A, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Nã ducta recta AF, erit parallela rectæ BC. Quoniam enim propter idem interuallũ assumptũ recta AF, æqualis est rectæ DE; & recta AD, rectæ EF, si ducerentur hæ lineæ; erit AF, oppositæ DE, parallela, vt postea demonstrabimus propos. 34.

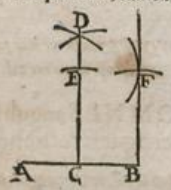


QVOD si punctum A, vicinum fuerit rectæ BC, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in BC, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ BC, nempe E, quod tamen aliquantulum distet à puncto D, (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A: Deinde ex A, interuallo DE, alter arcus descriptus secet priorem arcum in F. Recte namque ducta AF, erit parallela rectæ BC, vt prius; quia recta AF, æqualis est rectæ DE, ob idem interuallum; & rectæ AD, rectæ EF, si hæ rectæ ductæ essent, &c.



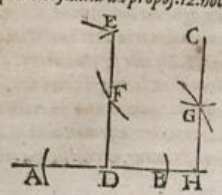
SED longe facillimam rationem ducendi parallelam alicui lineæ per datum punctum tradidimus in nostro Astrolabio lib. 1. lemmate 4.

EX his facile ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta AB, ex cuius extremo puncto B, educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abscindatur rectæ CB, æqualis CA, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in D, ducaturque recta DC, quæ ad AB, perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus. Deinde per B, ducatur ipsi CD, parallela, hoc modo, secundum praxim huius 31. propositionis proxime explicatam. Ex CD, abscissa recta quantacunque CE, describatur ex B, ad interuallum CE, arcus, quem in F, secet alius arcus ex E, ad interuallum CB, descriptus, ducaturque recta BF. Hæc namque ipsi CD, parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet. Igitur cum angulus ACD, [l] æqualis sit interno CBF; sit autem ACD, rectus, erit & CBF, rectus, ac proinde BF, ad AB, perpendicularis erit.



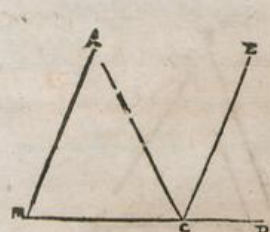
l 29. primi

SIMILITER si data sit recta AB, & punctum extra ipsam C, in extremo sere plan', in quo recta illa iacet ducemus ex C, ad AB, perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam AB, vt polliciti fumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto pũcto D, vtcunq; in linea AB, abscindãtur vtrinq; inter se æquales DA, DB, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in E, ducaturque recta ED, quæ ex praxi propos. 11. ad AB, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipsi DE, parallela, hoc modo. secundum praxim huius propos. 31. Ex dato puncto C, ad quoduis interuallum describatur arcus secans rectam DE, in F, eodemq; interuallo ex D, versus C, alius arcus describatur, quem in G, intersecet alius arcus ex C, ad interuallum DF, delineatus. Recta namq; ducta ex C, per G, secãs AB, in H, parallela erit rectæ DE, ex praxi huius propos. 31. Quare, vt proxime scripsimus, CH, ad AB, perpendicularis erit, sicuti & ED, ad eandẽ perpendicularis est.



THEOR. 22. PROPOS. 32. xxxij.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.



PRODVCATVR in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primò, angulum externum ACD, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. b Ducatur enim ex C, linea CE, parallela rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, a erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, b erit angulus externus DCE, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus ACE, & A, c fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE; ACE, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.

b 31. primi.
a 29. primi.
b 29. primi.
c 2. pron.

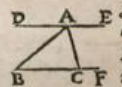
DICO secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, vt ostensum d 2. pron. fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis ACB, d erunt duo anguli ACD, ACB, æquales e 13. primi. tribus A, B, & ACB: Sed duo ACD, ACB, e æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, ACB, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunque trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

d 2. pron.
e 13. primi.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo ACD, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodem externo angulo ACD, angulo A, interno, quandoquidem angulus ACD, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo ACB, &c.

OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei a 31. primi. *demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum ABC, & per punctum A,* a *ducatur rectæ BC, parallela DE. Quoniam igitur* b *anguli alterni DAB, & ABC, æquales sunt; si addantur æquales EAC, & ACB, (sunt enim & hi alterni)* c *erunt duo anguli DAB, EAC, duobus ABC, ACB, æquales. Addito ergo communi angulo BAC,* d *erunt tres anguli DAB, BAC, CAE, æquales tribus angulis ABC, BAC, ACB. Sed anguli DAB, BAC, CAE, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. Igitur & in triangulo ABC, anguli ABC, BAC, ACB, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum ACF, si latus BC, sit protractum, æqualem esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam enim anguli ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit.* e *Sunt autem & anguli ACF, ACB duob. rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ACF, ACB, æquales. Dempto igitur communi angulo ACB,* f *remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.*



b 29. prim.
c 2. pron.
d 2. primi.
c 13. primi.
f 3. pron.

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CD, recta, sitque angulus ACD, æqualis duobus angulis ABC, BAC. Dico rectas BC, CD, in directum iacere. Cum enim angulus ACD, æqualis sit angulis ABC, BAC, si addatur communis angulus ACB, g *erunt anguli ACD, ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC, BAC, ACB,* h *æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACD, ACB, duobus erunt rectis æquales.* i *Quare BC, CD, vnam lineam rectam constituunt.*

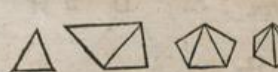
g 2. pron.
h 32. prim.
i 14. primi.

QVOT ANGVLIS RECTIS ÆQVIVALEANT ANGVLI OMNES INTERNI CVIVSCVNQVE FIGVRÆ RECTILINEÆ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, id est duobus rectis; Anguli vero secundæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis tribus rectis. sex videlicet rectis, Et sic de reliqui. Eum autem locum quælibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ superficiem non concludunt, vnde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ constitutionem requiruntur. Ex quo fit, triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de aliis figuris est habendum. Itaq; figura contenta 20. lateribus, cum sit decimaoctaua, habebit 20. angulos æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ita quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquialebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineæ rectæ, solum ad duos propinquos angulos suos possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituant omnes angulos rectilineæ figuræ propositæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales sint duobus rectis; perspicuum est, omnes angulos figu-

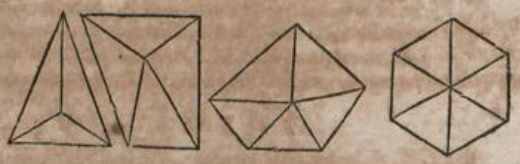


los figuræ cuiuſuis rectilineæ æquales eſſe bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc eſt, quot a ipſa eſt inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeſte perſpicitur in propoſitis figuris.

SECVNDVS modus, quo ſcitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic eſt.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis, æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipſa continet lateta, ſeu angulos.

HOC eſt, anguli cuiuslibet trianguli æquales ſunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20. latera æquialebunt bis 20. angulis rectis minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonſtratio autem huius rei talis eſt. Si à quouis puncto intra figuram aſſumpto ad omnes angulos recta lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, anguloſue figura ipſa continet. Cum igitur anguli cuiuſcunq; trianguli [a] æquales ſint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram aſſumptum conſiſtentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propoſitæ, vt conſtat. Quare ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos figuræ propoſitæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum aſſumptum conſtitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot ſint, circa dictum punctum exiſtentes æquales 4. rectis tantummodo, vt collegimus ex propoſ. 15. Quamobrem anguli cuiuſque figuræ bis tot rectis ſunt æquales, ablatis quatuor, quot ipſa figura continet angulos, ſeu latera, quod eſt propoſitum.



a 32. primi.

EX hoc porro ſecundo modo liquet, ſi ſingula latera figuræ cuiuslibet rectilineæ producantur ordinatim verſus eandē partem, omnes angulos externos æquales eſſe quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, [b] æquantur duobus rectis; atq; adeo omnes externi vna cum omnib. internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, anguloſue figura continet. Sūt autem & ſoli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonſtrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantum rectis æquales, qui nimirum deſunt internis angulis, vt interni & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propoſitam ambiunt. Exemplum. In triangulo quouis, anguli interni & externi ſimul æquales ſunt ſex rectis. Cum igitur interni [c] duobus ſint rectis æquales, erunt ſoli externi æquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni ſimul æquales ſunt octo rectis. Cum igitur interni ſoli æquales ſint quatuor rectis, vt oſtendimus, erunt & ſoli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, ſeu quinquangulo, anguli interni & externi ſunt æquales 10. rectis. Quoniam vero interni adæquantur ſex rectis, vt demonſtrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appoſitis figuris conſpiciuntur. Eademq; eſt ratio in aliis omnibus figuris.

b 13. primi.



c 32. prim.

EX CAMPANO.

SI pentagoni ſingula latera producantur in partem vtramque, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus ſolum rectis.

IN pentagono ABCDE, latera in vtramque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinq; angulos F, G, H, I, K, æquales tantum eſſe duobus rectis. In triangulo enim BHK, cū latus HB, ſit protractum ad F, [d] erit externus angulus FBK, duobus internis, & oppoſitis H, K, æqualis. Eadē ratione in triangulo AIG, erit externus angulus FAG, æqualis duobus internis, & oppoſitis I, G. Quare duo anguli FBA, FAB, æquales ſunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, [e] erunt tres anguli A, B, F, trianguli ABF, æquales quinque angulis F G H I K. Sed anguli A, B, F, trianguli ABF, [f] æquales ſunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus ſunt rectis æquales. Quod eſt propoſitum.



d 32. primi

e 2. pron.

f 32. primi.

COROLLARIVM I.

Ex hac propoſ. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis cuiuſque alterius trianguli ſimul ſumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi [g] æquales ſunt duobus angulis rectis. Vnde ſi duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaque erunt ipſa triangula.

g 32. primi.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Iſoſcele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehenſus rectus fuerit, quemlibet reliquorum eſſe ſemirectum. Nam reliqui duo ſimul conficiunt vnum rectum, [h] cum omnes tres ſint æquales duobus rectis. & tertius ille ponatur rectus. Quare [i] cum duo reliqui inter ſe ſint æquales, erit quilibet eorum ſemirectus. At vero ſi angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtuſus, quemlibet aliorum eſſe ſemirecto minorem. Reliqui enim duo ſimul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem eſſe ſemirecto. Quoniam reliqui duo ſimul maiores erunt vno recto, &c.

h 32. prim.

i 5. primi.

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque eſt, quemuis angulum trianguli æquilateri eſſe duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, [k] quibus æquales ſunt tres anguli trianguli æquilateri, diuiſi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

k 32. primi.

COROL-

COROLLARIVM IV.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.

b. 1. primi. c 9. primi.



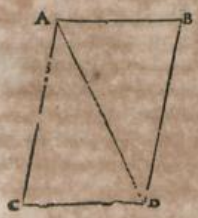
PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus ABC. Super rectam AB,[b] constituatur triangulum æquilaterum ABD. Et quia per corollarium 3. angulus ABD, facit duas tertias partes anguli recti ABC; erit angulus CBD, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo ABD, [c] bifariam, per rectam BE, erit vterque angulus ABE, EBD, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus ABC, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.

xxxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

RECTÆ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

d 29. prim. a 4. primi. b 27. prim.



SINT rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ AC, BD. Dico AC, BD, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta AD. Quoniam igitur AD, incidit in parallelas AB, CD, *d* erunt anguli alterni BAD, CDA, æquales. Quare cum duo latera BA, AD, trianguli BAD, æqualia sint duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; *a* erunt bases BD, AC, æquales, & angulus ADB, angulo DAC, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas AC, BD, *b* erunt AC, BD, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum

SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas, ad easdem partes debere coniungi, vt ipsæ coniungentes sint & æquales & parallelæ. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes lineæ essent parallelæ vnquam, sed perpetuo se mutuo secarent, neque essent æquales, nisi raro admodum, vt ex sequenti propositione constabit.

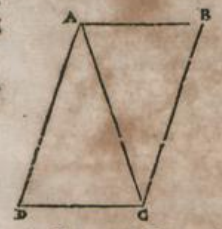
xxxiv.

THEOR. 24. PROPOS. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso & latera, & anguli: atque illa bifariam secat diameter.

SIT parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita AB, DC, inter se esse æqualia, nec non latera opposita AD, BC. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse; nec non & angulos oppositos DAB, & DCB: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipsum bifariam secari.

c 29. primi. d 29. primi. e 26. primi. a 2. pron. b 4. primi.



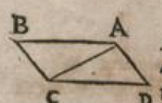
Cum enim AB, DC, sint parallelæ, *c* erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Rursus quia AD, BC, sunt parallelæ, *d* erunt & anguli alterni BCA, DAC, æquales. Itaq; cum anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis DCA, DAC, trianguli ADC, vterque vtrique, & latus AC, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; *e* erit recta AB, æqualis oppositæ rectæ DC, & recta BC, oppositæ rectæ AD, quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis BAC, DCA, addantur æquales anguli DAC, BCA, toti quoque anguli BAD, BCD, *a* fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam ostendimus; *b* erunt triangula ABC, CDA, æqualia, ideoque parallelogrammum ABCD, diuisum erit bifariam à diametro AC, quod tertio loco proponebatur, Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma à diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo dunt axat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro; At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

c 8. primi. a 4. primi.



SINT in quadrilatero ABCD, latera opposita AB, DC, æqualia; Itẽ opposita latera AD, BC. Dico ABCD, esse parallelogrammũ; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Itemque lineas AD, BC. Ducta enim diametro AC, erunt duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & basis AB, communis. Igitur [c] erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera AB, BC, æqualia sunt lateribus CD, DA, vtrumque vtrique, & anguli B, D, ostensi æquales; [a] erit angulus alterno

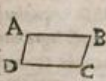
gulus BAC, angulo DCA, alterno æqualis, & angulus BCA, alterno angulo DAC. Quare [a] erunt AB, & DC, parallelæ; Item AD, & BC, quod est propositum. a 27. primi.

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34, vt patet.

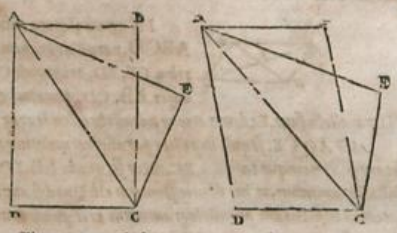
Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, anguli oppositi A, & C, æquales: Item oppositi anguli B, & D. Dico ABCD, esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas: Itemque lineas AD, BC. Nam si æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D: [b] erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, vt ad propos. 32. demonstratum fuit, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare AD, BC, [c] parallelæ sunt. Eadem ratione erunt AB, DC, parallelæ. Erunt enim duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiam manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus. b 2. prop. c 28. primi.



HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest à diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum esse ostensum est: in quo, ducta diametro AC, constituatur super AC, triangulo ABC, æquale triangulum AEC, inuerso ordine, ita vt latus CE, sit æquale lateri AB, & AE, ipsi CB, vt in scholio propos. 22. docuimus: fiatque trapezium AECD. Quoniam vero triangulum ABC, triangulo ADC, æquale est, [d] quod diameter AC, bifariam secet parallelogrammum DB: Erit & triangulum AEC, triangulo ADC, æquale: Ac proinde trapezium AECD, bifariam diuidetur à diametro AC. d 34 prim.



QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraque diametro, illud parallelogrammum erit, vt ostendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas: Itemque AD, BC. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti: [e] erunt AD, BC, parallelæ. Eodem modo erunt AB, DC, parallelæ: atque adeò ABCD, parallelogrammum, quod est propositum. e 28. primi.

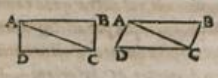


HINC rursum constat, Quadratum, & altera parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

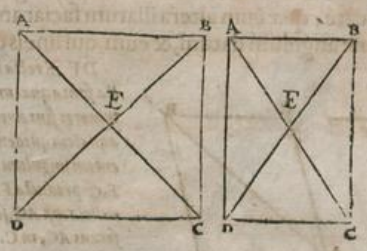
HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari à diametro: Angulos vero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus ABCD, in quo diameter AC. Quoniam igitur duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia sunt duobus lateribus DA, AC, trianguli DAC, vtrumque vtrique, & basis BC, basi DC, (sunt enim hæ figuræ æquilateræ) [f] erunt anguli BAC, DAC, æquales. Quare angulus BAD, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari à diametro. f 8. primi.



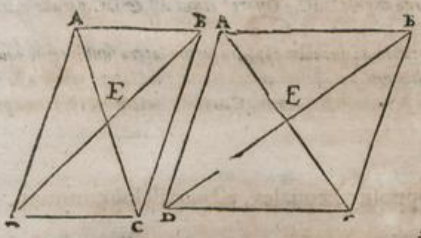
SIT rursus Altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, in quo diameter AC. sitque maius latus AB. Quoniam igitur in triangulo ABC, latus AB, maius est latere BC, [g] erit angulus BCA, maior angulo BAC. Est autem angulus BCA, [h] æqualis angulo DAC, alterno: quod BC, AC, parallelæ sint. (Est enim ABCD, ostensum esse parallelogrammum.) Igitur & angulus DAC, maior erit angulo BAC. Atque propterea angulus BAD, inæqualiter diuiditur à diametro AC. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam à diametro secari, non autem & angulos. g 18. primi. h 29. prim.



EODEM fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales esse; At vero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem vero eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius ABCD, in quo diametri AC, BD, quas dico esse æquales. Cum enim duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus AB, AD, trianguli BAD, vtrumque vtrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia vterque rectus: [i] erit basis AC, basi BD, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt. i 4 primi.



SIT



a 29. prim.
b 24. prim.

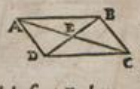
SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, ABCD, in quo diametri AC, BD; sit q, angulus BAD, maior; ABC, minor. Non enim æquales sunt, quia alias, vterq, esset rectus, cũ ambo [a] æquales sint duobus rectis; q, est absurdũ, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum BD, maiorem esse diametro AC. Quoniam enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, æqualia sunt duobus lateribus AB, BC, trianguli ABC, vtrumque vtrique, & angulus BAD, angulo ABC, maior existit; [b] erit basis BD, maior basi AC, quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ AC, BD, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales AB, DC, quia non ad easdem partes ipsas coniunguntur, vt perspicuum est.

c 29. primi.
d 34. prim.
e 26. primi.

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli AED, [c] æquales sint alternis angulis ECB, EBC, trianguli BEC, vterque vtrique; & [d] latus AD, æquale lateri BC, opposito in parallelogrammo ABCD, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; [e] Erit & AE, rectæ rectæ CE, & rectæ DE, rectæ BE, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.



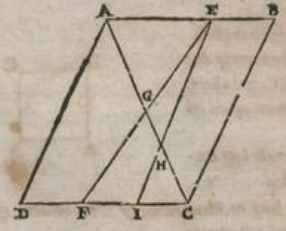
f 15. prim.
g 4. primi.
h 27. prim.

IN quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, se mutuo bifariam diuidant in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad verticem E, [f] æquales quoque; [g] erunt & bases AB, CD, æquales, & angulus ABE, angulo alterno CDE, æqualis. [h] Quare rectæ AB, CD, parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur AD, CB, Parallelogrammum ergo est ABCD.

ITAQVE, si quis expedite parallelogrammum describere velit, ducat duas lineas AC, BD, vtcunque se in E, intersecantes. Si namque tam EA, EC, inter se, quam EB, ED, inter se æquales abscindet, constituent ductæ AB, BC, CD, DA, parallelogrammum, vt hic demonstratum est. Quod si anguli ad E, sint recti, & omnes quatuor rectæ EA, EC, EB, ED, inter se æquales, constitutum parallelogrammum erit quadratum, propterea quod octo anguli ad A, B, C, D, sunt semirecti, vt facile demonstrabitur, per 5. & 32. huius.

HVC quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.



i 29. primi.
k 15. primi.
l 26. prim.
m 4. primi.
n 2. pron.
o 34. primi

IN parallelogrammo ABCD, diametrum AC, bifariam secet recta EF, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam enim angulus EAG, [i] æqualis est angulo alterno FCG, & [k] angulus EGA, angulo FGC. Est autem & latus AG, lateri CG, æquale, per hypothesin, quæ ambo æqualibus angulis adiacẽt; [l] erunt & latera EG, FG, æqualia. Quare cum latera AG, GE, æqualia sint lateribus CG, GF, & anguli quoque contenti æquales; [m] erunt triangula AGE, CGF, æqualia. Addita igitur communi quantitate BCGE, [n] erit triangulum ABC, trapezio BCFE, æquale: Sed triangulum ABC, [o] dimidium est parallelogrammi ABCD. Igitur & trapezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoque recta EF, parallelogrammum bifariam secat.

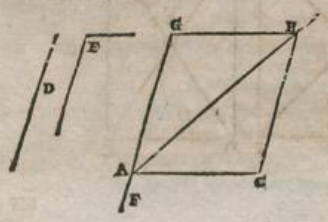
p 10. prim.

SECETiam EF, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum AC, bifariam secari in G. Si enim diameter AC, non bifariam diuiditur in G, [p] diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta EHI. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, EICB, trapezium dimidium parallelogrammi ABCD, atque adeo æquale trapezio EFCB, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur AC, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum.

HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quæ parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & à puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere AB, ducenda est recta EF, per G, punctum, in quo diameter AC, bifariam diuiditur; & sic de aliis punctis.

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non iniucundum, videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.



q 23. prim.
r 3. primi.
s 31. primi

DVÆ rectæ infinitæ AB, AC, contineant angulum BAC, sitque data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & BAC, minores sint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas AB, AC, collocare rectã æqualem quidem rectæ D, cum alterutra vero illarum, nimirum cum AC, faciẽtem angulum æqualem angulo dato E. [q] Fiat angulus CAF, æqualis angulo E, & producta FA, ad G, [r] sit AG, æqualis rectæ D; & per G, [s] ducatur GB, parallela ipsi AC, secans AB, in B. Deinde per B, ducatur BC, parallela ipsi AG, secans AC, in C. Dico rectam BC, collocatam inter rectas AB, AC, æqualem esse rectæ D, angulumque BCA, angulo E. Cum enim parallelogrammum sit, per con-

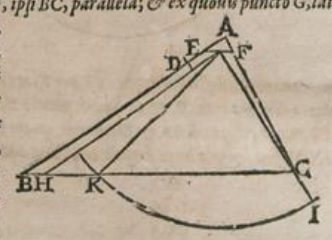
per constructionem, ACBG, [a] erit recta BC, rectæ GA, æqualis: At GA, æqualis est, per constructionem, rectæ D. Igitur & BC, rectæ D, æqualis erit. Rursus quia angulus BCA, angulo alterno CAF, æqualis est; & eidem angulo CAF, æqualis est, per constructionem, angulus E; erunt anguli E, & BCA, æquales. Quod est propositum. Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum ABC, si anguli BAC, & BCA, æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos. 17. vel 32.

a 34. prim.
b 29. primi

SCHOLIVM II.

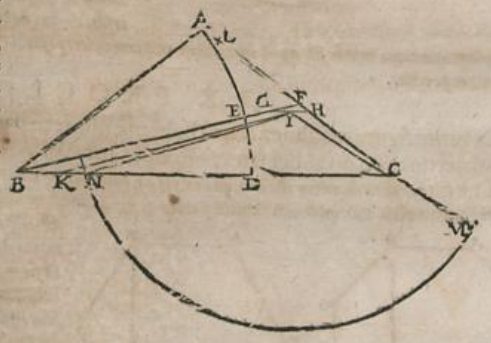
Non alienum erit à nostro instituto, adjicere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionum demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad prop. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non sit æquilaterum, vel Isosceles habens basim vtrouis latere minorem, non solum à duobus punctis basis constitui possunt duæ rectæ intra triangulum, quæ simul sumptæ maiores sint duobus lateribus simul sumptis, vt à Proclo in triangulu, rectangulis, vel obtusangulis ostensum est ad propos. 21. sed etiam æquales.

SIT enim primum triangulum ABC, habens latus AB, latere AC, maius, sitque BD, dimidium vtriusque lateris AB, AC. simul: Sumpto autem inter A, D, puncto E, vtcunque, agatur EF, ipsi BC, parallela; & ex quouis puncto G, lateri AB, parallela ducatur GH, rectaque iungatur GC, Et quoniam EA, AF, [c] maiores sunt, quam EF: Item CF, FG, maiores, quam GC: erunt EA, AC, FG, simul maiores, quam EF, GC, simul: ablataque communi FG, erunt EA, AC, simul maiores, quam EG, GC, simul: ac proinde multo maiores, quam GC, sola. Producatur ergo GC. fiat [d] GI, ipsis EA, AC, simul æqualis. Quia vero BE, maior est, quam vtraque EA, AC, simul, quod BE. superet BD, dimidium vtriusque BA, AC, simul, at EA, AC, simul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraq; DA, AC, simul: erit quoque BE, maior, quam GI, quæ ipsis EA, AC, simul est æqualis. Cum igitur [d] ipsi BE, æqualis sit GH, in parallelogrammo BEGH: erit quoque GH, maior, quam GI. Si igitur centro G, & interuallo GI, circulus describatur, secabit is rectam GH, ac propterea & ipsam CH, prius secabit in K. Connectatur GK. Dico vtramque GH, GK, simul æqualem esse vtrique AB, AC, simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam GH, ipsi BE, æqualis est, & GI, hoc est, GK, ipsis EA, AC, simul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E, remotius à D. sumptum fuerit, & punctum G, à puncto E: hoc est, prout tam AD, quam EF, infinitis in punctis secari potest.



c 20. prim.
d 34. prim.

SIT deinde Isosceles ABC, habens basim BC, vtrouis latere maiorem. Descripto ex centro B, per A, arcu AD, secante rectam BC, in D, ducatur vtcunque recta BF, secans arcum in E, & latus AC, in F: & in EF, per quoduis punctum G, ipsi BC, parallela agatur GH, & per quodcunque eius punctum I, ipsi BF, parallela ducatur IK, rectaque iungatur IC: atque ipsi EG: æqualis abscindatur AL. Erit igitur BG, ipsis AB, AL, simul æqualis, at LC, minor quam BE, sine AB, & ob id multo minor, quam BG. Et quia ipsi BG, [e] æqualis est IK, in parallelogrammo BGIK: erit quoque IK, ipsis AB, AL, simul æqualis, maior autem, quam LC. Itaque [f] quia GF, FH, maiores sunt, quam GH: & HC, HI, maiores, quam IC: erunt GF, FC, HI, simul maiores, quam GH, IC: & ablata communi HI, erunt reliquæ GF, FC, simul maiores, quam GI, IC, simul: ac proinde apposita communi BG. sient BF, FC. simul maiores, quam BG, GI, IC, simul. Sed ipsis BF, FC, [g] maiores sunt BA, AC, simul. Ergo multo maiores erunt BA, AC, simul quam BG, GI, IC, simul. Cum ergo BG, ipsis BA, AL, simul æqualis sit, erit reliqua LC, maior, quam reliquæ GI, IC, simul, ac proinde multo maior, quam IC, sola. Ponatur IM, (producta IC,) ipsi LC, æqualis. Et quia IK, ostensa est maior, quam LC, hoc est, quam IM: si ex centro I, per M, arcus circuli describatur, secabit is rectam IK, ac proinde prius ipsam CK, secabit in N. Connectatur IN. Dico vtramque IK, IN, simul æqualem esse vtrique AB, AC. simul. Id quod ex constructione patet. Est namque IK, ipsis AB, AL. simul æqualis, & IN, hoc est, IM, ipsi LC, æqualis. Atque hoc infinitis modis fieri potest: cum BF, infinitis modis duci possit: & tam EF, quam GH, infinitis modis secari.



e 34. primi
f 20 primi.
g 20. prim.

CONSTAT autem, si intra idem triangulum ABC, ducantur duæ rectæ, quæ rectas HG, GK, in priori triangulo, vel rectas KI, IN, in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus AB, AC, simul sumptis: quippe quæ [h] maiores forent rectis HG, GK, in priori triangulo, vel rectis KI, IN, in posteriori.

h 21. prim.

AT vero in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim vtrouis latere minorem, non posse intus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim ABC, cuius duo latera AB, AC, æqualia, & basis BC, non maior, sed vel æqualis, vel minor; ita vt angulus A, maior non sit, quam angulus B, vel C, [i] sed vel æqualis, vel minor: constituantur duæ rectæ DE, EF, vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus AB, AC, simul sumptis. Producatur enim DE, secans latus AC, in G, iungaturque recta GB. Quoniam igitur [k] duo anguli ABC, & C, æquales sunt, est que ABC, maior angulo GBC, erit quoque C, maior angulo GBC. Est [l] autem & angulus GDB; angulo C, maior, externus interno. Igitur multo maior erit angulus GDB, angulo GBC; [m] ac proinde latus GB, latere GD, maius erit. Quia vero [n] angulus BGA, maior est angulo C, externus interno; angulusque C, vel æqualis est angulo A, vel maior, vt ostendi-

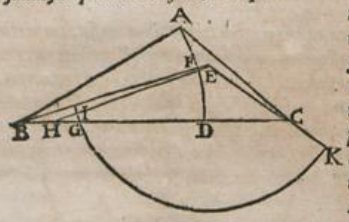


i 5. vel 18. primi.
k 5. primi.
l 16. primi.
m 19. prim.
n 16. prim.

mus: erit

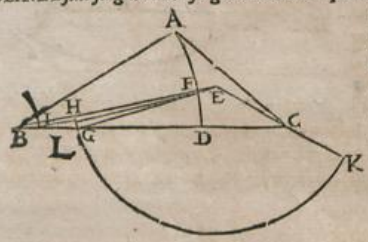
a 19. primi. mus: erit quoque angulus BGA, angulo A, maior. Quare [a] latus AB, latere GB, maius erit: Sed recta GB, ostensa est maior, quam GD, ac proinde multo maior, quam DE. Igitur latus AB, multo etiam maius erit, quam DE. Eadem ratione, si FE, producatur secans AC in H, iungaturque recta HB, ostendemus latus AB, ac proinde & AC, maius esse, quam FE. Quocirca latera AB, AC, simul maiora sunt duabus rectis DE, EF, simul sumptis. Quod si FE, producta secaret latus AB, demonstraremus eodem modo, latus AC, maius esse recta EF.

IAM vero, si admirabile videatur iis, qui Geometriæ ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interiores, quæ simul sumptæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius sane erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singulæ singulis lateribus maiores sint, vel æquales. Sint ergo primum constituendæ singulæ lineæ singulis lateribus maiores in triangulo ABC, cuius latus AB, minus non sit latere AC, at latus BC, vtrouis latere AB, AC, maius. Descripto ex centro B, arcu circuli AD, sumatur quoduis punctum E, inter arcum AD, & latus AC, ducaturque recta BE, secans arcum in F; ita vt BE, maior sit, quam BF, hoc est, quam BA,



b 21. primi. iungaturque EC. Quia vero [b] BE, EC, simul minores sunt, quam AB, AC, simul, estque BE, maior, quam AB, erit EC, multo minor, quam AC. Producta igitur EC, fiat EK, ipsi AC, æqualis, ac propterea minor, quam EB; describaturque ex E, per K, arcus circuli, qui rectam EB, secabit, ac proinde & ipsam CB, prius secabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta EH, secans arcum in I, factumque erit, quod proponitur. Nam BE, maior est, quam BA, & EH, maior, quam EI, hoc est, quam EK, vel AC.

DEINDE sint singulæ lineæ singulis lateribus æquales constituendæ intra idem triangulum: fiatque eadem constructio, dempta linea EH, sed arcus KG, secet rectam EB, in H. Et latus BA, latere AC, ponatur maius, eritq; BE, recta maior, quam AB, cum maior sit, quam BF, quæ æqualis est ipsi AB. Sumpta igitur EI, æquali ipsi AB, cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem EB, maior est, quam AB. & EH, minor, quam AB. Ex E, per I, describatur arcus circuli secans BC, in L, iunganturque rectæ EL, EG: factumque erit, quod proponitur. Nam EL, ipsi EI, hoc est, ipsi AB, æqualis est, & EG, ipsi EK, hoc est, ipsi AC.

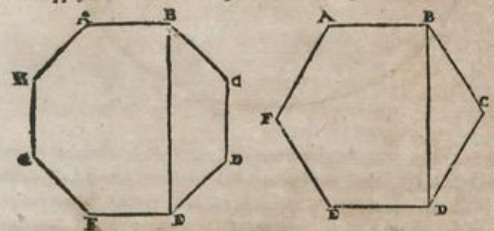


PRÆTER hæc demonstrat Pappus, intra eadem, quæ diximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionem datam, quæ tamen dupla proportione minor sit: quod incredibile cuipiam videri possit. Quæ res hoc loco demonstrari non potest, cum ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex vtraq; parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono ABCDEF, latera opposita erunt AB, ED: quoniam tam ad partes A, & E, duo sunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono vero ABCDEFGH, latera opposita erunt AB, FE, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quam ad partes B, & E. Et sic in aliis figuris æquilateris parium laterum, ex vtraq; parte oppositorum laterum erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinq;, &c. Dico igitur quælibet latera opposita esse parallela; AB, nimirum ipsi ED, in hexagono; & AB, ipsi FE, in octogono, & sic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono BD, & in octogono BE. Et quoniam, vt ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales; Sunt autem anguli BCD, CBD, CDB, trianguli BCD,



c 32. primi. [c] duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli ABD, EDB, duobus rectis æquales erunt. Quare [d] parallelæ erunt AB, & ED.

d 28. prim. Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri BCDE, æquales quatuor rectis Igitur duo reliqui anguli ABE, FEB, duobus erunt re-

e 28. prim. ctis æquales, [e] atq; adeo AB, FE, parallelæ erunt. Eodem modo demonstrabitur, in omnibus aliis figuris huiusmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppositorum laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam in decagono ausfert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis: At quinq; anguli decagoni æquales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis æquales: At sex anguli totius figuræ æquales sunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, vt ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea q; in definitionibus, Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

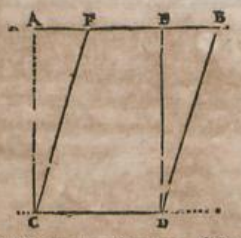
THEOR. 25. PROPOS. 35.

XXXV.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

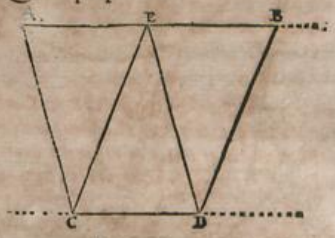
INTER

INTER duas parallelas AB, CD, super basi CD, existant duo parallelogramma CDEA, CDBF. (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, vt in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadet enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA, recta AE, *a* æqualis est rectæ CD, oppositæ; & eidem CD, æqualis est FB, in parallelogrammo CD, BF, opposita; Erunt AE, *b* FB, inter se æquales. Dempta igitur communi FE, *c* remanebit AF, ipsi EB, æqualis: *d* Est autem & AC, ipsi ED, oppositæ æqualis in parallelogrammo CDEA; *e* & angulus BED, angulo FAC, externus interno. *f* Quare triangulum FAC; triangulo BED, æquale erit. Addito igitur communi trapezio CDEF, *g* fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Quod est propositum.



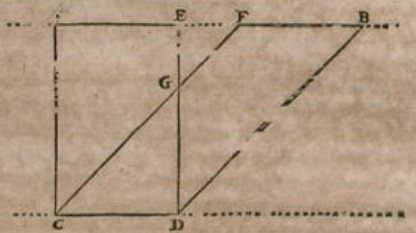
a 34. prim.
b 1. pron.
c 3. pron.
d 34. prim.
e 29. primi
f 4. prim.
g 2. pron.

CADAT secundo punctum F, in punctum E. Dico rursus, parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia esse. Erunt enim, vt prius, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC; atque adeo *h* triangula, EAC, BED, æqualia. Addito igitur communi triangulo CDE, *i* fient parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.



h 4. prim.
i 2. pron.

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta CF secet rectam DE, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ AEFB, sunt æquales; si communis addatur EF; *k* erit tota AF, toti EB, æqualis, nec non & anguli BED, FAC, æquales erunt; atque adeo *l* triangulum FAC, triangulo BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo EGF, *m* remanebit trapezium AEGC, trapezio FGDB, æquale. Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.



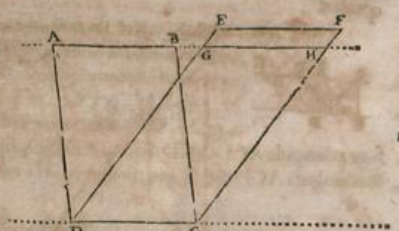
k 2. pron.
l 4. primi.
m 3. pron.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS facile hanc propositionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia super eandem basin, ad easdemque partes constituta, erunt inter easdem parallelas.

SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, CDEF, super eandem basin CD, & ad easdem partes. Dico rectam AB, productam in directum iacere ipsi EF, & propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias enim AB, producta vel cadet infra EF, vel supra. Cadat primo infra, qualis est AH. Erit igitur parallelogrammum CDGH, n æquale parallelogrammo ABCD; Ponitur autem eidem parallelogrammo ABCD, æquale parallelogrammum CDEF. Quare parallelogramma CDEF, CDHG, æqualia erunt, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet AB, infra EF.



n 35 primi.

CADAT secundo AB, producta supra EF. Cadet igitur FE, protracta infra AB. Quare, vt prius, erunt parallelogramma ABCD, CDHG, æqualia, totum & pars, quod est absurdum. Idem absurdum consequeretur, si CF, DE, producerentur vsq; ad AB, protractam. Eademque demonstratio conueniet omnibus casibus, qui occurrere possunt, hoc est, siue punctum E, sit vltra B, siue non, vt perspicuum est. Non ergo cadet AB, supra EF; sed nec infra, vt demonstratum est; ergo producta in directum iacet ipsi EF; ac proinde parallelogramma ABCD, CDEF, in eisdem sunt parallelis.



THEOR. 26. PROPOS. 36. XXXVI.

PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta; inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, super æquales bases CE, HD, inter easdem parallelas AB, CD. Dico ea esse æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad easdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, *o* æqualis est GB, in parallelogrammo GHDB, opposita; erunt CE, GB, *p* æquales inter se. Sunt autem & parallelæ, per hypothesin. Quare & CG, EB, ipsas coniungentes, *q* parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque cum parallelogramma ACEF, GCEB, sint inter easdem parallelas, & super eandem basin CE, *r* erit parallelogrammum ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rursus quia parallelogramma GCEB, GHDB, sunt inter easdem parallelas, & super eandem basin GB, erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, *s* inter se æqualia erunt. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, &c. Quod ostendendum erat.



o 34. prim.
p 1. pron.
q 33. primi.
r 35. primi.
s 35. primi.
t 1. pron.

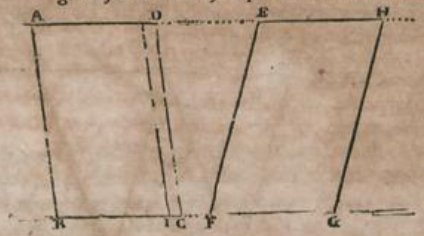
SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis duplex est, ad hunc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia super bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.



SINT primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, super bases æquales BC, FG, & ad easdem partes constituta. Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam alias cadet aut infra EH, aut supra. Quo posito sequitur, totum & partem esse æqualia, quemadmodum in conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facile commonstrat. Intelligenda sunt autem bases æquales datæ in eadem linea recta BG.



a 3. primi.
b 31. primi.
c 36. primi.

SINT secundo eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas AH, BG. Dico bases BC, FG, esse æquales. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior [a] abscindatur BI, æqualis rectæ FG, & [b] ducatur IK, parallela ipsi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK, [c] æquale parallelogrammo EFGH, & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod est absurdum. Non ergo BC, maior est, quã FG. Eadẽ ratione neq; minor erit. Quare bases BC, FG, æquales sunt.

SEQVENS quoq; theorema facile hinc demonstrabitur.

SI duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra si duo parallelogramma sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in posteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, sitque basis BC, maior basi FG.

d 3. primi. *Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius esse.* [d] *Auferatur enim recta BI, ipsi FG, æqualis,* [e] *ducaturque IK,*
e 31. primi. *ipsi AB, parallela. Erunt ergo* [f] *parallelogramma BK, FH, supra æquales bases BI, FG, æqualia. Cum igitur BD,* [g] *maius sit,*
f 36. primi. *quam BK, erit idem BD, maius, quam FH.*
g 9. pron. *SINT rursum parallelogramma BD, FH, inæqualia, & BD, maius. Dico basim BC, maiorem esse basi FG. Nam si*
h 36. primi. *foret æqualis,* [h] *essent parallelogramma æqualia, quod est absurdum, cum BD, ponatur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum FH, maius, quam BD, vt proxime ostendimus, quod multo magis est absurdum, cum BD, maius ponatur, quam FH. Basis ergo BC, cum neque æqualis sit ipsi FG, neque minor, erit maior, quam FG, quod est propositum.*

XXXVII. THEOR. 27. PROPOS. 37.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, sint constituta duo triangula ACD, BCD. (Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit.) Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim [i] ducatur DE, parallela rectæ AC, & DF, parallela rectæ BC. [k] Erunt igitur parallelogramma ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim super eandem basin CD, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia



i 31. primi.
k 35. prim.
l 34. primi
m 7. pron.

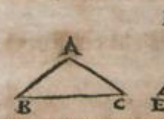
sunt triangula ACD, BCD; [l] quod AD, BD, diametri bifariam secent parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD, BCD, [m] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula ABC, DEF, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, & angulus A, maior angu-

n 23. prim. *lo EDF, sintque primum hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I: fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, versus angulum acutum DFE. Nam sem-*

o 17. prim. *per alter angulorum DEF, DFE, acutus erit* [o] *cum ambo minores sint duobus rectis.*

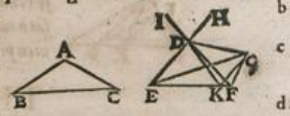


p 3. primi
q 13. primi.
r 3. pron.
s 15. primi.
t 5. primi.
u 32. primi.
x 7. pron.
y 27. primi
z 37. primi.
a 4. primi.

P & recta DG, rectæ DF, seu AC; ducãturque rectæ EG, GF, cadet [q] *semper EG, supra F, ob angulum acutum DFE, vt ad finem scholij propos. 24. ostendimus. Quoniam igitur duo anguli A, & EDF, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus EDG, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli EDG, GDH,* [q] *duobus rectis æquales. Igitur anguli EDG, EDF, angulis EDG, GDH, æquales erunt. Quare ablato communi angulo EDG,* [r] *remanebit angulo EDF, æqualis angulus GDH: Est autem eidem angulo EDF,* [s] *æqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, HDI, æquales erunt; atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI. Rursus quia latera DF, DG, sunt æqualia in triangulo DFG;* [t] *erunt anguli DFG, DGF, æquales; qui cum* [u] *æquales sint externo angulo GDI, erit vterlibet eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quoque esse eiusdem anguli GDI.* [x] *Quare anguli GDH, DGF, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter EH, FG,* [y] *erunt EH, FG, parallelæ. Quamobrem* [z] *triangula DEG, DEF, æqualia erunt, cum habeant eandem basin DE, sintque inter easdem parallelas DE, FG. Quoniam vero triangulum DEG,* [a] *æquale est triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, æqualis angulus EDG, erit triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod est propositum.*

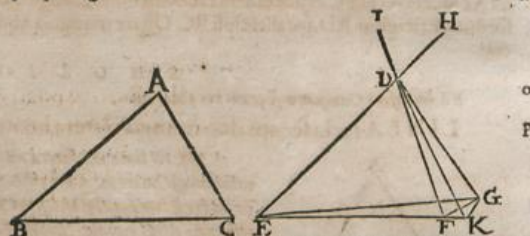
SINT

SINT deinde anguli A, & EDF, duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, minus esse triangulo DEF. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; [a] fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, [b] & recta DG, rectæ DF, seu AC, æqualis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores: Sunt autem anguli EDG, GDH, [c] æquales duobus rectis. Igitur anguli EDG, EDF, maiores sunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior angulo GDH. Quoniam vero [d] angulus EDF, angulo HDI, æqualis est, erit quoque HDI, maior quam GDH; Atque adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rursus quia latera DG, DF, æqualia sunt: [e] erunt anguli DFG, DGF, æquales: qui cum sint [f] æquales externo GDI, erit vterque eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, minorem esse dimidio eiusdem GDI. Quare DGF maior erit, quam GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK, [g] æqualis angulo alterno GDH. Erit ergo GK, [h] parallela ipsi DE, secabitque GK rectam EF. Ducatur ex D, ad K, vbi GK, secat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG, [i] æquale triangulo DEK. Quoniam autem triangulum DEG, [k] æquale est triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cum igitur DEK, [l] minus sit triangulo DEF; erit quoque ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod est propositum.



a 23. prim.
b 3. primi.
c 13. primi.
d 15. primi.
e 5. primi.
f 32. primi
g 23. primi.
h 27. prim.
i 37. primi.
k 4. prim.
l 9. pron.

SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, maius esse triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; [m] fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, [n] & recta DG, rectæ DF, seu AC; ducantur [q] rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli EDG, EDF, duobus rectis minores. Sunt [o] autem anguli EDG, GDH, duobus rectis æquales. Igitur EDG, EDF, minores sunt, quam EDG, GDH; demptoque communi EDG, remanebit EDF, minor, quam GDH. Est autem EDF, [p] æqualis ipsi HDI. Quare & HDI, minor erit, quàm GDH; atque adeo GDH, maior est dimidio anguli GDI. Quoniam autem DGF, dimidium est eiusdem anguli GDI, vt iam supra ostensum fuit; erit GDH, maior, quam DGF. Fiat igitur angulus DGK, [q] æqualis angulo GDH, ducta recta GK, quæ secabit rectam EF, protractam in K; & ducatur recta DK. Erit ergo, vt prius GK, [r] parallela ipsi DE; [s] triangulumque DEG, triangulo DEK, æquale. Est autem iterum DEG, [t] æquale ipsi ABC. Igitur & ABC, æquale est ipsi DEK, [u] Quocirca cum DEK maius sit, quàm DEF; erit & ABC, maius, quam DEF. Quod demonstrandum erat.



m 23. prim.
n 3. primi.
o 13. prim.
p 15. primi.
q 23. prim.
r 27. prim.
s 37. primi.
t 4. primi.
u 9. pron.

EX his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, vt ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38. xxxviij.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. [x] Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF: Eruntq; [y] parallelogrāma ACEG, BFDH, æqualia. Cum igitur horum [z] dimidia sint triangula ACE, BFD; [a] erunt hęc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.



x 31. primi.
y 36. primi.
z 34. prim.
a 7. pron.

SHOLIVM.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo ABC, ex angulo A, recta AD, diuidens bifariam latus BC, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi BC, erunt duo triangula ABD, ADC, inter easdem parallelas; & super æquales bases, [b] Quare æqualia erunt.



b 38. primi.

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum ABC, & punctum datum D, in latere BC. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus BC, bifariam, recta DA, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt in hoc scholio est ostensum; Si vero D, non diuidit BC, bifariam, [c] secetur BC, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta DA, & per E, [d] parallela EF, ipsi DA, secans AC, in F. Si igitur ducatur recta DF, erit triangulum diuisum bifariam à linea DF. Nam ducta recta EA, [e] erunt triangula EFA, EFD, æqualia, cum sint super eandem basin EF, & inter easdem parallelas EF, AD. Addito igitur communi CFE, [f] erunt tota triangula AEC, CDF, æqualia: Est autem AEC, dimidium totius ABC, vt iam fuit ostensum. Igitur & CDF, dimidium est eiusdem trianguli ABC, quod erat probandum.



c 10. primi.
d 31. primi.
e 38. primi.
f 2. pron.



QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate EC, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium vero ad partes C, vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est. si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo non vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.

xxxix. ## THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



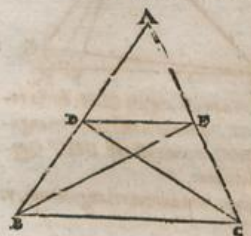
SINT duo triangula æqualia, ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes, Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam AD, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra AD, vel infra. Cadat primum supra, qualis est AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur [c] erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AF; ducta recta FC, erunt eadem ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur AD, parallela ipsi BC. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

a 31. primi.
b 37. primi
c 1. pron.

SCHOLIVM.

EX his infert Cavipanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.



SECET linea DE, latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam in D, & E. Dico DE, parallelam esse lateri BC. Cum enim triangula ADE, BDE, sint super æquales bases AD, DB, & inter easdem parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi AB) [d] erit triangulum BDE, triangulo ADE, æquale: Eadem ratione erit triangulum CED, eidem triangulo ADE, æquale. Quod etiam constat ex scholio præcedentis propos. Recta enim ED, secabit triangulum AEB, bifariam, & recta eadem DE, triangulum ADC, bifariam etiam, quod bases AB, AC, sectæ sint bifariam à recta DE, ex hypothesi. Igitur triangula DBE, ECD, [e] æqualia erunt: Habent autem eandem basin DE, & sunt ad easdem partes constituta. Quare [f] inter easdem erunt parallelas, & idcirco DE, BC, parallelæ erunt. Quod est propositum.

d 38. primi.
e 1. pron.
f 39. primi.

ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.



NAM quadrilaterum ABCD, diuidatur bifariam ab vtraque diametro AC, BD. Dico ipsum esse parallelogrammum. Cum enim triangula ADC, BDC, dimidia sint eiusdem quadrilateri ABCD, & ipsa inter se æqualia erunt. Quare cum eandem habeant basin DC, ad easdemque partes sint, [h] ipsa in eisdem parallelis erunt; Atque idcirco rectæ AB, DC, parallelæ sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse AD, BC. Parallelogrammum igitur est ABCD. Quod est propositum.

g 7. pron.
h 39. primi.

xxxx. ## THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia ABC, DEF, super bases æquales BC, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ BF. Si enim non est, cadet parallela ipsi BF, per A, ducta vel supra AD, vel infra. Cadat primum supra, coeatque cum ED, producta in G, & ducatur recta GF. Quoniam igitur parallelæ sunt AG, BF, [i] erit triangulum EFG, triangulo ABC, æquale: Ponitur autem & triangulum DEF, eidem triangulo ABC, æquale. Igitur [k] triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est, AH; ducta recta HF, erunt eadem argumentatione triangula HEF, DEF, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur AD, parallela ipsi BF. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

i 38. primi.
k 1. pron.

SCHOLIVM.

HÆC propositio conuertit vno modo propos. 38. Alio autem modo conuerti potest, quemadmodum propos. 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.

TRI-

TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

Sint triangula æqualia ABC, DEF, inter parallelas AD, BF, & ſuper baſes BC, EF, quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, maior. [a] *Abſciſſa ergo recta CG, æquali ipſi EF, & ducta recta GA;* [b] *erit triangulum AGC, triangulo DEF, æquale: Ponitur autem & triangulum ABC, eidem triangulo DEF, æquale: Igitur triangula AGC, ABC,* [c] *æqualia erunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes BC, EF, ſed æquales. Quod eſt propoſitum.*



a 3. primi.
b 38. primi.
c 1. pron.

Sequens etiam theorema facili negotio demonſtrabitur.

SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contra, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

Sint enim in proxima figura inter parallelas AD, BF, triangula ABC, DEF, ſitq; baſis BC, baſe EF, maior. Dico triangulum ABC, maius eſſe triangulo DEF. Ablata enim recta CG, [d] *æquali ipſi EF, ductaq; recta AG;* [e] *erunt triangula AGC, DEF, ſupra æquales baſes GC, EF, æqualia. Cum ergo* [f] *triangulum ABC, triangulo AGC, maius ſit; erit idem triangulum ABC, maius quam DEF.*

d 3. primi.
e 38. pri.
f 9. pron.

Sint rurſus triangula ABC, DEF, inæqualia, & ABC, maius. Dico baſin BC, baſe EF, maiorem eſſe. Si enim dicatur æqualis, [g] *erit triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod eſt abſurdum, cum maius ponatur. Si vero credatur eſſe minor, erit triangulum DEF, maius triangulo ABC, vt proxime oſtendimus, quòd multo magis eſt abſurdum, cum ABC, ponatur maius, quam DEF. Recta igitur BC, maior erit, quam EF, cum neq; æqualis ſit oſtenſa, neq; minor. Quod eſt propoſitum.*

g 38. primi.

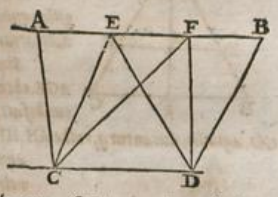
Quæ porro hactenus de parallelogrammis, triangulisq; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facile quoque demonſtrari poſſunt de trapeziis inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem ferme ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

Dicuntur trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, partesq; ſunt earundem parallelarum.

Inter parallelas igitur AB, CD, ſuper eadem baſi CD, conſtituta ſint duo trapezia, ACDE, FCDB, quorum baſes oppoſitæ AE, FB, æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis EC, FD, [h] *erunt tam triangula ECD, FCD, ſuper eadem baſi CD, & in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia,* [i] *quam triangula ACE, FDB, ſuper æqualibus baſibus AE, FB, & in eiſdem parallelis. Si igitur æqualib. ECD, FCD, addantur æqualia ACE, FDB,* [k] *erunt tota trapezia ACDE, FCDB, inter ſe æqualia.*



h 37. prim.
i 38. pri.
k 2. pron.

Sint iam trapezia ACDE, FCDB, æqualia. Dico baſes oppoſitas AE, FB, æquales quoq; eſſe. Erunt enim rurſus [l] *triangula ECD, FCD, æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,* [m] *æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB. Quare, vt in hoc ſcholio oſtendimus, baſes AE, FB, æquales erunt.*

l 37. primi.
m 3. pron.

II.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, cuius baſis maior eſt; Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maiorque eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

Vt in eadem figura, ſi baſis AE, dicatur eſſe maior baſe FB; Dico trapezium ACDE, maius eſſe trapezio FCDB. [n] *Erunt enim rurſus triangula ECD, FCD, æqualia: At triangulum ACE, triangulo FDB, maius, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus.* [o] *Totum ergo trapezium ACDE, toto trapezio FCDB, maius erit.*

n 37. prim.
o 4. pron.

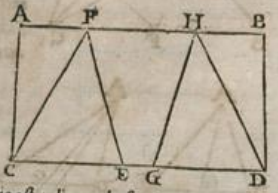
Rurſus ſi trapezium ACDE, dicatur eſſe maius trapezio FCDB; Dico baſin AE, baſe FB, maiorem eſſe. [p] *Erunt enim rurſus triangula ECD, FCD, æqualia. Quare reliquum triangulum ACE, reliquo triangulo FDB,* [q] *maius erit: ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum eſt, baſis AE, maior erit baſe FB. Quod oſtendendum erat.*

p 37. primi.
q 5. pron.

III.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.

Inter parallelas AB, CD, ſuper æquales baſes CE, GD, conſtituta ſint duo trapezia ACEF, HGDB, quorum baſes oppoſitæ AF, HB, æquales quoq; ſint. Dico ipſa trapezia æqualia eſſe. Ductis enim rectis FC, HD, [r] *erunt tam triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, quam ACF, BDH, ſuper baſes æquales AF, BH, inter ſe æqualia.* [s] *Tota ergo trapezia æqualia erunt.*



r 38. primi.
s 2. pron.

Sint iam trapezia ACEF, HGDB, æqualia ſuper baſes æquales CE, GD. Dico baſes oppoſitas AF, BH, æquales quoq; eſſe. [t] *Erunt namq; rurſus triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CF, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, reliqua triangula ACF, BDH,* [u] *æqualia erunt; ac proinde, vt paulo ante in hoc ſcholio oſtendimus, baſes AF, BH, æquales erunt.*

t 38. primi.
u 3. pron.

IV.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est: Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent oppositas bases inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

a 38. pri. *VT in eadem figura, si basis AF, dicatur esse maior base HB, erit trapezium ACEF, trapezio HGDB, maius.* [a] *Erunt enim rursum triangula FCE, HGD, super æquales bases CE, GD, æqualia. At triangulum ACF, maius triangulo BDH, vt supra ostensum est, quod basis AF, maior ponatur base BH.* [b] *Totum ergo trapezium ACEF, toto trapezio HGDB, maius erit.*

b 4. pron.

c 38. pri. *Rursus si trapezium ACEF, maius ponatur trapezio HGDB, erit basis AF, base BH, maior.* [c] *Erunt enim rursus triangula FCE, HGD, super æquales bases CE, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum ACF,*

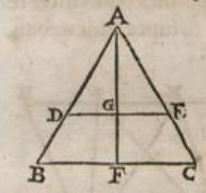
d 5. pron. *reliquo triangulo BDH,* [d] *maius erit; ac proinde, vt in hoc scholio ostensum fuit, basis AF, base BH, maior erit. Quod erat ostendendum.*

Porro non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunq; in quotuis partes æquales diuidemus: quod nos in scholio propos. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonstrari possit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. ostendemus, iucundū tamen est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensque alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.

IN triangulo ABC, æquidistet DE, ipsi BC, & recta AF, secet alterutram BC, DE, bifariam in F, vel G. Dico alteram

e 29. primi *quoq; bifariam secari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo posito,* [e] *& anguli ad G, recti erunt. Si igitur BC, diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoq; angulus A, per ea, quæ in scholio propos. 26. huius lib. demonstrauimus; ac proinde recta*



AG, ad basim DE, trianguli ADE, perpendicularis, diuidensq; angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoq; basim DE, vt ibidem ostendimus, quod est propositum.

Si vero DE, ponatur diuidi bifariam, diuidetur, per idem scholium propos. 26. huius lib. angulus quoq; A, bifariam; ac proinde recta AF, ad basim BC, perpendicularis, diuidensq; angulum A, bifariam, basim quoq; BC, bifariam secabit, quod est propositum.

Sint deinde anguli ad F, non recti, sed AFC, obtusus, & AFB, acutus. Quo posito, erit &

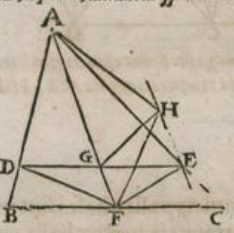
f 29. pri. *AGE, obtusus, & AGD, acutus,* [f] *cum hi illis sint æquales, externi internis. Si igitur BC, diuiditur bifariam,*

g 23. prim. *&* [g] *constituatur acuto angulo AGD, æqualis angulus AGH,* [h] *& recta GH, rectæ*

h 3. prim. *GD, æqualis, ducanturq; rectæ AH, HF, FD, FE. Quia igitur tam triangula tota ABF, ACF, ex scholio propos. 38. huius libri*

i 38. primi. *æqualia sunt,* [i] *quam triangula ablata DBF, ECF, ob æquales bases BF, CF;* [k] *erunt quoq;*

k 3. pron. *reliqua triangula ADF, AEF, æqualia. Rursus quoniam duo latera AG, GD, trianguli AGD,*



l 4. primi. *duobus lateribus AG, GH, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales AGD, AGH, ex*

m 15. pri. *constructione,* [l] *erunt quoq; triangula AGD, AGH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera DG, GF, duobus lateribus HG, GF, æqualia sunt, ex constructione, angulosq; continēt*

n 4. primi. *æquales DGF, HGF, (cum enim per constructionem anguli AGD, AGH, æquales sint, erunt*

o 2. pron. *quoq; reliqui duorum rectorum DGF, HGF, æquales.* [m] *sunt enim tam AGD, DGF, quam*

p 1. pron. *AGH, HGF, duobus rectis æquales.) erunt* [n] *quoq; triangula DGF, HGF, æqualia:* [o] *ac proinde & tota triangula ADF, AHF, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo ADF,*

q 39. primi *æquale ostensum triangulum AEF.* [p] *Igitur & inter se* [q] *æqualia erunt triangula AHF,*

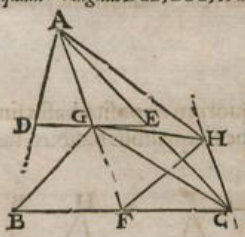
r 37. primi. *AEF.* [q] *ac propterea inter duas easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta EH, erit basi AF, communi parallela. Igitur* [r] *& triangula HGF, EGF, inter easdem parallelas, & super eadem basi FG, æqualia inter se erunt. Est autem triangulum HGF, triangulo DGF, ostensum æquale. Igitur triangula quoq; DGF, EGF, æqualia inter se erunt; propterea q; basis quoq; DG, basi GE, æqualis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.*

f 23. primi. *Si vero DE, ponatur bifariam diuidi,* [s] *constituatur angulo acuto AFB, æqualis angulus AFH,* [t] *& recta FH, rectæ FB,*

t 38. primi. *ducanturq; rectæ AH, HG, GB, GC. Quoniam igitur tam triangula AGD, AGE, ex scholio propos. 38. huius lib. æqualia sunt,*

u 38. primi. [u] *quam triangula DGB, EGC, ob æquales bases DG, EG;* [x] *erunt tota etiam triangula AGB, AGC, æqualia. Rursus quia duo*

x 2. pron. *latera AF, FB, duobus lateribus AF, FH, æqualia sunt, continentq; angulos æquales*



y 4. primi. *AFB, AFH, ex constructione;* [y] *erunt triangula quoq; AFB, AFH, æqualia. Pari ratione,*

z 4. primi. *quia duo latera GF, FB, duobus lateribus GF, FH, æqualia sunt, æqualesq; continent an-*

a 3. pron. *gulos GFB, GFH, ex constructione;* [z] *erunt quoq; æqualia triangula GFB, GFH: quibus*

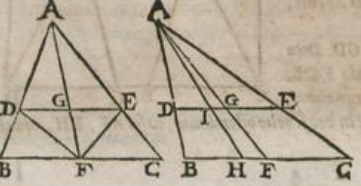
b 1. pron. *demptis ex æqualibus AFB, AFH,* [a] *æqualia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Est au-*

c 39. primi. *tem eidem triangulo AGB, ostensum æquale triangulum AGC.* [b] *Igitur & triangula*

d 37. primi *AGC, AGH, inter se erunt æqualia.* [c] *Quare & inter easdem parallelas erunt, h. e. ducta*

e 1. pron. *recta CH, ipsi AF, parallela erit ac proinde* [d] *æqualia inter se erunt triangula GHF, GFC.*

Fuit autem ostensum triangulum GHF, triangulo GBF, æquale. [e] *Igitur & æqualia inter se erunt triangula GFC, GFB; ideoq; vt in hoc scholio demonstrauimus, & bases FC, FB, æquales erunt. Quod est propositum.*



f 4. pron. *Aliter. Diuisa sit primum BC, bifariam in F. Dico & DE, bifariam esse diuisam in G. Si enim DG, GE, non sunt æquales, sit maior DG, ducanturq; rectæ FD, FE. Erit igitur per ea, quæ in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum ADG, triangulo AEG, quam triangulum FDG, triangulo FEG, maius.* [f] *Totum ergo triangulum ADF, toto triangulo AEF, maius erit: quibus si addantur triangula DBF,*

ECF,

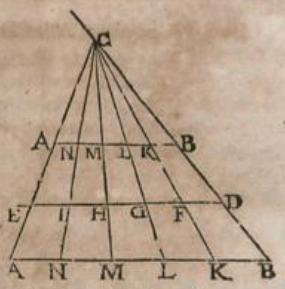
ECF,[a] quæ propter baſes æquales BF, CF, æqualia ſunt,[b] fiet totum triangulum ABF, toto triangulo ACF, maius; ac proinde, vt in hoc ſcholio monſtrauimus, baſis BF, baſe FC, maior erit: Sed & æqualis ponitur. Quod eſt abſurdum. Bifariam ergo ſecta eſt DE, in G. Quod eſt propoſitum. a 38 primi. b 4. pron.

Sit iam DE, ſecta bifariam in G. Dico & BC, diuidi bifariam in F. Sin minus,[c] diuidatur BC, in H, bifariam, ducaturq; recta AH, ſecans DE, in I. Quoniam igitur AH, ſecat BC, bifariam in H, ſecabit eadem ipſam DE, quoq; bifariam in I, vt proxime oſtendimus. Quod eſt abſurdum, cum bifariam ſecta eſſe ponatur in G. Sequeretur enim partem toto eſſe maiorem. Nam ſi DI, æqualis eſt ipſi IE, cum IE, maior ſit, quam GE, erit quoq; DI, maior, quam GE, hoc eſt, quam DG, quæ ipſi GE, æqualis ponitur. Diuiditur ergo BC, bifariam in F. Quod erat demonſtrandum. c 10. primi.

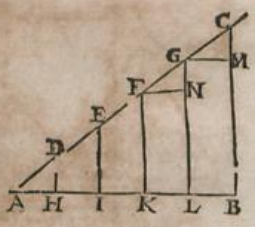
Hoc oſtenſo theoremate, ad diuiſionem lineæ rectæ in quotuis æquales partes iam veniamus.

DATAM rectã lineam finitam in quotlibet partes æquales ſecare.

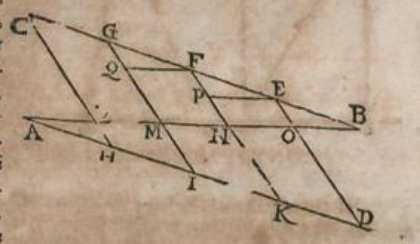
Sit data recta AB, ſecanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum B, ducta recta BC, vt cunq;, & aſſumpto in BC, puncto quocunq; D, ſiue infra B, ſiue ſupra,[d] ducatur per D, ipſi AB, parallela DE, in qua[e] abſcindantur quinq; partes inter ſe æquales DF, FG, GH, HI, IE, hac tamen lege, vt exiſtente puncto D, infra B, recta DE, ex quinq; partibus æqualibus compoſita maior ſit, quam data AB, minor vero, exiſtente puncto D, ſupra B, vt nimirum recta AC, per alterum extremum A, & per E, ducta cum BD, concurrere poſſit in puncto aliquo, vt in C. A quo ſi per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur, ſecta erit data recta AB, in quinq; partes æquales BK, KL, LM, MN, NA. Quoniam enim in triangulo CBL, recta DG, ipſi BL, eſt parallela, vel in triangulo CDG, recta BL, ipſi DG: ſectaq; eſt DG, bifariam in F, ſecta quoq; erit bifariam BL, in K, vt in proximo theoremate demonſtrauimus. Eademq; ratione recta KM, in L, ſecta erit bifariam, quemadmodum & FH, in G, bifariam ſecta eſt. Sunt ergo tres partes BK, KL, LM, inter ſe æquales, ſicuti tres DF, FG, GH, atq; ita de ceteris. d 31. primi. e 3. primi.

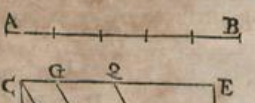


Aliter. Ad extremum A, lineæ AB, ſecandæ in quinq; partes æquales, conſtituatur angulus rectilineus quicunq; A, & ex recta AC,[f] abſcindantur quinq; partes quantæcunq; inter ſe æquales AD, DE, EF, FG, GC: ductaq; recta CB,[g] agantur ei parallelæ GL, FK, EI, DH. Dico rectam AB, ſectam eſſe in quinq; partes æquales.[h] Ductis enim per G, F, ipſi AB, parallelis GM, FN,[i] quæ inter ſe etiam parallelæ erunt,[k] & ipſis BL, LK, æquales in parallelogrammis GB, FL;[l] erunt tam anguli FGN, GCM, externus & internus in parallelis GM, FN, æquales inter ſe. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli CGM, duobus angulis G, F, trianguli GFN, æquales ſunt, vterq; vtrisq;, laterisq; illis adiacentia CG, GF, æqualia per conſtructionem,[m] erunt quoq; latera GM, FN, æqualia: quæ cum oſtenſa ſint æqualia rectis BL, LK, erunt quoq; BL, LK, inter ſe æquales. Eademq; ratione oſtendemus KL, KI, æquales eſſe, nec non IK, HI, & HI, AH; ac proptereа recta AB, in quinq; æquales partes diuiſa erit. Quod eſt propoſitum. f 3. pri. g 31. primi. h 31. primi. i 30. pri. k 34. primi l 29. primi. m 26. pri.

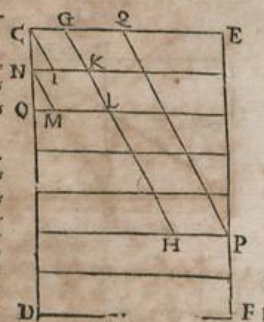


Aliter. Ad extrema puncta A, B, lineæ AB, in quinq; partes æquales diuidendæ conſtituantur duo æquales anguli in diuerſas partes ABC, BAD. Et in vtraq; linea BC, AD,[n] quæ ob alternos angulos æquales A, B, parallelæ inter ſe ſunt,[o] ſumantur quatuor partes inter ſe omnino æquales, tot nimirum, vna minus, in quot partes linea ſecanda eſt, cuiuſmodi ſunt BE, EF, FG, GC, AH, HI, IK, KD, iungunturq; rectæ CH, GI, FK, ED,[p] quæ inter ſe erunt parallelæ, cum coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam AB, in quinq; partes æquales ſectam eſſe.[q] Ductis enim per E, F, ipſi AB, parallelis EP, FQ,[r] quæ inter ſe quoq; parallelæ erunt,[s] & ipſis NO, MN, æquales in parallelogrammis EN, FM:[t] erunt tam anguli EFP, FGQ, externus, & internus in parallelis FK, GI, quã anguli GFQ, FEP, externus & internus in parallelis QF, PE, inter ſe æquales. Itaq; quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, æquales ſunt, vterq; vtrisq;, laterisq; illis adiacentia FG, EF, æqualia per conſtructionem,[u] erunt quoq; latera FQ, EP, inter ſe æqualia: quæ cũ oſtenſa ſint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter ſe æquales. Eademq; ratione æquales inter ſe erũt OB, NO, MN, LM, AL, proptereaq; recta AB, in quinq; æquales partes diuiſa erit. Quod eſt propoſitum. n 27. prim. o 3. primi. p 31. pri. q 31. primi. r 30. prim. s 34. primi. t 29. primi u 26. primi.





Praxis hæc breuius ita demonſtrabitur.[x] Quoniam rectæ ED, FK, GI, GH, parallelæ ſunt, quòd coniungant extrema æqualium & parallelarũ; ſecabitur recta BL, in quatuor partes æquales, nec non & recta AO, vt in præcedenti praxi oſtendimus. Omnes ergo quinq; partes AL, LM, MN, NO, OB, æquales erunt. x 33. pri.



Aliter. Paratur inſtrumentum diuiſionib. lineariũ in partes æquales accommodatũ, hoc modo. Ductis duab. parallelis ſatis magno ſpatio inter ſe diſtantib. CD, EF, ſumantur in vtraq; partes omnino inter ſe æquales quotcunq;, tot videlicet in vna, quot in altera, & modica quantitate, punctaq; reſpondẽtia lineis rectis iungatur, quæ parallelæ inter ſe erũt, cũ cõtingat extrema parallelarũ æqualiũ. Si igitur beneficio circini recta AB, in quinq; dividenda partes æquales trãſferatur ex quouis puncto G, vſq; ad punctũ H, ita vt quinq; ſpatia parallelarũ inter G, & H, includatur, diuiſa erit ducta GH, ab illis parallelis in quinq; partes æquales, quib. partib. ſi in data AB, ſumãtur partes æquales, diuiſa quoq; erit AB, in quinq; æquales partes. Sectã ante eſſe GH, in quinq; partes æquales, ita demonſtrabitur. Ductis ex C, N, ipſi GH, parallelis CI, NM, b quæ inter ſe quoq; parallelæ erũt, & ipſis GK, KL, æquales in parallelogrammis GI, KM, erunt c tã anguli CNI, NOM, externus & internus in parallelis NK, OL, q̃ anguli ONM, NCI, externus & internus in parallelis NM, CI, æquales inter ſe. Igitur cũ duo anguli N, C, triãguli CNI, duob. angulis O, N, triãguli NOM, æquales ſint, vterq; vtrisq;, laterisq; illis adiacentia CN, NO, æqualia, ex conſtructione, æ erunt quoq; latera CI, NM, inter ſe æqualia: quæ cum oſtenſa ſint æqualia rectis GK, KL, erunt quoq; GK, KL, inter ſe æquales. Eademq; ratione omnes partes rectæ GH, oſtendentur æquales. ac proinde recta GH, in quinq; partes æquales erit diuiſa. y 3. pri. z 33. pri. a 34. primi. b 30. primi. c 34. prim. d 29. prim. e 26. pri.

Praxis

Praxis etiam hæc breuius demonſtrabitur, ſi hoc modo fiat. Sumptis quinq; interuallis rectæ EF, ab E, vſq; ad P, transferatur recta AB, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ CE, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta PQ, diuiſa à parallelis in quinq; partes æquales, vt in ſecunda praxi demonſtratum eſt. Quare ſi partes rectæ PQ, quæ datæ rectæ AB, æqualis eſt, ex conſtructione, transferantur in datam rectam AB, diuiſa quoq; erit AB, in quinq; partes æquales. Quod eſt propoſitum.

xlj.

THEOR. 31. PROPOS. 41.

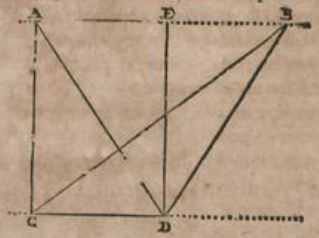
SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

INTER parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, conſtituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum eſſe duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt [a] triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum eſt trianguli ACD; [b] quod triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter ſe ſint. Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, ſi parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonſtandum.

a 37. primi.

b 34. primi

c 6. pron.

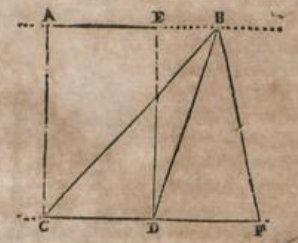


SCHOLIVM.

Hinc ſequitur, ſi triangulum duplam habuerit baſin, fueritq; in eiſdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam ſi baſis CD, producatur ad F, vt ſit DF, æqualis ipſi CD, ducaturq; recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, [d] quod triangula BCD, BDF, æqualia ſint: Eſt autem & parallelogrammum ACDE, [e] duplum eiuſdem trianguli BCD. [f] Igitur æqualia erunt triangulum BCF, & parallelogrammum ACDE.

d 38. primi.

e 41. pri. & 6. pron.

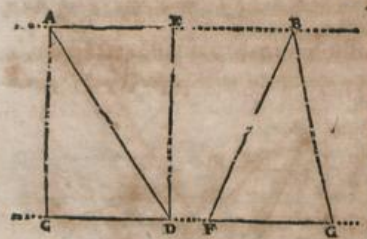


Idem hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodm modo, ſi parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem, fuerintq; in eiſdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum baſes CD, FG, æquales ſunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [g] erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum ſit trianguli ACD; [h] quod diameter AD, ſecet parallelogrammum ACDE, bifariam: [i] erit quoq; idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione ſi baſis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc eſſet duplum etiam trianguli BFG, &c.

g 38 primi.

h 34. primi.

i 6. pron.



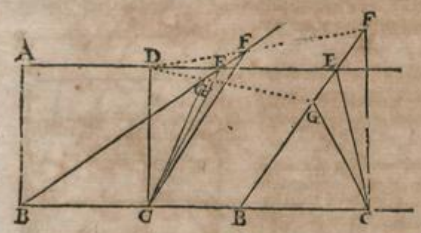
CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, cãdemque habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis: erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.

Sit parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EBC, ſiue eandem habeant baſin, ſiue æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E, punctum. Nam alias cadet aut ſupra E, aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propoſ. oſtendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. [k] Nam erit quoq; parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel BGC, duplum. [l] Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum.

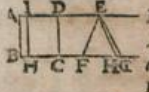
k 41. primi.

l 6. pron.



Sit deinde parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EFG, in eiſdemq; parallelis. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe BC, ſit maior, abſciſſa æquali CH, & [m] ducta HI, parallela ipſi AB, demonſtrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumq; duplum eſt trianguli EFG; illud quidem per hypotheſin, hoc vero per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis FG, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi BC, æqualis FH, ducaturque recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumq; dimidium eſt parallelogrammi ABCD; Illud quidem per propoſ. 41. hoc vero per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.

m 31. primi



EX

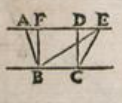
EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



Inter lineas parallelas AE, BC, sint constituta trapezium A B C D, & triangulum EBC. super basim BC, eandem, quæ sit tamen maior, quam altera linea AD, parallela in trapezio dato. Dico trapeziũ ABCD, minus esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, minor ponatur quam BC, sumatur A F, æqualis ipsi BC, & ducatur recta CF, [a] quæ erit parallela ipsi AB; at q, adeo parallelogrammum erit ABCF, [b] quod duplum est trianguli EBC. Quare trapezium ABCD, cum sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli E B C. Quod est propositum.

a 33. primi.
b 41. primi.



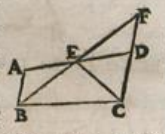
Sint rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis BC, sit minor, quam reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, quam BC, abscindatur DF, æqualis ipsi BC, & ducatur recta BF, [c] quæ erit parallela ipsi C D; at q, adeo parallelogrammum erit BCDF: [d] quod duplum est trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod superat parallelogrammum BCDF, maius erit duplo eiusdem trianguli EBC. Quod est propositum.

c 33. prim.
d 41. primi.

Idem concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezii sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.

Sit trapezium ABCD, cuius duo latera opposita AB, DC, sint parallela, & super basin BC, constituatur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD. Dico trapezium ABCD, duplum esse trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, protracto in F. Et quia parallelæ sunt AB, CF, [e] erunt anguli alterni BAE, FDE, æquales: [f] Sunt autem & anguli AEB, DEF, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli ABE, lateri DE, trianguli DEF, æquale, per hypothesin. [g] Igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus, DF, FE, æqualia erunt, vtrumq, vtriq, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales: at q, idcirco triangula ABE, DFE: ex coroll. propos. 26. huius lib. æqualia erunt. Quare addito communi triangulo CDE, [h] erunt triangulo CEF, æqualia triangula simul ABE, CDE. [i] Est autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, æquale, quod bases BE, EF, ostensæ sint æquales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per C, duceretur parallela ipsi BF. [k] Igitur triangulum CBE, æquale erit triangulis ABE, CDE; & propterea CBE, triangulum dimidium erit trapezij ABCD, quod est propositum.



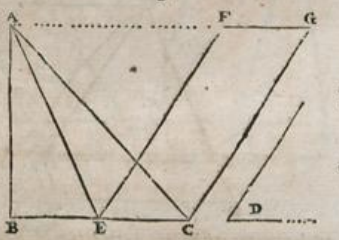
c 29. pri.
f 15. pri.
g 26. prim.
h 1. pron.
i 38. pri.
k 1. pron.

PROBLEMA 11. PROPOSITIO 42.

xlij.

DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

DATVM triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe BC, [a] bifariam in E, & [b] fiat ad rectam C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus C E F, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, [c] recta AF, parallela ipsi B C, quæ secet E F, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G, Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum C E F G, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta E A, quoniam parallelogrammum C E F G, [d] duplum est trianguli AEC, & triangulum ABC, duplum eiusdem trianguli AEC, [e] quod triangula AEC, ABE, super æquales bases EC, BE, & in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum CEFG, & triangulum ABC, [f] æqualia inter se. Cum igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.



a 10. primi.
b 23. prim.
c 31. primi.
d 41. primi.
e 38. primi.
f 6. pron.

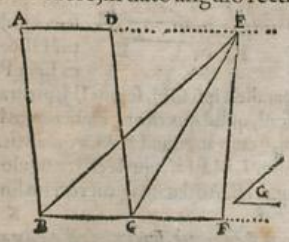
SCHOLIVM.

Praxis huius problematis facilima est ex ipsa constructione.

Subiungit autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

Sit datum parallelogrammum ABCD, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G, æqualis, secet q, recta BE, rectam AD, productam in E: Extendatur quoq, BC, ad F, sit q, CF, æqualis rectæ BC, & iungatur E F. Dico triangulum B E F, habens angulum EBF, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo ABCD. Ducta enim recta C E, [g] erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli BCE. Item triangulum BEF, eiusdem trianguli BCE, duplum; [h] quod æqualia sint triangula EBC, ECF. Quare [i] æqualia inter se erunt parallelogrammum ABCD, & triangulum BEF. Quod est propositum.



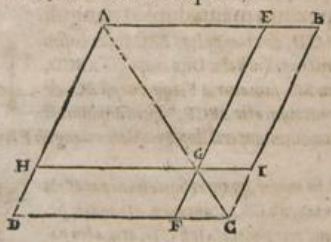
g 41. primi
h 38. primi.
i 6. pron.

Praxis

Praxis quoq; huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.

xliij. ## THEOR. 32. PROPOS. 43.

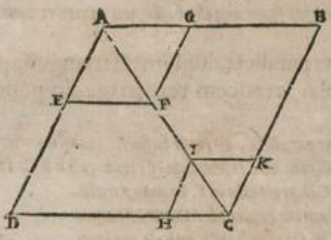
IN omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



a 34. primi
b 1. pron.
c 34. primi.
d 3. pron.

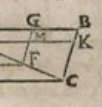
IN parallelogrammo ABCD, sint circa diametrum AC, parallelogramma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum [a] enim triangula ABC, CDA, æqualia sint; Itemq; triangula AEG, GHA; si hæc ab illis demãtur, [b] remanebunt trapezia CBEG, CDHG, æqualia: [c] Sunt autem & triangula CGI, CGF, æqualia. Quare si detrahãtur ex trapezijs, [d] remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, cõplementa, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.



c 34. primi.
f 3. pron.

Eodem modo hoc theorema demonstratur à Proclo etiamsi duo parallelogramma circa diametrum non coniugantur in puncto G, sed vel vnum ab altero sit semotum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim prius vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrum AC, consistant parallelogramma AEFG, CHIK. Dico complementa DEFIH, BKIFG, esse æqualia. Cum enim [c] triangula ABC, CDA, æqualia inter se sint: Item triangula AEF, GHI, æqualia triangulis AGF, CKI: [f] erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, æqualia. Quod est propositum.

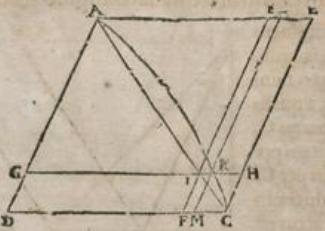


g 34. primi.
h 3. pron.
i 34. primi.
k 2. pron.
l 34. primi.
m 3. pron.

Secent se iam mutuo parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum consistentia. Ita vt communem partem habeant ILFM. Dico adhuc complementa DELH, BGMK, esse æqualia. Cum enim [g] æqualia sint triangula ABC, CDA: Item triangula AFG, AFE: [h] erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, æqualia: Sunt [i] autem rursus æqualia triangula IFM, IFL. Igitur si hæc addantur dictis quadrilateris, [k] erunt figuræ BCIMG, DCILE, æquales. Cum igitur & [l] æqualia sint triangula CIK, CIH: erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam æqualia. Quod est propositum.

Conuersum quoq; huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia: consistent reliqua duo circa diametrum.



n 31. primi.
o 43. primi
p 9. pron.
q 1. pron.

Ductis duabus rectis FF, GH, quæ sint parallelæ rectis BC, CD, seq; secent in I, diuisum sit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo BEIH, DFIG, sint æqualia. Dico reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum à puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim non transit, secet diameter CKA, rectam GH, in K; si fieri potest, & per K, [n] ducatur LM, parallela ipsi BC. [o] Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, æqualia: Est [p] autem DGKM, maius, quam DGIF. Quare & maius erit BHKL, quam DGIF. Cum ergo DGIF, æquale ponatur ipsi BEIH; [q] erit etiam BHKL, maius quam BEIH, pars quam totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.

xliv. ## PROBLEMA 12. PROPOSITIO 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, [a] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulũ EFG, angulo C, æqualem, producaturque GF, ad H, vt FH, sit æqualis rectæ A, & per H, [b] ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; & [c] per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, [d] cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, [e] cum æquale sit complemento DEFG, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

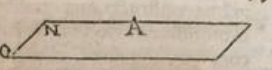


a 42. primi
b 31. primi.
c 31. primi.
d 15. primi.
e 43. primi.

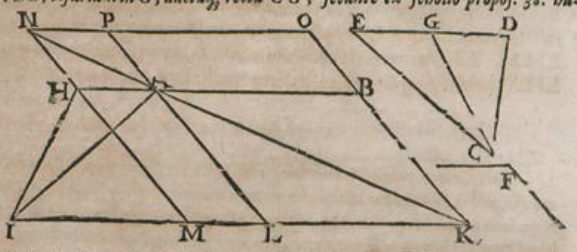
SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum FMLH, ad rectam A, ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat

4. fiat angulus æqualis angulo MFH, & ſumatur recta NO, æqualis rectæ FM, compleatur q; parallelogrammum, ceu in dicto ſcholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



Sed fortaſſis magis ex ſententia Euclidis problema hoc conficiemus, ſi ſuper ipſam rectam datam conſtruamus parallelogrammum, non autem ſuper æqualem, cuiuſmodi fuit recta FH, &c. Sit ergo rurſus data recta AB, datum triangulum CDE, & datus angulus F, oporteat q; ſuper rectam AB, conſtituere parallelogrammum æquale triangulo CDE, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt DE, bifariam in G, ductaq; recta CG, ſecante ex ſcholio propoſ. 38. huius lib. triangulum CDE, bifariam, producatur recta AB, verſus eam partem, vbi parallelogrammum conſtruendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic verſus A, fiat q; AH, æqualis ipſi EG, dimidio lateris DE. Deinde in A, [f] conſtituatur angulus HAI, angulo E, æqualis, deorſum quidem, ſi parallelogrammum verſus ſuperiorem partem ſit conſtruendum, ſurſum vero, ſi verſus inferiorem. Poſita autẽ recta AI, æquali ipſi EC; iungatur recta HI. Et quia duo latera HA, AI, duobus lateribus GE, EC, æqualia ſunt, vtrumq; vtriq;, angulo ſq; continent æquales; [g] erunt triangula AHI, EGC, æqualia. Poſt hæc [h] ducta per I, ipſi HB, parallela IK, [i] conſtituatur in A, verſus hanc parallelam angulus HAL, angulo dato F, æqualis, ſecet q; AL, rectam IK, in L. [k] Ducta quoq; per H, ipſi AL, parallela HM, ſecante IK, in M, [l] erit parallelogrammum AHML, trianguli AHI, duplum: Eſt autem & triangulum CDE, trianguli EGC, duplum, quòd æqualia oſtenſa ſint triangula EGC, DGC. Igitur cum æqualia ſint demonſtrata triangula AHI, EGC, [m] erunt æqualia parallelogrammum AHML, & triangulum CDE. Iam vero ſumpta recta LK, datæ rectæ AB, æquali ducatur recta KA, producaturq; donec cum MH, producta coeat in N, & per N, agatur ipſi HB, parallela NO, donec in O, coeat cum KB, protracta, ac tandem LA, producatur vſq; ad P, in recta NO. Dico parallelogrammum ABOP, eſſe id, quod quæritur. Eſt enim conſtitutum ſuper datam rectam AB, habetq; angulum BAP, dato angulo F, æqualem, [n] cum æqualis ſit angulo HAL, qui angulo F, factus eſt æqualis. Deinde æquale eſt dato triangulo CDE, [o] cum æquale ſit parallelogrammo AHML, quod triangulo CDE, oſtenſum fuit æquale.



f 23. pri.

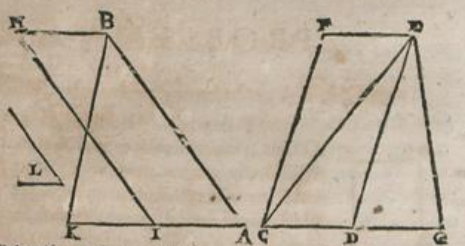
g 4. prim. h 31. primi. i 23. pri. k 31. primi. l 41. primi. m 7. pron. n 15. pri. o 43. prim.

Praxis vero huius problematis à conſtructione ipſa non differt, niſi quod recta HI, ducinõ debet, neq; recta CG. Hæ enim propter demonſtrationem tantum ductæ ſunt.

Addit hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.

Sit data recta AB, datum parallelogrammum CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, vt DG, æqualis ſit ipſi CD, & iungatur GE, recta: Erit q; triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale, vt demonſtrauimus ſcholio propoſ. 41. [p] Fiat iam ſuper data recta AB, parallelagrãmum ABHI, æquale triangulo CEG, hoc eſt, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur AI, ad K, vt ſit IK, æqualis ipſi AI, iungaturq; recta BK. Dico triangulum ABK, conſtitutum ſuper datam rectam AB, habens q; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale eſſe dato parallelogrammo CDEF. Cum enim triangulum ABK, æquale ſit parallelogrãmo ABHI, ex ſcholio propoſ. 41. quod æquale eſt conſtructum parallelogrammo CDEF, conſtat propoſitum.



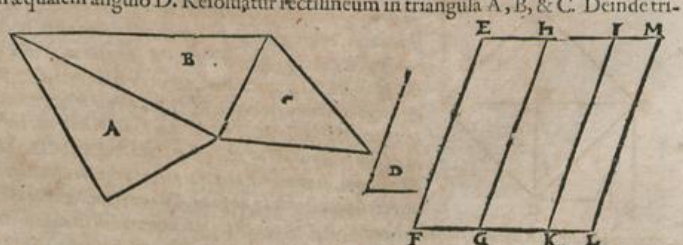
p 44. prim.

Praxis huiuſce problematis à conſtructione non differt; difficiliſq; non eſt, ſi adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo ECG, parallelogrammum ABHI, ſuper data recta AB, in dato angulo A, conſtruatur.

PROBLEMA 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema abſolute, non aſtringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propoſ. 44. fecerat; tamen quia in ſequentibus frequenter vſurpatur in data recta linea, placuit ipſum proponere vna cum data recta linea. Sit ergo recta data EF; rectilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur conſtruere ad datam rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo ABC, quod habeat angulum æqualem angulo D. Reſoluatur rectilineum in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, [a] æquale parallelogrammum conſtituatur EFGH, ſuper rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item ſuper rectam GH, parallelogrammum GHIK, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item ſuper rectã IK, parallelogrammum IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et ſic deinceps procedatur, ſi plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma



a 44. prim.

grãma conſtructa, quæ quidẽ æqualia ſunt rectilineo dato ABC, cõficiunt totũ vnũ parallelogrãmũ, quod ſic demonſtratur. Duo anguli EFG, HGK, [b] inter ſe ſunt æquales, cũ vterq; æqualis ſit angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, [c] qui duob. rectis æquiualent, [d] æquales duob. angulis HGK, FGH, ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. [e] Quare FG, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione oſtendemus, EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG, H I K, æquales inter ſe ſunt, ([f] cum ſint æquales oppoſitis angulis æqualibus E F G, H G K,) [g] & duo anguli HIK, IHG, duobus ſunt rectis æquales. &c. Cum igitur E I, F K, ſint parallelæ; [h] Itemque E F, IK, quod vtraque parallela ſit rectæ HG; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonſtrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo EFKI, conſtituere totum vnum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam E F, dato rectilineo A B C, conſtituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

b 1. pron.
c 29. pron.
d 2. pron.
e 14. primi.
f 34. primi.
g 20. prim.
h 30. primi.

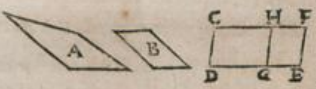
SCHOLIVM.

Pari ratione, propoſitis quotcunq; rectilineis, conſtituemus illis parallelogrammum æquale, ſi omnia reſoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, ſingulis ſingula, per propoſ. 44. veluti factum eſt in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiãt vnum parallelogrammum, vti hic demõſtratum fuit, conſtitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propoſitis. Vt ſi quis intelligat duo rectilinea propoſita A B, & C; At q; AB, reſoluatur in triangula A, & B, ſinguliſq; triangulis A, B, C, ſingula parallelogramma EG, GI, IL, ſuper rectas EF, HG, IK, iuxta artem huius problematis, æqualia conſtituantur, ex propoſ. 44. erit conſtructum parallelogrammum totum EFLM, æquale duobus rectilineis AB, & C. Et ſic de pluribus.

Praxis autem huius problematis ex praxi præcedentis propoſ. ſæpius repetita petenda eſt.

Huc referri poterit problema vtiliſſimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonſtrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minus inquirere.



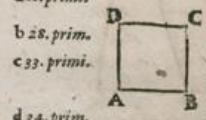
i 45. primi.

Sint data rectilinea A, & B, ſit q; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, ſuperet rectilineum B. [i] Fiat parallelogrammum CDEF, in quocunq; angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et ſuper rectam CD, parallelogrammum C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, ſuperat parallelogrammũ CDGH, parallelogrammo EFHG, ſuperabit quoq; figura A, figuram B, eodem parallelogrammo EFHG. Quod eſt propoſitum.

PROBLEMA 14. PROPOSITIO 46.

xlv.

ADATA recta linea quadratum deſcribere.



a 11. primi.
b 28. prim.
c 33. primi.
d 34. prim.

SIT data recta AB, ſuper quam oporteat quadratum deſcribere. Ex A, & B, [a] educantur AD, BC, perpendiculares ad A B, ſintque ipſi A B, æquales, & connectatur recta CD. Dico ABCD, eſſe quadratum. Cum enim anguli A, & B, ſint recti, [b] erunt AD, BC, parallelæ: Sunt autem & æquales. quod vtraque æqualis ſit ipſi AB. Igitur [c] & AB, D C, parallelæ ſunt & æquales: & ideo parallelogrammum eſt ABCD, in quo, cum A D, D C, C B, æquales ſint ipſi AB, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt; ſunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, [d] æquales ſint oppoſitis rectis A, & B. Quadratum igitur eſt ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

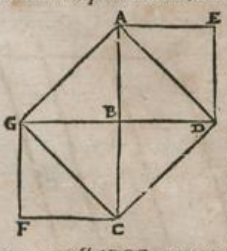
EX PROCLO.

Linearum æqualium æqualia ſunt quadrata: & quadratorum æqualiũ æquales ſunt lineæ.



e 4. prim.
f 34. primi.

Sint primum rectæ AB, CD, æquales. Dico eorum quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoq; eſſe. Ductis enim diametris BF, DH, erunt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus lateribus DC, CH, trianguli DCH, æqualia, vtrumq; vtriq;, cum ex definitione quadrati rectæ AF, CH, æquales ſint rectis AB, CD. Sunt autem & anguli A, & C, æquales, nempe recti. [e] Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt. Quæ [f] cũ ſint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod eſt propoſitum.



g 14. prim.
h 39. prim.
i 27. primi.
k 34. prim.
26. primi.

Sint deinde quadrata ABDE, BCFG, æqualia. Dico lineas quoq; ipſorum AB, BC, æquales eſſe. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ A B, BC, in directum conſtituantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, ſunt recti, [g] erunt & rectæ GB, BD, in directum conſtitutæ. Ducãtur diametri AD, CG, iungantur q; rectæ AG, CD. Quoniam igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia ſunt, erunt & triangula ABD, BCG, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo BCD, fiet totum triangulum ACD, toti triangulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cum eandem habeant baſin CD, ad eaſdemq; ſint partes, [h] in eiſdem ſunt parallelis: ideoq; parallelæ ſunt AG, CD. Et quoniam, vt in ſcholio propoſ. 34. oſtendimus, diameter in quadrato ſecat angulos quadrati bifariã, erunt anguli DAC, GCA, alterni ſemirecti, ideoq; æquales. Quamobrem, [i] & parallelæ ſunt AD, CG. Igitur parallelogrammum eſt ADCG: ac propterea [k] rectæ AD, CG, æquales. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia ſunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter ſe etiam æquales, cum ſint ſemirecti, vt in ſcholio propoſ. 34. oſtenſum fuit: erunt [l] reliqua latera æqualia, nempe AB, ipſi BC, &c. Quod eſt propoſitum.

SCHO-

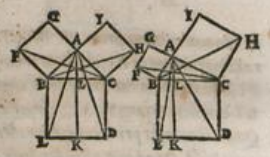
SCHOLIVM.

Possent hæc omnia multo breuius probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsæ inter se. Cum ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoq; ipsi inter se, ideoq; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias vnum quadratum alio maius esset.

Praxis autem huius problematis perfacilis est. Si namq; ad datam rectam AB, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis AD, ipsi datæ rectæ AB, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiusdem AB, duo arcus describantur sese in C, intersecantes, iungantur q; rectæ BC, DC, constructum erit quadratum. Nam ABCD, cum ex constructione sit figura æqualium laterum, ad q; adeo latera opposita æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initium scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto, [m] *erunt & B, D, recti nec non* [n] *& oppositus angulus C, &c.* m 29. pri. n 34. prim.

THEOR. 33. PROPOS. 47. xlvj.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describũtur, quadratis.



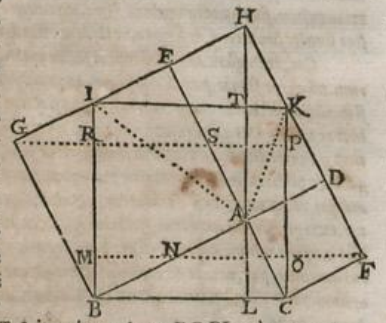
IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus [a] describanturque super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratum BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, [b] parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, [c] erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemque modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus ABC, [d] si- et totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE; trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; [e] Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammũ ABFG, [f] duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quòd sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basin BE. Quare [g] æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. [h] Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL; æquale est duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 46. prim.
b 31. primi.
c 14. primi.
d 2. pron.
e 4. primi.
f 41. primi.
g 6. pron.
h 4. primi.

SCHOLIVM.

Facile ex theoremate isto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuso angulo oppositi maius esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppositi minus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum. Nam si angulus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppositum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus eum ambientibus, fieret latus oppositum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppositi æquale sit hic ostensum duobus quadratis simul aliorum duorum laterum; perspicuum est, quadratum lateris obtuso angulo oppositi esse maius duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris angulo acuto oppositi esse minus duobus quadratis simul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. propos. 12. & 13.

Quoniam vero theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, operæ pretium iudicaui tentare, num illud alijs vijs demonstrari posset, variata aliquantulum constructione; quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit Sit ergo rursus triangulum ABC, cuius angulus BAC, rectus sit, productisq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiant AD, AE, ipsis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallelæ agantur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE, [i] *tam latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD, quam latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, æqualia sunt, erit vtrumq; parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt.* [k] *Nam F, G, oppositis rectis DAC, EAB, æquales sunt, ideoq; recti: Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quod vteruis C, D, cum recto DAC, & vteruis, B, E, cum recto EAB,* [l] *æqualis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, iungatur q; recta IK. Et quia, si à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales sunt; sunt autem & recti anguli BAC, BGI, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterq; vtriq;: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum BE.* [m] *Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quam AB, FK, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, trianguli FKC, æquales sunt: (cum A, F, recti sint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare rectæ BI, CK, inter* [n] *se etiam æquales erunt.* [o] *Cum ergo quoq; sint parallelæ,* [p] *erunt etiam BC, IK, æquales, & parallelæ. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti, quod anguli I, K, oppositis rectis C, B, æquales sint. Dico ergo, quadratum CI, duobus quadratis*

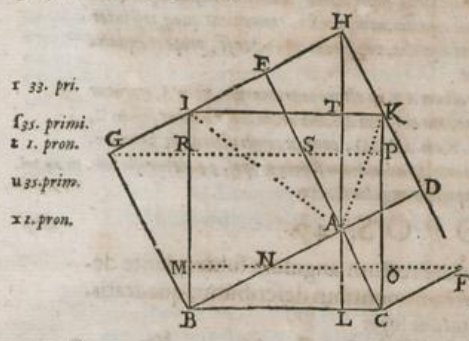


i 34. pri.
k 34. prim.
l 29. primi.
m 26. prim.
n 1. pron.
o 28. prim.
p 33. pri.

BE, CD,

q 34. prim. BE, CD, æquales esse. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipsis BI, CK, parallela erit. Nam quia GE, [q] ipsi BA, æqualis est, & EH, ipsi AD, hoc est, ipsi GI, quæ ipsi AC, siue AD, ostensa fuit æqualis, erit &, addita commun EI, tota HI, toti GE, hoc est, ipsi AB, æqualis. Cum ergo HI, AB, sint etiam parallelæ, [r] erunt quoq; BI, AH, parallelæ & æquales. Eodemq; modo AH, ipsi CK, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur [s] tã quadratũ BE, parallelogrãmo BH, super eandẽ basin AB, q̃ parallelogrãmũ BT, eidẽ parallelogrãmo BH, super eãdẽ basin BI, æquale est, [t] erit quoq; quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Sic etiã quia tã [u] quadratum CD, parallelogrammo CH, super eandem basin AC, quam parallelogrammum CT, eidem parallelogrammo CH, super eandem basin CK, æquale est, [x] erit quoq; quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Totum ergo quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT, CT, compositum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat demonstrandum.

r 33. pri.
s 35. primi.
t 1. pron.
u 35. prim.
x 1. pron.



Aliter. Loco rectæ HTAL, iungantur duæ rectæ AI, AK, & per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergo [y] tam quadratum BE, (ostendemus enim vt prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eiusdem trianguli ABI, super eandem basin BI, duplum est. [z] Erit quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Pari ratione, quia [a] tam quadratum CD, trianguli ACK, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, eiusdem trianguli ACK, super eandem basin CK, duplum est, [b] erit quoq; quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Quamobrem, vt prius, totum quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, constlatum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat ostendendum.

y 41. primi.
z 6. pron.
a 41. primi
b 6. pron.

Aliter. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipsis BC, IK, parallelæ FM, GP, secantes AB, CK, in N, O, & BI, CE, in R, S. Erit [q] BR, ipsi KO, æqualis. Quoniam enim [c] anguli O, R, recti sunt, & OKF, RBG, æquales, quod vterq; angulo ABC, supra ostensus sit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duob. angulis R, B, trianguli GBR, æquales, vterq; vtrisq; Sunt autẽ & latera FK, BG, illis adiacentia æqualia, quod vtrumq; supra sit ostensum ipsi BC, æquale. [d] Igitur & latera KO, BR, æqualia erunt. Itaq; quoniam [c] tam parallelogramma BCFN, BCOM, super eandem basin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, super eandem basin BC, æqualia sunt, estq; parallelogrammum BCPR, parallelogrãmo IKOM, æquale, ob rectas BR, KO, ostensas æquales; (Nam hinc fit, vt si vnum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumq; æqualitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, composito æqualia. [f] Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, æquale sit; erunt quoq; ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonstrandum erat.

q 29. prim.
c 29. prim.
d 26. primi.
e 33. primi.
f 35. primi.

Atq; in hunc modum aliæ demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, varijs demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

Inuentio porro admirabilis, atq; pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quòd se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit; vt theorema hoc inueftigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidisset q; quadratum numerum maioris æqualem esse quadratis numeris reliquorũ, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenit q; eum esse rectum. Id q; in quampluribus alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum: Atq; ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit: firmaq; ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes similiterq; descriptæ, vt ibidem ostendemus.

Cæterum quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, nõ abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atq; ita reperientur quotcunq; alij, si primi illi tres per quemcunq; multiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunq; numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reijce vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunq; par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

Colliguntur ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, è quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN

In quadrato ABCD, ducatur diameter AC. Dico quadratum diametri AC, duplum esse quadrati ABCD. Cum enim in triangulo ABC, angulus B, rectus sit, & erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cum igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia sint, quòd lineæ AB, BC, sint æquales; erit quadratum AC, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ AB, diametri, hoc est, quadrati ABCD. Quod est propositum.

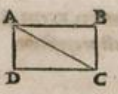


g 47. prim.

II.

QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

In altera parte longiori ABCD, ducatur diameter AC, & quia in triangulo ABC, angulus B, est rectus, h *erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum inæqualium AB, BC, Quod est propositum.*



h 47. prim.

III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

Triangulorum ABC, DEF, anguli A, & D, sint recti, lateraq; opposita BC, EF, æqualia. Dico duo quadrata laterum AB, AC, simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum DE, DF, simul sumptis. Nam quadrata linearum BC, EF, æqualia inter se sunt, cum & ipsæ lineæ inter se ponantur æquales. Quadrato autem lineæ BC, i *æqualia sunt quadrata linearum AB, AC. Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum AB, AC; Et quadrata lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum DE, DF.* k *Quadrata ergo rectarum AB, AC, quadratis rectarum DE, DF, æqualia sunt. Quod est propositum.*



i 47. primi.

k 1. pron.

IV.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

Sint A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus DCE, sitq; DC, recta æqualis rectæ B, & rectæ CE, rectæ A. Ducta deinde recta DE, conuingente duo puncta D, E, constituantur super ipsam duo anguli semirecti DEF, EDF, l *coeantq; rectæ DF, EF, in F. Quoniam igitur in triangulo FDE, anguli FDE, FED, æquales sunt;* m *erunt & latera DF, EF, æqualia, ideoq; & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum DF, EF, æqualia esse quadratis linearum A, & B, hoc est, quadratis linearum CE, & CD. Nam cum in triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant vnum rectum;* n *erit reliquus angulus F, rectus.* o *Quamobrem erunt quadrata linearum DF, EF, æqualia quadrato lineæ DE.* p *Sed eidem quadrato lineæ DE, æqualia sunt quoq; quadrata linearum CD, CE. Igitur quadrata linearum DF, EF,* q *æqualia sunt quadratis linearum DC, EC. Quod est propositum.*



l 13. pron.

m 6. primi.

n 32. primi.

o 47. primi

p 47. prim.

q 1. pron.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor.

Potentia lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantum enim quæuis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatq; cognoscere, quanto maius sit quadratum maioris lineæ A, quam minoris B. Ex quauis linea recta CD, sumatur CE, æqualis rectæ A, & EF, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo EC, semicirculus describatur CGD, & ex F, ducatur FG, perpendicularis ad CD. Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ CE, sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ B, hoc est, rectæ EF, sibi æqualis, quadrato rectæ FG. Ducta enim recta EG, r *erit eius quadratum æquale quadratis rectarum EF, FG, hoc est, quadratum rectæ EC, illi æquale, superabit quadratum rectæ EF, quadrato rectæ FG. Quod est propositum.*

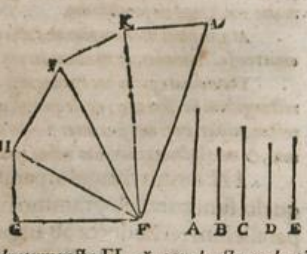


r 47. primi.

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

Sint latera quinq; quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatq; inuenire quadratum æquale omnibus illis quinq;. Fiat angulus rectus FGH, sitq; FG, æqualis rectæ A, & recta GH, rectæ B. Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitq; HI, æqualis rectæ C. Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitq; IK, æqualis rectæ D. Ducta deniq; recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitq; KL, æqualis rectæ E, ducaturq; recta FL. Dico quadratum rectæ FL, æquale esse quinq; quadratis propositis. Quadratum enim rectæ FH, s *æquale est quadratis rectarum FG, GH, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ FI,* t *æquale est quadratis rectarum FH, HI, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ FK,* u *æquale est quadratis rectarum FI, IK, ideoq; quadratis rectarum A, B, C, & D. Deniq; quadratum rectæ FL,* x *æquale est quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod est propositum.*



s 47. primi

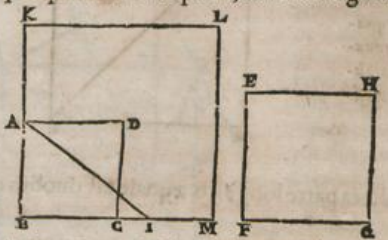
t 47. primi.

u 47. prim.

x 47. prim.

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuſcunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita vt tota figura compoſita ſit etiam quadrata.



Sint duo quadrata ABCD, EFGH, propoſitum a que ſit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ ſit æqualis quadrato EFGH, &c. Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati EFGH. Ducta autẽ recta AI, & producta recta BA, ad partes A, accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturq; quadratum BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctam, æqualem eſſe quadrato EFGH. Quoniam enim quadratum rectæ AI, hoc eſt, quadratum BKLM, [y] *æquale eſt quadratis rectarum AB, BI, hoc eſt, quadratis ABCD, EFGH: ſi auferatur commune quadratum ABCD,* [z] *remanebit figura ADCMLK, æqualis quadrato EFGH. Quod eſt propoſitum.*

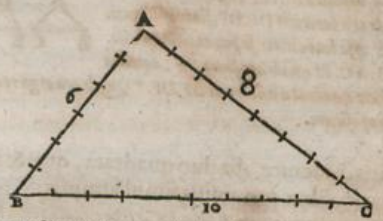
y 47. prim.

z 3. prop.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuſcunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

Sit angulus A, rectus in triangulo ABC, ſintq; primum cognita latera AB, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmorum, & AC, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, nempe quadrati palmi 36. & 64. [a] *æqualia ſunt quadrato rectæ BC, ſi illa coniungantur ſimul, efficietur hoc quadratorum palmorum 100. Latus ergo BC, continebit 10. palmos. Tantum enim eſt latus, ſeu radix quadrata 100. palmorum, vt perſpicuum eſt apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera AB, BC, ſitq; AB, 6. palmorum, & BC, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC,* [b] *æqualia ſunt quadrato rectæ BC, ſi quadratum rectæ AB, quod cõtinet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ BC, quod eſt palmorum 100. remanebit quadratum rectæ AC, 64. palmorum. Latus ergo AC, continebit 8. palmos. Tanta enim eſt radix quadrata, ſeu radix 64. palmorum. Quod eſt propoſitum. Cæterum non ſemper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemue quadratam, vt notum eſt apud Aritmethicos. Vnde latus inuentum ſæpenumero exprimi nequit, niſi per radicem ſurdam, quam vocant: Sed de his alias.*

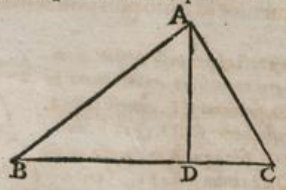


a 47. prim.

b 47. prim.

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus triangulo comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, ſecabitur baſis in partes inæquales, maiorq; pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis à perpendiculari ſecetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiuſque illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.



Cadat primum in triangulo ABC, cuius latus AB, maius ſit latere AC, perpendicularis AD, ad BC, demiſſa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterq; angulus B, C, acutus eſt, vt ex coroll. 2. propoſ. 17. conſtat. Dico ſegmentum BD, eſſe maius ſegmento CD. Quoniam enim [c] *tam quadratum ex AB, quadratis ex AD, BD, quam quadratum ex AC, quadratis ex AD, CD, æquale eſt: Eſt autem quadratum ex AB, maius quadrato ex AC, quod latus AB, latere AC, ponatur maius; erunt quoq; duo quadrata ex AD, BD, maiora duobus quadratis ex AD, CD: Et ablato communi quadrato rectæ AD, reliquum quadratum ex BD, reliquo quadrato ex CD, maius erit. Quare & recta BD, maior erit, quam recta CD, quod eſt primum.*

c 47. prim.

Faciat deinde perpendicularis AD, ſegmentum BD, maius ſegmento CD. Dico latus AB, maius eſſe latere AC. Erit enim quadratum ex BD, quadrato ex CD, maius: Additoq; quadrato communi ex AD; duo quadrata ex BD, AD, duobus quadratis ex CD, AD, maiora erunt. Cum ergo [d] *tam quadratum ex AB, quadratis ex BD, AD, quam quadratum ex AC, quadratis ex CD, AD, æquale ſit; erit quoq; quadratum ex AB, quadrato ex AC, maius; propterea q; & latus AB, latere AC, maius erit. Quod eſt propoſitum.*

d 47. primi

Atq; in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi poſſunt, quæ conſulto, ne lectori moleſti ſimus, hic omittenda cenſuimus, & in alium locum differenda.

Theoremate porro hoc Pythagoreo multo vniuerſalius eſt illud, quod à Pappo demonſtratur in omni triangulo, ſiue illud rectangulum ſit, ſiue non, & de quibuſcunq; parallelogrammis ſuper latera trianguli conſtructis tam rectangulis, quam non rectangulis etiamſi non ſint inter ſe æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo propoſuimus, & meo iudicio generalius adhuc quam Pappus.

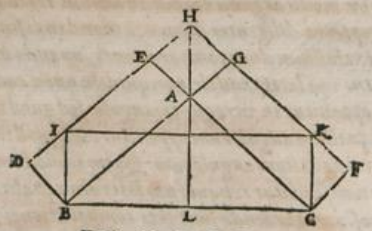
IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſunt parallelogrammo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur.

SIT triangulum quodcunque ABC, constituanturq; super latera AB, AC, parallelogramma quacunq; ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conueniant in H, ducaturque recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus BC, descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipsi AH, iungaturq; recta IK. Quoniam igitur parallelogramma sunt BIHA, CKHA; [a] erit vtraque BI, CK, ipsi AH, æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt BI, CK; [b] quæ cum sint etiam parallelæ, quod eidem AH, parallelæ sint; [c] erunt quoq; BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est BCKI, super latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma AD, AF. [d] Quia ergo æqualia sunt parallelogramma AD, ABIH, quod eandem habeant basin AB, in eisdemq; sint parallelis AB, HD; [e] Est autem ABIH, parallelogrammo IL, æquale, quod illud cum hoc etiam eandem habeat basin BI, in eisdemq; sit parallelis BI, LH: Erit quoq; AD, eidem IL, æquale. Non aliter ostendemus, AF, ipsi KL, esse æquale. Quare parallelogramma AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia sunt. Quod est propositum.



a 34. prim.
b 30. primi.
c 33. prim.
d 31. primi.
e 35. prim.

PAPPVS construit figuram aliter. Nam sumit rectas AC, AE; & AB, AG, in directum positas, ita vt parallelogramma AD, AF, sint æquiangula, habentia angulos AED, AGF, angulo BAC, [f] internos externo æquales, ceu hæc eius figura indicat. Sed nos vniuersalius rem proposuimus, vt manifestum est.



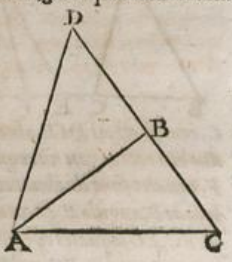
f 29. prim.

THEOR. 34. PROPOS. 48.

xxxviij.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis; Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum ABC, sitque quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, esse rectum. Ducatur namque BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, connectaturque recta AD. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus ABD, rectus est; [g] erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarum BA, BD: Est autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ AD, quadratis rectarum BA, BC, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eisdem quadratis rectarum BA, BC, æquale ponatur; [h] erunt quadrata rectarum AD, AC, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ AD, AC, æquales. Quoniam igitur latera BA, BD, trianguli ABD, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & basis AD, ostensa est æqualis basi AC; [i] erunt anguli ABD, ABC, æquales: Est autem angulus ABD, ex constructione rectus. Igitur & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.



g 47. primi
h 1. 1. prop.
i 8. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.

TRIANGVLORVM COMPARATIONES.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumq; vtrique, continentque angulum angulo æqualem, *k* collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeo totorum triangulorum.

k 4. primi.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumq; vtrique, basisque basi æqualis, *l* intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos concluimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus esse æqualia.

l 8. primi.

TERTIO, cum duo latera duobus lateribus sunt æqualia, vtrumq; vtrique, comprehendunt autem angulos inæquales, *m* ostendit basim maiori angulo oppositum esse maiorem basi minori angulo opposita.

m 24. pri.

QVARTO, cum duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, at bases inæquales, *n* demonstrauit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori basi opposito.

n 25. prim.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualib. angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, *o* probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia,

o 26. prim.

& reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus sequi etiam, tota triangula esse æqualia.

a 37. prim. SEXTO *a* demonstrauit, duo triangula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia.

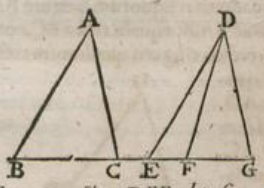
b 38. primi. SEPTIMO *b* ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse.

c 39. prim. OCTAVO *c* docuit, duo triangula æqualia super eandem basim, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas.

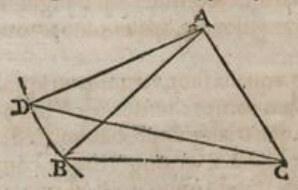
d 40. prim. NONO denique *d* probauit, duo triangula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemque partem constituta, esse inter easdem parallelas.

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propositis vniuersa fere Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi sint. Quemadmodum autem à propos. 26. in scholio propos. 31. exclusimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales sunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo: sed quod in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero vero vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero vero alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas hasce comparationes exclusimus, quod ex iis non sequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in scholio propos. 31. demonstrauimus: Ita quoque à propos. 4. excludendæ sunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri potest basium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, bases æquales esse nequeunt; nisi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppositus, vel est minor recto, vel non minor recto.



SIT enim Isosceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta basi GF, vsque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG, æquale triangulum construatur ABC, cuius latera AB, AC, lateribus DE, DG, æqualia sint, & basis BC, basi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, vtrumque vtrique, angulique B, E, æqualibus lateribus AC, DF, oppositi æquales: & tamen basis BC, maior est basi EF, quod BC, ipsi EG, æqualis sit. Ratio est, quod angulus e *C, acutus est, at DFE, obtusus. Nam cum* e *anguli DFG, & G, æquales sint;* f *& simul sumpti minores* f *duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde DFE, recto maior; quandoquidem* g *duo anguli ad* g *F, æquales sunt duobus rectis. Quod si duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusque B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor, tum demum sequitur, bases BC, EG, æquales esse, &c. Nam si basis BC, minor esset, quam EG; si AB, ipsi DE, superponeretur, congrueret quidem BC, ipsi EG, propter æqualitatem angulorum B, E, sed punctum C, citra G, caderet, vt* h *in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia sunt, quod DF, idem sit, quod AC, ipsi DG, æquale,* h *erunt an-* i *guli DFG, & G, æquales, ac propterea vterque minor recto, quod* i *ambo minores sint duobus rectis. Cũ* k *igitur,* k *duo anguli ad F, sint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc est, C, qui à DFE, non differt, recto maior. Non ergo vterq; angulus C, & G, minor est, aut non minor recto, sed G, quidem acutus, & C, obtusus quod est contra hypothesin. Eodẽ modo, si basis BC, dicatur esse maior basi EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsis DE, DF, & angulo B, æquali ipsi E, & vtroque angulo C, & F, vel minore recto, vel non minore) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritque rursus angulus quidem C, hoc est, G, acutus, & DFE, obtusus, quod est contra hypothesin.*



l 18. primi.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiã colligi potest. Nam sit triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC. Erit l *ergo angulus ACB, maior angulo ABC. Fiat angulus ACD, angulo ABC, æqualis: cadetque CD, supra CB. Describatur quoque ex A, per B, arcus circuli secans CD, in D, iungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus ABC, lateri AC, oppositus, æqualis angulo ACD, lateri AD, opposito: Et tamen bases BC, DC, æquales non* m 7. primi. *sunt. Si enim æquales essent, essent tam duæ rectæ AB, AD, quam duæ CB, CD, æquales* m *quod est absur-* n 8. primi. *dum, vel etiam, anguli BAC, DAC,* n *æquales essent, pars & totum, quod est absurdum.*

POSTRE-

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehensus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam potest inferri. Sit namque triangulum ABC, cuius vtrumque latus AC, CB, maius sit latere AB, & BC, maius, quam AC, Erit a ergo angulus BAC, maior angulo ABC. Si igitur fiat angulus ABD, angulo BAC æqualis, cadet BD, infra BC. Describatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadet, secabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD, erunt duo latera AB, AC, duobus lateribus AB, AD, æqualia; vtrumque vtrique, angulusque BAC, illis lateribus AB, AC, comprehensus, æqualis angulo ABD, qui lateri AD, opponitur: Et tamen bases BC, BD, æquales non sunt. Alias tam rectæ AC, AD, quam BC, BD, æquales essent b quod est absurdum. Vel etiam, c anguli BAC, BAD, æquales essent, totum & pars, quod est absurdum.



a 18. primi.

b 7. primi.
c 8. primi.

RECTE igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

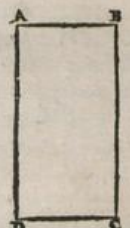
DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentiis linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadratæ partium cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maximè necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunq; rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo ABCD, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoq; esse. Nam cum parallelæ sint AD, BC,[a] erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam vero[b] quilibet suo opposito est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.



a 29. prim.

b 34. prim.

DICIT itaq; Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur sub duabus lineis rectis AB, AD; vel sub AD, DC; vel sub DC, CB, vel denique sub AB, BC: quoniam quælibet huiusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem vt AB, vel DC, eius longitudinem, altera vero, vt AD, vel BC, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturq; longitudo nimirum, atq; latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namq; animo concipiatur recta AB, deorsum secundum rectam AD, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum AD, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum ABCD. Idem fiet, si AD, ponatur moueri in transuersum secundum rectam, AB, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

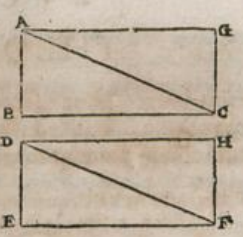
ITAQVE parallelogrammum rectangulum; quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumq; vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammum ABCD: quoniam latus AB, æquale est rectæ E, & latus AD, rectæ F.

E
F

PERSPICVVM autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis sit lineæ oppositæ, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

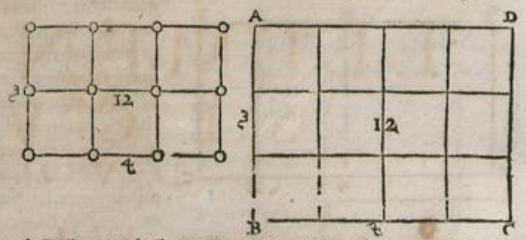
ITEM manifestum est, si duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraq; vtriq;, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectan-

rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ AB, BC, æquales rectis DE, EF, vtraq; vtrique. Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentum sub AB, BC, æquale esse parallelogrammo rectangulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cum latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, EF, trianguli DEF, & anguli B, & E, æquales, nempe recti; [c] erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt.



[c] 4. prim.

HABET autem comprehensio hæc parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammum ABCD, comprehensum sub duabus rectis AB, BC, quarum illa sit 3. palmorum, hæc autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui quidem ex ductu lineæ AB, 3. palmorum in lineam BC, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumque est Arithmeticis, atque Geometris, demonstraturque à Ioanne Regiomont. lib. 1. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu linoæ AB, in lineam BC, vel (quod idem est) ex ductu lineæ BC, in lineam AB. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur: quemadmodum etiam idem producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.



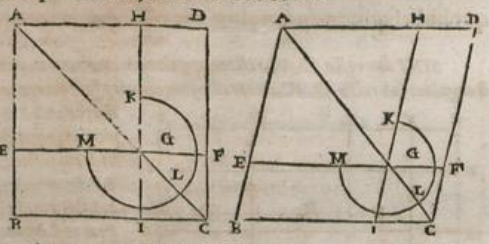
OBITER quoq; monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita vt nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duab. diuaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelogrammum appellant AC, vel BD.



II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

In parallelogrammo ABCD, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter AC, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ EF, HI, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo EH, IF, dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo BG, GD, complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaq; figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex IF, vna cum duobus complementis BG, GD, qualis est figura EBCDHGE. quam complectitur circunferentia KLM, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura FDABIGF, composita ex parallelogrammo EH, circa diametrum, & duobus complementis BG, GD, Gnomon appellabitur.



SED iam ad propositiones secundi huius lib. veniamus, in quibus sane operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquisite intelligendis ponere. propter multiplicem earum vsum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commerciis. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur esse nihil. Ex aliis deinde propositionibus huius lib. eliciuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahuntur, multiplicantur, atq; diuiduntur numeri surdi, (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possunt; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorum, quæ neq; per Diuinam potentiam in numeris possunt exhiberi, quod hæc res contradictionem implicet, vt Philosophi, atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam num. 18. adiecta, cum vtraq; radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, quod illa paulo minor sit, quam 3. hæc vero paulo maior quam 4. Et tamen summa, quæ ex vtraq; fit, colligitur ex vi propositionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulo maior est, quam 7. Præterea ex propos. 12. & 13. eiusdem huius lib. area & quantitas cuiusuis trianguli exquisitissime cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Postremo vltima propos. huius lib. omnem figuram rectilineam licet irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt vere aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem sit perexiguus, vtilitates vero contineat prope infinitas.

THEOR.

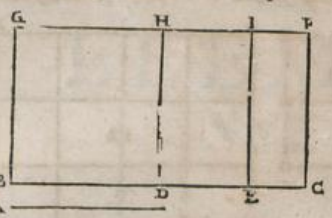
I. # THEOR. I. PROPOS. I.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secetur que ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & BC, quarum BC, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta BD, DE, EC. Dico rectangulum sub A, & BC, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & BD; Item sub A, & DE; Item sub A, & EC, comprehenso.

Rectangulum enim BF, comprehendatur sub A, & BC, hoc est, recta GB, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturque recta FG. Nam rectæ BG, CF, *a* parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & *b* æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. *c* Igitur erunt quoque FG, BC, parallelæ, & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit BF, contentum sub A, siue GB, & BC, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipsi BG, vel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ sint ipsi BG, *d* inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eædem, cum ex constructione parallelogramma sint BH, BI, *e* æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG, æqualis est rectæ A, erit rectangulum BH, comprehensum sub insecta linea A, & segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE. Item rectangulum EF, sub A, & segmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF: perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secetur que ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

a 28. prim. b 1. pron. c 33. primi. d 30. primi. e 34. primi.



SCHOLIVM.

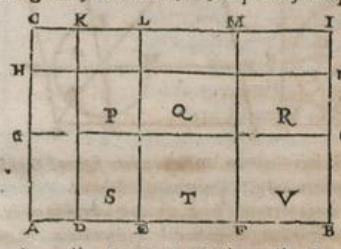
QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus. si diuidantur, vt linea; non absre fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaq; propositis duobus numeris quibuscunque vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.

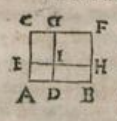
SINT duæ rectæ AB, AC, rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. Dico rectangulum sub rectis AB, AC, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub AD, AG; AD, GH; AD, HC, DE, AG, DE, GH; DE, HC; EF, AG; EF, GH; EF, HC; FB, AG; FB, GH; FB, HC, continentur. Compleatur rectangulum AI, ducanturque DK, EL, FM; parallelæ ipsi AC, vel BI: Item HN, GO, parallelæ ipsi AB, vel CI; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum AS, continetur sub AD, AG; & GP, sub AD, GH; & HK, sub AD, HC; (quod rectæ GS, HP, ipsi AD, sint æquales:) Item rectangula DT, SQ, PL, continentur sub DE, AG; DE, GH; DE, HC; (* quod DS, SP, PK, ipsis AG, GH, HC, æquales sint, & ST, PQ, ipsi DE,) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur sub EF, AG; EF, GH; EF, HC: nec non rectangula FO, VN, RI, sub FB, AG; FB, GH, FB, HC, perspicuum est, rectangulum sub AB, AC, æquale esse rectangulis sub singulis partibus AD, DE, EF, FB, & quolibet segmentorum AG, GH, HC, comprehensis. Quod est propositum.*

f 34. primi. g 34. prim.



SI sint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ AB, AC, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub AB, AC, vna cum rectangulo comprehenso sub partibus AD, EC, æquale esse rectangulis contentis sub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo sub DB, AE, comprehenso. Compleatur enim rectangulum AF, agaturque per D, recta DG, ipsi AC, vel BF, parallela; necnon per E, recta EH, secans DG, in I, parallela ipsi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale est rectangulis EF, DH, AI: si addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe sub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehensa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, sub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehensis æqualia. Quod est propositum.



IN

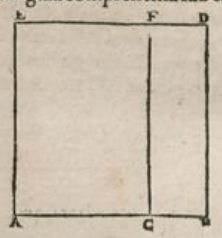
IN numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. poſterior vero in duas, 3. 5. diuidatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producuntur ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntque ſimul additi 70. vt volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, ſi ijdem numeri ſecentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2. 6. manifeſtum quoq; eſt 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

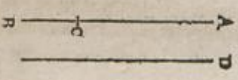
SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur: æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadrato totius lineæ AB. Deſcribatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ *a* æqualis erit rectæ AE, hoc eſt, rectæ AB, cui æqualis eſt recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis eſt rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia ſint quadrato AD, perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub AB, & ſegmentis AC, CB, æqualia eſſe quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea ſecta ſit vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 34. prim.

ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub inſecta D, & recta AB, hoc eſt, quadratum rectę AB, *b* æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur ſub D, inſecta, hoc eſt, ſub AB, & ſingulis ſegmentis AC, CB, quod eſt propoſitum.

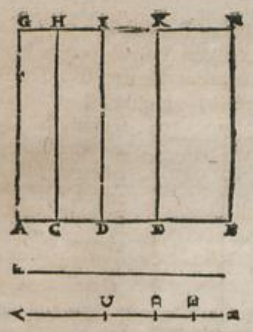


b 1. ſec.

SCHOLIVM.

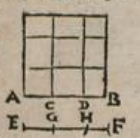
QVANQVAM Euclides ſecundum hoc theorema proponat de linea recta diuiſa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eiſdem medijs demonſtrabitur, ſi linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifeſtum eſt. In numeris vero idem perſpicitur hoc modo. Numerus 10. diuiſus ſit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales eſſe 100. quadrato ipſius numeri 10. vt manifeſtum eſt. Simili modo ſi numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipſius numeri 10.

SIMILI modo demonſtrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.



SI linea recta ſecetur in quotcunque ſegmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta AB, diuiſa in partes quotcunque AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, deſcriptum, æquale eſſe rectangulis, quæ ſub ſingulis partibus AC, CD, DB, & quolibet ſegmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc eſt, rectangulis ſub AC, AC; AC, CD; AC, DB; CD, AC; CD, CD; CD, DB; DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehenſis. Sumpta enim recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AB, diuiſaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales. Erit ex iis, quæ ad propoſ. 1. huius libri demonſtrauimus, rectangulum ſub AB, EF, hoc eſt, quadratum ipſius AB, æquale rectangulis ſub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, ſint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis ſub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC, DB, CD; DB, DB. Quod eſt propoſitum.

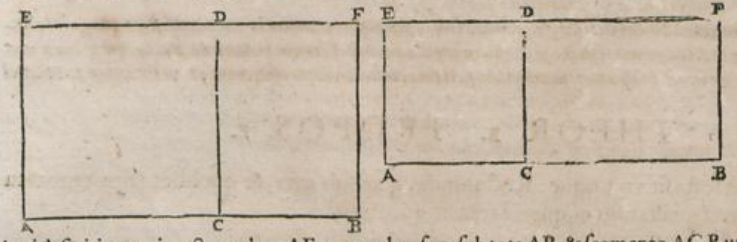


IN numeris idem eſt manifeſtum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perſpicuum eſt.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

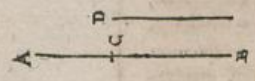
SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.

LINEA recta AB, diuisa sit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtrouis segmento, vt AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmẽti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cũ ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, rectæ, rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod erat ostendendum.



ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, *a* æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum.

a 1. sec.



SCHOLIVM.

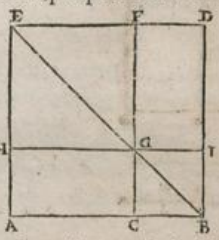
VT hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

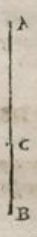
THEOR. 4. PROPOS. 4.

iv. SI recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA linea AB diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE æqualia sunt; *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadẽ ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex iis, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est, *d* cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum sint *f* æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod existente vno angulo recto; nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod latus HG, *g* æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sunt rectæ CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc est, *h* rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis AC, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 5. primi. *b* 32. prim. *c* 32. primi. *d* 29. pri. *e* 6. primi. *f* 34. prim. *g* 34. prim. *h* 34. prim.





ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, *i* erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur. Rectangulum autem sub AB, AC, comprehensum, *k* æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.

i 2. sec. *k* 3. sec.

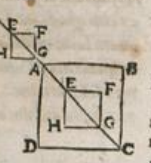
COROLLARIVM I.

Hinc manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula CI, FH, quæ sunt circa diametrum BE, esse quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrũ quadrati, quæ cõmunem aliquem angulũ habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma CI, FH. Illud enim angulum habet ABD, communem cum quadrato, hoc vero angulũ AED.

Idem

Idem nihilominus verum est de quibuscunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum C, quadrati BD, consistat parallelogrammum FH, sive intra quadratum, sive extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati BD, parallela. Dico FH, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint AB, EF, [l] *erunt anguli BAC, FEG, æquales, internus, & externus; atque eadem ratione anguli BCA, FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC, BCA, semirecti, vt ostensum iam fuit. Igitur & anguli FEG, FGE, semirecti erunt:* [m] *propterea que latera EF, FG, illis opposita, æqualia,* [n] *& angulus F, rectus. Quare cum EF, FG, latera* [o] *æqualia sint oppositis lateribus GH, HE, æquilaterum erit parallelogrammum FH: Sed & rectangulum est, ex iis, quæ ad defin. 1. huius lib. ostendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod est propositum.*



l 29. prim.
m 6. prim.
n 32. primi.
o 34. prim.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex demonstratione huius. propos. 4. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit angulos AEB, DEB, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propos. 34. lib. 1. demonstrauimus.

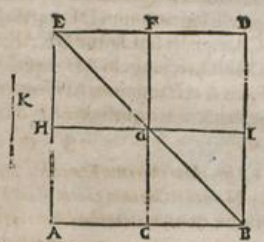
SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus vtcunque in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonstrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.

SIT enim primum linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa AB, bifariam in C, si fiat constructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atque inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, omnesque anguli recti, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. Quare eum quadratum AD, æquale sit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratum lineæ AB, quadruplum quadrati lineæ AC, hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi AC. Est enim vtraque dimidium lineæ AB.



BREVIVS. p *Quadratum rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo sub rectis lineis AC, CB, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æquilium AC, CB æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus AC, CB, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ AC; Constat quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ AC; cum æquale sit quatuor quadratis, quorum vnumquodq; quadrato rectæ AC, æquale est.*

p 4. sec.

SIT deinde quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplum esse lateris K. Nam diuisa rectæ AB, bifariam in C, vt AB, dupla sit ipsius AC; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ AC. Ponitur autẽ & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia sunt quadrata rectarum K, & AC, & ipsæ propterea rectæ K, & AC, æquales: Est autem AB, ex constructione ipsius AC, dupla. Dupla igitur etiam erit ipsius K. Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.

CÆTERVM ex hac propos. 4. colligi potest modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quinis numerus quadratum quoq; numerum constituat. Si namq; ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in se multiplicato productus, is qui quæritur. Vt si datus sit numerus 15. inueniendusq; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in se multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. constituit 64. quadratum numerum, cuius latus est 8. nempe numerus vna vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hæc est. Quoniam quadratum AD, rectæ AB, q *æquale est duobus quadratis FH, CI, partium AC, CB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub AC, CB; si gnomonem HBF, qui cum quadrato FH, constituit totum quadratum AD, ponamus 15. quantus nimirum est datus numerus: quadratum autem CI, statuamus 1. atque adeo latus quoq; eius CB, 1. erit vtrumuis rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde segmentum AC, 7. vt nimirum ex AC, in CB, quæ est 1. fiant 7. Quadratum ergo FH, erit 49. Totum autem latus AB, erit 8. nempe vna vnitate maius, quam AC, latus quadrati FH. Hæc ergo est causa, cur ex dato numero, hoc est, ex gnomone HBF, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium statuamus latus quadrati FH, quæsiti.*

q 4. sec.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet esse impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi possit bifariam. Regula nihilominus vera est, quicunque numerus datus sit.

IDEM efficiemus, si ex dato numero quemuis quadratum numerum demamus, & residui dimidium per latus quadrati ablati partiamur. Quotiens enim erit latus quadrati quæsiti. Vt si detur numerus 45. pro gnomone HBF, auferemus numerum quadratum 9. pro quadrato CI, cuius latus est 3. Residui 36. dimidium est 18. pro AG, quod diuisum per 3. hoc est per CG, latus quadrati ablati CI, facit Quotientem 6. pro latere GH, cuius quadratum FH, nimirum 36. additum ad gnomonem HBF, nimirum ad 45. efficit quadratum numerum 81. Vt autem fractiones euitentur, dandus erit numerus, ita vt, ablato quadrato numero aliquo, residuus numerus, habeat dimidium numerum, quem latus quadrati ablati numeret.

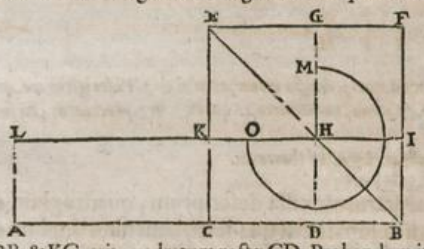
VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quinis numerus subtractus relinquat numerum quoq; quadratum. Nam si ex numero dato demantur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si

rursum datus sit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus est 7. quod perpetuo est vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam huius regulæ facilis est ex eadem figura huius propo. 4. Nam si gnomonem HBF, qui ex quadrato AD, subtractus reliquum facit quadratum FH, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus. Quadratum vero CI. statuamus 1. atque adeo & latus eius CB, 1. erit vtrumlibet rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde & segmentum AC, 7. vt supra dictum est, & tota linea AB, 8. &c.

v. ## THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta AB, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta CD, qua nimirum dimidia CB, minus segmentum DB, superat, vel qua maius segmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus AD, DB, comprehensum, vna cum quadrato rectæ CD, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ CB. Describatur enim CF, quadratum super dimidia CB; & ducta diametro BE, ducatur ex D, recta DG, parallela rectæ BF, secans diametrum BE, in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela IK: Item ex A, rectæ CE, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta rectæ DB, æqualis: *a* Est autem & KH, ipsi CD, æqualis. Quare rectangulum AH, comprehendetur sub AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CD; Probandum itaque est, rectangulum AH, vna cum quadrato KG, æquale esse quadrato CF. Quoniam ergo *b* complementa CH, FH, æqualia sunt; si addatur commune quadratum DI, erit parallelogrammum DF, parallelogrammo CI, æquale: *c* Est autem & AK, eidem CI, æquale, quod & bases AC, CB, æquales sint. Igitur DF, AK, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur CH, erit gnomon MNO, rectangulo AH, æqualis. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, æqualia sint quadrato CF; erit & rectangulum AH, vna cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.



a 34. prim.

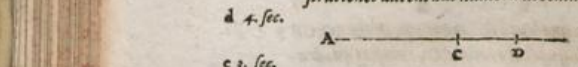
b 43. prim.

c 36. primi.

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho, quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus vsque ad 11, exclusiue faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propositum exequemur. Quia quadratum ex CB, d æquale est quadratis ex CD, DB, vna cum rectangulo bis sub DB, CD; Rectangulo autem sub DB, CD, vna cum quadrato ex DB, e æquale est rectangulum sub DE, CB; Erit quadratum ex CB, æquale reliquo quadrato ex CD, vna cum reliquo rectangulo sub DB, CD, & rectangulo sub DB, CB, vel sub DB, AC. Atqui rectangulis sub DB, AC, & sub DB, CD, f æquale est rectangulum sub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CB, æquale erit quadrato ex CD, vna cum rectangulo sub DB, AD; hoc est, rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex CD; æquale erit quadrato ex CB. Quod erat demonstrandum.

d 4. sec.



e 3. sec.

f 1. sec.

IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propos. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoq; conficiat numerum. Nam si dato numero adijciatur 1. & à compositi numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. si demantur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est vna vnitate maius latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum AH, cum quadrato KG,

g 5. sec.

& æquale sit quadrato CF; si rectangulum AH ponatur 15. sicut numerus datus; at vero quadratum DI. statuatur 1. ac proinde latus DB, quoq; 1. erit recta AD, 15. vt nimirum ex AD, in DB, gignatur 15. rectangulum videlicet AH. Addita ergo 1. erit tota linea AB, 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur CD, 7. latus nimirum quadrati KG.

HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. diuidi possit bifariam.

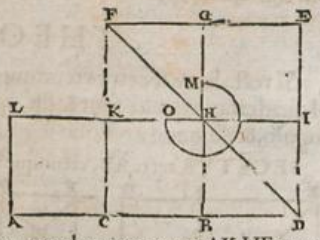
E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adijciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuo minus est vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadem figura huius propos. 5. Nam si rectangulum AH, quod ex quadrato CF, ablatum relinquit quadratum KG, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum DI. ponatur 1. atque adeo & DB, eius latus 1. erit tota AB, 16. & eius dimidium CB, 8. &c.

vj. ## THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECE

SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita AD, & DB, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale esse quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adiecta BD, componitur. Describatur namque CE, quadratum super CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, secans diametrum DF, in H, puncto; per quod agatur IK, parallela rectæ CD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, secans IK, productâ in L. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: *a* Est autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur sub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque est, rectangulum AI, vna cum quadrato KG, æquale esse quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, *b* æquale est parallelogrammo CH, quod bases AC, CB, æquales sint: *c* Est autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter se. Addito ergo communi CI, erit rectangulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, sint æqualia; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, &c. Quod erat demonstrandum.

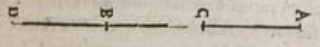


a 34. primi.
b 36. primi.
c 43. primi.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex CD, [d] *æquale est quadratis ex* CB, BD, *vna cum rectangulo bis sub* DB, CB, *hoc est, quadratis ex* CB, BD, *vna cũ rectangulis sub* DB, CB, *& sub* DB, AC: *(sumpta* AC, *semel pro* CB, *quæ illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulis sub* DB, AC; DB, CB; *& sub* DB, DB, *(quod est quadratum ex* DB,) [e] *æquale rectangulum sub* DB, *& tota* AD. *Igitur quadratum ex* CD, *æquale est reliquo quadrato ex* CB, *vna cum rectangulo sub* DB, AD: *Hoc est, rectangulum sub* AD, DB, *vna cum quadrato ex* CB, *æquale est quadrato ex* CD. *Quod demonstrandum erat.*

d 4. sec.



e 1. sec.

CÆTERVM *si rem attentius considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6. per præcedentem 5. facillime posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Brescius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi professor, animaduertit. Sit enim recta* AB, *secta in* C, *bifariam, & ei addita recta quantacunque* BD. *Dico rectangulum comprehensum sub tota* AD, *composita, & adiecta* BD, *vna cum quadrato dimidiæ* CB, *æquale esse quadrato rectæ* CD, *ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque rectæ* AD, *ex altera parte recta* AE, *quæ adiectæ* BD, *æqualis sit, erit tota* ED, *secta in* C, *æqualiter, & in* B, *inæqualiter, quod* EA, AC, *ipsis* DB, BC, *æquales sint. Recta quoque* EB, *rectæ* AD, *æqualis erit, quod ea, ipsi* DB, *sit æqualis, &* AB, *vtrique communis.* [f] *Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus* EB, BD, *vna cum quadrato intermediæ sectionis* CB, *hoc est, rectangulum sub* AD, BD, *vna cum quadrato dimidiæ* CB, *æquale erit quadrato dimidiæ* CD, *hoc est, quadrato rectæ ex dimidia* CB, *datæ rectæ* AB, *& ex adiectæ* BD, *compositæ. Quod est propositum.*

f 5. sec.

SECETVR iam numerus 10. bifariam (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturque ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero composito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim AD, *superet* CD, *magnitudine* AC, *hoc est,* CB; *&* CD, *superet* BD, *eadem magnitudine* BC: *habebunt tres lineæ* AD, CD, BD, *proportionalitatem Arithmeticam; quandoquidem prima* AD, *superat secundam* CD, *eodem excessu* AC, *siue* CB, *quo secunda* CD, *tertiam* BD, *superat. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis* AD, BD, *vna cum quadrato excessus* CB, *æquale esse quadrato lineæ mediæ* CD; *perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Sẽper enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter se coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quæ nimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet, si tres rectæ sint datæ* AD, CD, BD. *Si namque ex prima* AD, *abscindatur* DC, *æqualis mediæ, & ex media hac* DC, *auferatur tertia* DB, *erit* AB, *(excessus inter primam & tertiam) secta bifariam in* C, *eique addita tertia* BD. *Cum enim* BC, *excessus sit inter mediam* CD, *& tertiam* BD, *qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi* AC, *nempe excessui inter primam* AD, *& mediam* CD; *erit necessario* AB, *secta in* C, *bifariam. Eademque ratio est in aliis. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.*

EX hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam si ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariam secetur, erit quadratus numerus huius dimidij is, qui quæritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quæsitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerum 64. cuius latus 8. vna vnitate, maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta est ex hac 6. propos. Cum enim rectangulum AI, *cum quadrato* GK, [g] *æquale sit quadrato* CE; *si rectangulum* AI, *statuatur 15. at quadratum* BI, *1. ideoq; & latus* BD, *1. erit tota linea* AD, *15. vt nimirum multiplicata in* BD, *1. producat rectangulum* AI *15. Ablato igitur 1.* BD, *remanet* AB. *14. cuius dimidium 7. dabit* CB, *latus quadrati* KG, *quæsiti.*

g 6. sec.

NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.

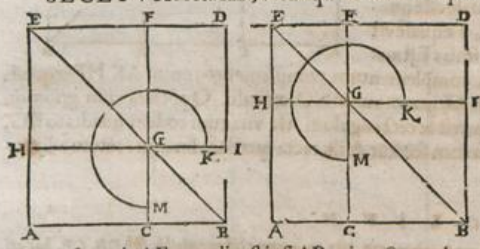
VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1 & reliqui numeri dimidio adiciatur rursus 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est late-

re inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum AI, quod ex quadrato CE, subtractum relinquit quadratum KG, statuatur 15. at quadratum BI, ideoq; & BD, eius latus 1. erit tota linea AD, 15. vt dictum est. Dempta ergo 1. BD, erit AB, 14. cuius dimidio CB, quod est 7. si rursus apponatur 1. fiet latus CD, 8. quod quæritur, &c.

vij. ## THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI recta linea secetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cum quadrato reliqui segmenti CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti

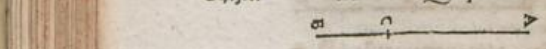


a 34. prim.

AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehensum erit sub eisdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, vna cum quadrato CI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale est quadratum AD; si apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

b 4. sec. *ALITER. Quia quadratum ex AB,* [b] *æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; si addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB. Sed rectangulo sub AC, CB, vna*



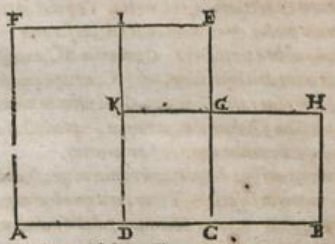
c 3. sec. *cum quadrato ex AC,* [c] *æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.*

IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitque maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur enim quadrata AE, CH, & agatur DI, ipsi CE, parallela, producaturque HG, ad K. Itaque quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi DC, erit tota AC, hoc est, CE toti DB, æqualis: Est autem & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit CH. Igitur & reliqua GE, reliqua DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & IE, ipsi DC, sit æqualis, erunt GE, IE, æquales; ideoque IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est enim AC, vtrique lineæ AF, DB, & CB, vtrique AD, BH, æqualis) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus AC, CB, vna cum quadrato IG, excessus DC. Quod est propositum.



SCHOLIVM.

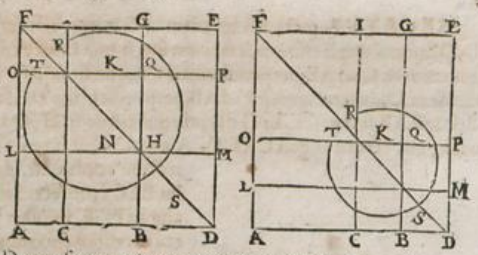
IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

viij. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

SIT

SIT recta AB, in C, diuisa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub AB, & segmento siue maiore, siue minore CB, vna cum quadrato reliqui segmẽti AC, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento CB, componitur. Producatur enim AB, versus dictum segmentum CB, ad D, sitq; BD, recta æqualis segmento CB; & super tota AD, quadratum describatur AE. Ducta autẽ diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipsi DE, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipsi AD, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, [a] æqualis est rectæ AC, erit OI, quadratum segmenti AC. Rursus [b] quia NH, æqualis est rectæ CB, erit NQ, quadratum segmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ BH, HQ, æquales sunt segmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehensa erunt sub AB, & segmento CB, [c] cum LH, sit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cum NH, HM, rectæ [d] æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc est, rectæ LH, hoc est, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erunt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonẽ RST, cõponentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmẽto CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.



a 34. prim.
b 34. prim.
c 34. prim.
d 34. prim.

SCHOLIVM.

Aliter, quia quadratum ex AD, [e] æquale est quadratis ex AB, BD, vna cum rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: At quadrata ex AB, BC, [f] æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC: Erit quadratum ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.

e 4. sec.
f 7. sec.

Secetur iam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

POTEST propositio hæc 8. ita etiam proponi.

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adiiciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti.

Nam recta AB, secta est in C, vtcunq;, eiq; addita BD, segmento CB, æqualis, demonstratum q; est, quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB, & adiecta BD, siue dicto segmento CB, vna cum quadrato alterius segmenti AC.

Item sic.

SI linea recta secetur bifariam, eique in rectum adiiciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

Nam recta DC, secta est bifariam in B, eiq; addita CA, probatum q; fuit, quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub AB, composita ex BC, dimidia, & adiecta AC, & sub dimidia CB, vna cum quadrato adiectæ AC.

Iam vero ex hac quoq; propos. 8. inueniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati demantur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratum 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum AH, quater sumptum, cum quadrato OI, [g] æquale est quadrato AE, si rectangulum AH, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at vero quadratum CH, adeo q; & CB, eius latus, 1. erit linea AB, 8. vt ducta in CB, 1. faciat 8. Ablata ergo 1. reliquum erit AC, latus quadrati OI, 7. quod quæritur.

g 8. sec.

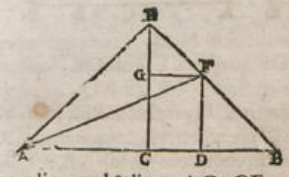
Vt autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerum diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

Contra, inueniemus quoq; numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namq; ad quartam partem numeri dati addatur 1. conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus 32. si ad quartam eius partem 8. adiiciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper est vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis RST, qui ex quadrato AE, sublatus relinquit quadratum OI, hoc est, si rectangulum AH, quod gnomonis RST, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum BM, ideo q; & latus eius BD, 1. erit linea AB, 8. vt dictum est, ac proinde totum latus AD, 9. ex cuius quadrato AE, quod est 81. si auferatur gnomon RST, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum OI, 49. cuius latus AC, est 7. quandoquidem AB, erat 8. & CB, hoc est, BD, illi æqualis, 1. quod quidem latus AC, perpetuo vna vnitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

viiij.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico quadrata segmentorum inæqualium AD, DB, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia sectionum CD. Educatur enim ex C, ad AB, perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectæ EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, secans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipsi AB, secans CE, in G, ducaturque tandem AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æ-
a 5. primi. qualia sunt, [a] erunt anguli CAE, CEA, æquales: Est autem angulus ACE, rectus: Reliqui igitur [b] anguli alium
b 32. prim. rectum conficient, ideoque AEC, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia tri-
c 29. pri. anguli FGE, angulus EGF, [c] æqualis est recto ECB, externus interno; [d]
d 32. primi. erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: Ostensum autem est, angulum


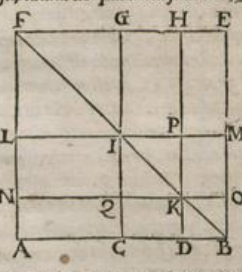
e 6. prim. FEG, esse semirectum. Igitur & EFG, semirectus erit, propterea que anguli EFG, FEG, æquales erunt, [e] ideoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in tri-
f 47. prim. angulo ACE, angulus C, rectus sit, [f] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quod & lineæ AC, CE, æquales sint. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC.
g 47. primi Rursus, quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est, [g] erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum EG, GF. Igitur quadra-
h 34. prim. tum lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ CD. Est enim CD, [h] recta rectæ FG, æqualis; cum CF, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla sunt duorum qua-
i 47. prim. dratorum linearum rectarum, AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum AE, EF, [i] æqualia quadrato rectæ AF; & quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectæ DF, æquale est quadrato rectæ DB. Ostensum enim est rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

k 4. sec. *Aliter. Quia quadratum ex linea recta AD, descriptum,* [k] *æquale est quadratis descriptis ex AC, CD, vna cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis AC, CD, comprehenso; si commune apponatur quadratum ex DB, erunt duo quadrata ex AD, DB, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, DB, vna cum rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD; Atqui qua-*
l 7. sec. *drato ex DB, vna cum rectangulo bis sub BC, CD,* [l] *æqualia sunt quadrata ex BC, seu AC, & ex CD. Quadrata igitur ex AD, DB, æqualia sunt bis quadratis ex AC, CD; Ac propterea quadrata ex AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD. Quod ostendendum erat.*

Aliter ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, æqualis est, & superat CB, ipsam CD, recta DB; superabit quoq; AC, ipsam CD, eadem recta DB. Quare, vt ad 7. propos. huius libri demonstrauimus, quadrata rectarum AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis vna cum quadrato rectæ DB; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, vna cum quadrato rectæ DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Sed quadra-
m 4. sec. *tis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis* [m] *est æquale quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.*

Iam vero rursus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

Quod si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt præcedentes, hoc modo. Descripto quadrato AE, totius lineæ AB, ductaq; diametro BF, ducantur per C, D, lateribus AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum BF, in punctis, I, K, per quæ lateribus AB, FE, parallelæ agantur LM, NO, secantes CG, DH, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. pro-
n 34. prim. *pos. 4. huius lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH,* [n] *est* [g] *LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK, ipsi AD, æqualiz erunt NH,*


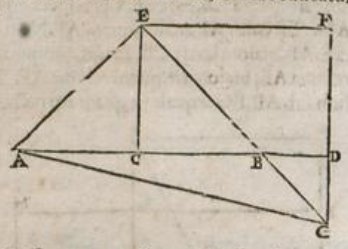
DO, quadrata partium inæqualium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatæ lineæ AC, & intermediæ sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO, superant quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO, & rectangula NI, IH, æqualia quadratis LG, QP, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cum hæc bis in illis contineantur. Quod autem tria hæc rectangula DO, NI, IH, æqualia sint quadratis LG, QP, ita ostendetur. Rectangulum NI, o *æquale est rectangulo QM, quod rectæ*
o 36. prim. *NQ, QO,* p *æquales sint æqualibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratum QP; &*
p 34. prim. *insuper KM. Si ergo KM, DO, IH, æqualia sint quadrato LG, erunt necessario DO, NI, IH, æqualia duobus quadratis LG, QP. Esse autem KM, DO, IH, æqualia quadrato LG,*
q 36. primi *sic demonstrabimus.* q *Rectangula KM, DO, simul æqualia sunt ipsi PE, quod rectæ BM,*
r 34. prim. *ME, æquales sint, cum BM, æqualis sit ipsi CB, ob quadratum CM,* [r] *& ME, ipsi FL, hoc est, ipsi LI, ob quadratum LG, hoc est,*
s 34. primi. *ipsi AC. Addito ergo communi IH, erunt KM, DO, IH, æqualia ipsi IE, hoc est, quadrato LG:* [t] *quod IE, LG, æqualia sint, ob*
t 36. prim. *rectas LI, IM,* [u] *quæ æqualibus AC, CB, æquales sunt. Quod est propositum.*
u 34. prim.

THEOR. 10. PROPOS. 10.
X.

SI recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati

SECE-

SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Super AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & iungantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur DF, ipsi CE, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G, & per E, ducatur rectæ CD, parallela EF, secans DF, in F, iungaturque recta AG. Ostendetur iam, angulum AEB, esse rectum, vt in præcedenti propos. & CEB, semirectum; [a] ideoq; eius alternũ EGF, semirectum quoque; [b] Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo CF, recto angulo C, opponatur. [c] Igitur & reliquus FEG, semirectus erit, & propterea ipsi EGF, æqualis. Quare [d] rectæ EF, FG, angulis FEG, EGF, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas BD, DG, esse æquales, propterea quod angulus BDG, sit rectus, & BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, [e] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rursus quia quadratum rectæ EG, [f] quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG, æquale est; erit quoq; quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc est, rectæ CD, [g] cum CD, recta æqualis sit rectæ EF. Duo igitur quadrata rectarum AE, EG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, æquale est [h] quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ AG, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis AD, DG, describuntur. Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ DG, æquale sit quadrato rectæ BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Itaq; si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

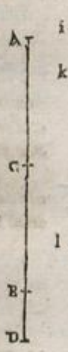


a 29. prim.
b 34. prim.
c 32. primi.
d 6. pri.
e 47. prim.
f 47. prim.
g 34. prim.
h 47. prim.

SCHOLIVM.

Aliter. Quia quadratum ex AD, [i] æquale est quadratis ex AC, CD, vna cum rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD; si commune addatur quadratum ex BD, erunt duo quadrata ex AD, BD, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, BD, vna cum rectangulo bis sub BC, CD. [k] Sed quadrato ex BD, vna cum rectangulo bis BC, CD, æqualia sunt quadrata ex CD, BC, hoc est, quadrata ex AC, CD. Igitur quadrata ex AD, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CD, bis; Ac proinde quadrata ex AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD; Quod erat demonstrandum.

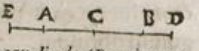
Aliter ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, est æqualis, & superat CD, ipsam CB, recta BD; superabit quoq; CD, ipsam AC, eadem recta BD. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. ostendimus, quadrata ex AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis, vna cum quadrato rectæ BD; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, vna cum quadrato rectæ BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Atqui quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis [l] æquale est quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.



i 4. sec.
k 7. sec.
l 4. sec.

Numerus 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quiuis 3. vt totus numerus compositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

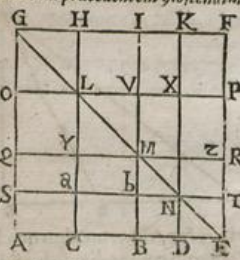
Sed & hæc propos. 10. facile ex præcedente 9. demonstrabitur, quemadmodum supra demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta AB, secta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunq; BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD simul dupla esse duorum quadratorum rectarum AC, CD, simul. Addita namq; rectæ AD, ad partes A, recta AE, quæ adiectæ BD, æqualis sit; erit tota ED, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam,



quod EA, AC, ipsis DB, BC, æquales sint. Recta quoq; EB, rectæ AD, æqualis erit, quod EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, vtriq; communis. [m] Quadrata igitur rectarum EB, BD, hoc est, rectarum AD, BD, dupla erunt quadratorum rectarum EC, CB, hoc est, rectarum CD, AC. Quod est propositum.

m 9. sec.

Quod si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta AD, ad E, vt DE, sit adiectæ lineæ BD, æqualis, descripto quadrato AF, totius lineæ AE, ducãtur per C, B, D, lateribus AG, EF, parallelæ CH, BI, DK, secantes ductam diametrum EG, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus AE, GF, parallelæ agãtur OP, QR, ST, secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniã igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. omnia rectangula circa diametrũ EG, quadrata sunt, [n] est q SN, ipsi AD, æqualis, & OL, ipsi AC, & a N, ipsi CD: erit SK, quadratũ rectæ AD, & DT, quadratũ rectæ DE, siue BD, & OH, a X, quadrata rectarũ AC, CD. Dico quadrata SK, DT, simul dupla esse quadratorũ OH, a X, simul. Quoniã n. quadrata SK, DT, superãt quadrata OH, a X, quadrato DT, & rectãgulis SL, LK: Sũt autẽ quadratũ DT, & rectãgula SL, LK, æqualia quadratis OH, a X, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata SK, DT, quadratorum OH, a X, dupla esse, cum hæc in illis contineantur bis. Quod autem tria hæc rectangula DT, SL, LK, quadratis OH, a X, æqualia sint, ita patebit. Rectangulum QL, [o] æquale est quadrato OH, ob lineas QO, OG, quæ æquales sunt; [p] propterea quod QO, ipsi IL, æqualis est, & TL, ipsi OG, ob æqualia quadrata TV, OH, æqualium laterum OL, LV. Item [q] ST, ipsi a M, & LI, ipsi TV, & VK, ipsi VZ, & DT, ipsi b Z. Igitur quinq; rectangula QL, ST, LI, VK, DT, hoc est, tria rectangula DT, SL, LK, æqualia sunt quinq; rectangulis OH, a M, TV, VZ, b Z, hoc est, duobus quadratis OH, a X. Quod est propositum.



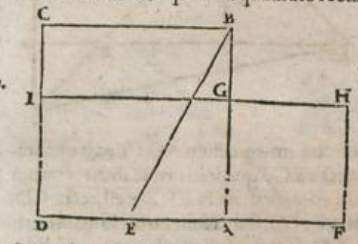
n 34. prim.
o 36. prim.
p 34. prim.
q 34. prim.

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

DATA

Data sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum maioris. Describatur ex AB, quadratum AC, & diuiso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis
a 20. prim. AG. Est enim AB, maior, quam AF. Nam cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; [a] sint autem latera AE, AB, maiora latere EB; Erunt quoque rectæ EA, AB, maiores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, maior erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub AB, BG, æquale sit quadrato rectæ AG; adeo vt AG, sit maius segmentum, & BG, minus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela FH, secans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum segmenti AG, cum omnia eius quatuor latera sint æqualia, quippe cum
b 34. prim. [b] FH, GH, æqualia sint oppositis AG, AF, æqualibus; omnesque anguli eiusdem recti ob rectum A, vt ad defin. 1. huius libri ostendimus. Rectangulum quoque CG, comprehensum erit sub AB, & segmento BG; quod AB, æqualis sit ipsi BC. Itaque probandum est, rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia esse. Quoniam igitur recta DA, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum AF;
c 6. sec. [c] erit rectangulum sub DF, FA, hoc est, rectangulum DH, (cum FH, sit æqualis ipsi FA;) vna cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc est, quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis est: Est autem quadra-
d 47. prim. tum rectæ EB, [d] æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, vna cum quadrato rectæ AE, æquale quoque est quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo commmuni quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc est, quadraro AC. Ablato igitur rursus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam AB, secuimus, &c. Quod erat faciendum.



SCHOLIVM.

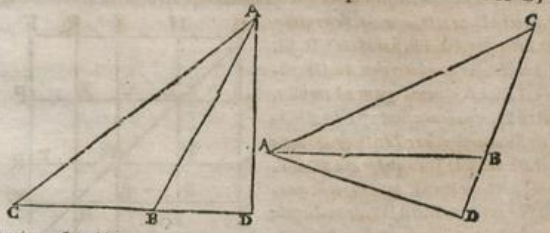
Hoc problema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiã decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clariusq; ad propos. 29. eiusdem lib. 9. ostendemus, problema hoc 11. nulla ratione posse numeris accommodari.

Praxis autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius segmentum lineæ datæ AB, excitata perpendiculari AD, ipsi datæ lineæ AB, æquali, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum EB, resecetur EA, producta in F, erit AF, maiori segmento AG, æqualis, vt demonstratum est.

xij. ## THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à laterib. obtusum angulum comprehendẽtibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

Triangulum ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta CD, diuisa sit in B,
a 4. sec. vtcunque [a] erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, &
b 47. prim rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: [b] Est autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo
c 47. prim comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, [c] æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

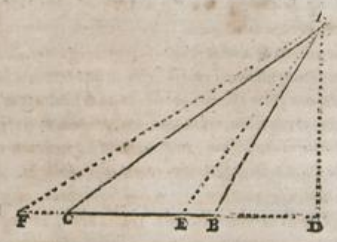


SCHOLIVM.

Iam hoc loco demonstrauit Euclides, quanto maius sit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuso oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem propos. 13. ostendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium scholij propos. 47. lib. 1. monuimus.

Quoniam

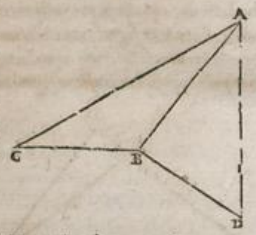
Quoniam vero assumpsit Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideo pau cis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, cuiusmodi est recta AD. Si enim caderet intra triangulū, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.



SED & hoc theorema verum est.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.

In triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC. Dico angulum B, quem latus AC, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad AB, perpendicularis BD, lineæ BC, æqualis, iungaturq; recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, [d] æquale est quadratis ex AB, BD, hoc est, ex AB, BC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC; Erit quadratum ex AD, minus quadrato ex AC, & idcirco recta AD, minor quam recta AC. Itaq; quia latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, vtrumq; vtrique, & basis AC, maior est base AD: [e] Erit angulus ABC, maior angulo ABD: Sed ABD, rectus est. Igitur ABC, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.



d 47. prim.

e 25. primi.

Quin etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productū perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

In triangulo ABC, ad latus CB, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta AD, sitq; quadratum lateris AC, maius, quam quadrata laterum AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quam dico cadere necessario in CB, productam ad partes B. Cadat enim si fieri potest, in B, ita vt AB, sit ad CB, perpendicularis. Erit igitur [f] quadratum ex AC, æquale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa, in punctum B.

f 47. prim.

Cadat deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus BC, qualis est AF. Erit igitur [g] quadratum ex AC, æquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC. quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quod recta AB, recto angulo AFB, opposita [h] maior sit quam AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in CB.

g 47. prim.

h 19. prim.

Cadat tertio, si fieri potest, perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa, in C, ita vt AC, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex AB, [i] æquale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC, q; est absurdū, cū ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa, nō cadit in C.

i 47. primi.

Cadat quarto, si fieri potest, perpendicularis ex A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quoniam igitur duo anguli AGC, ACG, [k] minores sunt duobus rectis, est q; AGC, rectus, erit ACG, minor recto, ac proinde ACB, obtusus. Recta ergo AB, [l] maior erit quam AC, & propterea quadratum ex AG, minus erit quadrato ex AB, ac proinde multo minus quadratis ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neq; inter C, B, neq; in C, neq; extra C, cadet extra B, qualis est AD, vt demonstrabitur: Quare angulus ABE, [m] acutus erit, & ABC, obtusus. Quod secundo loco proponitur, demonstrandum.

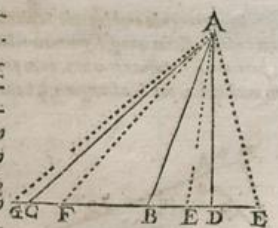
k 17. primi.

l 19. primi.

m 17. pri.

Cæterū angulū ABC, esse obtusum, si quadratū rectæ AC, maius sit quadratis rectarum AB, BC, facilius demonstrauimus in proximo theoremate huius scholij. Ex quo sit, (vt ad initium huius scholij ostendimus) perpendicularem ex A, ad CB, demissam cadere extra triangulum ABC, ad partes anguli obtusi.

Quod autem AD, sit ad CB, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens vltra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, ostensus est obtusus, erit quadratum rectæ AC, maius quam quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BE: Sed & quadratum eiusdem rectæ AC, maius ponitur, quam quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD. Igitur quadrata ex AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, comprehenso æqualia erunt quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BE, bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarum AB, BC, rectangulum bis sub CB, BE, comprehensum æquale erit rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, ac proinde & rectangulum sub CB, BE, semel comprehensum æquale erit rectangulo semel sub CB, BD, comprehenso, & recta BE, rectæ BD, æqualis, pars toti, vel totum parti. Quod est absurdum. Est ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia. Quod est propositum.



Iam vero, quoniam neq; hoc duodecimum theorema, neq; sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quod posito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumq; partes à perpendicularibus lineis factæ plerumq; numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in præcedentibus propositionibus non accidebat, quippe cum, posita diuisa rectæ lineæ quotlibet partium æqualium, eius partes statui possint pro libito ei commensurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum est, præscribemus regulas quasdam, quibus Geometricè

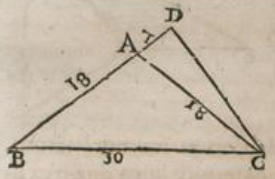
trian-

triangula amblygonia, atq; oxygonia (quotquot quis optauerit) constituantur eiusmodi, vt omnia latera, partesq; eorum à lineis perpendicularibus factæ sint lineæ commensurabiles: atq; adeo veritas vtriusq; theorematis in numeris quoq; appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium triangulum est vel Isosceles, in quo tertium latus semper m maius est, quod obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (æquilaterum enim esse non potest, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtrouislibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertia denique triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulum eisdem lateribus commensurabile existat.

m 9. prim.

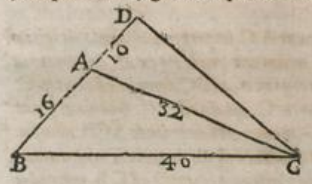
REGVLA I.

Ad construendum triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoq; sit commensurabile; statuatur segmetum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrumuis laterum æqualium ponatur dicti segmenti duplum superquadrupartiens septimas, maximum autem obtuso angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas, vt in triangulo ABC, ducta sit CD, ad BA, latus productum. Si igitur AD, constituatur partium 7. & vtrumuis laterum AB, AC, partium 18. qui numerus habetur, si duplicaueris 7. Addideris $2\frac{2}{7}$ ipsius. Latus vero BC, partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxeris $2\frac{2}{7}$ ipsius; erit triangulum ABC, quod quæritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris BC, est 900. cui æqualia sunt quadrata laterum AB, AC, nempe 324. 324. vna cum rectangulo bis comprehenso sub AB. AD. hoc est, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoq; summam 900. Quamobrem, vt in hoc scholio ostendimus, erit ducta CD, ad BD. perpendicularis, & angulus BAC, obtusus. Quod si singulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas triangulo commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies AD, 14. & tam AB. quam AC, 36. at BC, 60. Propositum quoq; triangulum reperies, statuendo segmentum exterius AD. quotcunq; partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum effendes, statuendo latus quodcunq;, à quo incipire vis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat segmenti AD, quadruplum superbipartiens septimas, vtrumuis autem æqualium sit eiusdem segmenti duplum superquadrupartiens septimas.



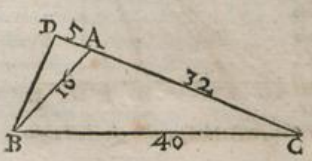
REGVLA II.

Vt efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiam lateribus: statuatur exterius segmentum quotuis partium æqualium à 5. numerandarum, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{1}{5}$ habebis minimum latus. Si vero easdem partes dicti segmenti triplices, addasq; $\frac{3}{5}$ vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes easdem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in opposito triangulo segmentum AD, constituatur 10. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Vbi etiam vides, quadrato lateris BC, quod est 1600. æqualia esse quadrata laterũ AB. AC, nimirum 256. 1024. vna cum rectangulo bis sub AB, AD, comprehenso, id est, cum 160. 160. Ex quo fit, CD, esse ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtusum, vt supra in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuẽtos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præstabunt. Vt si eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum AD, statuas partium 20. quæ duplam quoq; proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96. BC, 120. & sic deinceps.



REGVLA III.

Pro triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoq; segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numerandarum, vt in præcedenti regula. Quas si triplices, addasq; $\frac{3}{5}$ produces minimum latus: Si verò easdem multiplices per 6. adiungasq; $\frac{2}{5}$ habebis latus medium: Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atq; ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. æqualia existent quadrata laterum AB, AC, nempe 256. 1024. vna cum rectangulo bis comprehenso sub AC, AD, hoc est, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulusq; BAC, obtusus, vt in hoc scholio supra demonstrauimus. Quod si numeros inuentos per quemuis numerũ multiplices, inuẽies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propos. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.



Cæterum autem, existimes, posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo seruare necessario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeo vt cognito vno, reliqua

liqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cum illa variari possint mille modis, & alias atq; alias proportiones habere. Itaq; ex tribus præscriptis regulis solum colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vna cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.

THEOR. 12. PROPOS. 13. xiij.

IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT omnes anguli trianguli ABC, acuti & ex A, perpendicularis AD, demissa cadat in latus BC. Dico quadratum lateris AB, quod acuto angulo ACB, opponitur, minus esse quadratis laterum AC, CB, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum lateris AB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale esse duobus quadratis laterum AC, CB. Cum enim recta BC, diuisa sit in D, vtcunque, erunt quadrata rectarum BC, CD, [a] æqualia rectangulo cõprehenso bis sub BC, CD, & quadrato rectæ BD. Addito ergo cõmuni quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA: Duobus autem quadratis rectarum CD, DA, [b] æquale est quadratum rectæ CA. Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo duobus quadratis rectarum BD, DA, [c] æquale sit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata rectarum BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & quadrato rectæ AB, quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum AB, BC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, & quadrato rectæ AC, hoc est, quadratum lateris AC, minus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. In oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonstrandum erat.



a 7. sec.

b 47. prim.

c 47. prim.

SCHOLIVM.

Itaq; ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atq; 13. huius lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cuiusuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an maius, minusue, & quãto maius sit aut minus, prout videlicet angulus assumpto lateri oppositus fuerit rectus, vel obtusus, aut acutus.

Quamuis autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygoniis, quæ scilicet omnes angulos habent acutos; idem tamen verum etiam est in triangulis, rectangulis, & amblygoniis, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangulis, rectangulis, & amblygoniis, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygoniis vero à quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo ABC, duo anguli ABC, ACB, acuti, angulus vero BAC, rectus, vel obtusus, acutus-ue. Dico perpendicularẽ ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in CB, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta AE, esset in triangulo ABE, angulus exterior ABC, acutus, [d] maior interno & opposito recto AEB, quod est absurdum. Si vero caderet extra BC, productam ad partes C, qualis est recta AF, in idem incideremus absurdum; vt manifestum est.



d 16. prim.

Idem hoc theorema in triangulis, rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis AD, non cadat in latus BC, sed vel eadem sit, quæ latus AB, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demonstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

Sit triangulum rectangulum ABC, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad BC, perpendicularis ducatur AD, quæ eadem erit, quæ latus AB, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub latere CB, in quod perpendicularis cadit, & sub linea CD, quæ intericitur inter perpendicularem AD, & acutum angulum C. Cum enim quadrata ex AB, CB, [e] æqualia sint quadrato ex AC; addito communi quadrato ex CB, erunt tria quadrata, nempe quod ex AB, & duplum eius, quod ex CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CB, idẽ est, quod rectangulum sub CB, CD. Igitur & quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis sub CB, CD, æquale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.

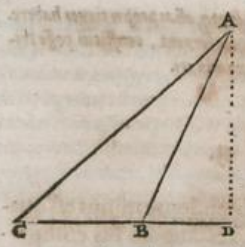


e 47. prim.

Rursus sit triangulum obtusangulum ABC, cuius angulus B, obtusus, & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, & CD. Quoniam enim quadrata ex AD, CD,

æqualia

f 47. primi. g 4. sec. h 47. prim. i 3. sec.



f æqualia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, communi, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD, g æquale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, vna cum quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, æqualia h quadrato ex AB. Quare quadratum quoq; ex AB, & duplum quadrati ex CB, vna cum rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, vna cum rectangulo sub CB, BD, i æquale est rectangulum sub CD, CB. Ac propterea duplo quadrati ex CB, vna cum rectangulo bis sub CB, BD; æquale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis sub CB, CD; æquale est quadratis ex AC, CB. Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.

k 12. sec. l 3. sec.

Aliter, & breuius. Quoniam quadratum ex AC, k maius est, quam quadrata ex AB, BC, rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso, hoc est, quadratum ex AC, æquale est quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso; erit quadratum ex AB, minus, quam quadratum ex AC, quadrato ex BC, & rectangulo sub CB, BD, bis: Ac proinde si quadrato ex AC, addatur quadratum ex BC, erit quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, BC, quadrato ex BC, bis sumpto, & rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso. Cum ergo quadrato ex BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, contento, l æquale sit rectangulum sub CB, CD, contentum; erit quoq; quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, CD. Quod est propositum.

In scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio præcedentis propos. secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

m 47. pri.



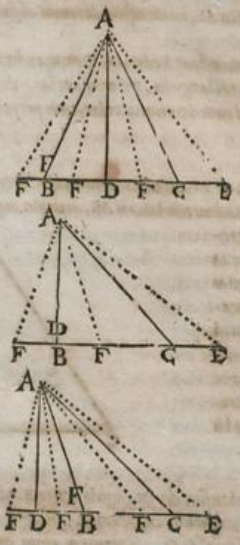
In triangulo ABC, *quadratum lateris* AB, *minus sit, quam quadrata laterum* AC, CB. *Dico angulum* C, *quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex* C, *ad* AC, *perpendicularis* CD, *lineæ* CB, *æqualis, iungaturq; recta* AD. *Quoniam igitur quadratum ex* AD, m *æquale est quadratis ex* AC, CD, *hoc est, ex* AC, CB: *Ponitur autem quadratum ex* AB, *minus quadratis ex* AC, CB; *Erit quadratum ex* AD, *maius quadrato ex* AB; *& ideo recta* AD, *maior quam recta* AB. *Itaq; quia duo latera* AC, CD, *trianguli* ACD, *æqualia sunt duobus lateribus* AC, CB, *trianguli* ACB, *vtrumq; vtrig;, & basis* AD; *maior basi* AB; n *Erit angulus* ACD, *maior angulo* ACB: *Sed* ACD, *rectus est, ex constructione. Ergo* ACB, *recto minor, & acutus erit.*

n 25. prim.

Sed & conuersum huius propos. 13. ostendemus, nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppositio demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

o 47. prim.



IN triangulo ABC, *ad latus* BC, *demittatur ex angulo oppositio* A, *recta* AD; *sitque quadratum lateris* AB, *minus quam quadrata laterum* AC, CB, *rectangulo sub* BC, CD, *bis comprehenso. Dico* AD, *esse perpendicularem ad* BC, *& angulum* ACB, *acutum. Si namque* AD, *perpendicularis non est, ducatur ex* A, *ad* BC, *perpendicularis, quam dico necessario cadere citra punctum* C, *versus* B, *hoc est, vel in latus* BC, *vel in punctum* B, *vel in latus* BC, *versus* B, *productum. Cadat enim, si fieri potest, in* C, *ita vt* AC, *sit ad* BC, *perpendicularis. Erit igitur* o *quadratum ex* AB, *æquale quadratis ex* AC, CB. *Quod est absurdum, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex* A, *deducta ad* BC, *in punctum* C.

p 47. prim.

CADAT *deinde, si fieri potest, perpendicularis ex* A, *demissa vltra* C, *in* E, *qualis est* AE. *Erit igitur* p *quadra-*

tum

tum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB. Igitur & quadrata ex AE, EB, minora erunt quadratis ex AC, CB. Cum ergo quadratum ex AC, q æquale sit quadratis ex AE, EC; erunt quoq; quadrata ex AE, EB, minora quadratis ex AE, EC, CB: Et ablato communi quadrato rectæ AE, erit reliquum quadratum ex EB, minus quoq; quadratis ex EC, CB. Quod est absurdum. Cum enim quadratum ex EB, r æquale sit quadratis ex EC, CB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub EC, CB, maius erit quadratum ex EB, quadratis ex EC, CB. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neq; in C, cadit, vt ostendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis est AD, vt demonstrabitur, ac propterea s angulus ACB, acutus erit. Quod secundo loco proponitur demonstrandum. q 47. primi. r 4. sec. s 17. primi.

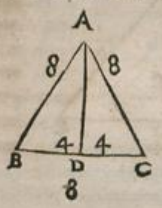
Caterum angulum ACB, esse acutum, si quadratum rectæ AB, minus sit quadratis rectarũ AC, CB. facilius demonstrauimus in proximo antecedente theoremate huius scholij. Ex quo fit, (quemadmodum in coroll. 2. propos. 17. lib. 1. ostensum est) perpendicularem ex A, ad BC, demissam cadere citra angulum ACB, acutum versus B.

Quod autem AD, sit ad BC, perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit AF, ad BC, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum est, vbicunq; hoc contingat, siue intra triangulum, siue in punctum B, siue extra triangulum. (In secundo tantum triangulo non dicet aduersarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem esset, quæ AD, quod ille negat.) Quia ergo angulus ACB, ostensus fuit acutus, t erit quadratum ex AB, minus, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, hoc est, quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, æquale est quadratis ex AC, CB: Ponitur autem quadratum idem ex AB, minus quoq;, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum idem ex AB, vna cum rectangulo bis contento sub BC, CD, æquale ponitur quadratis ex AC, CB. Igitur quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale erit quadrato eidem ex AB, vna cum rectangulo comprehenso bis sub BC, CF: Et ablato communi quadrato rectæ AB, rectangulum sub BC, CD, bis comprehensum æquale erit rectangulo bis sub BC, CF, comprehenso: ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub BC, CD, æquale erit rectangulo semel comprehenso sub BC, CF, ideoq; & rectæ CD, CF, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur AD, ad BC, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum. t 13. sec.

Quemadmodum autem in scholio superioris propositionis triangula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atq; linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium est vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, siue maius illud sit, siue minus vtrouis æqualium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularis q; in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum æqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima deniq; de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, siue oppositus angulus acutus etiam sit, siue non. De his enim propositio etiam intelligenda est, vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

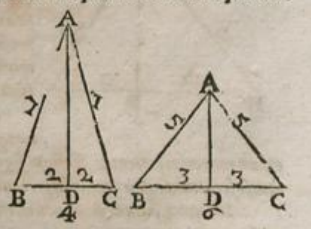
REGVLA I.

Si quodlibet latus trianguli æquilateri statuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo æquilatero ABC, diuidet perpendicularis AD, oppositum latus BC, bifariam, vt in scholio propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta BD, CD, 4. 4. Vbi vides quadratũ lateris AB, angulo acuto C, oppositi, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti sunt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) hoc est, 64. vna cum rectangulo bis contento sub BC, CD, id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum AC, CB, nempe 64. 64.



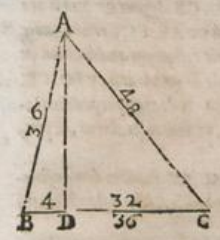
REGVLA II.

Si vtrumq; laterum æqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunq; partium æqualium, tertium autem quotlibet parium numero partium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet æqualium, siue plures, dummodo tot non sint, quot in vtroq; simul, aut plures; quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora, quod propositioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquam latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles. Vt in priori horum Isoscelium vtrumuis latus AB, AC, statuatur 7. & BC, 4. In posteriori autem vtrumlibet AB, AC, 5. & BC, 6. Cum ergo perpendicularis AD, diuidat basim BC, bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. erunt segmenta BD, CD, in priori quidẽ triangulo 2. 2. in posteriori vero 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris AB, angulo acuto C, oppositi, (vterq; enim angulus B, C, acutus est, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) vna cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale esse quadratis simul laterum AC, CB, &c.



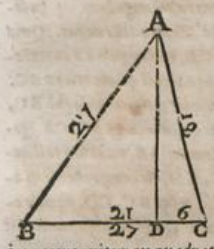
REGVLA III.

In triangulo Isoscele; in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, eas 8 per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si vero easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo deniq; segmenta simul addita conflabunt vtrumq; laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris



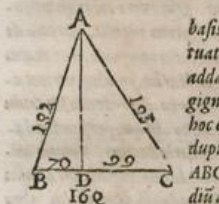
segmenti per 9. Vt si in Isoscele ABC, segmentum minus BD, ponatur 4. erit maius CD, 32. latus vero AC, 48. & vtrumq; latus AB, BC, 36. 36. Quadratum igitur lateris AB, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in C D, id est, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB, nempe 2304. 1296. Ita quoq; quadratum ex AC, nimirum 2304. vna cum eo, quod bis fit ex CB, in BD, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB, BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionem habent octuplam: vtrumuis vero æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium deniq; latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.

REGVLA IV.



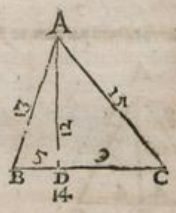
In triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est & perpendicularis, rursum in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmentum si statuas quotuis partium numero parium, vt fractiones fugiantur, eaq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adijcias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius segmentum: Si vero easdem partes minoris segmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumq; deniq; æqualium laterum componetur ex duobus segmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris segmenti per 9. producetur. Vt si in Isoscele ABC, minus segmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atq; tam AB, quam BC, 27. Quadratum ergo lateris AB, angulo acuto C, oppositi nimirum 729. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.



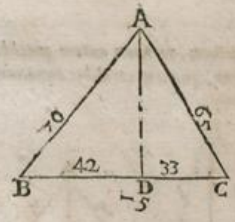
In Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit segmentum basis iuxta medium latus, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstratum est. Quod segmentum si constituatur tot partium æqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140. vel 210. &c. eisq; addantur earum $\frac{2}{7}$ confectum erit segmentum maius, & ex additione partium horum segmentorum gignetur minimum latus. Si vero partes minoris segmenti duplicentur, & producto adijciantur, $\frac{4}{7}$ hoc est, $\frac{1}{7}$ earundem partium, procreabitur medium latus. Si deniq; partes eiusdem minoris segmenti duplicetur, producto; $\frac{5}{7}$ id est, $\frac{11}{14}$ earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in scaleno ABC, si minus segmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Medium autem latus AB, 182. & maximum AC, 195. Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppositi, hoc est, 33124. vna cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id est, cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. æqualem duobus simul quadratis 38025. 28561. laterum AC, CB, &c.

REGVLA VI.



In triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. ostendimus, minus segmentum minimo lateri adiacens. Quod segmentum si statuatur tot æqualium partiũ, vt à 5. numerentur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eisq; addantur $\frac{2}{5}$ confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collectæ, component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adijciantur earundem $\frac{1}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno ABC, si minus segmentum BD, fiat 5. erit segmentum maius CD, 9. & totum latus BC, medium, 14. Minimum vero AB, 13. & maximum AC, 15. &c.

REGVLA VII.



In Scaleno deniq; triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimum ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eisq; addantur $\frac{9}{11}$ hoc est, $\frac{1}{11}$ fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus offerent. Si vero numero minoris segmenti duplicato adijciantur $\frac{4}{11}$ producetur medium latus. Si deniq; eidem minori segmento apponantur $\frac{2}{11}$. exhibebitur minimum latus. Vt si in Scaleno ABC, minus segmentum CD, sit 33. erit maius segmentum BD, 42. totumq; latus maximum BC, 75. & medium AB, 70. & minimum AC, 65. &c.

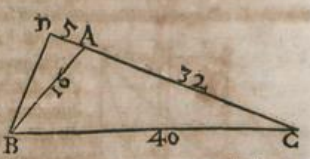
Quod si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunq; is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Iidem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunq; latus statuatur quotlibet partium; si modo proportiones seruentur, quas supra dictis regulis expressimus.

Hic quoq; scitendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones præscriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neq; vero hoc regulæ illæ docent, sed vsus earum in eo solum consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

Iam vero si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regulæ 6. si in triangulo ABD, minimum latus BD, ponatur 5. erit AD, 12. & AB, 13. Vbi cernis quadratum lateris AD, acuto angulo B, oppositi, nempe 144. vna cum eo, quod fit bis ex

BD,

BD, in BD, hoc est, cum 25.25. efficere 194. quantum videlicet conficiũt duo quadrata simul ex AB, BD, nimirum 169.25. Eadem ratione, si minimum latus BD, statuatur partium 6. erit AD, 8. & AB, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris AD, acuto angulo B, subtensi, nimirum 64. vna cum eo, quod fit ex BD, in BD, hoc est, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum AB, BD, nimirum 100. 36. Ita quoq; cernis, quadratum numerum lateris BD, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. vna cum eo, quòd fit ex AD, in AD, bis, id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum AB, AD, nimirum 100. & 64. Denique, si in alio triangulo ACD, minimum latus CD, ponas 6. reperies ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus, AD, 40. & AC, 41. Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris AD, angulo acuto oppositi, nimirum 1600. vna cum numero, qui fit ex CD, in CD, bis, id est, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis est quadratis numeris duorum laterum AC, CD, hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoq; summam 1762. Quod si minimum latus CD. facias 7. comperies AD, 24. & AC, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris CD, angulo acuto A, subtensi, id est, 49. vna cum numero, qui bis producitur ex AD, in AD, hoc est, cum 576. 576. facit 1201. quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum AC, AD; hoc est, 625. 576.



At si perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum sit obtusangulum, quærendum erit segmentum exterius, vna cum lateribus, vt in tribus regulis scholij præcedentis propositionis docuimus. Segmentum nanq; exterius cum latere producto, dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptũ & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum CD, inter angulum acutum C, & perpendicularem BD, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est, quadratum lateris AB, angulo C, acuto oppositi, hoc est, 256. vna cum rectangulo sub AC, CD, comprehenso bis, id est, cum 1184. 1184. componere numerum 2624. qui æqualis est duobus quadratis simul laterum BC, AC, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.

Neq; vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.

In triangulo ABC, recta AD, secet latus BC, bifariam in D. Dico quadrata ex AB, AC; dupla esse quadratorũ ex AD, BD. Demittatur enim ex A, ad BC, perpendicularis, quæ primum rectæ AD, congruat, ac proinde triangulum ABC, æquilaterum sit, vel Isosceles, vt ad propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. [u] Quoniam igitur tam quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AD, DB, quam quadratum ex AC, quadratis ex AD, DC; erunt duo quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AD, bis sumpto, vna cum quadratis ex DB, DC. Cum ergo quadrata ex DB, DC, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex AD, DC, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex AD, bis sumpti, & quadratorum ex DB, DC. Quare duo quadrata ex AB, AC, dupla sunt duorum quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur. [x] Quoniam quadratum ex AB, duobus quadratis ex AD, DB, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex AB, AC, quadrati ex AB, dupla, ob æqualitatem linearum AB, AC; erunt quoq; quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod demonstrandum erat.



u 47. prim.



x 47. pri.

Congruat deinde perpendicularis AC, lateri AC. Et quia quadratum ex BC, quadruplum est tam quadrati ex BD, quam quadrati ex DC, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex BC, duplum duorum quadratorum ex DB, DC. Sunt autem duo quadrata ex AC, CD, bis sumpta, dupla quoq; quadrati ex AD; quòd [y] quadrata ex AC, CD, semel sumpta æqualia sint quadrati ex AD. Igitur quadratum ex BC, vna cum quadratis ex AC, CD, bis sumptis, duplum erit quadratorũ ex DB, DC, AD. Cum ergo & quadratum ex CD, bis sumptum, duplum sit quadrati ex CD; [z] erit reliquum quadratum ex BC, vna cum quadrato ex AC, bis sumpto, duplum quoq; reliquorum quadratorum ex DB, AD. Sunt autem [a] quadrata ex BC, AC, æqualia quadrato ex AB. Igitur quadrata ex AB, AC, (quæ æqualia sunt quadrato ex BC, vna cum quadrato ex AC, bis sumpto) dupla quoq; sunt, quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.

y 47. prim.

z 20. pron.

a 47. prim.

Tertio cadat perpendicularis AE, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur [b] quadrata ex BE, EC, dupla sunt quadratorum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quod [c] quadrata ex AE, ED, semel sumpta quadrato ex AD, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, vna cum quadratis AE, DE, bis sumptis, dupla quoq; quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; [d] erunt reliqua quadrata ex BE, EC, vnà cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoq; reliquorum quadratorum ex DB, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, [e] æquale sit quadratum ex AB; & quadratis ex EC, AE, quadratum ex AC; erunt quoq; quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.



b 9. sec.

c 47. prim.

d 20. pron.

e 47. prim.

Postremo cadat perpendicularis AE, in latus BC, productum. Quoniam igitur [f] quadrata ex BE, CE, dupla sunt quadratorum ex BD, DE. Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; [g] quod quadrata ex AE, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex AD; erunt quadrata ex BE, CE, vna cum quadratis ex AE, DE, bis sumptis, dupla quoq; quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; [h] erunt reliqua quadrata ex BE, CE, vnà cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoq; reliquorum quadratorum ex BD, AD. Quare cũ quadratis ex BE, AE, [i] æquale sit quadratum ex AB, & quadratis ex CE, AE, quadratũ ex AC; erunt quoq; quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod erat ostendendum.



f 10. sec.

g 47. prim.

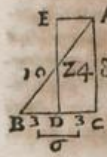
h 20. pron.

i 47. prim.

Non te moueat autem, quod ad huius theorematis demonstrationem adhibuerimus pronũ-

ciatum

ciatum 20. quod vniuersaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi potest sine demonstratione, vt in expositione eius principij diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certe theorema ipsum post librum 5. demonstrari; ita vt circulus in demonstrando nulla ratione committatur, etiamsi principium illud, demonstretur libro 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.



Ex his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propos. 47. lib. 1. demonstrata sunt, aream cuiusq; trianguli latera habentis nota inueniemus, vt recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac fere ratione. Sit primo triangulum rectangulum ABC, cuius latera nota sint, nempe AB, 10. palmorum; AC, 8. BC, 6. Diuiso latere BC, bifariam in D, vt sint CD, BD, 3. palmorum, perficiatur rectangulum ACDE, quod æquale est triangulo ABC, vt in scholio propos. 41. lib. 1. ostendimus. Quia vero ex ductu CD, trium palmorum in CA, 8. palmorum, producitur area rectanguli CE, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus: Totidem palmos quadratos continebit triangulum ABC, rectangulo CE, æquale. Quod est propositum.

Sit deinde triangulum obtusangulum ABC, cuius latera sint cognita; AB, 20. palmorum; AC, 13. BC, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineæ AD, ex A, in latus BC, protractum demissæ, hoc modo. Quoniam quadratum lateris AB, [k] maius est, quam quadrata laterum AC, BC, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD; si quadrata laterum AC, BC, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris AB, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub BC. CD, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub BC, CD. Si igitur 55. rectangulum sub BC, CD, diuidatur per 11. latus notum BC, exibit reliquum latus CD, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratum est in libro de mensurationibus omnium quantitatum. Quia vero quadrata laterum AD, CD, [l] æqualia sunt quadrato lateris AC; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris CD, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169 quadrato lateris AC, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare latus AD, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit. 12. Iam vero diuiso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BD perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AG, quæ per A, ipsi BD, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si EC, palmorum quinq; cum dimidio, ducatur in CF, 12. palmorum, (Est [m] enim CF, ipsi AD, æqualis,) exurget area rectanguli CG. 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo ABC, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum CG, & triangulum ABC, in eisdem parallelis, &c.) Erit quoq; area trianguli ABC, palmorũ quadratorũ 66. Quod est propositum.

k 12. sec.

l 47. primi.

m 34. pri.

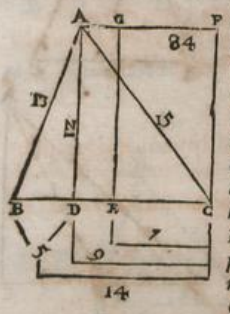


Sit postremo triangulum acutangulum ABC, latera habens nota; AB, 13. palmorum; AC, 15. BC, 14. Primum igitur hic quoq; reperienda est quantitas perpendicularis AD, ex A, ad BC, demissæ, hac ratione. Quoniam quadratum lateris AB, [n] minus est, quam quadrata laterum AC, BC, rectangulo comprehenso bis sub BC, CD; si quadratum lateris AB, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum AC, BC, hoc est, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenso bis sub BC, CD, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub BC, CD. Si igitur 126. rectangulum sub BC, CD, diuidatur per BC, latus notum, vt per 14. exibit reliquum eius latus CD, palmorum 9. vt constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. & à nobis demonstratũ est, in lib. de mensurationib. omniũ quantitatũ. Quoniã autẽ quadrata ex AD, CD, [o] æqualia sunt quadrato ex AC; si quadratum 81. palmorũ, nempe lateris CD, 9. palmorũ nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris AC; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare cũ radix quadrata huius numeri 144. sit 12. erit latus AD, 12. palmorum. Iam vero diuiso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BC, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AF, quæ per A, ipsi BC, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si CE, 7. palmorum ducatur in EG, 12. palmorum; ([p] est enim EG, recta ipsi AD, æqualis) exurget area rectanguli EF, palmorum 84. Quod cum triangulo ABC, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum EF, & triangulum ABC, in eisdem parallelis, &c.) erit quoq; area trianguli ABC, 84. palmorum. Quod est propositum.

n 13. sec.

o 47. prim.

p 34. prim.



Itaq; in vniuersum, area cuiuscunq; trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ à vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.

xiiij.

PROBLEMA 2. PROPOSITIO 14.

DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. [a] Constituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt DC, producatur ad F, sitque CF, recta æqualis rectæ BC. Diuidatur quoque DF, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta BC, (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB, [b] æqualia sint oppositis lateribus BC, CD; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C, facto G, centro, describatur interuallo GD, vel GF, semicirculus FHD, producaturq; BC, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ CH, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta GH; quia recta DF, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub DC, CF, hoc est, rectangulum BD, vna cum quadrato rectæ GC, [c] æquale quadrato rectæ GF, hoc est, quadrato rectæ GH; cum rectæ GF, GH, sint æquales: At quadratum rectæ GH, [d] æquale est quadratis rectarũ GC, CH. Igitur rectangulum BD, vna cum quadrato rectæ GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC, CH. Quamobrem dempto communi quadrato rectæ GC, remanebit rectangulum BD, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

a 45. prim.

b 34. prim.



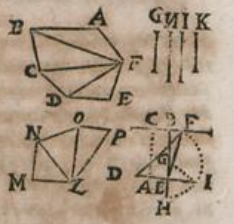
c 5. sec.

d 47. prim.

SCHO-

SCHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum constituere æquale, quod sæpius superdatam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est latus quadrati, quod cuiuis triangulo æquale sit, inuestigemus: quod factu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.



VT si datum sit rectilineum ABCDEF, resoluemus illud in triangula ABF, FBC, CFD, DEF, inueniemusque latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas LM, MN, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta NI, erigemus ad eam perpendicularem NO, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta OL, excitabimus illi perpendicularem OP, lateri K, æqualem, iungemusque rectam PL. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis OP, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ PL, postremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, atque adeo omnibus triangulis ABF, FBC, CFD, DEF, hoc est, datæ figuræ rectilineæ ABCDEF.

PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis est. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo DEF, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe DE, bifariam in A, producaturque quantum libet. Ducta deinde per angulum oppositum F, lateri DE, parallela FB, ducatur per E, ad DE, perpendicularis HEB, secans FB, in B, sitque EH, ipsi AE, dimidio lateris DE, æqualis. Postremo, diuisa tota linea BH, bifariam in G, describatur ex G, ad interuallum GH, vel GB, arcus secans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, æquale esse triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum AEC, & semicirculus BH, ducaturque recta GI, ostendemus, vt in hac propos. 14. quadratum ex EI, rectangulo AB, æquale esse. Cum ergo rectangulum AB, triangulo DEF, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. quod basis DE, sit dupla basis AE, constat propositum.

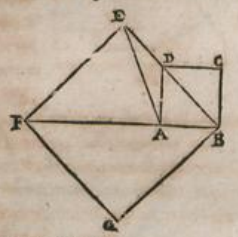
NON est tamen necessarium, vt rectangulum construatur AB. Nam si fiat angulus rectus IEB, atque in BH, capiatur EH, semissi lateris DE, æqualis, & recta EB, æqualis perpendiculari ex F, in latus DE, demissæ, secetur que BH, bifariam in G, auferet circunferentia ex G, circa BH, descriptam rectam EI, cuius quadratum æquale est rectangulo sub BE, EH, hoc est, triangulo DEF.

QVONIAM vero secundo hoc libro Euclides multa de quadratis, ac rectangulis parallelogrammis disputauit, recte hic inseri poterunt sequentia duo problemata de quadrato, & parallelogrammo rectangulo, neque iniucunda, neque inutilia: quorum posterius eruditus vir, atque excellens Mathematicus, Marinus Ghetaldus Patricius Racusinus, mihique familarissimus, ingeniosissime sane soluit, & longe aliter, breuius q, quam à quodam alio solutum quondã fuit, quam solutionem hic subiungere superuacaneum est, cum illam Marini Racusini hic apposuerim, tanquam breuiorem, ac faciliorem.

I.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta AB, inueniendumque sit latus illius quadrati. Ex recta AB, describatur quadratum AC, cuius diameter ducta BD, producatur ad E, vt sit DE, rectæ rectæ AD, æqualis. Dico rectam EB, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus BE, excessu dato AB. Ducatur enim EF, perpendicularis ad BE, quæ rectam BA, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus est, & EBF, semirectus, ex coroll. 2. propos. 4. huius lib. [e] erit & BFE, semirectus. [f] Quare rectæ BE, FE, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipsi BE; & ex B, recta BG, parallela ipsi EF, occurrens priori in G, constitutum erit quadratum rectæ BE. Quod si ducatur recta AE, [g] erunt anguli AED, EAD, æqualibus lineis DE, DA, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, æquales; [h] ideoque rectæ EF, AF, æquales erunt. Quoniam vero diameter EF, rectam AF, superat data recta AB; superabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB, quod est propositum.



e 32. pri.
f 6. primi.
g 5. primi.
h 6 primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta composita ex diametro quadrati supra excessum datum descripti, & ex latere eiusdem quadrati, exhibet latus quadrati, quod quæritur. Eadem autem diameter cum duplo excessus, diametrum quæsiti quadrati constituit.

II.

DATIS duobus excessibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli supra vtrumque latus: Inuenire latera ipsius rectanguli.

SVPERET diameter minus latus recta AB, & maius recta BC. Producta AC, in vtramq; partem, sumatur AD, ipsi AB, æqualis: descripto q, circa CD, semicirculo, erigatur ad AC, perpendicularis BE, secans circumferentiam in E, sumaturque ipsi BE, æqualis CF. Et quia, vt ex demonstratione propos. 14. huius lib. constat, quadratum rectæ BE, æquale est rectangulo sub DB, BC, erit BE, maior quam BC, minus latus dicti rectanguli. Igitur & CF, maior erit quam BC. Sumpta ergo FG, ipsi BC, æquali, cadet punctum G, inter C, & FE, recta autem ad AF, perpendiculari GH, ipsi BF, æquali; Dico AG, esse maius latus, & GH, minus, ita vt rectangulum quæ-



situm

fitum ſit GK. Eſſe enim rectam AG, maiorem, quam GH, ita probabitur: Quoniam BC, FG, æquales ſunt, addita cõmuni CG, erunt quoque BG, CF, æquales. Additis igitur inæqualibus AB, ipſi BG, & BC, ipſi CF, erit AG, maior, quam BF, hoc eſt, quam GH: quandoquidem addita AB, maior eſt, quam addita BC. Eſſe autem AG, GH, latera quæſita, ita demonſtrabitur. Deſcripto ex A, ad interuallum AG, circulo, ducatur per A, H, recta ſecans circumferentiam in I, M, & recta AD, producatur, circumferentiam ſecans in I. Quoniam igitur rectangulum ſub BC, BD, [i] *æquale eſt rectangulis ſub CB, BA, & ſub CB, AD, hoc eſt, duplum rectanguli ſub exceſſibus AB, BC. Eſt autem rectangulo ſub BC, DB, æquale quadratum rectæ BE, vt oſtendimus; erit quoque quadratum rectæ BE, duplum rectanguli ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum rectæ BE, æquale erit duplo rectanguli ſub AB, BC. Addito ergo communi quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli ſub BG, BC, hoc eſt, ſub CF, BC; erũt quadrata rectarum BE, ſiue CF, & BC, vna cum duplo rectanguli ſub CF, BC, æqualia duplo rectanguli ſub AB, BC, & quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli ſub CF, BC. Sunt autem quadrata rectarum CF, BC, vna cum duplo rectanguli ſub CF, BC,* [k] *æqualia quadrato rectæ BF. Igitur & quadratum rectæ BF, æquale erit duplo rectanguli ſub AB, BC, & quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli ſub CF, BC, vel ſub BG, BC. Cum ergo duplum rectangulorum ſub AB, BC, & ſub BG, BC, æquale ſit rectangulo ſub IG, (quæ ipſarum AB, BG, ſimul dupla eſt) & BC, vel FG; erit quoque quadratum rectæ BF, æquale rectangulo ſub IG, FG, vna cum quadrato rectæ BC, vel FG. At rectangulo ſub IG, GE, vna cum quadrato rectæ FG,* [l] *æquale eſt rectangulum ſub IF, FG. Igitur quadratum rectæ BF, ſiue GH, æquale etiam eſt rectangulo ſub IF, FG. Addito ergo communi quadrato rectæ AG; erunt quadrata rectarum GH, AG, æqualia rectãgulo ſub IF, FG, vna cum quadrato rectæ AG. Eſt autem quadratis rectarum GH, AG,* [m] *æquale quadratum rectæ AH; & rectangulo ſub IF, FG, vna cum quadrato rectæ AG,* [n] *æquale eſt quadratum rectæ AF. Igitur & quadratum rectæ AH, quadrato rectæ AF, æquale eſt, rectaque AH, rectæ AF, æqualis: demptis æqualibus AL, AG, reliquæ LH; GF, æquales erunt. Diameter ergo AH, rectanguli GK, hoc eſt, rectæ AF, excedit maius latus AG, recta GF, ſiue exceſſu dato BC: Ipſum vero minus latus GH, ſiue rectam BF, ipſi GH, æqualem, exceſſu dato AB. Quod eſt propoſitum.*



i 2. ſec.

k 4. ſec.

l 3. ſec.

m 47. pri.

n 6. ſec.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta BE, vel CF, cuius quadratum rectanguli ſub datis exceſſibus AB, BC, duplum eſt, addita minori exceſſui BC, efficit minus latus quæſitum BF, hoc eſt, GH: Eadem autem recta BE, hoc eſt, BG, addita maiori exceſſui AB, conficit maius latus quæſitum AG: Eadem denique BE, vel CF, cum vtroque exceſſu AB, BC, diametrum AF, vel AH, conſtituit.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

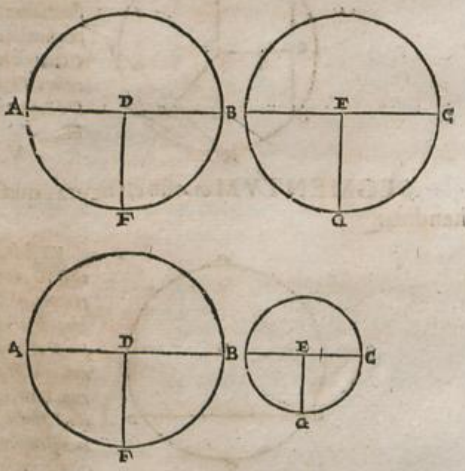
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

I.

ÆQVALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

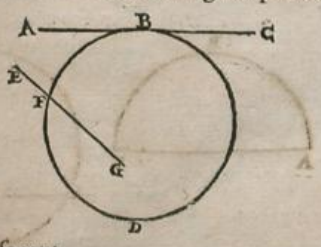
QVONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est vsus. Primum itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib 1. diximus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales sunt. Vt si diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, è centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ æquales. Ex his liquet, circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosue inæquales esse, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.



II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

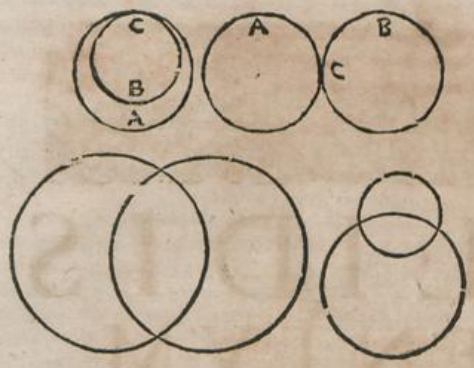
VT recta AB, si ita circulum BFD, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatque intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.



III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui sese mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

EODEM



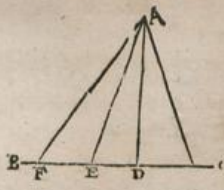
EODEM modo duo circuli AC, BC, se mutuo dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

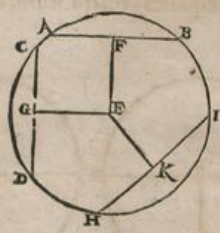
IV.

IN circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, à recta BC, dicitur esse perpendicularis AD, non autem AE, vel AF, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis est; quia AD, omnibus est breuior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum AE, AF, maiores sunt, quam AD, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim AF, [a] maior, quam AE, cum angulus AEF, sit obtusus, & AFE, acutus, & sic de aliis lineis non perpendicularibus. Quod enim AFE, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, [b] minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum ADF, rectus sit, angulum AFD, recto esse minorem. Eadem ratione angulus AED, ostendetur acutus. propterea quod in triangulo ADE, [c] duo anguli ADE, AED, minores sunt duobus rectis, & ADE, rectus est) ac proinde, cum ambo AED, AEF, [d] æquales sint duobus rectis, erit AEF, obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares EF, EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abesse dicetur à centro E, quam linea HI, si perpendicularis EG, maior fuerit perpendiculari EK.

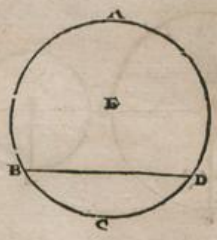
a 19. primi.
b 17. prim.
c 17. primi.
d 13. primi.





V.

SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

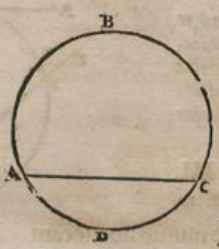


VT si ducatur in circulo ABCD, recta BD, vtcunque, dicetur tam figura BAD, contenta circumferentia BAD, & recta BD; quam figura BCD, comprehensa recta BD, & circumferentia BCD, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum. Semicirculus, quando recta BD, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta BD, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum BAD; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum BCD. Id quod ad defin. 18. lib 1. demonstrauimus. Vocatur à plerisque Geometris recta BD, chorda, & circumferentia BAD, vel BCD, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.





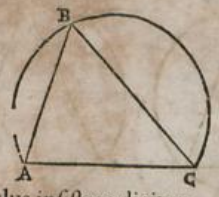
DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmenti, dicens angulum mixtum BAC, vel BCA, contentum sub recta linea AC, & circumferentia ABC, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

VII.

IN ſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.

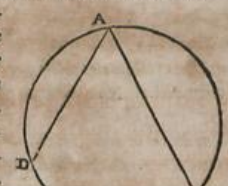
SIT ſegmentum circuli quodcunque ABC, cuius baſis recta AC. Ex ſuſcepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur exiſtere in ſegmento ABC.



VIII.

CVM vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.

EX puncto A, quolibet ſuſcepto in circumferentia circuli ABCD, ducantur rectæ duæ lineæ AB, AD, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ BCD, cuiuſque, quam quidem duæ rectæ AB, AD, aſſumunt. Angulus itaque rectilineus BAD, inſiſtere dicitur circumferentiæ BCD. Perſpicuum autem eſt, hunc angulum a præcedenti non differre, niſi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus BAD, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur eſſe in ſegmento BAD, ſi recta BD, baſis duceretur; ex hac vero inſiſtere circumferentiæ BCD. Non tamen confundendus eſt angulus in ſegmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ inſiſtit, quamuis vnus & idem ſit; ad diuerſa ſiquidem referuntur. Angulus enim in ſegmento, ſegmentum in quo exiſtit, angulus autem inſiſtens circumferentiæ, circumferentiam, quæ baſis eſt ipſius anguli, reſpicit. Vnde ſi ſumatur ſegmentum aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc ſegmento exiſtens, & eius circumferentiæ inſiſtens. Angulus enim in eo exiſtens, erit BCD; at eius circumferentiæ BCD, inſiſtens, erit angulus BAD, qui multum ab eo differt. Quain re mirum in modum hallucinati ſunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem anguli in ſegmento, & angulus circumferentiæ cuipiam inſiſtens, ad diuerſos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propoſ. lib. 6. quæ ſolum conuenire poteſt circumferentiis circulorum, quibus anguli inſiſtunt, non autem in quibus exiſtunt, vt eo in loco oſtendemus. Idem quoque facile conſtat ex verbo græco βεβηκέναι, *quod aſcendiſſe ſignificat. Aſcendit enim angulus DAB, ſupra circumferentiam BCD.*





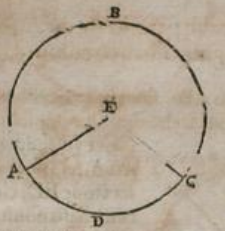
PRÆTER tres dictos angulos conſideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentiis ſe mutuo tangentibus, ſiue hoc exterius ſit, ſiue interius. Exemplum. Si recta AB, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus ACD, vel BCE, dicetur angulus contingentiæ, ſiue contactus: Rurſus, ſi circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, ſeu contingentiæ. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo curuilinei.



IX.

SECTOR autem circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis aſſumpta.

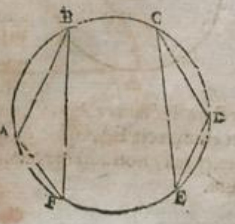
SI in circulo ABCD, cuius centrum E, rectæ AE, CE, conſtituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ aſſumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perſpicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipſius baſis eſt, non autem ad eam, in qua exiſtit, vt multi interpretes exiſtimarunt. Nam ſicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, quæ baſis eſt anguli ad centrum conſtituti, quando mentionem facit peripheriæ à rectis AE, CE, aſſumptæ; Ita quoque in illa intellexiſſe eum neceſſe eſt nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ aſſumunt, eam, quæ baſis eſt anguli ad circumferentiam conſtituti; quandoquidem in vtraque definitione vſus eſt eodem verbo græco ὑπολαμβάνω.



X.

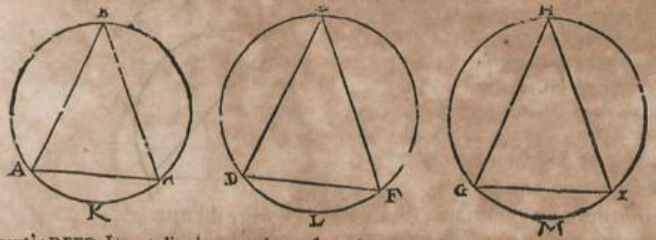
SIMILIA circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.

SEGMENTA videlicet ABDF, DCAE, eiuſdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, DCE, æquales: vel, quod idem eſt, in quibus ijdem anguli æquales exiſtunt, iuxta 7. definitionem, ſimilia dicuntur, & ipſæ circumferentiæ quoque ABDF, DCAE, ſimiles.



EODEM

EODEM modo segmenta diuersorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, à Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circumferentiæ ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc segmentorum, circumferentiarumve similitudo in eo, quod qualis pars est vna circumferetia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circumferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia ABC, totius circumferentiæ ABCA, talis & tanta quoque pars sit circumferentia DEF, totius circumferentiæ DEFD; Item talis, & tanta circumferentia GHI, totius circumferentiæ GHIG. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circumferentiasue, appellari similes.



EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in ijsdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, sint æquales, dicentur arcus, circumferentiæve AKC, DLF, GMI, quibus insistunt, similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcubus AKC, DLF, GMI, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.

i.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.

a 10. primi. SIT circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, *a* quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (à centro enim duci dicuntur) *b* erunt anguli AEG, CEG, æquales; ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus, ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.



b 8. primi.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta, rectam AC, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

ij.

THEOR. 1. PROPOS. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

IN circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, *a 1. tert.* ductam, cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, vt vult aduersarius. Inuento *a* igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetque ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cuius basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) *b* erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus EDA, *c* angulo ECD, maior externus interno opposito, cum latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus EDA. Quare recta EA, maiori angulo ADE, opposita, hoc est, recta EB, sibi æqualis; *d* maior erit, quàm recta ED, minori angulo DAE, opposita, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita vt eadem sit, quæ circumferentia ABC. Esset enim recta EA, maior, quam recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

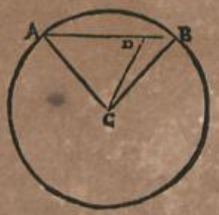


b 5. primi.
c 16. primi.
d 19. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta AB, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli AB, cuius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur recta CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera CA, CB, trianguli CAB, æqualia sunt, [d] erunt anguli CAB, CBA, æquales: Est autem angulus CDA [c] angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA, [f] latere CD, maius erit. Quare cum CA, sit ducta à centro ad circumferentiam vsque, non perueniet recta CD, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadit. Quod est propositum.



d 5. primi.
c 16. prim.
f 19. primi.

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, [g] caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.

g 2. tertij

THEOR. 2. PROPOS. 3. iij.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER centrum A, circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales. [a] Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primo propositum.

a 8. primi.

SIT iam AF ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, [b] erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque [c] erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.



b 5. primi.
c 26. prim.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est, primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, [d] æquale quadratis rectarum AF, FB, quam quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratum rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atque idcirco & rectæ FB, FD, æquales erunt.

d 47. prim.

COROLLARIVM.

EX hac demonstratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, siue æquilaterum illud sit, siue Isosceles, lineam, quæ basim bifariam secet, perpendicularem esse ad basim. Et contra, lineam, quæ ad basim sit perpendicularis, basim secare bifariam. Nam in triangulo ABD, cuius duo latera AB, AD, æqualia sunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus describi potest: ex eo, quod recta AF, secat basin BD, bifariam, ostensum est, angulos ad F, esse rectos: Et ex eo, quod anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basim BD, à recta AF, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propos. 26. lib. 1. & quidem vniuersalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonstrandum esse hoc loco sequens theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiam secans; erunt eius segmenta inter vtramque circumferentiam posita, inter se æqualia.

DVO circuli ABC, DEFG, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta AC, secans circumferentiam interiorem in D, G. Dico rectas AD, CG, æquales esse. Nam si ex HA, HC, quæ [e] æquales sunt, demantur HD, HG, quæ eadem ratione æquales sunt, [f] erunt rectæ AD, CG, æquales.

DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta AB, non per centrum, secans interiorem circumferentiam in E, F. Dico rursus, rectas AE, BF, esse æquales. [g] Ducta enim ex centro H, ad AB, perpendiculari HI, [h] secabit hæc tam rectam AB, in circulo ABC, quam rectam EF, in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus IE, IF, ex æqualibus IA IB, [i] remanebunt AE, BF, æquales, quod est propositum.



e 15. def.
i 3. pron.
g 12. primi.
h 3 tertij.

iv.

THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ seſe mutuo secent, non per centrum extenſæ; ſe ſe mutuo bifariam non ſecabunt.

DVÆ rectæ AB, CD, ſe mutuo in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum, eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diuiſa n. ſit & AB, & CD, ſi fieri poteſt, bifariam in E. *a* Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta FE. Quoniam ergo FE, ponitur ſecare rectam AB, bifariam in E, *b* ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur CD, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.



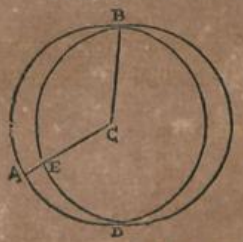
a 1. tertij.
b 3. tertij.

v.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli ſeſe mutuo ſecent, non erit illorum idem centrum.

DVO circuli ABD, EBD, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad ſectionem B; CA, vero ſecans vtramque circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ CB æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ EC, AC, *a* æquales inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.



a 1. prom.

vj.

THEOR. 5. PROPOS. 6.

SI duo circuli ſeſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVO circuli AB, BC, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad tactum B. At DC, ſecans vtramque circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD, *a* inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 1. prom.

SCHOLIVM.

EVCLIDES propoſuit theorema hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cum vnus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

vij.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro AB, circuli ACDEB, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior eſt, maiorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, maiorem recta GE, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtraſq; partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodo duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, *a* maiora ſunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc eſt, toti rectæ GA; erit & GA, maior, quam GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima eſt omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.



a 20. prim.

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, latus EF, *b* minus eſt duobus lateribus FG, GE. Eſt autem EF, ipſi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

b 20. prim.

RVR-

RVRSVS, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, maior est angulo GFD; c erit basis GC, maior basi GD. Eadem ratione maior erit GC, quam GE; Item maior erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior. c 24. prim.

FIAT iam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; d erunt rectæ GE, GH, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ci, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam GH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum. d 4. prim.

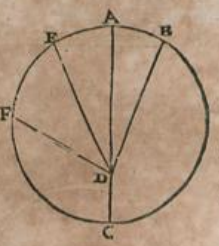
SCHOLIVM.



QVAMQVAM autem Euclides solum demonstrauerit, lineam, quæ propinquior est rectæ per centrum ductæ, remotiore esse maiorem, si ambæ lineæ ex eadem parte diametri AB, existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Vt si quis dicat, rectam GD, propinquiorem esse rectæ GA, quam rectam GH; dico GD, maiorem esse, quam GH. Si namque ipsi GH, ex altera parte æqualis ducatur GE, vt dictum est, nempe si fiat angulo GFH, æqualis angulus GFE, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod GH, GE, æqualiter à GA, distent, ob æqualitatem angulorum GFH, GFE; & GD, ponatur minus distare, quam GH, ac proinde minus, quam GE. Cum c ergo GD, maior sit, quam GE, maior quoque erit eadem GD, quam GH. c 7. tertij.

HANC porro propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.



IN circulo ABC, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque DA, DC, DE, DF, DB, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit DA, minima vero DC; ipsarum vero DE, DF, maior sit DE, denique DE, DB, sint æquales. Dico DA, per centrum transire, & DC, reliquam partem esse diametri, hoc est, DC, ipsi DA, esse in directum. Item DE, quæ maior ponitur quam DF, propinquiorem esse maximæ DA, quam DF. Denique DE, DB, æqualiter ab eadem DA, vel DC, abesse. Primum enim si DA, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, f erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA, maxima ponatur. Transit ergo DA, per centrum. f 7. tertij.

DEINDE si DC, non est in directum ipsi DA; protracta AD, in directum, g erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius AD, protractæ, omnium minima; Quod est absurdum; cum DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri. g 7. tertij.

RVRSVS si DE, non est vicinior maximæ DA, quam DF; aut æqualiter distabunt ab ea, aut DE, longius ab ea aberit: Si æqualiter vtrinque à DA, dicantur distare, h ipsæ erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim DE, maior. Si vero æqualiter ex eadem parte à DA, distare dicantur, erunt DE, DF, vna eademque linea; atque adeo DE, maior non erit, quàm DF, quod est contra hypothesin. Quod si DF, dicatur esse propinquior maximæ DA, i ipsa erit maior, quam DE. Quod magis est absurdum. h 7. tertij. i 7. tertij.

POSTREMO si DE, DB, non æqualiter distant à DA, vel DC, k erit ea, quæ magis à DA, distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales DE, DB. k 7. tertij.

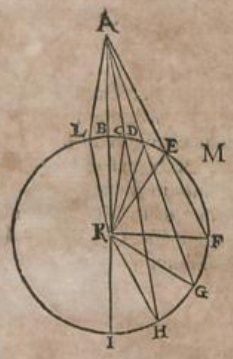
THEOR. 7. PROPOS. 8. viij.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est. In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum transeat, aliæ vero AH, AG, AF, vtcunque. Dico omnium esse maximam AI, quę per centrum incedit: Deinde rectam AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior existit, maiorem recta AG, quæ remotior est ab eadem AI: Et eadem ratione AG, maiorem quam AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam AC, quæ vicinior est mini-

mæ AB, minorem esse recta AD, remotiore; Et eadem ratione, ipsam AD, minorem quam AE. Denique ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera AK, KH, trianguli AKH, *a* maiora sunt recta AH; Sunt autem rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc est, toti rectæ AI; erit & AI, maior, quam AH. Eadem ratione erit AI, maior, quam AG, & quam AF. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

a 20. prim.



DEINDE, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, maior est angulo AKG; *b* erit basis AH, basi AG, maior. Eadem ratione maior erit AH, quam AF: Item AG, maior, quam AF. Quare linea propinquior ei,, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore.

b 24. prim.

RVRSVS, quia in triangulo ACK, recta AK, *c* minor est duabus AC, CK; si auferantur æquales BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit AB, minor, quam AD, & quam AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A ducuntur, minima est.

c 20. prim.

RVRSVS, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; *d* erunt AC, CK, minores, quam AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit AC, minor, quam AE, item AD, minor quam AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor est, quam remotior ab eadem.

d 21. prim.

POSTREMO fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dicti lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior à minima, maior quam AL. Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam AL, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

e 4. prim.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ AI.

FIAT enim angulo AKH, æqualis angulus AKM, iungaturque recta AM. Quia igitur latera AK, KH, æqualia sunt lateribus AK, KM; sunt autem & anguli AKH, AKM, æquales: f erunt bases AH, AM, æquales: Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quam AH, prout citra vel vltra rectam AH, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.

f 4. prim.



HÆC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longius à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus aliis in cauam peripheriam cadentibus, qualis est recta AM, in priori figura. Nam ducta recta KM, ex centro ad contactum, erunt duo latera AK, KF, trianguli AKF, æqualia duobus lateribus AK, KM, trianguli AKM, angulus vero AKF, angulo AKM, maior. Igitur g basis AF, basi AM, maior erit. Eadem ratione maior erit quæcunque alia in cauam peripheriam cadens, quã recta AM.

g 24. prim.

PARI ratione eadem linea tangens AM, maior erit omnibus aliis in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cum duo latera AE, EK, h minora sint duobus lateribus AM, MK: si auferantur æquales rectæ KE, KM, erit reliqua AE, minor quam reliqua AM. Eademque ratio est de cæteris.

h 21. prim.

QVAMQVAM vero Euclides solum demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ vel minimæ existãt: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.

ix.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

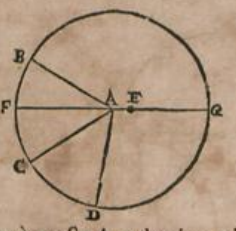
A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales; *a* erunt anguli AEB, AEC æquales ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ AE, AF, diuidant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. prim.



ALITER

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, *b* sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter FG. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum est punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; *c* erit recta AD. quæ propinquior est rectæ AG, per centrum E, ductæ maior, quam recta AC, remotior ab AG, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



b 11. tertij.

c 7. tertij.

QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres AB, AF, AC, vbi EA, coincidit cum AF; *d* erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & AC, quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

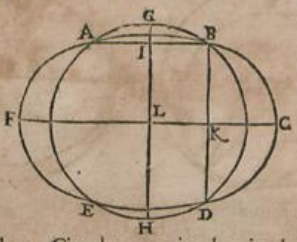
d 7. tertij.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

x.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulum AGDBHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus *a* bifariam diuisis in I, & K, *b* educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, *c* quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

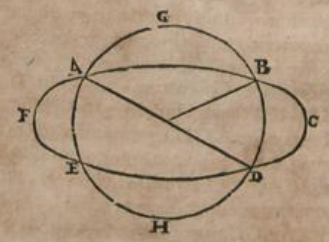


a 10. primi.

b 11. primi.

c 5. tertij.

ALITER. Secent se iidem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. *d* Inuentum autem sit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ rectæ æquales, *e* erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. *f* Quod est absurdum.



d 1. tertij.

e 9. tertij.

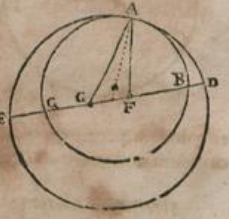
f 5. tertij.

THEOR. 10. PROPOS. 11.

xj.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, *a* non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, *b* maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC,) erit & FB, maior, quam FD, pars quam totum, quod est absurdum.



a 6. tertij.

b 20. prim.

QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, *c* maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectæ FE, æqualis (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC; (propterea quod G, ponitur esse centrum circuli ABC,) erit quoque GC, maior, quam GE, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli sese intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

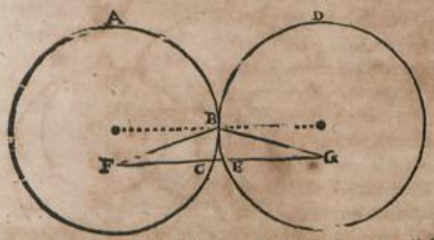
c 20. primi.

THEOR. 11 PROPOS. 12.

xij.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrum circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturq; à centris F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, *a* maiora sunt latere FG: Est autem recta BF, rectæ FC, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta GB, rectæ GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE) erunt & rectæ FC, GE, maiores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

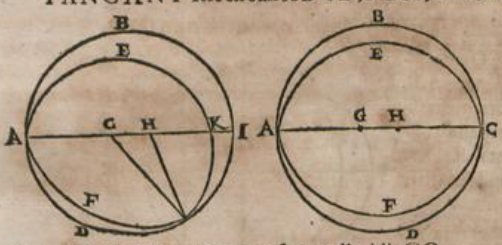


a 20. primi.

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in plurib. punctis, quã vno, siue intus, siue extra tangat.

TANGANT sese circuli ABCD, AECF, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, *a* quæ diuersa erunt, per quæ recta GH, in vtramque partem extendatur, quam necesse est *b* cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta AGHC, diameter, diuidetur AGHC, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem AC, bifariam in H, quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque GC, est dimidium totius AC, erit necessario HC, dimidio minor, cum sit pars dimidi, GC.



a 6. tertij.

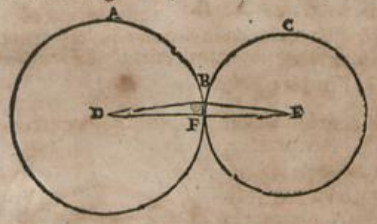
b 11. tertij.

Quod si quis dicat rectam GH, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumq; circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. vtrique contactui conueniat Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ GC, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli ABCD: & H, centrum circuli AECF. Et quia in triangulo GHC, duo latera GH, HC, *c* maiora sunt latere GC: Sunt autem rectæ GH, HC, æquales ipsi GK: (quod HC, HK, ex centro H, sint æquales, & GH, communis) & recta GC, rectæ GI; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta GK, maior quam GI, pars quam totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur rectæ HG, GC, *d* maiores sunt recta HC; Est autem HC, æqualis rectæ HA: (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque HG, GC, maiores recta GA. Quare dempta communi HG, erit GC, maior, quam GA, quod est absurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam vno.

c 20. prim.

d 20. primi.

TANGANT se iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli CB, recta DE, *e* quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc est ipsi DE: *f* Sunt autem & maiores, quod est absurdum. Non ergo se tangẽt circuli exterius in pluribus punctis, quã vno.



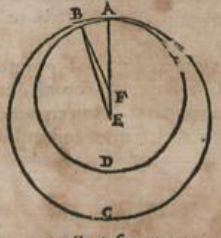
e 12. tertij.

f 20. primi.

ALITER. Si circuli AB, CB, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipsa intra vnum circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Si recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probauit, circulum à circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potissimum concludere, circulum non posse tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo interuallo à se dissideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum, in plurib. punctis, quam vno, ostendemus breuiter, in vno eodemq; contactu non posse esse plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus ABC, circulum ABD, prope A, & per eorum centra E, & F, g quæ diuersa sunt, recta ducatur EF, h quæ ad contactum perueniet necessario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si n. se tangant in alio etiam puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis BE, BF, i erunt rectæ EF, FB, maiores recta EB. Est autem recta EB, æqualis rectæ EA, cũ vtraq; sit ex centro E. Igitur & rectæ EF, FB, maiores erunt recta EA. Quare dempta communi EF, remanebit FB, maior, quam FA, quod est absurdum, cum FB, FA, cadant è centro F, ad circumferentiam, ideoq; ex circuli defin. æquales existant. In solo ergo puncto A, se mutuo tangent circuli ABC, ABD, & non in alio.



g 6. tertij.

h 11. tertij.

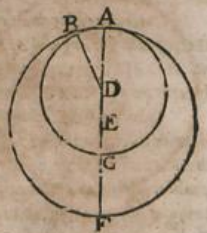
i 20. primi.

NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema, videlicet.

SI in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt

cto vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet.

Sit circulus ABC, cuius centrum D, & in semidiametro AD, producta sumatur punctum quodcunq; E, ex quo ad interuallum EA, circulus describatur AF, quem dico circulum ABC, in solo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, est intra circulum ABC, aut extra. Si intra, quoniam AE, maior est, quam AD, hoc est, quam DC, hoc est, à fortiori, quam EC; erit quoq; EF, quæ ipsi AE, æqualis est, maior quam EC: ac proinde punctum F, extra circulum ABC, existet, circulusq; AF, extra eundem circulum ABC, prope punctum F, existet. Multo magis punctum F, extra circulum ABC, cadet, si E, extra eundem circulum ABC, existet: Si igitur circulus AF, non totus extra circulum ABC, cadat, ita vt eum in solo puncto A, tangat; secet, vel tangat circulus AF, circulum ABC, in alio puncto B, si fieri potest, ducatur q; recta DB. Quoniam igitur in diametro circuli AF, sumptum est punctum D, præter centrum E, [k] erit DA, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo DA, quam DB. Quod est absurdum. Sunt enim æquales rectæ DA, DB, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiusdem circuli ABC. Non ergo circulus AF, circulum ABC, secat aut tangit in alio puncto, quam in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.



k 7. ter.

Quod si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget quoq; priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq; intra eundem cadet. Vt si in semidiametro AE, circuli AF, sumatur punctũ D, ex quo ad interuallũ DA, circulus describatur ABC, cadet hic totus intra illum, tangetq; eum in solo puncto A. Cum enim ostensum proxime sit, circulum AF, cadere totum extra circulum ABC, cadet vicissim totus hic intra illum, ita vt se mutuo in solo puncto A, contingant.

THEOR. 13. PROPOS. 14. xiiij.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

Sint in circulo ABCD, cuius centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & coniungantur rectæ EA, ED. [a] Secabunt rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponãtur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA, [b] æquale est quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoque & rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.



a 3. ter.

b 47. terti.

RVRSVS distent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducãtur enim itẽrum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [c] diuidentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, [d] æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro &c. Quod erat demonstrandum.

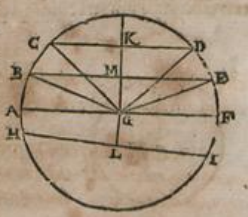
c 3. terti.

d 47. prim.

THEOR. 14. PROPOS. 15. xv.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. [a] & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, [b] maiores quidem sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eadem ratione ostendetur AF, maior omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; [c] erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoq; erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.



a 14. ter.

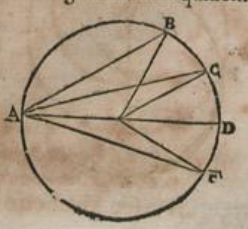
b 20. prim.

c 24. prim.

SCHOLIVM.

Eodem fere modo demonstrabitur theorema, si ab vno, eodemq; circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.

Cadant enim à puncto A, plures lineæ AB, AC, AD, quarum AD, per centrum E, transeat. Dico AD, esse omnium maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, [d] maiora sint latere AC; sintq; rectæ AE, EC, æquales rectis AE, ED, hoc est, rectæ AD; maior erit AD, quam AC. Eademq; ratione maior erit, quam AB; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD.



d 20. prim.

Deinde, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, æqualia sunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB; & angulus AEC,
c 24. prim. *totus maior est angulo AEB;* c *erit basis AC, maior basi AB. Eodemq; argumento erit AC, maior quacunq; alia linea, quæ à centro remotior est.*

Cæterum & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt à puncto A, ad vtrasq; partes maximæ AD. Si namq; angulo AEC; æqualis fiat angulus AEF, iungaturq; recta AF; cum latera AE, EC, æqualia sint lateribus AE, EF, & anguli contenti quo-
f 4. prim. *que AEC, AEF, æquales;* f *erunt bases AC, AF, æquales. Negq; vero vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi. Quæcunq; enim ducatur ex A. supra AC, ea minor erit quam AC; si vero infra AC, ea maior erit, vt iam demonstratum est.*

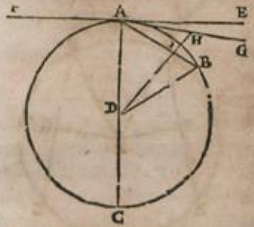
Quod si AB, AF, ad diuersas partes diametri AD, ducta sint, & dicatur AF, propinquior centro, quàm AB, demonstra-
g 14. ter. *bitur, vt in scholio propos. 7. huius lib. AF, maiorem esse, quam AB. Si namq;, vt proxime ostensum fuit, ducatur ipsi AF, æqua-*
lis AC, ex altera parte, nempe si fiat angulo AEF, æqualis angulus AEC, &c. cadet punctum C, inter B, & D; quod AF, AC, æqualiter distent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC. Hinc enim fit, cum AF, ponatur propinquior centro, quam AB, vt & AC, ipsi AF, æqualis, propinquior sit centro, quam AB, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cum ergo AC, maior sit, quàm AB, vt in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoq; AF, quam AB.

xvj.

THEOR. 15. PROPOS. 16.

QVÆ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis
25. prim. est AB; ducta DB, a erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur &
b 17. prim. DBA, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo b minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico iam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, secans circumferentiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo



c 17. primi. DAH, c duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus
d 19. pri. est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc est, recta illi æqualis DI, d maior erit, quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorē esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB; minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnē rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum AC, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cum AE, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentię, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo semicirculi contento sub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius sit pars: Angulus vero contingentiæ contentus sub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille huius pars sit. Eademque ratio est de omnibus aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonstrauimus. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaq; quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

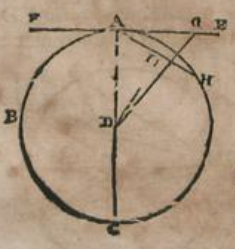
COROLLARIVM.



HINC manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

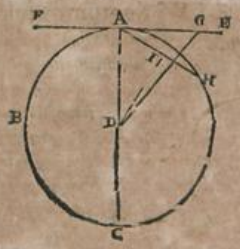
QVARE si iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonstratum est.

EX ORONTIO.



c 17. prim. f 19. primi. *Potest hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad AC, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta GD. Quoniam igitur in triangulo ADG, duo anguli DAG, DGA,* c *minores sunt duobus rectis, & DAG, factus est rectus; erit DGA, recto minor. Quare* f *maior erit recta DG, quam DA; ideoq; punctum G, extra circulum erit. Eademq; est ratio de omnibus alijs punctis rectæ AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico necessario se-*
g 13. prop. *care circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur communi angulo DAH, erunt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoq; minores duobus rectis: Quare* g *coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum*

ctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo DAI, [h] æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, ostensi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atq; adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta DA, [i] maior est, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; propterea q; punctum I, intra circulum existet; atq; adeo recta AH, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.



h 32. pri.

i 19. pri.

SCHOLIVM.

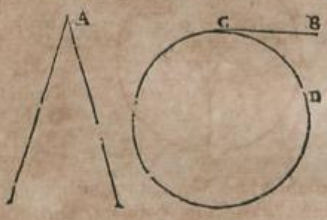
Existimat Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atq; adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

Cum huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.

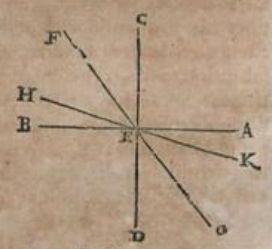
Primum enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atq; adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

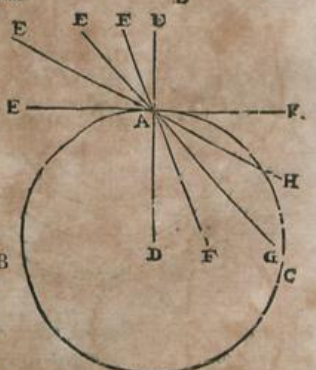
SI à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quàm dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

Verbi causa, sint duo anguli, A, quidem rectilineus; BCD, angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quam dimidium, ac rursus à reliqua parte maius, quam dimidium; sicque continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam BCD. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum à ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neq; vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstranda, aliys q; propositionibus nonnullis solidorum, à curuo rectum auferat.



Nos igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet BCD, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoq; anguli forma. Atq; vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis AB, & CD, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligantur CD, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex CD, fiat FG; hinc sane ex recto angulo AEC, fiet obtusus AEF: Inde ex recto BEC, fiet acutus BEF. Cumq; facta fuerit HK, hinc quidem angulus obtusior fiet HEA, inde vero acutior BEH; sicq; continuo, donec peruenerit ad AB, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, vt sic dicam, linea CD, in lineam AB, euanesceret angulus. Neq; diuersa ratio est in curuo. Sit n. in circulo ABCA, cuius centrũ D, linea DE, præteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa DE, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea ED, facta sit EK, & tãgat circulum. Ac tum linea DE, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam BAC, quantum ad angulum attinet: non aliter quam si BAH, esset linea recta; neq; contra facit, quod deducantur lineæ, faciantq; spatium CAK. Nam id sola AC, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam vno; sit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumq; A, peripheriæ in suo rotundo; neq; vtrumq; esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omniq; puncto refugit; vt contraria contraposita fiant manifestiora; Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum ABC, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse, vt nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet. Illud tamen minime vrgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus. Habit enim vtrinq; ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

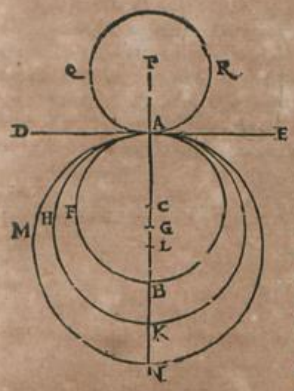




CON-

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

Sit enim circulus AFBA, cuius centrum C, diameter vero AB, per cuius extremitatem A, ducatur linea DE, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæsextæ lineam DE, contingere ipsum AFBA, circulum: ac propterea DAF, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsextæ. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro AB, centrum G, & spatio GA, describatur alter maior circulus AHKA. Dico FAH, non esse quantitatem. Constat quippe circulum AHKA, transire inter rectam DA, & curuam AF, cum sit semidiameter GA, maior semidiametro CA. Manifestum quo3 est, lineam DE, tangere ipsum AHKA, circulum, ex eodem huiusce decimæsextæ consectario: ac propterea DAH, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium LA, circulus AMNA. Et erit ex eodem consectario, DAM, omni acuto minor. Sicq3 in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea DE, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic omnes æquales, si modo æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietq3 vt MAF, contactus interior circulorum, neq3 augeat, neq3 minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.



Sed & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis vtriq3 angulorum KAH, NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

Manente enim eadem constructione, si DAF, sit quantitas; ipsa vtiq3 diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neq3 per obliquam, vt per lineam AM. Esset enim FAM, pars ipsius DAF: At qui FAM, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur FAM, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neq3 per lineam rectam, neq3 per obliquam diuidi potest. Quare DAF, quantitas non est: Quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

In eadem constructione, protrahatur BA, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem PA, describatur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neq3 per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum; neq3 per rectam, cum neq3 DAF, sit quantitas, per secundam earundem; neq3 DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

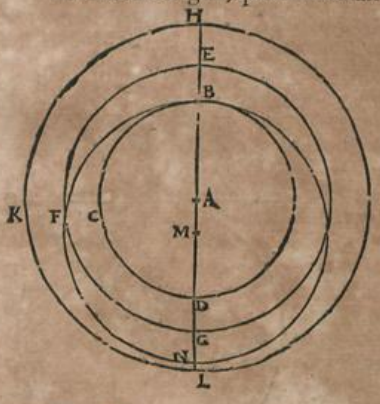
Ex his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

Vt in posteriori figura, angulus BAF, æqualis est angulo BAD; cum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quantitas non est: & ob id QAP, rectus quoq3 est, & æqualis ipsi DAP, cum DAQ, nihil addat: Quod erat probandum.

Hac Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, sunt æquales.



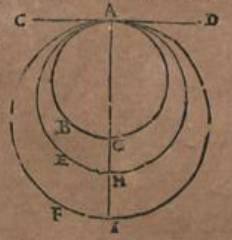
Sint enim super centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG; & secet EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, esse æquales. Nam si sit FED, maior ipso CBD; (neq3 enim contra, CBD, maior vllo pacto erit ipso FED) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit HKLH: fiet tandem ex continuo augmento, angulus à diametro, & peripheria, verbi gratia, angulus KHL, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exteroribus iudicium. Neq3 in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

His ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea HL, posito, describatur circulus BFNB, tanto interuallo, quanto est circulus EFGE; posita scilicet MB, semidiametro æquali ipsi AE; qui circulus tangat BCDB, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum FBD, æqualem esse angulo FED, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse FBD, erit angulo CBD, æqualis. Igitur CBF, contactus nihil addit ad ipsum CBD, angulum. Quare CBF, quantitas non est: quod fuit probandum. Atq3 hinc procedit demonstratio eorum, quæ in 3. lib. adduximus, theorematum.

HÆC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset,

fisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunq; angulo? Quid quoq; magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atq; adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

Primum igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Immo vero asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus CAB, si per A, describatur circulus AEH, maior circulo ABG, tangens rectam CD, in A; fiet angulus contactus CAE, minor angulo contactus CAB. Quod si adhuc maior circulus AFI, describatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eodem angulo contactus CAB. Atq; ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunq;. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari potest; cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus BAC, minor est recto BAF; & tamen si ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quod si alia recta AE, inter AB, AD, ducatur, erit multo minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.



Pari ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, detur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo cõtactus CAF, maior est angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atq; ita deinceps. si minores semper circuli, quam ABG, describãtur, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior est acutus BAD, & multo adhuc maior acutus BAC. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem AF, & rectam AC, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incrementi nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit æqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoq; in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulũ mixtum, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) Sed angulus contactus acuto semper minor est.



Eodem modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi BAG, maior est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc maior angulus semicirculi FAI: Atq; ita deinceps. si maiores semper circuli describantur, quam AFI, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto CAI. E contrario vero, angulo semicirculi FAI, minor est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc minor angulus semicirculi BAG; nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

Quod autem anguli contactus sint inæquales inter se, non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; non erunt omnes anguli huiusce modi inter se æquales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minimè inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

Solum igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur à peripheryis æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur à peripheryis minoribus, maiores erunt; Et qui à peripheryis maioribus, minores. Anguli deniq; semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neq; enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

Constat ergo, quemuis angulum contactus habere partes: & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunq; angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

Deinde non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus,

contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namq; quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent; esset quoq; vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit; si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunq; etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici à duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoq; naturalibus exemplum asseramus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium æquales esse. sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque n. hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propos. 31. huius lib.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit verè pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, qua vtrumq; tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namq; rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoq; Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Et si enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulū contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse, ac nullius momenti, hominemq; Geometra prorsus indignas.

HÆC porro mea de angulo contactus disputatio adeo Peletarium commouit, atq; perturbauit, vt lasam esse omnino, atq; offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinq; post mei in Euclidem commentarij editionem, hoc est, anno 1579. vt se defenderet, Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neq; ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neq; opinionem suam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuitijs se defendere conatur, vt facile ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quam veritatis tuendæ gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio gratissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responso omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc vero quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias, atq; iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modestia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam sit anno 1586. in meis triangulis sphæricis, vbi necessario de re ipsa, eiusq; Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortasis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, vbi proprius eius locus est, interseram, vt benignus lector intelligat, sine causa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsoq; mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abstinere, aperte testatur. Atq; in illa Apologia nihil adeo me offendit, quam quod me Peletarius non syncere, sed animose, atq; adeo inuidiose fecisse insimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: quæ sane vitia pusilli semper animi esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianeq; educato alienissima. Verum ea quam longe absint tum à nostræ Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra norit, ignorat. His vero, qui nostra minime norunt, hic ipse liber fidem faciet, syncere omnia dici, nihil inuidiose, nihil animose: plane vt veritatem quæsitam, non cuiusq; auctoritatem contemptam esse appareat. Neq; enim mihi tantum derogo, (etsi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, si quid in alienis scriptis falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minus probetur, ostendam; modo (quod prudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine conuitio, atq; irrisione faciam: Hoc autem liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atq; conuitij. Nam in scholio hoc de angulo contactus iurare liquido possem, nihil me minus cogitasse, quam vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modo consequi possem) vt suus esset veritati locus. Quod quidem eò liberius feci, quod Peletario ipso non modo inuito, sed etiam libenti existimaui me esse facturum,

ẽturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solum atq; Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratho-sthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipso denique omnium magistro Euclide dissentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia vere dictum est, in omni doctrina, præsertim vero in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi forte aut decipi se non posse arbitratur, qui columina illa Geometriæ errasse interdũ prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potius, quam in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, næ ego maximam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuitia ferre non potest: quæ tandem conuitia? rogas? Demonstrationes meas appellat sophismata. Nũc demum, quæ conuitia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro esse certo scio: ab his (si conuitia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuitia esse nunquam duxi, cum vere dicerentur. Neq; enim, quo alio vocabulo demonstrationes plane fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neq; vero philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quod cum à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardaniq; demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius per simili me vocabulo vsurum. Quod si sophisma contumeliosius verbum est, quã paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudinis eius ignaro, atq; existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atq; vt plane intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vna considereat, quantam mihi materiam sui refellendi dederit. si hominem refellere potius, quam rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionem eius reprehendendi in sinum delatam sæpius omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimum incurrerem. Quam præclara enim occasio fuit in propos. 4. & 8. lib. 1. atq; in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reijcit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse à Geometriæ dignitate putat esse alienum, hac solum inductus ratione, quod superpositionem illã mechanicũ quid esse arbitretur, & quod omnes fere propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiã problemata, in quibus aliquid proponitur construendum: atq; in huius rei exemplum adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certe Peletarium iure carpere potuissem. si id mihi fuisset propositum, vt falso criminatur; maxime in eo, quod eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometræ superpositionẽ illã vsurpent. Neq; n. volunt, re ipsa faciedã esse superpositionẽ. (hoc n. mechanicũ quid esset) sed cogitatione tantũ, ac mẽte, quod opus est rationis atq; intellectus. Itaq; in theorematib. quidẽ locũ habebit genus hoc argumẽtandi, in problematibus vero non. Namq; in theorematib. propter magnitudinũ æqualitatẽ, inæqualitatẽue, quæ, vt nota ponitur, facile intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione cõprehẽdit, vnã vel non excedere alterã, vel excedere. si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quãuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in propos. 4. lib. 1. factũ est: At in problematib. in quib. magnitudinẽ quis alteri æqualẽ construere iubetur, licet mente cogitet magnitudinẽ propositã transferri in aliũ locũ, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipsa translatio nulla facta sit: Vt mirum sit, Peletarium sibi persuadere potuisse, propos. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per superpositionẽ, siue trãslationẽ linearum, figurarumue posse demonstrari, si hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certe hac in re non solum Euclidem in crimen vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusq; commentatorem grauissimum, eumq; doctissimũ Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quo tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, sit deuolutus. Videbat Peletarius, (neq; enim rem adeo manifestam videre non poterat) si huiusmodi argumentandi è medio tollat; vniuersam se Geometriam funditus euertere, cum plurimæ, eæq; præcipuæ propositiones in Geometria demonstrentur ex propositione 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonstrari nequeunt, quam per illam figurarũ superpositionem, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehensam. Quo igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit sane rem magis à Geometria alienam, quam est superpositio illa figurarũ. Coactus enim est asserere, propositionem 4. lib. 1. esse definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atq; adeo concedendam eam esse sine demonstratione: propositionem vero 8. eiusdem lib. principium esse per se quoq; notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita scribit in propositionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori specie æqualitas figurarum dignoscitur, quam ex laterum æqualitate.) Idemq; quasi confirmat, & repetit in propositionem 8. eiusdem lib. dum ita loquitur. (Quis enim negauerit, duas superficies esse æquales, quarum latera & quantitate, & numero sunt æqualia?) Hæc Peletarius, vt dictæ propositiones Euclidis sine demonstratione admittantur, commentus est, sed quæ omnino falsa sunt: vt magnopere mirandum sit, potuisse eum propositiones à Geometria prorsus alienas tam inconsiderate proferre. Scilicet verum est, quod philosophi asserunt; Dato vno absurdo, cætera consequuntur. Assumpserat enim Peletarius propos. 4. & 8. lib. 1. pro principijs: quod quidem falsum est, atq; absurdum. Vnde ad eas absurditates necessario deuenit, quas etiam illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facile vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamsi latera habeant & quantitate, & numerò æqualia, posse tamen inter se valde esse inæqualia? Id quod in Pentagonis quoq; æquilateris, & in alijs figuris plurium laterum æqualium cerni potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonstrandum fuit necessario Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligitur. Quare neq; propositio 4. Definitio, neq; propositio 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodum sunt, corruant necesse est, nisi demonstrationes Euclidi reciprantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim noua propos. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, quam (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solum construitur vnum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immo idem, atque hoc ipsum quidẽ ineptissime, cum ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod à posteriori ex duobus propositis non differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifeste principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse æqualia; quippe cum constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Prætereo alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quod plerunq;

rung, secundam propos. lib. 1. insciteprotertia assumat, &c. Neq; n. mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solũ calumnias, quas frequentes in sua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cum ita sint, quod ille falsò de me, vere ego de illo dicere possem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretem contigisse, qui non iam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidem sine causa reprehendat; quippe cum ego Euclidem (vti par est) à calumnijs ipsius defendam, omnesq; insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me eamente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius à me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficiũ acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisq; percipere. Nunc vt, quam dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atq; ita refellã ac diluam, vt omnes oculus videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi à me moderatio adhibebitur, vt modestia, quæ hominem religiosum decet, minime obliuiscar. Neq; enim illi, vti prouocauit, respondebo.

Primum itaq; mihi obijcit Peletarius, quod in eius demõstrationib. citandus ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturũ. Quod quam sit falsum, facile indicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cũ vbiq; eũ honorifice appellẽ, eiq; plurimas demonstrationes ascribã, tanquã proprias, quas tamen aliter, quã ipse, & multo breuius demonstro, & interdum etiã (quod maius est) vniuersalius, vt liquido constat ex ijs, quæ tũ ad prop. 38. tũ ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceã: quæ non iniuria mihi vendicare potuissem: vt mirer, quid illi in mentẽ venerit, id à me parũ syncere, atq; adeo inuidiose factũ existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiose factũ quispiã iudicaret. Quod vero propos. 16. lib. 3. & in priorib. duabus definitionib. lib. 5. vt ipse obijcit, animose, vt ego fateor, libere, quid de eius demonstrationib. sentirẽ, exposui, id feci, vt iã ante dixi, non cuiusquam lædendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea n. est natura, & conditio eorũ, qui liberalib. artibus dant operã, vt etiamsi alter alterius interdũ sententiã impugnet, non tamen idcirco odijs potius, quam ingenijs inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidẽ, vt supra dixi, ita sum animo, vt si quis me alicuius erroris in demonstrando commissi admoneret, ei quã maximas gratias haberẽ: atq; vt liberius id facerẽt, enixe rogaui non paucos, & nunc iterũ eosdem, atq; etiã alios amice oratos volo. Scio n. quã facile possit in suis quisq; inuentis hallucinari; video (quod ipse quoq; Peletarius in Apologia sapienter asserit) omnib. hominibus cõmune esse, vt peccent. Deinde q; in additionib. ad propos. 47. lib. 1. eius mentionẽ non fecerim, non est, quod ægre ferat, cum illæ propositiones non sint ab ipso inuentæ. Quædã n. multo tẽpore ante ipsum demonstratæ sunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quasdã vero demõstraui egomet, antequã ipsius demonstrationes vidissem; quod adeo manifestæ sint, & faciles, vt nulla probatione egeant, sed sint instar corollariorũ propos. 47. Vt nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maxime eas ab ipso inuentas esse (q; tamen verũ non est) prædicassem; cũ eas quilibet, modo primorib. libris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere possit: Vt non videã, cur tandẽ eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cum sint omniũ iudicio leuissimæ; adeo vt in pleriſq; earũ nec ipse Peletarius demonstrationẽ vllã, propter earũ euidentiã, adducat, sed ea nulla probatione egere fateatur. Demiq; non est, quod tantopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datã rectã lineam finitã ei non tribuerim: quoniã in ea constructione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod ijs dijudicandũ relinquo, qui meã cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diuersa est, & ille in sua mirifice (vt alia peccata taceã) abutitur proportione 9. lib. 3. cũ ex ea probet, punctum quoddã esse centrũ circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sane dixisset, punctũ illud esse eiusmodi, vt circulus ex eo descriptus ad interuallũ cuiuslibet lineæ rectæ ex illis trib. quæ ibi ostensa sunt æquales, transeat per extremitates reliquarũ duarũ linearũ æqualiũ. Nã propositio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rẽ facit, cũ propositũ ex ipsa constructione possit concludi, & ex demonstratis, vt proxime dixi, etiamsi propositio illa vera non esset, aut nusquã demõstrata. Idẽ peccatũ cõmittit Peletarius in omnib propositionib. lib. 4. in quib. velintra figurã rectilineã, vel circa eandẽ circulus describendus est. Quod si ideo sum reprehendendus, quod propositionẽ vnã, multo aliter à me, & breuius demonstratã, ei non ascripserim, non video, quo pacto in idẽ ipse vitiũ non incurrat, cũ problema hoc (propositis duab. lineis inæqualib. potentiã maioris supra minorẽ cognoscere.) multũ seculis ante ipsum à Theone demonstratũ sibi arroget; hac solũ de causa, vt arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonstrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo æqualẽ angulũ curuilineũ constituere.) quod in Apologia suũ propriũ appellat, idemq; hactenus desiderat esse gloriatur; cũ tamen illud ipsum ego ex Proclo, qui multũ ante eũ seculis floruit, in desin. 5. lib. 5. multo breuius, & clarius demonstrauerim. Nam, vt eo in loco ostendi, si rectæ lineæ datũ angulũ rectilineũ continentes ponantur æquales, & circa ipsas duo semicirculi (qui æquales erunt) versus easdẽ partes describantur, illico constitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neq; opus est tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eã rẽ demõstrandam adhibet; quamuis robur demonstrationis ipsius idẽ sit, quod meæ. Et quod magis mirandũ est fatetur Peletarius, se meã demonstrationẽ vidisse, & eã nihilominus sibi audet, tanquã propriã, arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonstrationes parũ honestẽ, vt mihi vendicẽ, sibi subducere conatũ. Quis autẽ non videt, id eum in altero vituperare, quod ipse sibi gloriosum putat? Itaq; multo verius, ac iustius eodem illum crimine ego, quàm ille me, condemnare possum; cum nunquam propositionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipse, sed solum eius nomen, obrationes à me expositas, reticuerim.

Deinde angulũ cõtactus, & acutũ rectilineũ eiusdẽ generis esse, cõtra me plurib. verbis conatur ostẽdere. Sed nescio quo modo aberrat q; dicitur, à scopo. Solũ n. probat, vtrũq; angulũ eodẽ genere quantitatis cõtineri, h. e. vtrũq; angulũ planũ esse: q; acutus angulus rectilineus, vel etiã rectus constare possit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: q; neq; ego, neq; vllus vnquã Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdẽ esse generis negaui hac solã de causa, quod angulus contactus quantũuis multiplicatus angulũ acutũ rectilineũ superare nequeat, vt in scholio huius propo. 16. euidenter ostendi. Hinc n. sit, vt alter ad alterũ proportionẽ non habeat, atq; adeo quodãmodo diuersi generis sint: quemadmodũ eadẽ de causa linea recta finita, & infinita nõ censentur esse eiusdẽ generis, cũ altera ad alterã proportionẽ non habeat; quãuis sub eodẽ genere magnitudinis; nimirũ sub linea recta, cõprehẽdantur. Hoc itaq; feriat, vt collimasse videar: quamq; vt omnia faciat, collimabit nunquã; ita longe abest, q; ppositũ. Magnitudines aũt, quarũ altera multiplicata alterã superare nequit, non censeri eiusdẽ generis, (q; ad ppositionẽ attinet) licet sub eodẽ genere quantitatis, h. e. sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocẽtur, liquido constat ex desin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicue explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdẽ generis, inter quas proportio reperiri. Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus q; cogitate me incogitantem hominẽ appellarit; quasi non recte intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdẽ generis, quæ non sint. Nũquã n. dixi (id q; mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinũ, quæ sub diuersis quantitatis generib. collocãtur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutrã ita posse multiplicari, vt alterã superet: In quo, nemine reluctante, frustra se fatigat, vt doceat, id fieri non posse, sed de illis duntaxat magnitudinib. sum locutus, quæ cũ in eodẽ genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Item q; linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter se videntur,

vt Aristoteles liquido affirmavit, vnam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictum sit) verum vsquequaq; non est; cum Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quænam linea recta æqualis possit esse circumferentiæ cuiusuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuersig; propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita. Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerig; excludebant; cuiusmodi sunt curuilinea, superficies, & rectilinea; nec non linea circularis, & recta, vt paulo ante diximus, latiusq; in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, noluit hanc expositionem 5. defin. lib. 5. recipere; immo eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse neruos, oblitus sui, qui fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim expositam exposuerat; nisi quod non recte inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulum vero alium contactus quemcunq; proportionem habere. Sed siue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib 5. colligi potest, siue secus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certe ita illam esse intelligendam, vt exposui, nemo qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim vero, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certe, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Euclidis ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra ætate in Mathematicis inferior) vt eum vnum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui disertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra sua, illam definitionem explicat, vt à me est exposita: quinetiam ibidem asserit ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quem testem produxerat pro se Peletarius, iam pro me testimonium dicat. Atq; ex hisce duobus locis Petri Nonij facile quiuis intelliget, quam sine ratione, & quanto contradicendi studio mihi insultet Peletarius, cum semel atq; iterum odiose percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitam deportare? In idem enim (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atq; adeo omnes philosophos, quorum est illa vox nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur à me sciscitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim respondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde philosophi omnes deportarunt. Quid? nonne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erro, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur ostendere, propositionem 1. libr. 10. cum propos. 16. libr. 3. stare non posse, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorsus ratione, qua à me ipso, confutatur? Quæ si germana demonstratio est, miror quid sit, cur eam Nonius Geometriæ scientissimus, idemq; Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonstrationes eiusdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (nisi fallor) illa Nonij verba (Si quis sententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam si demonstrationes existimasset, profecto Peletarij doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometricæ enim demonstrationes eiusmodi sunt, vt assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nullo; modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, vt tum assentiatur, si velit, tum, si nolit, dissentiat. En cur Peletarius Nonij testimonio aliorum iudicia contemnat, en præclarum testimonium, quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quo æquiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quam ab illo suo approbatore, demonstrationes putari.

TERTIO, quod existimare dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil esse, falsum esse, clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse. Sed quantitatem non esse. Ita ne vero? at in prædicamento Quantitatis, quod neq; est punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neq; quantitas, quo alio nomine vocetur, quam Nihil? Sed vt vt dixit, profecto non modo mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Prætereo, quod figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuo tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouum est, & inauditum apud Geometras. Itemq;, si quatuor, aut plures circuli se mutuo tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atq; etiam, si duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemq; circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantū haberet angulum. Quæ omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam vero, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res non potest, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille nescio quibus præstigijs ita deprauat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunq; angulo: atq; (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunq; angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt suum illud Nihil vlciscereturm aliud mihi Nihil affinxit, quo cum impune pugnaret: At quam palæstricè pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo. Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor) Mox quasi Nihil illud ab se effictum ingulasset, exclamat. (En Clauii argumenta, quæ vtrum tandem Peletarij sophismata sunt, an Clauij potius figmenta, cum ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) Verum vt hominem æneum, atq; adumbratum ne quicquam petere desinat, virum ostendam, qui cum, si velit, certare cum laude possit. Ego, vt ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, vere esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, (hoc est, vt Peletarius intelligit, non esse angulum, vel non esse quantitatem) & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo; quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est,

quàm id, quod quantitas non est, minus esse quocunq; angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, quem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaq; Peletarius, Nihil illud suum male à nobis acceptum, idq; ita vlciscatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potius eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluisse cauillari; quod & plerisq; alijs in locis facere videtur. Numquam enim dixi, angulum contactus minorem esse, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulum contactus quemcunq; minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus; quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius, eundemq; Euclides minorem quolibet acuto rectilineo recte demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, didicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidum, atq; acutum syllogismum, quo Nihil illud ab se confictum mira venuste tornatus ille ipse syllogismus videtur, incudiq; reddendus. Etenim cum versetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquuntur) quæ est, Nihil, de minori extremitate, quæ est angulo contactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Quæ quidem conclusio recte sequitur ex præmissis, quarum prior Peletarij est, non mea, posterior autem mea, & Procli, immo & Euclidis. Conlusio autem illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est, nulla ratione ex præmissis inferri potest. Nam si, angulum cum dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in vtraq; præmissa subijcitur: quod nefas esse Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in præmissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticis, qui nesciat: Neq; contendat Peletarius, mentionem factam esse anguli in minore extremitate, vbi dictum est, angulum contactus angulo contactus maiorem esse. Nam angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subijcitur in recto: quod, vt auctore Aristotele docent omnes Logici, sine peccato fieri non potest. Quod, vt planum fiat, vtemur ea palæstra, quam ab illo didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior recto est; quis, modo sit imbutus Dialecticis, eiusmodi argumentationem probet, cum præmissæ veræ sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chrysippus videri voluit. Conclusio, quæ recta ex præmissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quod se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialecticæ, si ab Aristotelica abhorret, plane fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim, angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitq; scire, quid aliud sit, angulum contactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilineorum minimum. Quæ in re morem geram homini non grauate, etsi è scholio huius propos. 16. potuit id, quod cupit, cognoscere. Nempe ea ratione me illud potuisse dicere, qua dicimus: angulum obtusum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum rectilineum acutum esse omni obtuso rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud est, angulum rectilineum acutum minorem esse omni rectilineo obtuso, quàm angulum rectilineum acutum esse obtusorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non est obtusus, sicut nec angulus contactus rectilineus est, aut acutus. Id quod etiam clarissime docet Proclus libr. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtusi, & acuti. Sed hæc puerilia sunt, & quæ magis ad Grammaticos spectant, quam ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum parum spissum viderer fecisse, suas demonstrationes adverbum me recitasse queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipso desidero. Id enim eo à me consilio factum est, vt omnes plane viderent, syncere me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq; omnino verbum immutasse. Quod vtinam in meis verbis recitandis ipse facere in animum induxisset, Multo enim minus spissam Apologiam suam facere potuisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cum Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum sit arbitratus? Sed eo sum æquior Peletario, quod ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, ne inanis rerum videretur, tres demonstrationes nihil penitus ad eam pertinentes inferit: quarum priorem immerito suam propriam facit, vt supra dixi: posteriorem vero, quam mirum in modum gloriatur se clariorem fecisse, ego & longe breuius, & dilucidius (nisi meorum me amor fallat) iam pridem demonstraui, vt mox, Deo adiuuante, ex Geometria mea Practica clarissime apparebit. Sed licuerit Peletario suæ Apologiæ, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pedissequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atq; in primis Petrum Nonium laudatorem suum, qui idem fecit in refellendis paralogismis Oronij, aut sine causa id se mihi vitio dedisse fateatur. Quòd si, postquam tam fideliter eius verba proposui, Peletarius criminatur, me eius sententiam perperam esse interpretatum, quid facturus fuisset, si alienis verbis eius opinionem in medium adduxissem? Equidè facile sibi persuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuisse, quod non reprehendisset.

QVARTO vt leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quod me laborare ostendit, vt probem, angulos contactus alios alijs esse inæquales: propterea quòd scripsi æqualitatem angulorum eiusdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si alter alteri superponatur, iuxta oculi iudicium pronunciatum. Quam in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiusdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cùm tamen angulus rectilineus ostensus sit à me æqualis curuilineo, atq; adeo eiusdem generis cum illo, licet non sit in vtroq; eadem linearum inclinatio. Deinde, quod putem angulos contactus ideo inter se inæquales esse, quod sibi mutuo non congruant. Equidem si quid in eo à me peccatum esse intelligerem, & peccatum (quod est ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoscerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunq; id animo fecerit) gratias agerem. Nunc vero, cum, tota re etiam atq; etiam considerata, nihil omnino vitij me esse videam, ita, quæ obyciuntur, diluam, vt tamen gratiam habeam Peletario, qui occasionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habet rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli contactus, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta vnius cõgruat lineæ rectæ alterius, circularis vero circulari non item, nisi circuli ponãtur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cũ alter alterũ excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, necesse est, lineas vnius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quòd si Peletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat, se iam bellum mouere non mihi, sed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propos. 4. idem prorsus docet, quod ego. Ait enim (Angulorum autem

autem æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæterisque omnibus, qui eiusdem sunt speciei, vt in Lunaribus, in Systroidibus, atque in vtrinque conuexis, &c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data sunt, sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem cungruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solum angulos contactus concedere æquales, quorum rectæ lineæ, & curuæ sibi mutuò congruunt? Temere igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atq; alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe quæ non sint eiusdem speciei, atq; adeo æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.*

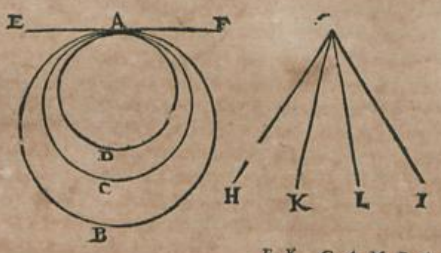
POSTREMO, *vt nihil intactum relinquat, me non modo Geometriæ ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib. 5. dixi, non rectè à quibusdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atq; inæqualitatis; quod multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego vero (etsi non is sum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, plane rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in vtroq; possim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt; Peletario quidem ipsi ita me adhuc respondisse arbitror, vt iam minus fortasse ignarus Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perspiciat, neq; me pertinacem esse, neq; illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neq; vero hoc vnquã negaui, cũ alibi similes diuisiones vsurpẽ. Solũ id eo loci contendi, rectius meo iudicio, diuidi Proportionẽ in vniuersum duplici diuisione, priori quidẽ in proportionẽ rationalẽ, & irrationalẽ; posteriori vero in proportionẽ æqualitatis, atq; inæqualitatis, (quod verissimũ esse, neminẽ negaturũ censeo, qui rẽ diligentius expenderit) cũ tã priora duo membra diuidentia, quã posteriora totũ Diuisum, (vt Logici loquũtur) exhauriant: q̃ si prius membrũ prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionẽ æqualitatis, & inæqualitatis, cũ hæc mẽbra diuidentia latius pateant, quã Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atq; eo magis duplex illa diuisio mihi probatur, quod non desint, qui primum partiantur Proportionem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectius faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus diuisionibus secandam esse Proportionem, quarum vtraq; absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos. si corpus duplici diuisione secetur, primum quidem in viuens, & non viuens; deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet hæc subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori institutum meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum prætulerim. Quod si tam acres, & seueri iudices singulorum verborum aut improprietatem, quæ per incogitantiam interdum excidunt, esse velimus, ne scriptorum nullus aliquo vitio carebit, neq; ipse quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quæ dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profecto reprehendendi materia non deesset. Verum non est huc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed vbi sese occasio obtulerit, meam (qualiscumq; est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Solum ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquam ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquido constat, quam sit Dialecticæ peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sunt æquales. Itemq; hanc; Anguli semicirculorum, quo à maioribus circulis fiunt, eo sunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior sit; in qua quidem ad Cardanum scribit, nullum esse paralogismum. Ego sane vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumenter

sis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium professor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem studiosus lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quædam ex eius commentariis in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquido constabit, eius sententiam esse Peletarij commento prorsus contrariam. Primum ita q; ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circumferentiæ se inuicem secando, vel sese contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solius anguli contactus proprium est. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namque angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quocunque recto est minor, acutus tamen non est.) *Quid clarius, quam Proclum hic asserere, angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3. ad propos. 4. lib. 1. Euclidis ita scribit.* (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquam æqualis; Et semicircularis similiter, transitusque à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam aperte docet, angulum semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, transitum q; propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumq; Peletarius negat, audet q; posterius appellare paralogismum. Denig; eodem lib. 3. ad propos. 23. hæc verba habentur.* Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse possit, &c.) *Et Peletarius tamẽ non dubitat angulũ semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere æqualẽ, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi, quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

OBITER quoq; hoc loco monendum lectorem censeo, id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum, qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit, at q; adeo angulus ille contactus minor est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Stigitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est. (eadẽ enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sane maior absurditas apparet, quo ad sensum, in ea Ellipsi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis, & Hyperbolæ constituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoq; esse æquales; propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur à circumferentia Ellipsis, quam in circulo; in illa vero Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera verò infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.

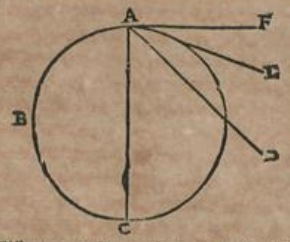


EX CAMPANO.

Proponantur enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas GH, GI, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamẽ semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantũuis diminuatur.

Cæterum ex hac propos. 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR à minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.



Describatur enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremũ punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc concesso, manifestum est, quãdiu recta AC, secat circulum, fieri angulum acutũ minorem angulo semicirculi; quam primum verò secare cessat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor,) constat quoq; vitiosam esse posteriorem consequentiam.

PRO-

PROBL. 2. PROPOS. 17. xvj.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

EX puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum BC, cuius centrum D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in B. Deinde centro D, interuallo autem DA, describatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, secans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt *a* & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat.



a 4. prim.

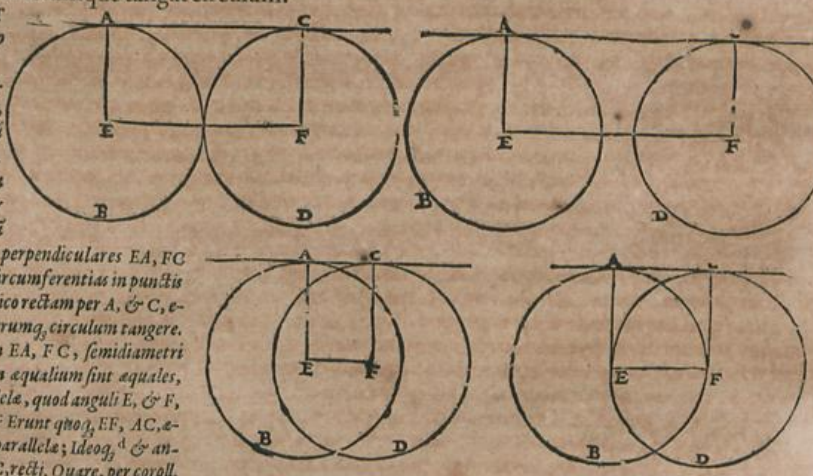
SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facile elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propos. 31. huius lib. inuenies.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

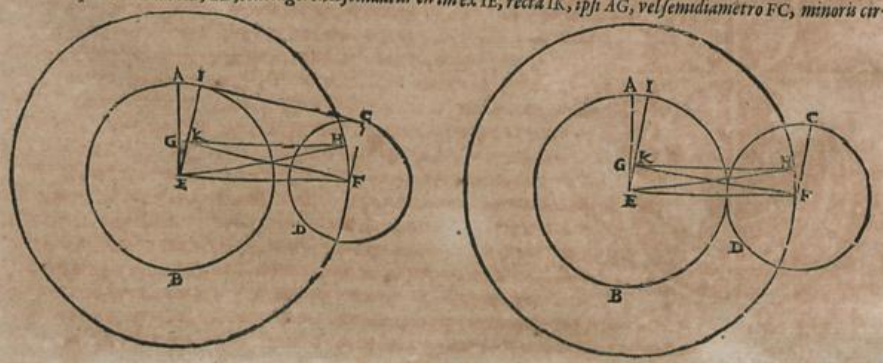
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.

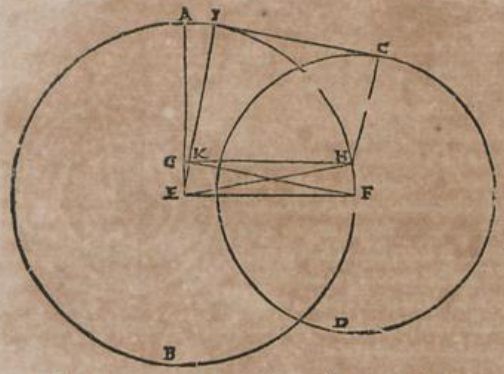
SINT primũ duo propositi circuli æquales AB, CD, quorũ centra E, & F, recta iungantur EF, ad quã ducantur perpendiculares EA, FC secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrumq; circulum tangere. Cum enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, [b] & parallelæ, quod anguli E, & F, recti sint; [c] Erunt quoq; EF, AC, æquales & parallelæ; Ideoq; [d] & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta AC, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.



b 28. primi.
c 33. prim.
d 20. prim.

SINT deinde duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorum rursus centra E, & F, iungantur recta EF, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea portio AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsque ad circumferentiam circuli FH, proxime descripti. Ducta autem recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atque per F, agatur ipsi EI, parallela recta FC. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum AB, CD, contingere. Abscindatur enim ex IE, recta IK, ipsi AG, vel semidiametro FC, minoris cir-





culi, æqualis, vt sint reliquæ EG, EK, æquales quoque ducatur q; recta KF. Quoniam igitur latera HE, EG, trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, trianguli FEK, & anguli ipsis contẽti æquales, ex constructione: [c] Erunt anguli HGE, FKE, æquales: Ac proinde, cum HGE, rectus sit, ex constructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK, æquales sunt, & parallelæ, ex constructione, [f] erunt quoque IC, KF, æquales & parallelæ; At q; propterea angulus EIC, [g] cum æqualis sit externo FKE, rectus erit; [h] Ideoq; & ICF, rectus existet. Quocirca per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrumq; circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.

c 4. primi.
f 33. prim.
g 29. prim.
h 29. prim.



SATIS autem constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinq; modis posse fieri. Aut n. alius extra aliũ cadit, aut se mutuo contingunt; aut se inuicem per centra secant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel centra cõsistant in communi eorũ segmento, vel certe extra illud.

ITEM si circuli propositi fuerint inæquales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circumferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel deniq; ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.



QVONIAM vero circulis inæqualibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper à maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstratione q; nisi quod rectæ AE, IE, protrahendæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, id circo æquales esse, quod HEA, FEI, reliqui duorum rectorum, æquales sint ex constructione. Denique angulum EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

QVIA vero & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctũ extra circulũ existens lineam rectã, quæ circulum tangat, ex iis, quæ demonstrata sunt, ducere possumus; per punctum quidem in circuli circumferentia positum, ex coroll. propos. 16. per punctum vero extra circulum ex hac propos. 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quæ duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, siue interius, siue exterius, describendus sit: Item qua ratione describendus sit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium.

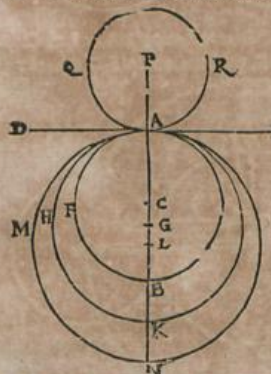


SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quoduis punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur AE, qui circulum AB, in A, tanget; Et si quidẽ punctũ D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulũ AB; intra vero, si punctũ D, in semidiametro AC, extiterit, vt scholio prop. 13. huius lib. demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum AB, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, transibit, tanget q; circulum AB, in A, per ea, quæ in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum AB. Ducta recta EA, vtcunq; ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; eritque angulus EAC, acutus, cum pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo EAC, in E, æqualis constituatur AED: coibitque recta ED, cum AC, in D, ob duos angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, æquales sunt, [i] erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetque circulũ AB, in A, ex iis, quæ in supradicto scholio prop. 13. huius lib. demonstrauimus.

i 6. primi.



TERTIO datum sit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA; eaq; secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctum F, transibit, tanget q; ex dicto scholio circulum AE, in A.

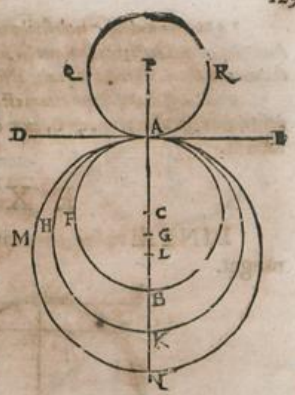
ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & non per datum punctum B, transeunte, quæ cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutum BAD, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo BAD, in B, æqualis fiat ABC: coibit q; recta BC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales sunt, [k] erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datũ punctũ B, transibit, tanget q; circulũ AE, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt.

k 6. primi.

QVOD si per punctum N, extra circulum QAR, datum describendus sit circulus tangens circulum QAR, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta NA, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, transibit, tangetque circulum QAR, in A, propterea quod vterq; circulus rectam DE, quæ per A, ducitur ad NP, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16. huius lib.

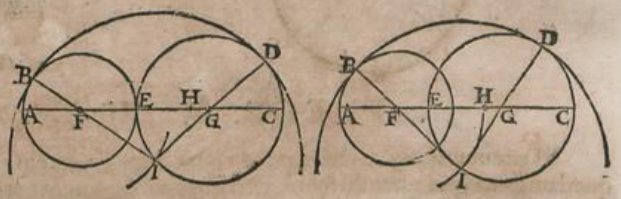
EODEM

EODEM modo, si in circumferentia circuli QAR, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum QAR, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta PAC, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A. circulus describatur, nimirũ AMN, ex cẽtro L, tanget hic circulũ QAR, vt dictũ est in A.



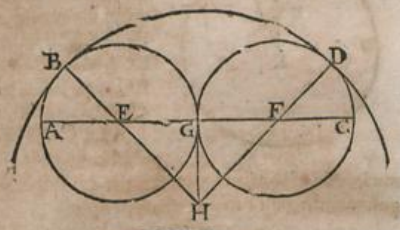
EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tangentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis EA, BA, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; ac tandem in recta AG, eiusdem figuræ, vel in PAC, posterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad easdem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non sit totus intra alium, describendus sit, hac ratione cũ Ioan. Bapt. Benedicto demonstrabimus.

SINT primum duo circuli se mutuo tangentes, aut secantes in æquales, AB, minor, & CDE, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur FG, occurrens circumferentiis in A, C, quæ, si circuli se tangant in E, per contactum E, transibit. Abscissa recta EH, ex semidiametro maioris circuli, quæ semidiametro minoris sit æqualis, describatur ex F, centro minoris ad interuallum rectæ HC, quæ maior est, quam semidiameter minoris arcus secans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur IF, IG, occurrentes circumferentiis in B, D. Et quia CH, ipsi IF, & HE, ipsi FB, æqualis est, per constructionem; erunt totæ CE, IB, æquales. Cum ergo & diameter ID, diametro CE, æqualis sit, erit quoque IB, ipsi ID, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra vtrumq; circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod est propositum.



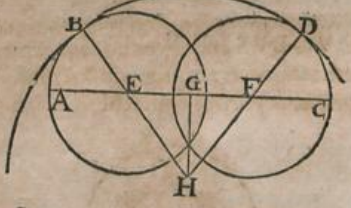
l 12. tertij.

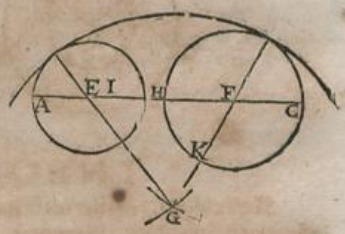
SINT deinde duo circuli se mutuo tangentes, vel secantes æquales, AB, CD, per quorum centra E, F, recta educatur AC. Diuisa deinde recta EF, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli se mutuo tangunt, diuiditur recta EF, bifariam in puncto contactus propter semidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad EF, perpendicularis GH: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentiis in B, D. Quoniam igitur duo latera GE, GH, duobus lateribus GF, GH, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales, nimirum rectos, [m] erunt & bases HE, HF, æquales: Et additis semidiametris æqualibus EB, FD, totæ lineæ HB, HD, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetque extra vtrumque circulum, ex scholio propos. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.



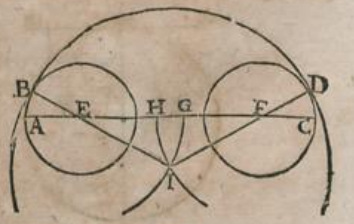
m 4. primi.

TERTIO sint duo circuli siue æquales, siue inæquales, AB, CD, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta AC. Et si circuli sunt inæquales, describatur ex E, cẽtro minoris ad interuallũ diametri maioris CH, arcus, quẽ in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum rectæ FI, compositæ ex semidiametro maioris FH, & HI, semidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus se intersecare; quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circumferentias in B, D. Et quia FG, ipsi FI, æqualis est: ablatis æqualibus FK, FH; reliquæ æquales erunt KG, HI. Est autem HI, sumpta æqualis semidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipsi EB, æqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, sit æqualis; erunt totæ rectæ GB, GD, æquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus, transibit per D, cadetque extra vtrumque circulum ex scholio prop. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.





VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecãt, quod accidit propter nimiam circulorum distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ducta recta AC, per circulorum centra, sumantur rectæ æquales AG, CH, ita vt quælibet semisse m ipsius AC, superet: & ex centro E, per G, arcus GI, describatur, quem secet in I, alius arcus HI, ex centro F, per H, descriptus: ac denig, ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circumferentiis occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales sunt; si addantur æquales AE, BE, fient totæ AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cum ergo AG, CH, positæ sint æquales, erunt quoque BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus, transibit per D, totusque extra vtrumque circulum cadet, ex scholio propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumq; tanget in B, D. Quod est propositum.



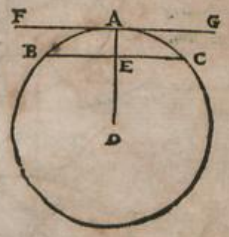
IAM.

IAM vero eadem arte describemus circulum datæ magnitudinis, qui duos circulos propositos tangat, dummodo semidiameter circuli describendi maior sit semisse rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ. Nam si semidiametri dati circuli rectas æquales abscindamus AG, CH, reliqua perficiemus, vt proxime dictum est.

PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex scholio propos. 13. huius lib.

EX PELETARIO.

LINEÆ rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

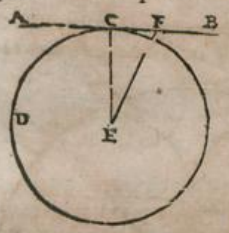


CIRCVLVM enim ABC, cuius centrum D, secet recta BC, cui ducenda est, parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad BC, extendaturque ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur FG, perpendicularis ad AD. [n] *Erit igitur FG, parallela ipsi BC, tangetque circulum in A, per corollarium propos. 16. huius lib. quod erat faciendum.*

[n] *28. prim.*

xvij. ## THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.



RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, [a] duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare [b] maior erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] *17. primi.*
[b] *19. prim.*

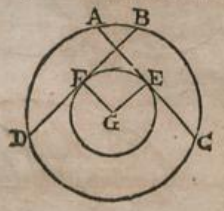
ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi [c] maior est omni acuto.

[c] *16. tertij.*

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.

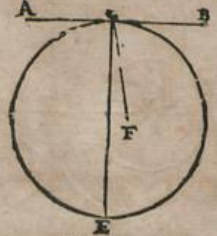


SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E. F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bifariamque secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, [d] *quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cum perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur* [e] *rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur* [f] *autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est.*

[d] *18. tertij.*
[e] *14. tertij.*
[f] *3. tertij.*

xviij. ## THEOR. 17 PROPOS. 19.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.



TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum; à quo ad C, ducatur recta FC, quæ [a] perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

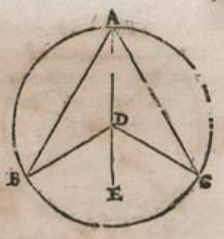
[a] *18. tertij.*

xix. ## THEOR. 18. PROPOS. 20.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eanden basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC Includant enim primũ duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, *a* erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, *b* æqualis duobus angulis internis DAB, DBA: Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.



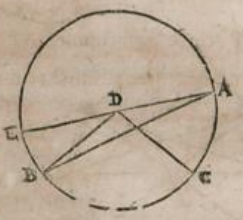
a 5. primi.
b 32. prim.

DEIN DE non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC. *c* æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.



c 32. prim.
d 5. primi.

TERTIO recta AB, secet rectam DC & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. *e* Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.



e 20. pron.

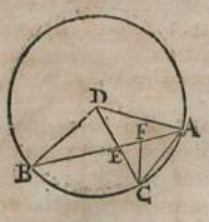
SCHOLIVM.

AD primam partem huius propos. demonstrandam assumptum est hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertiæ vero partis demonstratione hoc aliud principium adhibitum est.* (Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorum vtrumque ab Euclide vniuersaliter demonstratur in omni genere multiplicium, & de quotcunq; magnitudinibus, libro 5. prop. 1. & 5. Non tamen propterea demonstratio huius propos. censenda est vitiosa, quasi assumat ea, quæ nondum sunt demonstrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita sunt in duplis magnitudinibus, vt facile à quouis sine vlla demonstratione concedantur. & vtraque illa propositio lib. 5. demonstrari potest ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi possint hoc loco, tanquam demonstrata. Neq; vero hac in re circulus ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ propos. 20. huius lib. demonstratur, hac eadem propositione non nitantur, aut aliis propositionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propos. sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) *hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam* f *tam anguli DAB, DBA, inter se* f 5. primi. *æquales sunt, quam anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, simul sumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, simul sumptis dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC, æqualis est ijsdem tribus angulis BAC, B, & C;* (Nam g *cum BDE, duobus internis B, & DAB, & CDE, duobus internis C, & DAC, æqualis sit, erit totus BDC, omnibus* g 32. prim. *quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, æqualis*) *erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC, quod est propositum.*

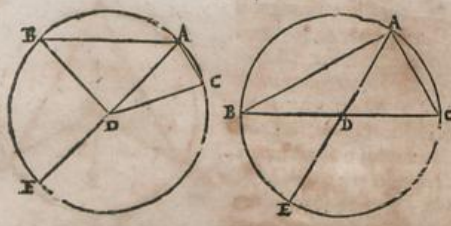
ALITER. Quoniam h *sex anguli triangulorum ABD, ACD, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli* h 32. prim. *BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illis sex æquales: ablatis igitur communibus ADB, ADC,* i *reliquus BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit BDC, ipsius BAC, duplus.* i 3. pron.

REPETATVR quoque tertia figura; vbi recta DC, rectam AB, secat; vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD, k *duo anguli DAC, DCA, æquales sunt, estque angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC, æqualis, secabit CF, rectam AE, vt in puncto F,* l *anguluſque EFC, æqualis erit internis angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia vero* m *anguli DAC, DCA, æquales sunt, & ablati quoque FAC, FCA; erunt & reliqui DAB, ECF, æquales. Cum* n *ergo DAB, ipsi DBA, æqualis sit; erit quoque ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem* o *& anguli DEB, FEC, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDE, EFC, æquales erunt, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cum ergo angulus EFC, ostensus sit anguli BAC, duplus; erit quoque angulus BDC, anguli BAC, duplus, quod est propositum.*



k 5. pron.
l 32. primi.
m 5. primi.
n 5. primi.
o 15. prim.

QVOD



QVOD si rectæ BD, CD, in centro angulum non constituant ad partes basis BC; quod tum demum fit, quando segmentum BAC, est vel semicirculus, vel segmentum minus; nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quam spatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE, ad circumferentiam, vt ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basin habens BEC, constans ex duobus angulis BDE, CDE, duplum est totius anguli BAC. Quod est propositum.

XX.

THEOR. 19 PROPOS. 21.

IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

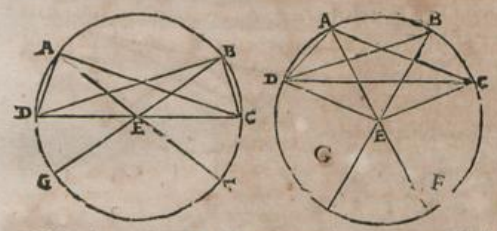


IN circulo ABCD, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo maius; & ducantur rectę DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, *a* duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. *b* Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse æquales.

a 20. tertij.

b 7. pron.

SIT deinde segmentum DA, BC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, *c* duplus est anguli DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli simul DEF, CEF, duorum angulorum simul DAF, CAF, dupli erunt, hoc est, totius anguli DAC: Sunt autē anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt quoq; tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erūt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. *d* Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

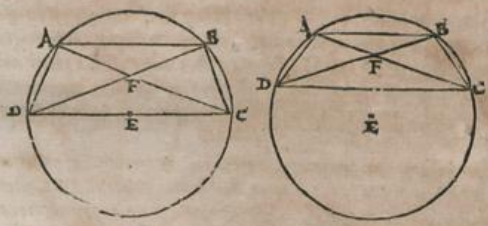


c 20. tertij.

d 7. pron.

ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusque anguli DAC, DBC, ad circumferentiam: *e* Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

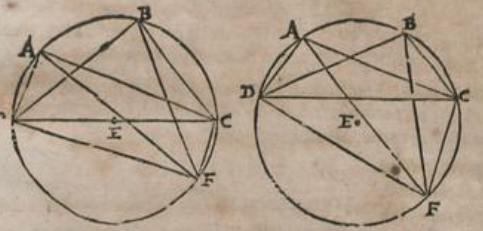
e 7. pron.



ALITER. Secent sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi *f* æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, *g* qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.

f 32. prim.

g 15. prim.



ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus cētrum E, ita vt tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum maius; iungantur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam maiori FDABC, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

Si à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.



EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoq; per angulum A. Si enim non transit, transibit vel vltra A, vel citra, secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, h erunt anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum. i Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A, quod est propositum.

h 21. tertij.

i 16. primi.

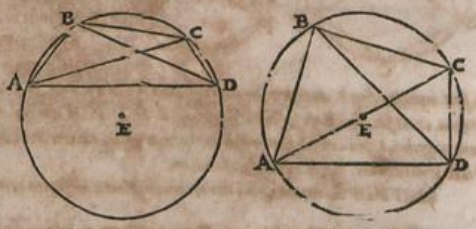
THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, a erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. b Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur cõmuni angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. c Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. tertij.



b 32. prim.

c 32. prim.

SCHOLIVM.

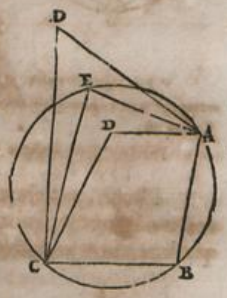
CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.

IN quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius lib. & ad 5. quarti lib. ostendetur) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita vt non secent rectas CD, AD. Quo facto, d erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum. Ducta enim recta AC, e erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum.

d 32. prim.

e 21. primi.



SATIS autem est, sumere duos tantum angulos oppositos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessario & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales; cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, vt ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

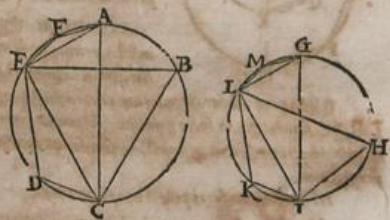
EX hac etiam propos. facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter vsurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis, scilicet.

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.

SINT primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunq; D, B, K, H, iungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex definitione segmentorum similium, anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duob. angulis IKL, IHL, sint æquales; f quod tam illi, quam hi sint æquales duobus rectis: g erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib arcus EBC, LHI, similes erunt.

f 22. tertij.

g 3. post.



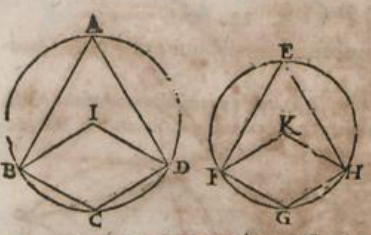
DEINDE in semicirculis AEC, GLI, similes sint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, esse similes. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunque in iis arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, similes sunt, erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales sint; h quod tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculo, hoc est, in segmentis similib. AEC, GLI, æquales, ex definitione segmentorũ similium. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales sint; i quod tam illi, quã hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.

h 22. tertij.

i 22. tertij.

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis pernecessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.



k 32. tertij. l 20. tertij. m 6. pron.

SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. [k] *Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum* [l] *cum dupli sunt anguli I, K,* [m] *erunt hi quoq; æquales. Quod est propositum.*

DEINDE sint tam anguli I, K, quam A, E, insistentes arcubus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, &

n 28. tertij. o 9. pron.

E, sint æquales: sint [n] *autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si* [o] *vero anguli I, K, ad centra sint æquales, erunt quoq; eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli AE. Quare vt prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum.*

SECVNDVM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi cap. demonstrauimus huiusmodi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque, duas lineas intercepti, similes.



p 20. tertij. q 7. pron. r 22. tertij. s 3. pron. t 7. pron. u 20. tertij.

DVO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Productæ enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens [p] *duplus est tam anguli EDF, quam anguli BAC;* [q] *erunt anguli EDF, EIF, duobus angulis BAC, BHC, æquales; quod* [r] *tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis EDF, BAC,* [s] *reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde segmenta EF, BC, in quibus sunt, similia erunt, ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.*

BREVIVS sic. [t] *Quoniam anguli A, D, æquales sunt, quod vtriusque* [u] *duplus sit anguli G, ad centrum; erunt per antecedens theorema arcus BC, EF, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.*

VEL adhuc brevius. Quoniam arcubus EF, BC, æquales anguli in centro insistunt, immo vnus & idem angulus BGC; erunt per antecedens theorema arcus EF, BC, similes. Atque in hac demonstratione non est opus vlla constructione, vt manifestum est.

TERTIVM denique, quod aliter quoq; in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunq; duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



x 22. tertij. y 3. pron. z 17. tertij.

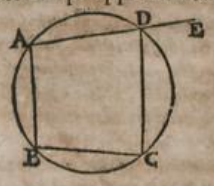
TANGANT se mutuo interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tam arcus DE, BC, quam AD, AB, & AED, ACB, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunq; F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE, DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales sunt, quod [x] *tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo BAC,* [y] *erunt reliqui anguli DGE, BFC, æquales; ac proinde arcus DE. BC, similes erunt ex defin. segmentorum similium.*

BREVIVS sic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui DE, BC, ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis ante proxime antecedens theorema, arcus DB, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

QVIA vero, si per circulorum centra ducta cogitetur recta AC [z] *hæc in contactum A, cadit, suntq; eodem pacto arcus DE, BC, similes, fit, vt hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoq; sint: atque hi ablatis ex totis circumferentiis similibus, similes quoque sint reliqui arcus AED, ACB, vt paulo ante demonstrauimus. Quod est propositum.*

HVC etiam referri potest hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.



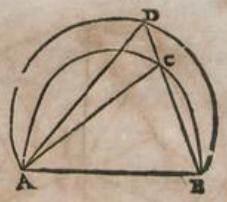
a 21. prim. b 22. tertij.

IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulum EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, [a] *æquales sint duobus rectis: Item* [b] *duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC, reliquus EDC, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum.*

xxij. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solũ intersecent in punctis A, & B; *a* Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & cõnectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: *b* quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

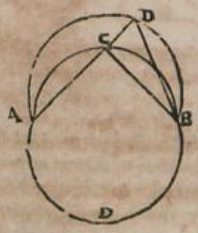


a 10. tertij.

b 16. primi.

SCHOLIVM.

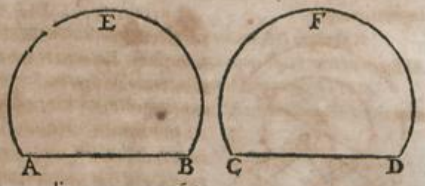
EADEM ratione, neque ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam AB, vt iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.



THEOR. 22. PROPOS. 24. XXIV.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum AEB, segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia, quorum vnũ totum extra aliud cadit, quod est absurdum. *a* Demõstratum enim est contrariũ. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quam duob. nimirũ in A, B, G. Quod est absurdum. *b* Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.



a 23. tertij.

b 10. tertij.

SCHOLIVM.

Non solum in hac propositione ostenditur segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verum etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

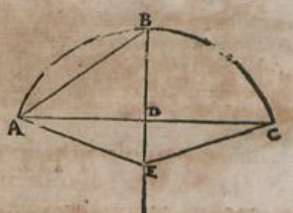
Conuersum quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quod si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent segmenta, quod est contra hypothesin. Sint ergo segmenta AFB, AGB, æqualia super eandem rectam AB, secentque se mutuo in G. Igitur circuli AFB, AGB, secant sese in punctis A, G, B, pluribus quam duobus, quod est absurdum. c *Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis quam duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta, si nimirum altera alteri superponatur, &c.*

c 10. tertij.

PROBL. 3. PROPOS. 25. XXV.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariã secetur in D, puncto, per ꝙ perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrũ, ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens diametrum *a* sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, *b* maior erit angulo DAB) fiatq; angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli cõtenti, recti. *c* Quare bases EA, EC, æquales erunt; *d* Est autem & EA, æqualis ipsi EB, ꝙ anguli EAB, EBA, æquales sint. Igit̃ tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, *e* ac propterea E, centrũ erit circuli ABC, quãdoquidẽ ex E, plures quã duæ rectæ æquales cadũt in circumferentiã.



a 7. tertij.

b 18. prim.

c 4. prim.

d 6. primi.

e 9. tertij.

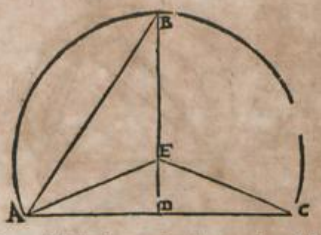
SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare *f* & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) *g* Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quod recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiã, *h* erit D, centrum.



f 5. primi.

g 6. primi.

h 9. tertij.



i 7. tertij.
k 18. prim.

SIT tertio angulus DBA angulo DAB, minor, (quod quidem euenier, si segmentum ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quam DA, k ideoque angulus DAB, maior angulo DBA) fiatq; angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus DBA, maior erat angulo DAB, vt constat, si recta ducatur EC. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

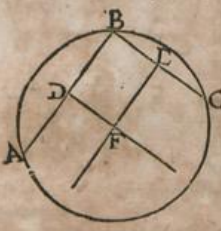
SED fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli segmenta pregreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta AC, bifariam in D, rectaque perpendiculari DB, & ducta AB; aut DB, minor est, quam DA, aut æqualis, aut maior.

l 18. prim. *Si minor* [l] *erit angulus DBA, maior angulo BAD. Constituto igitur angulo BAE, æquali ipsi ABD; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.*

m 9. tertij. *SI vero DB, æqualis est ipsi DA; erunt omnes tres DA, DB, DC, æquales;* [m] *ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.*

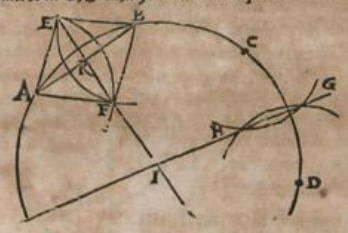
n 18. primi. *SI denique DB, maior est, quàm DA;* [n] *erit angulus DBA, minor angulo DAB. Constituto ergo angulo BAE, æquali ipsi ABE; ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maiori segmento accidit.*

ALITER idem problema hoc modo absoluetur. Positis iisdem, quæ prius, fiat angulo DBA, æqualis angulus EAB. Et si quidem recta AE, cadit infra AC, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si vero AE, cadit supra AC, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit vt demonstratum est. Si denique recta efficiens cum AB, in A, angulum æqualem angulo ABD, coincidit cum AC, erit segmentum semicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.



BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur AB, BC, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam DF, quam EF, incedit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.

ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo puncta vtcunque A, & B, è quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex aliis duobus punctis C, & D, alij duo arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ EF, GH, transibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autem lineæ EF, GH, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE, AF, BE, BF, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli BEF; & bases quoque AF, BF, æquales. o *Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta recta AB, quæ secet EF, in K: quoniam latera AE, EK, trianguli AEK, æqualia sunt lateribus BE, EK, trianguli BEK, & anguli AEK, BEK, æquales, ideoque recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per centrum,*



o 8. prim.
p 4. prim.

ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur GH, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, vt rectæ EF, GH, non in directum sibi occurrant, sed vt se mutuo secent. Quod si quando contingat, rectas EF, GH, in directum esse constitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim diuisionis erit centrum circuli: propterea quod tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex coroll. propos. 1. huius lib.

xxv.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistunt, siue super quas ascenderint, esse æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur *a* anguli B, & E, dimidii sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypothesi; *b* erunt bases AC, DF, æquales. Cum igitur segmenta similia ABC, DEF, sint super lineas æquales AC, DF, *c* erunt ipsa inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta AC, DF, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF. Quod est propositum.



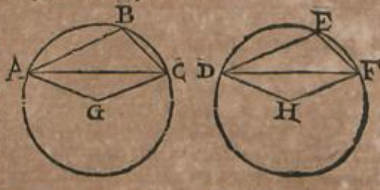
a 20. tertij.
b 4. prim.
c 24. tertij.

SINT

SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B,& E; Dico rursus,peripherias AC, DF, super quas ascenderunt,esse æquales.Erunt enim,vt prius,segmenta ABC,DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC,DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint,*a* quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; *a* 20. tertij.
erunt, vt prius rectæ AC, DF,æquales)*e* erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, *c* 24. tertij.
remanebunt & segmenta AC,DF,æqualia.In æqualibus itaque circulis,æquales anguli,&c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

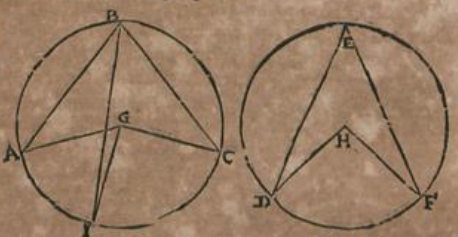
HÆC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniam anguli G,H,dupli sunt angulorum æqualium B,E,erunt ipsi inter se æquales.Quare vt ostensum est prius,peripheriæ AC,DF,super quas ascenderunt,æquales erunt.



Iam vero,si quando contingat,rectas AG,CG;DH,FH,non constituere angulos in centris supra bases AC, DF, sed supra bases ABC, DEF, vt subiectæ hæ figuræ monstrant, ita secunda pars huius propos. demonstranda est. Quoniam spatia ad centra GH,insistentia arcubus AC,DF,æqualia inter se sunt,cum ex scholio propos.20. huius lib.dupla sint angulorũ B,E,ad circumferentias;erunt etiam anguli AGC,DHF, reliqui quatuor rectorum, quibus tam spatium circa G, quam spatium circa H,æquale est,ex coroll.2.propos.15.lib.1.inter se æquales. Quare, vt prius ostendemus,bases AC,DF,triangulorum AGC,DHF,æquales esse,ideoque segmenta similia ABC, DEF, ob æqualitatem angulorum B,E,super æquales bases AC,DF, esse æqualia,&c.

HINC etiam fit,spatia æqualia in centris,insistere arcubus æqualibus.Nam si spatia in centris G,H,insistentia arcubus maioribus AC,DF,æqualia sunt;erunt quoque,vt ostendimus,anguli AGC,DHF,æquales.Igitur,vt in prima parte propositionis demonstratum est,erunt & arcus AC,DF,maiores,& minores ABC,DEF, inter se æquales.

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales,maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulo enim æqualibus ABC,DEF, sit angulus AGC, ad centrũ maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam,maior angulo DEF,ad circumferentiam.Dico peripheriam AC, maiorem esse peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt vt ostensum est,peripheriæ CI, DF, æquales. Ac propterea AC, maior,quam DF.

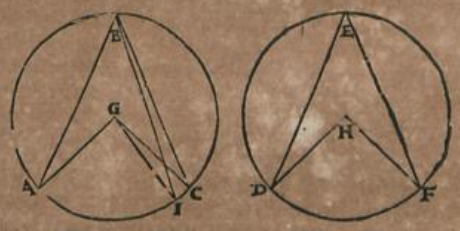


PORRO propositio hæc,& tres proxime sequentes intelligendæ etiam sunt in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, &c.vt ex demonstratione huius propos.& sequentium trium liquido constat. Eadem enim semper demonstratio, quæ duobus, pluribusue circulis accommodatur, locum habet in vno eodemque circulo.

THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvj.

IN æqualibus circulis,anguli,qui æqualibus peripheriis insistunt,sunt inter se æquales,siue ad centra,siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC,& DHF,æqualibus peripheriis AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si enim non sunt æquales,sit angulus G, maior, fiatque angulus AGI,æqualis angulo DHF.*a* Erunt igitur peripheriæ AI,DF,æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC,inter se æquales,pars,& totum;quod est absurdum.Sunt ergo anguli AGC,DHF, æquales.



a 26. ter.

INSISTANT deinde eisdem peripheriis æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt ABC, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI,*b* eruntque peripheriæ *b* 26.ter.
AI,DF,æquales. Quare,vt prius,erunt peripheriæ AI,AC,æquales,pars & totum;quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, &c. Quod demonstrandum erat,

SCHOLIVM.

HÆC secunda pars ita quoque demonstrabitur, quando rectæ AG, CG; DH, FH, in centris angulos constituunt supra bases AC,DF. Quoniam[c] *anguli ABC, & E, dimidij sunt angulorum AGC, & H, quos iam ostendimus esse æquales;erunt &* [c] 20.primi.
ipsi inter se æquales.

EODEM modo spatia in centris G,H,insistentia arcubus ABC,DEF,æqualibus æqualia erunt. Nam ablatis æqualibus ABC,DEF,ex circulis æqualibus,reliqui sient æquales arcus AIC, DF; ideoq; vt ostendimus,anguli AGC,DHF,æquales erunt quibus ablatis ex spatiis circa centra GH,quæ æqualia sunt,cum quodlibet sit quatuor rectis æquale,ex coroll.2.propos.15.lib.1. reliqua erunt & spatia in centris G,H,insistentia arcubus ABC,DEF,æqualia.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum,siue ad circumferentiam, quam minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria AC, maior, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, maiorem esse angulo DHF,& angulum ABC,maiorem angulo DEF, Si enim fiat peripheria CI,æqualis peripheriæ DF, ducanturque rectæ IG, IB, erunt vt ostensum est, tam anguli ad centrum CGI, DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC,angulo DHF, & angulus ABC,angulo DEF,erit maior.

QVOD etiam de spatijs ad centra G, H,insistentibus arcubus ABC,DEF,intelligendum est. Nam eodem modo demon-

strabimus spatium ad H, arcui DEF, insistens, maius esse spatio ad G, quod arcui ABC, insistit, si arcus DEF, maior ponatur arcu ABC.



d 27. tertij.
c 27. prim.
f 29. prim.
g 26. tertij.

EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipt. In circulo enim ABCD, rectæ AD, BC, intercipiant arcus æquales AB, DC. Dico AD, BC, esse parallelas. Ductâ namque recta AC, cum arcus AB, DC, ponantur æquales, [d] erunt anguli ACB, CAD, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni, [e] erunt AD, BC, parallelæ.

SINT iam AD, BC, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC, ductâ recta AC; erunt [f] anguli alterni ACB, CAD, æquales; & [g] Ac proinde arcus AB, DC, quibus insistunt, æquales erunt.

VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.



h 27. tertij.
i 4. primi.
k 18. primi.
l 28. prim.

IN circulo ABC, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF, tangens circulum. Dico EF, parallelam esse rectæ BC, arcum BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta DA, secante rectam BC, in G, connexisque rectis DB, DC, [h] erunt anguli ADB, ADC, circumferentiis æqualibus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera ED, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG æqualia, vtrumq; vtrique. [i] Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti, [k] quod DA perpendicularis sit ad EF. [l] Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum.

EX demonstratis in hac propos. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstrauimus.

ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est: insistens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.



m 15. prim.
n 20. tertij.

RECTVS angulus ABC, insistat arcui AC, in centro B, circuli ACDE. Dico arcum AC, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. necnon & angulus DBE: rectus [m] cum æqualis sit recto angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, vtpote recti: ac propterea [n] arcus AC, CD, DE, EA, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum CD; liquido constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum vero maiori.

Sed insistat iam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis AB, CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quam ACD, & AED, semicirculus est, estque AC, quadrans; erit tam AE, quam CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, [o] ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erũt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens maiorem arcum quadrante AC, constituit in centro B, angulum recto angulo ABC, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori vero, obtusum. Quod est propositum.

o 27. ter.

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in simibus etiam demonstrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, secansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



p 8. prim.
q 26. tertij.
r 27. ter.
s 4. prim.

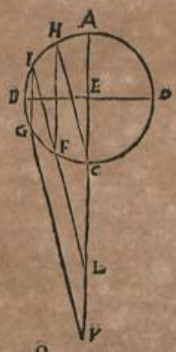
EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, secet rectam BD, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD; quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisque BF, basi DF, æqualis ponitur; [p] erit angulus BAF, angulo DAF, æqualis. Igitur [q] arcus BE, arcui DE æqualis erit. Sectus ergo est arcus BD, in E, bifariam.

SECET iam recta AE, arcum BD, in E, bifariam. Dico rectam quoque ED, in F, bifariam esse sectam. Ductis n. rursum rectis, AB, AD: quoniam arcus BE, DE, ponuntur æquales; [r] erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, vt ostendimus; [s] erunt quoque bases BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.

NEQVE vero omittenda hoc loco videtur eximia quædam proprietas circuli, quam Ioannes Baptista Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat: Videlicet.

SI in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vna cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

In circulo ABCD, secent se ad rectos angulos diametri AC, BD, & AC, producatur versus C, quantum libet. Diuiso autem Quadrante BC, in quotuis partes æquales CF, FG, GB, & Quadrante BA, in totidem, iungantur rectæ FH, GI, quæ ex scholio huius propos. 27. ipsi AC, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, denig; extendatur recta BG, occurrens AC, productæ in K. Dico rectam AK, æqualem esse omnibus parallelis AC, HF, IG, simul sumptis. Ductis enim rectis HC, IF, & productis, donec cum AK, conueniant; [t] quoniam anguli CHF, HFI, arcubus æqualibus CF, HI, insistentes, sunt æquales; [u] erunt rectæ HC, IL, parallelæ: Est autem & FH, ipsi CL, parallela. Parallelogrammum ergo est CHFL; [x] ac proinde recta CL, rectæ FH, æqualis. Eadem ratione erit KL, ipsi GI, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi AC, fiet tota AK, omnibus AC, HF, IG, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.

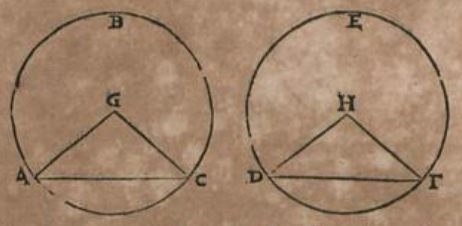


t 27. tertij.
u 27. prim.
x 34. pri.

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxvij.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

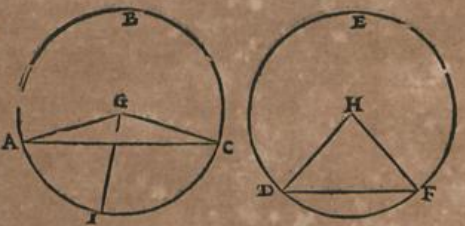
IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales AC, DF. Dico maiorem peripheriam ABC, æqualem esse maiori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & bases AC, DF, æquales. Igitur [a] anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ AC, DF, quibus insistunt, [b] æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.



a 8. primi.
b 26. tertij.

SCHOLIVM.

Quod si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmētis circuli maiorib. sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta AC, maior, quam DF. Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem basis AC, maior base DF. Igitur [c] angulus AGC, maior erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo DHF, æqualis; erit q; propterea [d] peripheria CI, peripheria DF, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, maior, quam peripheria DF: Ideoq; reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.

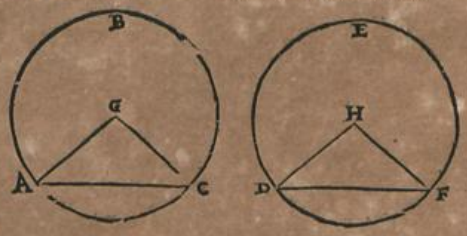


c 25. prim.
d 26. tertij

THEOR. 26. PROPOS. 29. xxviij.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

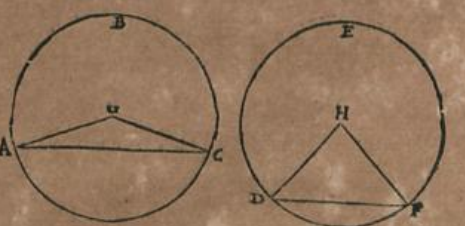
IN circulis eisdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Itē AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, [a] æquales, quod æqualib. peripheriis AC, DF, insistāt. Igitur [b] bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.



a 27. ter.
b 4. primi.

SCHOLIVM.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorem maior linea, quam minorem, si de segmētis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum cētra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores AC, DF; sitq; AC, maior, quam DF; Ac proinde ABC, minor, quam DEF. Dico lineam AC, maiorem esse, quā DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, maior angulo DHF, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, [c] erit basis AC, maior base DF, &c.



c 4. prim.

Sunt autem proxime antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eædem enim locum habent in vno eodemq; circulo.

ITAQVE eadem quatuor propositiones magis vniuersales fient, si ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

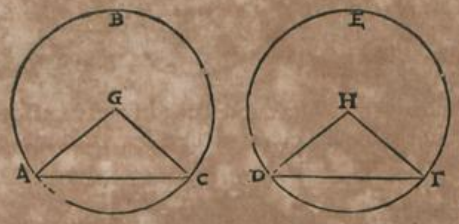
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

SED & sequentes propositiones demonstrare, non fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.



d 24. tertij.

Ex circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindant similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Nam si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, vt ad propos. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF,[d] ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erũt segmẽta AC, DF, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propos. 22. demonstrauimus, & segmenta ABC, DEF, similia. [e] *Tam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum.*

e 24. tertij.

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

In eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, dissimiles esse. Si enim similes essent circuli ipsi, vt proxime demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circumferentiæ AC, DF, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

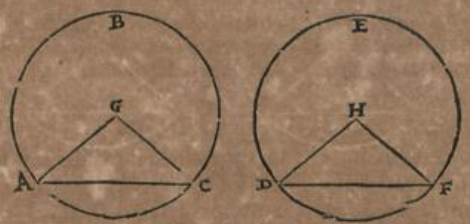
III.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

In eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ ABC, DEF, similes. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ AC, DF, demonstrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales esse.

IV.

RECTÆ lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.



f 28. tertij.

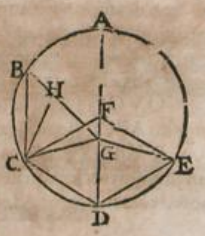
In eadem figura ponantur circumferentiæ ABC, DEF, similes & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ AC, DE, dicantur æquales, [f] *erunt circumferentiæ ABC, DEF, ablatæ æquales, quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circumferentias ABC, DEF, similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas AC, DF, inæquales esse, si circumferentiæ AC, DF, ponantur similes, & inæquales.*

V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoq; in peripheriam duæ rectæ non in easdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ ad diametrum angulos æquales, abscindentque æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentque ad diametrum angulos æquales.

In cir-

In circulo ABCDE, cuius centrum F, sumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, constituantur q3 primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quam arcus CD, ED, æquales esse. Quoniam enim [a] *tam duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales sunt, si demantur æquales CGD, EGD, erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulique q3 FGC, FGE, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterq3 sit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Isoscele FCD, acutus; ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq3 modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis GC, basi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG;* [b] *ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Constat ergo propositum.*



g 13. primi.

h 26. ter.

Deinde sint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales esse; & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, sunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia duobus lateribus GE, GF: Est autem & basis FC, basi FE, æqualis. [i] *Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rursus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia sunt, basesq3 æquales ponuntur GC, CE,* [k] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales,* [l] *atq3 idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod est propositum.*

i 8. primi.

k 8. primi.

l 26. ter.

Tertio sint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, esse æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales sunt, [m] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, sint æqualia, angulosq3 æquales contineant;* [n] *erunt & bases GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonstranda erant.*

m 27. ter.

n 4. prim.

HOC tamen theoremate multo vniuersalius est Lemma 21. lib. 1. nostri Astrolabij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est.

In eadem figura proxima sint duo anguli æquales CGD, CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem esse. Ductis enim rectis BC, CD, [o] *quoniam recta GB, maior est, quam recta GD, abscindatur GH, ipsi GD, æqualis, jungaturq3 recta CH. Quia igitur duo latera GH, GC, duobus lateribus GD, GC, æqualia sunt, angulosq3 continent æquales;* [p] *erunt & bases CH, CD, æquales, & angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Est autem GDC, in Isoscele FCD, acutus, ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus CHB, obtusus erit. Cum ergo;* [q] *duo anguli CHB, CBH, sint duobus rectis minores, erit CBH, acutus. Quare* [r] *latus BC, latere CH, maius erit. Est autem CH, recta ostensa ipsi CD, æqualis. Igitur recta BC, maior quoq3 erit quam CD; ac propterea ex scholio propos. 28. huius lib. arcus BC, arcu CD, maior erit. Quod erat ostendendum.*

o 7. ter.

p 4. prim.

q 17. prim.

r 19. prim.

PROBL. 4. PROPOS. 30. xxix.

DATAM peripheriam bifariam secare.

SIT peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, quæ diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, triãguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur [a] & bases AB, CB, æquales erunt; Ac propterea [b] peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.



a 4. prim.
b 28. tertij.

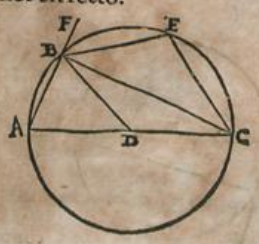
PRAXIS.

Non differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propos. 10. lib. 1. tradidimus. Si namq3 quicunq3 arcus proponatur, vt ABC, intelligenda semper est recta linea eum subtendens AC, etiamsi ducta non sit; atq3 ex punctis A, & C, describendi arcus eodem interuallo se mutuo intersecantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta AC, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam AC, bifariam, secabit quoq3 arcum datum bifariam.

THEOR. 27. PROPOS. 31. xxx.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus minor est recto.

CIRCVLI enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturque in semicirculo angulus ABC, existetque angulus BAC, in maiori segmento CAB. Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem. At angulum minoris segmenti cõprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur n. recta BD, ad centrũ, & extendatur AB, in F. Quoniã igitur rectæ DA, DB,

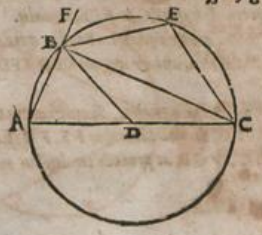


a 5. primi. DB, æquales sunt,[a] erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB,
b 32. primi. æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA: æqualis erit. [b] Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

c 17. prim. QVONIAM vero in triangulo ABC, [c] duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

d 22. tertij. RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, [d] duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

Satis autem est, demonstrasse, vnum angulum in semicirculo, nimirum ABC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAC, recto minorem: ac deinde in segmento minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuum est, si vnus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento vnus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolute, quemcunque angulum in segmento maiore, BAC, esse recto minorem, vt constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cum is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus BAC. Quare quicunque alius ostendetur esse etiam recto minor, quia æqualis est angulo BAC, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.



c 21. tertij.

AMPLIVS cum angulus rectus ABC, pars sit anguli segmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus segmenti maioris, recto maior, quod est quartum.

POSTREMO, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quoque anguli recti FBC; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

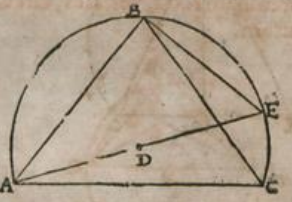
Alia demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter AC, & centrum D, sit angulus ABC, quem dico esse rectum. Ducta enim recta BD, [f] erunt anguli DBA, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales sint. Cum igitur angulus BDC, externus [g] æqualis sit duobus angulis internis DBA, DAB, in triangulo ABD; Erit angulus BDC, duplus anguli DBA. Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DBC, atq; adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli ABC. Cum igitur [h] anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus ABC, eorum dimidium, rectus: quod est primum.



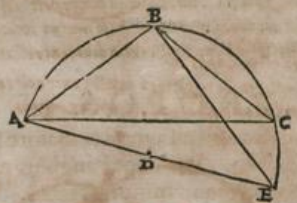
f 5. primi.
g 32. prim.
h 13. primi.

VEL sic. Quoniam [i] angulus DAB, angulo DBA, & angulus DCB, angulo DBC, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo ABC, æquales in triangulo ABC: ac proinde angulus ABC, dimidium erit trium angulorum A, C, & ABC, eiusdem trianguli. Quocirca [k] cum tres anguli in triangulo ABC, sint æquales duobus rectis; erit ABC, dimidium duorum rectorum, atque idcirco rectus.

i 5. primi.
k 32. prim.

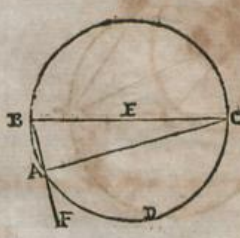


SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum: Atque hæc demonstratio in omnem angulum in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.



SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.

IAM vero proponatur segmentum maius ABC, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta CA, & peripheria ABC, esse recto maiorem; At angulum CAD, segmenti minoris, qui fit à recta eadem CA, & peripheria ADC, recto minorem. Ducta enim diametro CB, & recta BAF, cadet eius segmentum BA, duo puncta B, A, coniungens, [l] intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum; eritque angulus BAC, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps FAC, rectus quoque. Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peripheria ABC, continetur; & angulus CAD, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta CA, &



l 2. ter.

CA, & peripheria ADC, pars quoque anguli recti FAC; constat vtrumque.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eo quod dimidium sit trium angulorum trianguli, qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

EX CAMPANO.

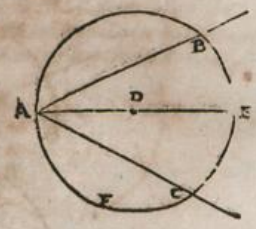
Ex hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum vna est.

TRANSITVR à maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA vero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

In circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter AE, ducatur recta AB. [m] *erit angulus ABE, segmenti maioris, recto maior. Quare si AB, moueatur versus AE, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE, peruenerit,* [n] *vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si vlterius moueatur ad AC,* [o] *faciet à fortiori angulum ACF, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterq; recto minor est, non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vitiosas esse prædictas consequentias.*



m 31. ter.

n 16. tertij. o 31. tertij

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoq; est conuersum huius theorematis: hoc est.

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius vero angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

Nam angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumq; pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumq; cum hypothesi etiam pugnat. Denig; angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, at q; ita angulus in eo rectus erit; vel maius, at q; ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrarium est. Præterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor, quod non ponitur. At quando anguli segmenti est recto minor, si segmentum non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, at q; ita eius Angulus recto quoq; maior erit. Quod hypothesi aduersatur.

QVIN & hoc theorema verum est; scilicet.

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectã, vel latus, circulus describatur; transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

Angulo enim recto ABC, subtensa recta AC, vel in triangulo rectangulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppositum, bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum DA, vel DC, circulus describatur AEC, quem dico transire per B. Si enim transeat citra B, vel vltra; ductis rectis AE, CE, ita vt rectas AB, AC, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit [p] *angulus AEC, rectus quoq;. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod est absurdum: cum angulus E. sit necessario,* [q] *vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B: quod est propositum.*

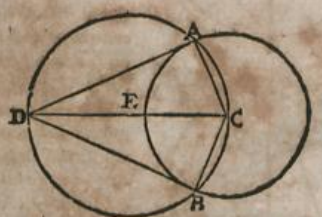


p 31. tertij.

q 21. primi.

Ex ijs, quæ in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramq; partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ, quæ circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.

Sit enim circulus AB, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta DC, ex dato puncto ad centrum, eaq; diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum EC, vel ED, circulus ACBD, secans datum circulum in punctis A, B, iungaturq; rectæ DA, DB. Dico vtramq; circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis AC, BC, [r] *erit vterq; angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta DA, circulum AB, tanget in A, & recta DB, eundem tanget in B, quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri AC, quàm hæc ad extremitatem semidiametri CB.*



r 31. tertij.

SED & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco.

SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eiiciatur, à puncto vero, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.

Sit circulus ABC, per cuius centrum D, describatur alius circulus DEF, & per horum circulorum centra ducatur recta AF; ac denig, ex puncto F, vbi circulus DEF, rectam AF, intersecat, ducatur recta FB, secans circumferentias in B, E, G. Dico BE, GE, esse æquales. Ducta enim recta DE, [r] erit angulus DEF, in semicirculo DEF, rectus. Igitur [s] recta DE, rectam BG, secat bifariam.

r 31. ter.

s 3. tertij.

Quod si posterior circulus transeat per punctum C, vt in secunda figura; erit [t] rursum angulus, DEC, in semicirculo DEC, rectus; ac [u] propterea BC, in E, secabitur bifariam.

t 31. tertij.

u 3. tertij.

Si denig, posterior circulus totus sit intra priorem, vt in tertia figura; erit iterum [x] angulus DEF, in semicirculo DEF, rectus. Quare [y] recta DE, rectam BG, bifariam secabit. Quod erat ostendendum.

x 31. tertij.

y 3. tertij.

Facile etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.

In circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum ABCD, cuius duo opposita latera AD, BC, parallela sint, & æqualia. Dico ipsum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim rectæ AD, BC, parallelæ sint, & æquales, [z] erunt quoque AB, DC, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo est ABCD. Quia vero [a] & arcus AD, arcui BC, ob rectas æquales AD, BC, & arcus AB, arcui DC, ob æquales rectas AB, DC, æqualis est; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, æqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC, semicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare [b] anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.

z 33. pri.

a 28. tertij.

b 31. tertij.

xxxj.

THEOR. 28. PROPOSITIO 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta CE, per centrum. [a] Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus: [b] Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.

a 18. tertij.
b 31. tertij

c 18. tertij.

d 31. ter.

NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: [c] eritque CF, perpendicularis ad AB, [d] & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: [e] Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum vterque sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG, duo [f] anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: [g] Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autē, &c. Quod erat ostendendum.

e 21. tertij.

f 22. tertij.
g 13. prim.

SCHO-

SCHOLIVM.

POTEST *theorema hoc conuerti hoc modo.*

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

In eadem figura priore transeat primum recta CE, per centrum, secans circulum C D E, & ducatur recta A B, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam [h] *angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam vero C E, non transeat per centrum, construatur q, figura posterior, vt supra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo C G E, in alterno segmento maiore,* [i] *& hic est æqualis angulo CFE, erit & angulus A C E, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales sunt vni recto; quod* [k] *angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF,* [l] *æquales sunt duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoque erit; ideoq; per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget.*

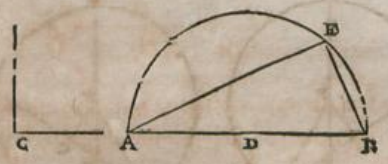
Eodem modo, si angulus B C E, æqualis fuerit angulo C D E, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum. Cum enim [m] *anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales:* [n] *Item duo anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.*

h 31. tertij. i 21. tertij. k 31. tertij. l 32. prim. m 13. prim. n 22. tertij.

PROBL. 5. PROPOSITIO 33. xxxij.

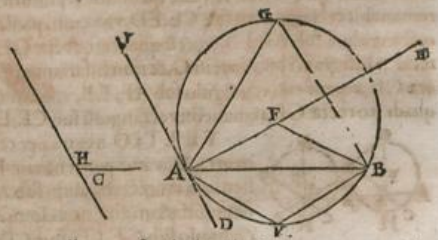
SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RECTA data sit AB, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur super AB, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur: Nam [a] angulus AEB, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.



a 31. tertij.

SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, secetq; BF, rectam AE, in F. [b] Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & interuallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super AB, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter [c] angulus DAB, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno AGB.



b 6. primi. c 32. tertij.

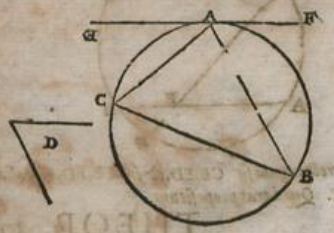
SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ supra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, descriptumq; erit super AB, segmẽtum AKB, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus IAB, hoc est, angulus datus H, [d] æqualis est angulo K, in alterno segmento AKB. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

d 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. xxxiij.

A DATO circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus sit A B C, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. [a] Ducatur recta E F, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum A C B, in segmento ablato A C B, æqualem esse dato angulo D. Est enim [b] angulus F A B, æqualis angulo C, in alterno segmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendũ.



a 17. tertij. b 32. tertij.

THEOR. 29. PROPOS. 35. xxxiv.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.



IN circulo ACBD, secent se mutuo rectę AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantum, aut neutra. Transeat primum vtraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

a 3. tertij.

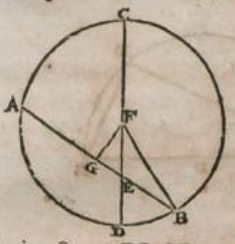


b 3. sec.

c 47. prim.

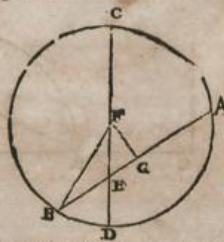
TRANSEAT deinde CD, sola per centrum F, diuidatque primum rectam AB, bifariam,[a] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniam igitur CD, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E, [b] erit rectangulũ sub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoq; quadrato rectæ FB, cũ rectæ FD, FB, sint æquales: Est autẽ quadratũ rectę FB, [c] æquale quadratis rectarũ FE, EB. Igitur rectangulũ sub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ EF, æquale quoq; erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato cõmuni quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB, cum AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex ijs, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus.

d 3. tertij.



c 5. sec.

f 47. prim.



DIVIDAT iam CD, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariã in G, ducanturq; rectæ FG, FB, [d] eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectãgulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ FE, [e] æquale est quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE, [f] æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB: erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vna cũ quadrato rectæ GE, [g] æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulũ sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. Quod est propositum.

g 5. sec.



TERTIO neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulũ sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. quod est propositũ. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.



b 35. tertij.

Secent se mutuo rectæ AB, CD, in E, sit q, rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeo vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessario per punctum etiam C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub FE, ED, [b] æquale est rectangulo sub AE, EB, & rectangulum sub CE, ED, ponitur quoq; æquale eidem rectangulo sub AE, EB; Erunt rectangula sub CE, ED, & sub FE, ED, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. Quod erat propositum.

xxxv. THEOR. 30. PROPOS. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehendtur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

EXTRA

EXTRA circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C,[a] & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primum recta DA, per centrum E, & iungatur recta EB,[b] quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum CD,[c] erit rectangulũ sub DA, DC, vna cũ quadrato rectæ EC, hoc est, cũ quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE: Est autẽ quadratũ rectæ DE,[d] æquale quadratis rectarum EB, BD. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarũ DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectę BE, remanebit rectãgulũ sub DA, DC, quadrato rectę DB, æquale. Quod est propositũ.

a 17. tertij
b 18. tertij.
c 6. sec.
d 47. prim.

NON transeat iam DA, secans per centrum E. Diuisa ergo AC, bifariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF;[e] eritque EB, ad BD, perpendicularis;[f] & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD,[g] erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE,[h] æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et[i] quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cũ quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE,[k] æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectãgulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectę BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

e 18. tertij.
f 3. tertij.
g 6. sec.
h 47. prim.
i 47. primi.
k 47. prim.

COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectãgula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum,[l] erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.

l 36. tertij.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quę circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulũ: quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quam quadratum rectæ AC,[m] æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.

m 36. tertij

COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quę circulum tangãt. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E,[n] erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nã si ducatur recta AE,[o] erit angulus ADE, maior angulo ABE.

n 18. tertij.
o 21. prim.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namq; recta AE, ad centrum E, quæ circulum secet in F,[p] erit AD, cum sit propinquior minimæ AF, minor, quam AB, quæ à minima AF, remotior est. Vel sic. Si AB, AD, sunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipsis AD, DE, æquales, quod est absurdum.[q] Sunt enim maiores AB, BE. Solũ igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

p 2. tertij.
q 21. primi

COROLLARIVM IV.

ILLVD denique constat etiam, si duæ rectę æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura sint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib.) eruntque ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod est absurdum. [r] Duæ enim tantum duci possunt.

r 18. tertij.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propos. duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & basis DE, communis. [s] Igitur anguli B, F, æquales erunt: [t] Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit, atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib.

s 8. prim.
t 18. tertij.

SCHOLIVM.

Facillimo negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum BCD, ducatur tangens AB, & secans AE, quæ primum per centrum F, transeat, secetq; circumferentiam in D. Dico rectangulum sub AE, AD, æquale esse quadrato ex AB. Descripto namq; ex F, per A, circulo AKL, producantur AE, AB, vsq; ad H, I, & per D, ad AH, perpendicularis KL, quæ eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eruntq; ex demonstratis in scholio propos. 3. huius lib. AD, HE, æquales, ac proinde, addita communi DE, & AE, HD, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, KL, æquales erunt. Secabuntur q; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub KD, DL, æqualia inter se erunt, atq; adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI, KD, DL. Itaq; quoniam rectangulum sub HD, DA, hoc est, sub AE, (quæ ipsi HD, ostensa est æqualis) AD, [u] *æquale est rectangulo sub KD, DL, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB, constat propositum.*

u 35. tertij.

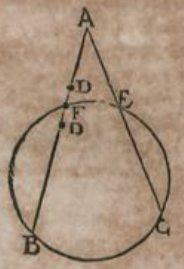


Sed iam secans linea AN, non transeat per centrum F, secetq; circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub AN, AC, quadrato ex AB, æquale esse. Descripto enim rursus ex F, per A, circulo AKL, producantur AN, AB, vsq; ad G, I. & per C, ducatur OM, circulum BCD, tangens. Eruntq; ex scholio propos. 3. huius lib. AC, GN, æquales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, OM, æquales erunt, secabunturq; in B, C, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub OC, CM, æqualia inter se erunt, atq; adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI, OC, CM. Itaq; quoniam rectangulum sub GC, CA, hoc est sub AN, (quæ ipsi GC, ostensa est æqualis) AC, [x] *æquale est rectangulo sub OC, CM, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB, constat rursus id, quod proponebatur.*

x 35. ter.

Primum etiam corollarium huius propos. hoc modo ferme conuertemus.

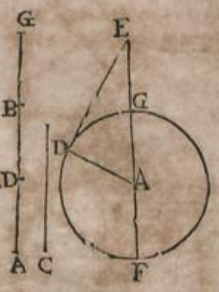
SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.



Ex puncto enim A, egrediantur duæ rectæ AB, AC, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub AB, AD, & sub AC, AE, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea posse describi circulum: adeo vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propos. 5. lib. 4. docebimus) circulus BCE, qui si dicatur non transire per quartum punctum D, transibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub AB, AE, æquale est, ex coroll. 1. huius propos. rectangulo comprehenso sub AC, AE, & rectangulum sub AB, AD, eidem rectangulo sub AC, AE, ponitur æquale: erunt rectangula sub AB, AF, & sub AB, AD, inter se æqualia, pars & totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.

Licebit quoq; ex demonstratis hac propos. colligere huiusmodi problema.

DATIS duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulũ sub tota composita, & adiuncta cõprehensum, quadrato alterius sit æquale.



Sint datæ duæ rectæ AB, & C, sitq; ipsi AB, minori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehensum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato rectæ C, maioris. Diuisa recta AB, bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallũ AD, dimidiata, circulus DFG, & ad AD, in D, excitetur perpendicularis DE, ipsi C, æqualis, ac denig; ex E, per A, centrum recta extendatur EF, secans circumferentiam in G. Dico si rectæ AB, adiyciatur BG, ipsi EG, æqualis, rectangulum sub tota AG, & GB, æquale esse quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum sub FE, EG, [y] *æquale est quadrato rectæ ED; (quod ED, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 16. huius lib.) Est autem rectangulũ sub FE, EG, æquale rectangulo sub AG, GB, (quod rectæ FE, EG, rectis AG, GB, æquales sunt. Sumpta enim est GB, ipsi EG, æqualis, & AB, ipsi FG, æqualis posita est,) & quadratum ex ED, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum ED, & C, ex constructione,) æquale. Igitur & rectangulum sub AG, GB, quadrato ex C, æquale erit. Quod est propositum.*

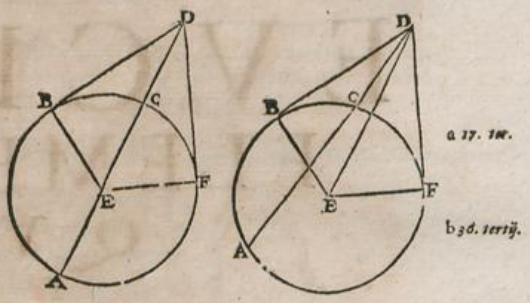
y 36. tertij.

Non secus propositum demonstrabitur, si rectæ C, maiori adiungenda sit recta, ita vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum quadrato rectæ AB, minoris æquale sit.

THEO-

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvj.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.



EXTRA circulum ABC, cuius centrum E, punctum sumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidēs in circulū punctū B; sitq; rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. [a] Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo sub DA, DC, [b] æquale est quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo sub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter se erunt. Itaq; quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & basis DE, communis, [c] erunt anguli DFE, DBE, æquales. [d] Atqui angulus DFE, rectus est, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. DB, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. 3.

b 36. tertij.

c 8. prim.

d 18. tertij

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.
PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsq; ad conuexā peripheriā inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ducta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.

In priori figura huius propos. duæ rectæ DB, DF, circulum ABCF, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. præcedentis propos. æquales erunt: Vel ducantur quæcunq; duæ æquales DB, DF. Et per centrum E, ducatur recta linea DEA. Dico angulum BDF, sectum esse bifariam à recta DA. Cum enim iunctis rectis EB, EF, duo latera BD, DE, duobus lateribus FD, DE, æqualia sint, basisq; EB, basi EF, æqualis; [c] erunt duo anguli ad D, inter se æquales. Quod est propositum. c 8. prim.

Diuidat iam recta DA, angulum BDF, bifariam. Dico rectam DA, per centrum transire. Si enim in DA, non est centrum, sit extra ipsam centrum E, iungaturq; recta ED, vt in posteriori figura huius propos. Ergo, vt demonstratum est, recta ED, angulum BDF, bifariam diuidet; ac propterea anguli BDA, BDE, cum sint dimidiatæ partes anguli BDF, æquales inter se erunt, pars, & totum; quod est absurdum.
Transit ergo recta DA, per centrum. Quod demonstrandum erat.

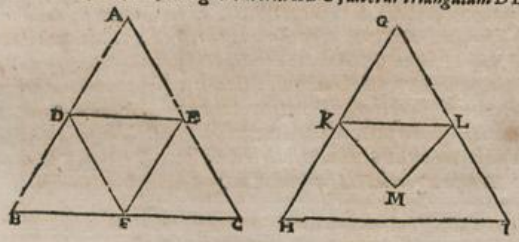
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

GENS Euclides quarto hoc libro de varijs inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris: Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera AB, AC, BC, trianguli externi ABC; dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, esse inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli KLM, non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI, quamuis totũ illud sit intra hoc, duoq; anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.



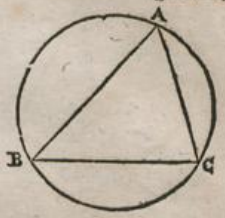
II.

SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E contrario dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM, propterea quòd latus illius HI, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarũ rectilinearum.

Caterum proprie figuræ rectilineæ dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt adfinem lib. 6. docebimus.

III.



FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

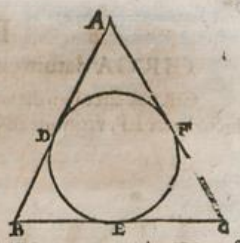
VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

IV.

FIGVRA vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

At vero,

AT vero si latera trianguli ABC singula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circum scribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, in figura definitionis 3. descriptus esse circa triangulum ABC. Idem iudicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

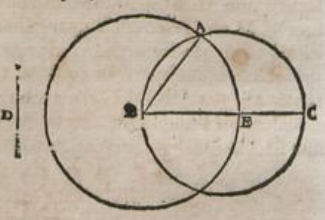


VT recta linea AB, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel CD; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter [a] sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, [b] abscindatur BE, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autem BE, circulus describatur EA, secans circulum ABC, in A, ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. [c] Est enim BA, æqualis ipsi BE, & D, æqualis eidem BE, per constructionem. Quare AB, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

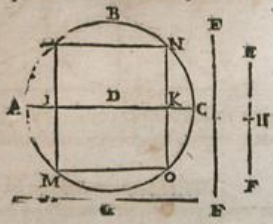


a 15. tertij.
b 3. primi.
c 15. defin. primi.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo ABC, cuius centrum D, accommodanda sit recta æqualis rectæ EF, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. [d] *Ducatur per centrum D, diameter AC, rectæ G, parallela. Quod si recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero EF, diametro minor fuerit, secta ea bifariam in H, abscindatur DI, ipsi HE, & D, K, ipsi HF, æqualis, vt tota IK, toti EF, sit æqualis.* [e] *Et per I, K, ad angulos rectos ipsi AC, ducantur LM, NO; iungaturque LN. Dico LN, accommodatam esse æqualem ipsi EF, & ipsi G, parallelam. Cum enim LM, NO, æqualiter à centro distent,* [f] *ipsæ æquales inter se erunt:* [g] *quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur à recta AC, per centrum D, transeunte; erunt & earum semisses LI, NK, æquales.* [h] *Quia vero LI, NK, parallelæ etiam sunt;* [i] *erunt quoque LN, IK, æquales, & parallelæ. Quare cum IK, æqualis sit ipsi EF, & parallela ipsi G. Erit etiam LN, æqualis ipsi EF,* [k] *& ipsi G, parallela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.*



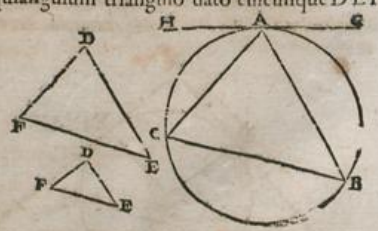
d 31. primi.
e 12. prim.
f 14. tertij.
g 3. tertij.
h 28. prim.
i 33. prim.
k 30. prim.
ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo ABC, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF.

Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC, angulo E, atq; extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiã vtq; in puncta B, & C, coniungaturq; recta BC. Nõ cadet autẽ recta AC, in rectã AB, vel inter rectas AB, AG; propterea q̃ anguli GAB, HAC, h.e. anguli F, E, [a] minores sunt duobus rectis. [b] Essent autẽ duob. rectis æquales, si AC, in AB, caderet; vel maiores duob. rectis, si inter AB, AG, caderet. Dico triangulũ ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, [c] æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, [d] æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF, [e] erunt quoq; reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

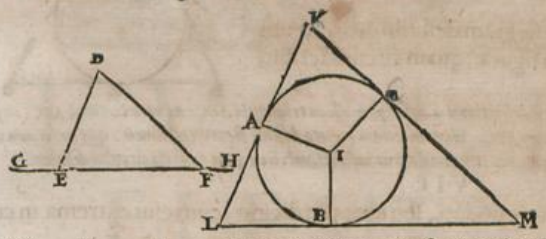


a 17. primi.
b 13. prim.
c 32. tertij.
d 32. tertij.
e 32. primi.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

iij. CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum ABC, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF. Producto latere EF, vtrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares KL, LM, MK, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores, ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet supra rectas AI, CI quod hæ angulum constituant in I. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F, sintque duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH. æ-



a 17. primi. quales; erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed a hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC. Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, vnam rectam lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta AI, producta, caderet supra IC. Cadit igitur necessario AI, producta infra CI, atque idcirco angulus fiet AIC, ad partes K, & ducta recta AC, faciet cum AK, CK, duos angulos minores duobus rectis, idcoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non secus ostendemus, AL, BL, coire in L, & CM, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL. æquales sunt quatuor rectis, vt ad 32. propos. lib. 1 ostensum fuit, & anguli IAL, IBL, sunt duo recti, erunt reli-

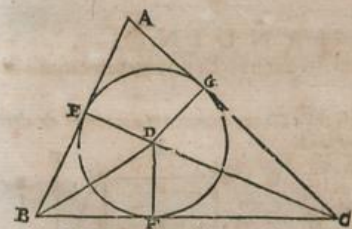
b 13. prim. qui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur b & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M,

c 32. prim. æqualem esse angulo DFE. c Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

iv. IN dato triangulo circulum inscribere.

SIT describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum cocant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt duobus angulis, DBF, DFB, triãguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; a erunt quoque latera DE, DF, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trian-



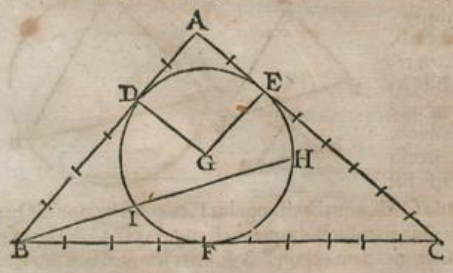
a 26. primi. guli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

SCHOLIVM.

b 20. prim. *VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit;* b *in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Io. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate.*

IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.

e 4. quarti. *SIT triangulum ABC,* c *cui circulus inscribatur DEF, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta CF, rectæ CE, & recta AD, rectæ AE, æqualis est; erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur BA, BC, latus AC, superant segmentis BD, BF: quæ cum ex eodem coroll. sint æqualia; superabunt eadem latera BA, BC, latus AC, recta, quæ dupla est segmenti BD. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmenti BD, quadruplum est quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et* d *quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, recta, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI. Quod est propositum.*



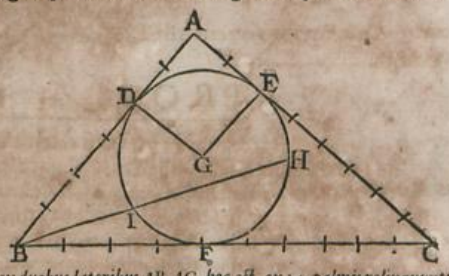
d 36. tertij.

QVOD si angulus A, rectus sit, dico non solum duo latera AB, AC, superare latus BC, recta, cuius quadratum quadruplum

plum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius segmento exteriore, vt ostensum est: verum etiam excessum illum esse diametro circuli DEF, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis GD, GE; [c] erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A ponatur rectus, [f] erunt tam recta AE, DG, quam AD, EG, parallelæ inter se: atque idcirco AG, parallelogrammum erit. [g] Quare tam recta AD, semidiametro EG, quam recta AE, semidiametro DG, æqualis erit: hoc est, duæ rectæ AD, AE, simul toti diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis AD, AE, vt ostensum est. Nam EC, ipsi FC, & DB, ipsi FB, æqualis est, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. Igitur eadem latera AB, AC, superant latus BC, diametro circuli inscripti. Quod est propositum. ITAQVE quæuis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulum interiiciuntur. Ostensum enim est, latera AB, AC, superare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

c 18. tertij. f 28. primi. g 34. prim.

IAM vero his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inscribendus latera tangere debet. Quia enim latera verbi gratia, AB, AC, superare debent latus BC, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales sunt: si dematur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duæ tangentes AD, AE, notæ. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde segmentum EC, dabit segmentum CF, vsque ad punctum tertium F. Vel reliquum segmentum DB, dabit segmentum BF, ad idem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt hæ in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus AB, 6. latus AC, 8. & latus BC, 10. palmorum. Dempto latere BC, 10. palmorum ex duobus lateribus AB, AC, hoc est, ex 14. palmis relinquuntur 4. palmi. Tam ergo AD, quã AE, duos palmos continebit. Segmentũ ergo D, B, continebit 4. palmos, totidemq; segmentũ BF, habebit. Segmentũ autẽ EC, ac proinde & CF, erit 6. palmorũ. Sic etiã dempto latere AB, 6. palmorũ, ex lateribus AC, BC, idest, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palmi. Vtrumq; ergo segmentũ CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumq; AE, AD, 2. palmorũ & vtrumq; BD, BF, 4. palmorũ. Postremo dempto latere AC, 8. palmorum ex lateribus AB, CB, hoc est, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumq; ergo segmentum BD, BF, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumq; AD, AE, 2. palmos.

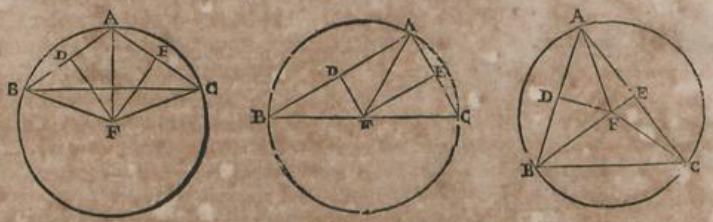


PROBL. 5. PROPOS. 13.

CIRCA datum triangulum circulum describere.

SIT circulus describendus circa datum triangulum ABC. Diuidantur duo latera AC, AB, (quæ in triangulo rectãgulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulũ, quãuis hoc non sit omnino necessariũ, sed duo quæuis latera bifariam possint secari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; [a] erunt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.



COROLLARIVM.

HINC manifestũ est, si centrũ intra triangulũ cadat, [b] omnes angulos esse acutos. quoniã omnes sunt in maiori segmento circuli: si vero sit in latere BC, [c] angulũ BAC, ei lateri oppositum, esse rectum; & sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulũ, [d] angulũ oppositũ BAC, obtusum esse, cũ sit in minori segmento circuli.

b 31. tertij. c 31. tert. d 31. tertij

CONTRA vero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum. Quia si in acutangulo caderet centrum in vnum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectãgulo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra, esset angulus oppositus obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in vnum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothesi.

SCHOLIVM.

COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungãtur, vt constituatur triangulũ, facile circa ipsum circulus describetur, vt hac propetradituum est. Quod tamen facilius efficietur praxi illa quæ traditur in prop. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C. Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur DH. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, si placeat, priori illo, alij duo arcus delineẽtur secantes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur FH, secans rectam DH in H. Dico H, esse centrũ circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ AB, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam à rectis DH, FH, eo demonstratũ est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum ABC, descripti. Quod est propositum.

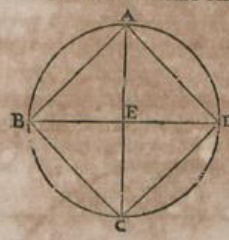


PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT

SIT in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se se ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; *a* erunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; *b* erunt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales: *c* ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt. Sunt autem *d* & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit ABCD, propterea que in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.



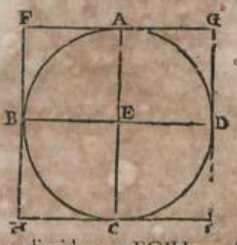
a 4. prim.
b 26. ter.
c 29. tertij.
d 31. tertij

vij.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares FG, FH, HI, IG, cocuntes in punctis F, H, I, G. Quod enim coeat AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti, *a* erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. *b* Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum est ACHF, *c* erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH est rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse: & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.



a 28. prim.
b 28. prim.
c 38. prim.

viij.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

In dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales & parallelæ. *a* Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æqualium AD, AB, &c. Quare & rectę IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. *b* quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.



a 33. prim.
b 29. prim.

ix.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sunt *a* erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. *b* Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; *c* erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 5. primi.
b 32. prim.
c 6. primi.

SCHOLIVM.



QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.

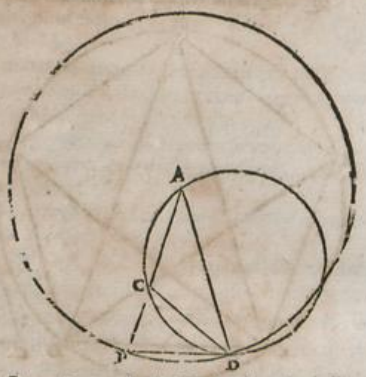
PROB.

PROBL. 10. PROPOS. 10. x.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea AB, quæ *a* diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus describatur, in quo *b* accommodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico vtrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, *c* describatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD, & rectæ AB, secat circulum DCA, *d* tanget recta BD, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, *e* æqualis est angulo A, in alterno segmento CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eisdem *f* æqualis est etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est, angulo ABD, *g* cum ABD, ADB, æquales sint; ac propterea *h* rectæ CD, BD, æquales erunt: Est autē BD, æqualis posita rectæ AC. Igitur & CD, ipsi CA, æqualis erit; *i* ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus ABD, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.

a 11. secūdi.
b 1. quarti.
c 5. quarti.
d 37. tertij.
e 32. tertij.
f 32. primi.
g 5. primi.
h 6. primi.
i 5. primi.



COROLLARIVM.

QVONIAM vero tres anguli trianguli ABD, *k* æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres *l* æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

k 32. prim.
l 32. primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quod se excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, BC, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam BD, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

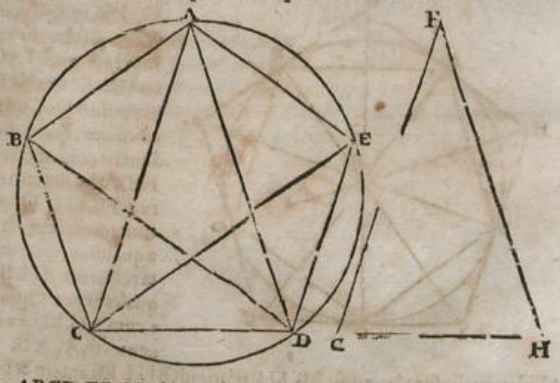
QVA arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vteruis angulorum ad basim, ad reliquum habeat quamcunq; proportionem datam, non solum duplam, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum Pappo Ad finem lib. 6. Quæres hactenus desiderata est.

PROBL. 11. PROPOS. 11. xj.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Constituatur triangulum Isosceles, FGH, ita vt vterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F, & in circulo *b* inscribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & vterque angulorū ACD, ADC, *c* bifariam diuidatur rectis CE, DB, atq; rectæ iungantur AB, BC, CD, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inscriptum, esse æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & diuisus bifariam; erunt quinq; anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. *d* Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascēderunt, atq; idcirco *e* & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. æquilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æquales sunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. *f* Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistentes, æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli ex ternis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod faciendum erat.

a 10. quart.
b 2. quarti.
c 9. primi.
d 26. tertij.
e 29. tertij.
f 27. tertij.



COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas vnius recti. g Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales sint, vtpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistant, sit autem CAD, per coroll. præcedentis propos. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorũ rectorum: vel sex quintæ vnius recti.

g 27. tertij.

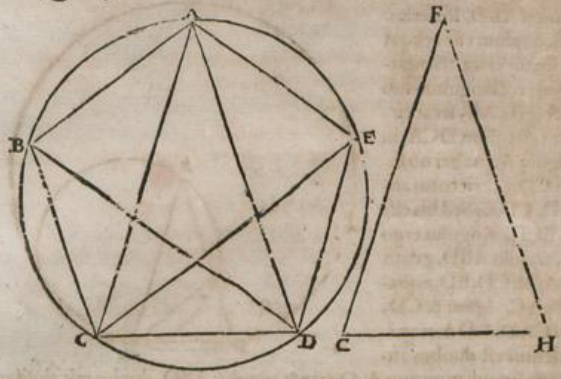
SCHOLIVM.

QVOD si detur recta linea terminata CD, super ea constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ, hoc modo.[h] *Fiat triangulum Isosceles FGH, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituãtur anguli ACD, ADC, æquales angulis G, H, coeantque rectæ CA, DA, in A,*[i] *quæ efficient angulum CAD, æqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, vterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam vero circa triangulum ACD, circulus*[k] *describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triangulum ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.*

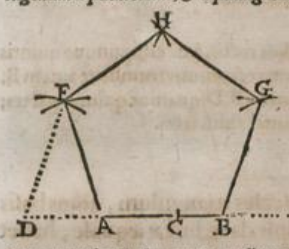
h 10. quar.

i 32. primi.

k 5. quarti.



FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita AB, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramque partem, sintque AD, BE, maiori segmento AC, æquales. Interuallo deinde datæ rectæ AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniunganturque rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pentagonum ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse æquilaterum, atq; æquiangulum. Quod enim sit æquilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB, sumptæ sint æquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quod autem sit & æquiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quod basis AD, æqualis est maiori segmento AC, lineæ AB, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi AB, æquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus DAF, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum BAF, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cũ ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorũ rectorũ; erit BAF, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eadem[g] *ratione erit ABG, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totũ pentagonũ esse æquiangulũ. Si n. compleatur, aut concipiatur esse completũ, h. e. super F, G,* 1 21. primi. *cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessario in punctũ H. Alioquin, si supra H, aut infra cõuenirent,*[l] *essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis FG: atque ideirco aliis lateribus FA, AB, BG, æqualia non forent, q. est absurdum. Pentagonum ergo ABGHF, & æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat ostendendum.*



PROBL. 12. PROPOS. 12.

xlj.

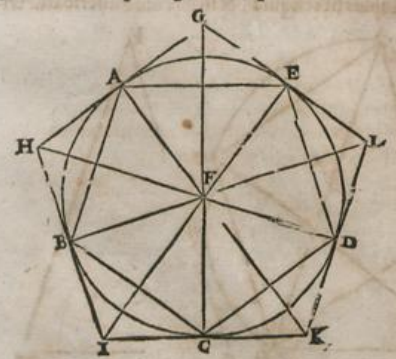
CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. a Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; b coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & sic de aliis. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico esse æquilaterum atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL, erunt quadrato rectę FH, c æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quam rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarum FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli AFH, æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, vt ostensum est; d erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur e & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFH, & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulum BIC, anguli BIF. Cum igitur f anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circumferentiis AB, BC, g quæ æquales sunt, cum à rectis æqualibus subtendantur AB, BC; erunt & dimidii eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis ad-

a 11. quarti

b 13. prom.

c 47. prim.



d 8. prim.
e 4. prim.
f 27. ter.
g 28. tertij

lis adiacens commune BF, *b* erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus GH, rectam duplam esse rectę HA. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Æquilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, æquales esse, ac semisses angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Æquiangulum igitur est pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat. *b* 26. prim.

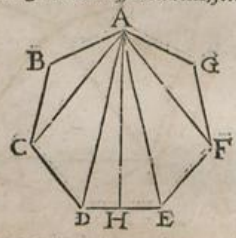
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosq; conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidē ipsos angulos bifariam secabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

HVC referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quod perutile erit ad inuenienda centra circulorum circa ipsas figuras, siue intra ipsas describendorum, vt ex sequentibus patebit.

IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam; Et contra, recta linea diuidens angulum bifariam, secat quoque latus oppositum bifariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumq; angulum bifariam: Et contra, recta linea secans quēmuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.

SIT primum figura æquilatera, æquiangulaque imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, æqualia sunt angulosque continent æquales, ex hypothesi; [i] *erunt & bases AC, AF, æquales, & tam anguli BAC, GAF, quam BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, continentque angulos æquales, vt ostensum est;* [k] *erunt & bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quā CDA, FEA. Atq; ita procedendum erit, donec ad latus oppositum peruentum sit. Vbi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt; erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosque æquales contineant,* [l] *erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.*



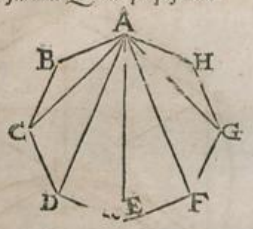
i 4. prim.

k 4. prim.

l 4. primi.

SED iam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam, quod est absurdum, cum vna medietas maior esset quam altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoque latus DE, bifariam. Quod est propositum.

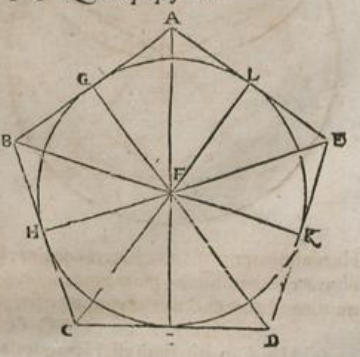
SIT deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, secare tam angulum BAH, quam DEF, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis, demonstrabimus, vt in antecedente figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse æquales, singulos singulis; ideoq; totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, necnon & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Vtergq; igitur angulus BAH, DEF, secatur bifariam. Quod est propositum.



SED iam recta EA, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumque diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A. ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt, quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatq; propterea, vt demonstratum est proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.



xiij.

a 9. primi.

b 4. prim.

SIT inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. *a* Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cū n. ex scholio præcedentis prop. rectæ AF, BF, secent opposita latera CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuo intra pentagonū secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autē ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; *b* erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponātur æquales, & BAF, dimidiū sit anguli BAE,

per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL; estque latus AF, subtensum vni æqualium angulorum commune c erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H.I.K,L. Quoniã vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pẽtagono inscriptus. Quod faciendũ erat.

c 26. prim.

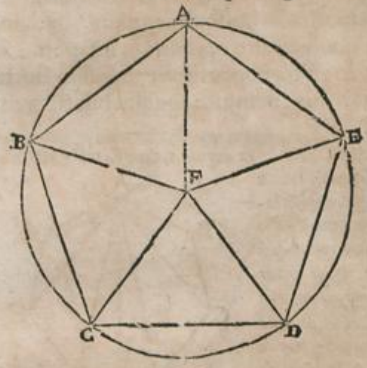
SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunq; figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi. Concurrent autem necessario intra figurã duæ illæ rectæ, quæ angulos istos proximos secant bifariam: propterea quod in figura imparium laterum diuidunt latera opposita bifariam; in figura vero parium laterum, angulos oppositos bifariam, vt in scholio antecedentis propos. ostensum est.

xiiij.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.



SIT circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA. sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniã igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; a erunt rectæ FA, FB, æquales. Eadem; ratione erũt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

a 6. primi.

SCHOLIVM.

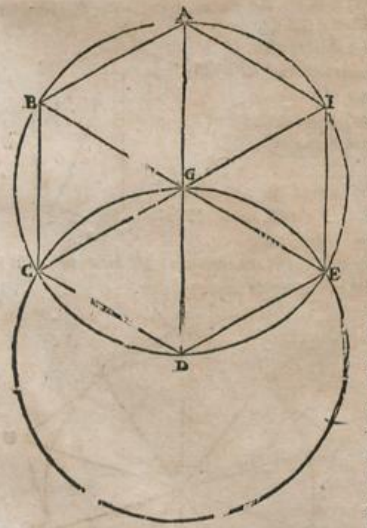
EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus: Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

xv.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, interuallo vero DG, qui secet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli: erũt & rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare a tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum b æquales sint duob. rectis, erit quilibet illorũ, nẽpe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodẽ modo erit angulus DGE, tertia pars duorũ rectorum: Sunt autẽ tres anguli CGD, DGE, EGF, c æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars erit duorũ rectorũ. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus cũ etiam d æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erũt sex anguli ad centrũ G, æquales. e Quare circumferẽtiæ, quib insistunt, f ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC, æqualis est circumferentiæ AF; si addatur cõmunis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistẽtes BAF, ABC, g æquales erunt. Similiterq; ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorũ, quia nimirũ quilibet insistit arcui cõposito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.



a 5. primi.
b 32. prim.
c 13. prim.
d 15. primi.
e 26. tertij.
f 29. tertij.
g 27. tertij.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

SCHO-

SCHOLIVM.

CÆTERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & denig, circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propos. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, vt propos. 12. 13. 14. traditur.

PORRO ex his quoque facile demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit; siue in quo vtrumuis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A centrum circuli BCDE, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE. [h] *Erit ergo subtensa DE semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE, erit hac maior quam DE, ex scholio propos. 29. lib. 3. hoc est, maior, quam semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris AC, AE, erit triangulum ACE Isosceles, cuius tertium latus CE, vtrouis æqualium AC, AE, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim* [i] *anguli ACE, AEC, æquales sunt,* [k] *& simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta AB, erit angulus BAE, quadranti BE, in centro insistens rectus, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde CAE, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum ACE, habens tertium latus CE, vtrolibet æqualium maius: Quod est propositum.*



h 15. quar.

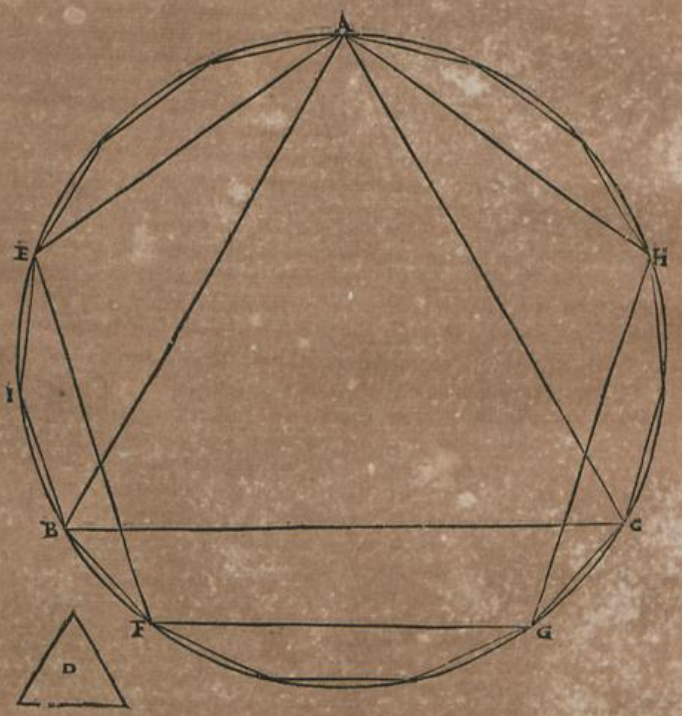
i 5. primi.

k 17. primi.

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvj.

In dato circulo, quinti decagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex corol. propos. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum; *a* inscribatur ei æquiangulum triangulum ABC. in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, ex coroll. propos. 6. li. 1. *b* eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circumferẽtia tota ABC, talium quinq; erit arcus AB, qui tertia pars est totius circumferẽtiæ. *c* Inscribatur rursus in dato circulo pẽtagonum æquilaterũ, & æquiangulum AEFGH, applicãs vnum angulorum ad punctũ A, *d* eruntq; quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus arcus EB, duas. Diuiso ergo arcu EB, bifariam in I, erit arcus BI, pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, subtendet decimamquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim, *f* æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterũ, quod *g* & æquiangulum est, cum cius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perspicuum est, In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.



a 2. quarti.

b 26. vel 28. tertii.

c 11. quart.

d 28 tert.

e 30. tertij.

f 1. quarti.

g 27. tertij.

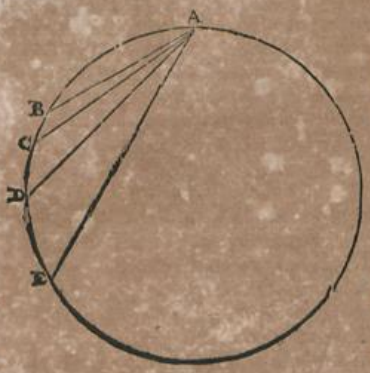
SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

SCHOLIVM.

EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, atque ars quædam, qua infinitæ propemodum figuræ in dato circulo inscribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quod ea sit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quod ea sit latus pentagoni, si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duob. lateribus

in circulo descripti, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris AE, 1 oc est, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id est, à 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoq; huiusce arcu BE, bifariam in L, erit subtensa recta LI, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscr. bendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.



INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio semper facto à puncto A. plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni vero AC, & quadrati AD, trianguli denique æquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera inclusus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumq; æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30. est tota circumferentia, talium 5. est arcus AB, sexta pars circumferentiæ; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.

PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumq; æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

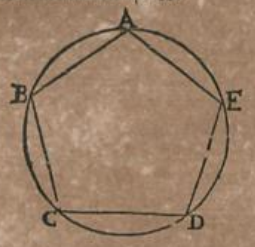
ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

ARCVS vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20 laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumq; æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inuestigantur fere infinitarum figurarum latera.

NON est autem prætercundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessario æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum; (si enim secundum occuparet, esset primo proximus, quod est contra hypothesin) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessario esse quoque æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

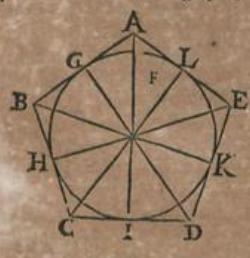


h 28. tertii

i 27. tertij.

SIT enim figura æquilatera quotcunque angulorum ABCDE, circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, sint æqualia, [h] erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca [i] anguli ABC, BCD, illis insistentes æquales erunt: Eodemque modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sunt; ac propterea figura ABCDE, æquiangula est. Siue angulorum numerus sit par, siue impar. Quod ostendendum erat.

SIT rursus figura æquilatera ABCDE, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, [k] erunt hæ ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll. 2. prop. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, æqualia. Cum ergo & bases FG, FL, ex centro sint æquales; [l] erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus BAE, diuisus erit bifariam. Non aliter ostendemus reliquos omnes angulos figuræ sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera AB, BF, duobus lateribus CB, BF, æqualia sunt, angulique illis contenti, ostensi æquales; [m] erunt quoque bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum ergo hi anguli sint semisses angulorum BAE, BCD, vt ostensum est, erunt toti anguli BAE, BCD, quoque æquales. Eadem ratione erit recta CF, rectæ EF, & angulus BCD, angulo DEA, æqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisq; angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, æqualis: hoc est, primus (constitui autem potest primus quicunque angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus positi, æquales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, vt secundus, quartus, sextus, octauus, decimus, &c. æquales inter se erunt;



k 18. tertij.

l 8. primi.

m 4. primi.

se erunt; cum quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis ostēsus est omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione secundo angulo æqualis, qui tertius est ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus aliis à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, decimo, &c. vsque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ propositæ inter se æquales erunt. Quod erat ostendendum.

HÆC demonstratio in figuris æquilateris circulo circumscriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim solum concludetur, primum angulum æqualem esse tertio, quinto, septimo, nono, & aliis loca imparia occupantibus; nunquam autem probabitur, primum vltimo esse æqualem, eo quod vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam solum ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum æqualem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & aliis loca paria occupantibus; nunquam autem ostendetur secundum angulum esse primo æqualem, propterea quod primus locum imparem occupat. Itaque soli anguli imparium locorum inter se, & soli quoque anguli locorum parium inter se semper conuincentur æquales.

QVOD si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus sit, fuerint inter se æquales, tum demum per superiorem demonstrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam si primus angulus æqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sicnt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum secundum,) cum ostensum sit, primum esse æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus, secundum vero omnibus parium locorum; erunt omnes inter se æquales. Si autem primus angulus æqualis sit alicui locum parem occupanti (quando enim duo anguli non proximi sunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundus primo proximus est) cum primus ostensus sit æqualis omnibus aliis locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & secundo angulo; erit quoque primus secundo æqualis: hoc est, duo proximi inter se æquales erunt. Quamobrem, vt proxime demonstrauimus, omnes anguli inter se erunt æquales.

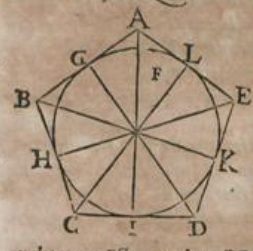
VERVM si dicat forsan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnem figuram æquilateram, cuius angulorum numerus sit par, circulo circumscriptam, esse quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium: ac proinde eam posse esse æquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; adeo vt nulla dari possit figura æquilatera circulo circumscripta, quin simul sit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis aliis asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, non esse æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in sex partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum propos. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inæqualiter in H, sitq; maius segmentum OH, & minus PH. Arcui quoq; OH, æquales sumantur OI, QK, QL, SM, SN, ita vt sex arcus æquales ad vtrasque partes trium semidiametrorum non proximarum, sed inter binas singulis relictis in medio, sumantur. Eruntq; ad vtrasque partes semidiametrorum relictarū sex reliqui arcus PH, PK, RL, RM, TN, TI, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad HA, perpendicularis BC, secans semidiametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Coibunt autem necessario rectæ HB, AB, propterea quod duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores sunt. Est enim BHA, rectus, & BAH, insistens arcui OH, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia sunt, [n] angulosque continent æquales æqualibus arcubus OH, OI, insistentes; [o] erunt quoque bases BH, BI, [n] 27. tertij. & anguli H, I, æquales. Cum ergo BHA, rectus sit ex constructione, erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget [o] 4. prim. in I, conuenietque cum semidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores: Est namque AIG, ostensus rectus, at GAI, recto minor est, ex scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum TI, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli GAI, duobus angulis H, A, trianguli CAH, æquales sunt; (Nam I, H, recti sunt, [p] & GAI, CAH, æquales sunt insistentes æqualibus arcubus TI, PH) latera quæ AI, AH, quibus adiacent, æqualia; [q] erunt quoque latera GI, GA, lateribus HC, [p] 27. tertij. [q] 26. prim. CA, æqualia. Cum ergo & BI, ipsi BH, ostensa sit æqualis; erit tota BG, toti BC, æqualis. Eadem ratione, ducta recta GN, tanget circulum in N, coibitq; cum semidiametro AF, producta in F, eritque ipsi GB, æqualis. Itē iuncta recta FM, circulum tanget in M, & cum semidiametro AR, producta conueniet in E, ipsiq; FG, æqualis erit. Similiter ducta recta EL, tanget circulum in L, & semidiametro AQ, protracta occurret in D, ipsique EF, fiet æqualis. Denique iuncta recta DK, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro AP, producta concurret in C, fietque ipsi DE, æqualis. Quod autem DK, in eodem puncto C, occurrat semidiametro AP, in quo recta BH, eidem occurrit, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta CK, circulum tangeret in K, vt demonstratum est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atque adeo inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, [r] Euclides demonstrauit. Est [r] 16. tertij. ergo hexagonum BCDEFG, circulo circumscriptum, æquilaterum. At idem esse non æquiangulum, ita demonstrabimus. Quoniam figura BCDEFG, æquilatera est, erunt quidem per ea, quæ paulo ante monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter se æquales; omnesque secti erunt bifariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli ABH, [s] tribus angulis trianguli ACH, æquales sunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis [s] 32. prim. duobus æquales: Est autem BAH, maior quam CAH, ex scholio propos. 27. lib. 3. quod & arcus OH, maior sit arcu PH. Igitur reliquus ABH, reliquo ACH, minor erit; qui cum semisses sint totorum angulorum B, C, vt ostensum est; erit totus quoq; CBG, toto BCD, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum BCDEFG, æquiangulum. Quod erat ostendendum.



EADEM omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & aliis figuris parium laterum, si circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

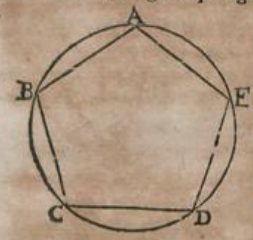
QVOD si figura æquilatera quotcunque angulorum circulo circumscribatur per doctrinam prop. 12. descripta nimirum prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figuræ inscriptæ angulis, &c. vt factum est in pentagono propos. 12. tum necessario figura illa erit simul æquiangula, vt ex demonstratione eiusdem propositionis liquido constat.

OBSERVATIONE quoque dignum est, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inscriptam necessario æquilateram quoque esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximum, quod est contra hypothesin) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari possit.



c 18. tertij. u 8. primi. x 26. prim.

SIT enim figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoq; necessario æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis FG, FH, FI, FK, FL, [c] quæ ad latera figuræ sunt per perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll. propos. 36. lib. 3. æquales sunt, erunt duo latera AG, AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, æqualia: Sunt autem & bases FG, FL, ex centro æquales. [u] igitur anguli quoque ad A, illis lateribus comprehẽsi æquales sunt, ideoq; angulus BAE, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figuræ bifariam sectos esse ac proinde cum toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, æquales erunt: Est autem latus FG, vni æqualium angulorum oppositum, cõmune. [x] Igitur latera quoq; AG, BG, æqualia erunt; atq; ideo latus AB, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidiæ æquales sunt, erunt quoque totæ lineæ AB, AE, æquales. Eademque ratione AB, BC, & BC, CD, & CD, DE, & DE, EA, æquales erunt. Quam ob rem figura ABCDE, æquilatera est. Sive numerus laterum sit par, sive impar. Quod erat demonstrandum.



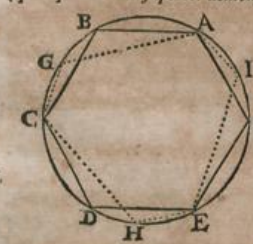
y 26. tertij. x 29. tertij.

SIT rursus figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum numero imparium circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquilateram. Quoniam enim anguli BAE, ABC, ponuntur æquales; [y] erunt arcus BCE, ADC, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo, æquales quoque erunt reliqui arcus BAE, ABC. Dempto ergo communi arcus AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus BG, arcui DE, æqualis erit; ac proinde [z] & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atque ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertium quodq; latus ei, à quo tertium est, vno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (constitui autem quoduis latus potest primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt: Eademque ratione omnia latera parium locorum, vt secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt, cum quartum sit a secundo tertium, & sextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus aliis a secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt, quod ostendendum erat.

HÆC etiam demonstratio in figuras æquiangulas parium laterum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & aliis loca imparia occupantibus; nunquam autem per eam demonstrabitur, primum vltimo esse æquale, propterea quod vltimum occupat locum parem, vt in quadriangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio conuincet tantum, latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & aliis loca paria possidentibus, at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eo quod primum in loco impari locetur. Itaq; sola latera imparium locorũ inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincẽtur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cum demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum vero omnibus parium locorum; perspicuum est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum quia secundum primo, proximum est) cum primum ostensum sit æquale omnibus aliis positis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & secundo lateri; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proxime demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint: contrarium tamen ex ea inferre non licet) demonstrabimus id Geometrice hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cum omnes eius anguli sint recti, sed non æquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde vero sit hexagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDEF, in circulo descriptum; sumaturque in arcu BC, quoduis punctum G, & arcui BG, in tertio arcu ab eo arcus æqualis DH; Item in quinto ab eo arcus æqualis FI, iungunturque rectæ AG, GC, CH, HE, EI, IA. Dico hexagonum AGCHEI, æquiangulum esse, at non æquilaterum. Quod enim sit æquiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, [a] æquales sunt in eodem segmento ABC. Eadem ratione æquales sunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus BG, DH, æquales sunt, per constructionem; addito communi GD, erunt toti arcus BCD, GCH, æquales. Igitur reliqui ex circulo arcus BFD, GFH,



a 21. tertij. b 27. tertij.

æquales erunt; [b] ac proinde anguli BCD, GCH, illis insistentes æquales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angulos

DEF

DEF, HEI & FAB, IAG, æquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni AGCHEI, sex angulis hexagoni ABCDEF, æquales sunt, singuli singulis: ideoq; cum hoc ponatur æquiangulum, erit quoq; illud æquiangulum. Quod autem non sit æquilaterum, ita probabimus. Latus AG, latere AB, maius est, & latus GC, latere BC, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera CH, EI, lateribus CD, EF, maiora sunt, & latera HE, IA, lateribus DE, FA, minora. Cum ergo latera AB, BC, CD, DE, EF, FA, æqualia ponantur, erunt AG, GC, CH, HE, EI, IA, inæqualia: quanquam AG, CH, EI, inter se, & GC, HE, IA, inter se, relicto semper vno in medio, æqualia sint, vt supra ostendimus.

Idem prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonum, & alia figura æquilatera, atq; æquiangula.

Quod si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & æquiangula, & æquilatera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

Porro qualemcunq; figuram æquilateram & æquiangulam in circulo monuerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoquo inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

Rursus inscripta figura quacunq; æquilatera & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoq; ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atq; adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

Cæterum omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt beneficio Isoscelium triangulorum, vt recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

Imparium enim laterum figuræ inscribentur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Isoscelis, cuius vterq; angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad verticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulum æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterq; angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad verticem; inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam, veluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Isosceles habens vtrumq; angulorum ad basin triplum eius, qui ad verticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quale est Hentagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterq; angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad verticem, si vterq; distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

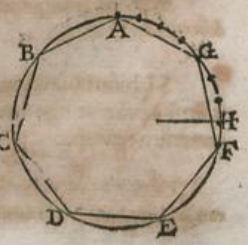
Diuisio autem hæc angulorum ad basin in partes æquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli æquales ordine, quot vnitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterq; angulorum æqualium habet ad reliquum, diuisus erit angulus in partes æquales. Verum descripto huiusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin, si basi accommodentur rectæ æquales in circulo. Basis enim semper est vnum figuræ latus, vt in Pentagono patuit.

Parium vero laterum figuræ in circulo inscribentur, beneficio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquilateri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterq; angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem, insistit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidiatam insuper eius partem; subtendent ipsi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum partium, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterq; angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem insistit sextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies; propterea quod quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius insuper partem. Ita quoq; Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis habentis vtrumq; angulorum ad basin triplum sesquilaterum anguli ad verticem.

Si igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula constituantur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad verticem sunt angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumq; angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figuræ omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribentur quoq; omnes figuræ parium laterum, post quadratum, atq; adeo circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim recte sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, desiderato de absoluta figurarum rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, vt Geometrice ostensum est à Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

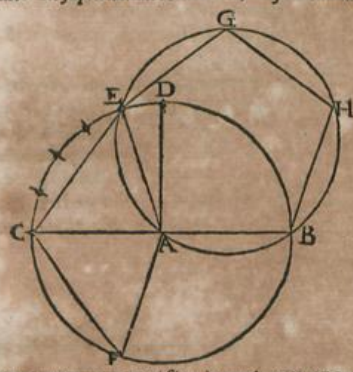
Nos tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo describantur: verum etiam arcus quiuis circuli distribuatur in quotcunq; partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Quæ res ad hunc vsq; idem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

Sed doceamus, si placet, qua etiam via figura quæuis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelib. quorũ anguli ad basin ad reliquũ habeant proportionem datã. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendũ heptagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Secetur eius quadrans AH, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosue figura inscribenda continet. Secabis aũt quadrãtẽ AH, in propositas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finẽ lib. 6. nos demõstraturos diximus, vel beneficio circini, dilatãdo eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorũ distãtiã partiri quadrãtẽ in partes optatas. Facilius n. quadrãs in quotuis æquales diuidetur partes, q̃ tota circũferẽtia, q̃sæpius attẽtãdo, & quasi repetẽdo opus, clarũ appareat in parua magnitudine, q̃ in magna. quatũ



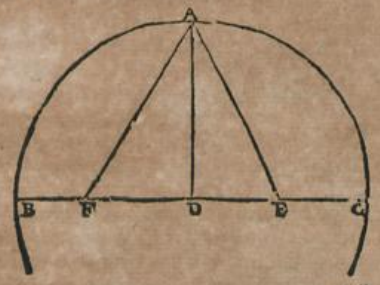
detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, si ea partem desideratam non offerat. Secto quadrante in septem partes æquales, vel in plures, si figura plurium laterum desideretur, erit recta linea AG, quæ quatuor eiusmodi partes subtendit, latus figuræ inscribendæ. Quoniam enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuisus est, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties vna pars in quadrante: quia quælibet pars cum alijs tribus, quarum singulæ in singulis alijs tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perspicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æque multiplicia, vt ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 15. (Liceat enim hic accommodare eam propos. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita se habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc est, arcus AG, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis est vna illarum, in quas quadrans diuisus est, talis erit arcus AG, totius circumferentiæ. Atq; ita si quadrans diuisus sit in 7. partes, continebuntur eiusmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$ hoc est, $\frac{1}{7}$ totius circumferentiæ. Ita quoq; si quadrans sectus sit in 11. partes, continebuntur eiusmodi partes 44. in tota circumferentia: atq; adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$ hoc est, $\frac{1}{11}$ totius circumferentiæ: & sic de cæteris. Itaq; si arcui AG, quatuor partium abscindantur arcus continuè æquales, eisdemq; arcubus rectæ subtendantur, inscripta erit circulo figura proposita, vt ex demonstratis liquet.

Iam vero si supra datam rectam lineam quæuis figura æquilatera, & æquiangula describenda sit, efficiemus id hac ratione. Sit supra datam rectam AB, constituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta BA, ad C, vt AC, ipsi AB, æqualis sit, describatur ex A, per C, arcus circuli; ductaq; AD, perpendicularis ad AC, vt quadrans sit CD, ex scholio propos. 27. lib. 3. diuidatur quadrans CD, in quinq; partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura construenda sit; quarum 4. sint CE, iungaturq; recta AE, quæ ipsi AB, æqualis erit. Dico angulum BAE, æqualem esse angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu CF, æquali arcui CE, iungantur rectæ CE, CF. Et quoniam CE, recta subtendens 4. partes quadrantis, latus est pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proxime demonstrauimus, in circulo ECF, describendi, erit CF, alterum latus; ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ECF. Quoniam vero, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duobus lateribus FC, CA, æqualia sunt, & bases item æquales AE, AF; [c] erunt anguli ECA, FCA, æquales. Cum ergo, [d] & anguli ACE, AEC, sint æquales; erit & ACF, ipsi AEC, æqualis: additoq; communi ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, æqualis erit. Est autem [e] externus BAE, eisdem internis ACE, AEC, æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter se æquales erunt. Cum ergo ECF, sit angulus pentagoni, erit quoq; BAE, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus describatur, & rectis AB, AE, [f] rectæ æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, describptum erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum describptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni BAE, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, singula autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt, ac proinde singulæ BH, HG, GE, singulas quoq; quintas partes subtendent, cum ipsis AB, AE, sumptæ sint æquales, propterea q; totum arcum BGE, continentem tres quintas partes absoluent. Eadem ratio est de alijs figuris æquilateris, & æquiangulis.



c 8. prim.
d 5. primi.
e 32. primi.
f 1. quarti.

Si forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ea in circulo aliquo describpta sit, siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere BAE, in extremo datæ lineæ AB. Si namq; posita recta AE, æquali ipsi AB, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt ante diximus.



Quoniam vero longa est, atq; difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademq; opera Ptolomæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus ABC, cuius centrum D; Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF. Itaq; si ducatur recta AF, erit AF, latus Pentagoni, & DF, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, vt ipse demonstrat. Cæterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Eu[clidis], non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.

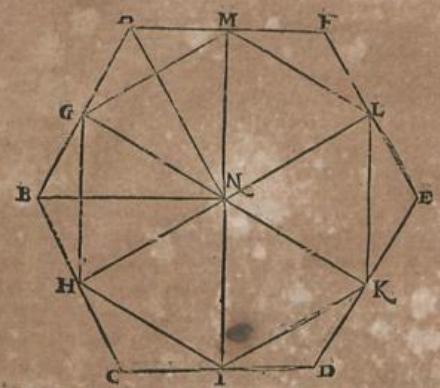
NON erit etiam præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus, videlicet.

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: vt idem sit centrum circuli, & figuræ.

SIT

Sit igitur figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, cuius latera bifariam secentur in G,H,I,K,L,M,iunctis rectis GH,HI,IK,KL,LM,MG. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ ABCDEF, æquilateram esse quoq;, atq; æquiangulam,idemq; centrum habere. Æquilatera quidem erit,quoniam eius latera cum subdant angulos æquales cõprehensos æqualibus rectis, vtpote dimidijs laterum æqualium,[g] æqualia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML,LMF,quam tres FLM,MLK,KLE,[h] duobus sunt rectis æquales: Sunt autem AMG,LMF,FLM, KLE,[i] inter se æquales,cum æqualibus lateribus contineantur,subtendanturq; à basibus æqualibus;Erunt reliqui anguliGML,MLK, æquales. Eodemq; argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoq; est figura GHIKLM.



g 4. prim.
h 13. primi.
i 8. prima.

Quod autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ ABCDEF, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ NG,NH,&c. iungantur q; rectæ NA,NB. Quoniam igitur AG,GN,latera trianguli AGN,æqualia sunt lateribus BG,GN,trianguli BGN; sunt q; bases AN, BN, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti,æquales: [k] Æquales erunt anguli AGN, BGN,ideoq; recti. Quare NG, perpendicularis est ad latus AB. Eodemq; modo reliquæ NH, NI,&c. perpendiculares erunt ad latera BC,CD,&c. Quæ cum ex defin. 4.lib.3. ostendant distantias rectarum AB, BC,&c. æqualium à centro N,[l] æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo NG,descriptus,per reliquos angulos H,I,K,L,M,incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ GHIKLM, hoc est, circuli circa eam figuram descripti. Quod est propositum.

k 8. primi.
l 14. tertij.

Neq; vero & hoc omittendum est,inter omnes figuras æquilateras,& æquiangulas,solum triangulum, quadratum,& hexagonum replere locum,hoc est,aliquot triangula,vel quadrata,vel hexagona,ita in plano posse inter se aptari, vt inter eorum angulos nihil sit vacui,sed planam superficiem constituant. Nam sex anguli in triangula æquilatero, & quatuor in quadrato;& tres in hexagono æquilatero,& æquiangulo, æquales sunt quatuor rectis,quantum nimirum est spatium circa punctum quodlibet in plano,vt ad propos.15.lib.1. ostendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$ vnius recti,quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti,hoc est,duos rectos,continebunt sex eiusmodi anguli $1\frac{1}{3}$ vnius recti,id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Demq; quia vnus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti,quod omnes sex contineant $\frac{24}{3}$. vnius recti,hoc est,8.rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $1\frac{1}{3}$ vnius recti,id est, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis æquilateris,& æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero, & æquiangulo æquales sunt $\frac{18}{5}$. vnius recti,hoc est,angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat,at quatuor æquales sunt $\frac{24}{5}$. vnius recti,id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$.propterea quod omnes quinq; æquiualent 6.rectis,hoc est,constituunt $1\frac{1}{5}$.vnius recti,atq; idcirco vnum continet $\frac{5}{5}$. vnius recti,&c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis:quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt,propterea quòd quatuor in plano optatorum quatuor anguli maiores sint quatuor rectis, cum æquales sint quatuor angulis rectis,& insuper quatuor quintis vnius recti,vt dictum est. Pari ratione neq; ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri,& æquianguli æquales sunt $\frac{15}{7}$ vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10.rectis sunt æquales,hoc est,complectuntur $\frac{70}{7}$.vnius recti; fit, vt vnus contineat $1\frac{3}{7}$. vnius recti,hoc est, vnum rectum,& præterea $\frac{3}{7}$ vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$ vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis,eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori neq; quatuor heptagona locum replebunt: neq; tria octogona æquilatera,& æquiangula, aut quatuor; neq; tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atq; æquiangulæ plurimum laterum, quàm octo, quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum quadratum & hexagonum æquilaterum atq; æquiangulum, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLI-

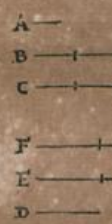
EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor minoris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout vna ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.



ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B, sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit a magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

Duplex autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita vt aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collocatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

Vt in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A, quoniam hæc vtramq; illam metitur. At vero neq; magnitudo E, neq; magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D, propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaq; pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas mensurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior vero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

Satis

Satis autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfectè metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

Cæterum quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquè multiplices. Quod idem dices, si plures minores æque metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam secũdum quantitatem, habitudo.

Quando duæ quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod vna maior est, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio seu (vt alijs placet) Proportio. Itaq; si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quod neq; linea, & superficies; neq; numerus, & linea sint eiusdem generis quantitatis. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est secundum quod vna est alba, & altera nigra; aut quod vna est calida, & altera frigida, &c. quamus ambæ sint eisdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non sit secundum quantitatem.

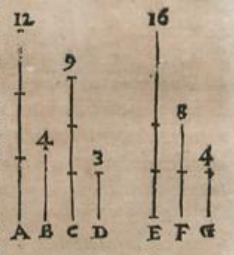
Quamquam autem in solis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoq; dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

Cæterum in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si è contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, consequens vero linea 6. palmorum, & sic inæteris.

IV.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

Quod hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisq; autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatẽ D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) à scriptoribus, præsertim Boëtio; & Iordano, describuntur; inter quas primũ semper locũ obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica atq; Musica, seu Harmonica, de quib. paulo post dicemus. Verũ Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidẽ duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G, vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ proportio A, ad B, ea est C, ad D, appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.



DE PROPORTIONIS DIVISIONIBVS.

OPERAE pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnã sint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumq; proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilib. proportionũ affectionibus percipi possit, instituemus paulo vberiorem tractationem in hac posteriori editione, quam in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici possent, in pleniorem nostram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentissime persequemur.

Proportio igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi, qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis vero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit, qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdẽ quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalẽ eam esse, quã habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalẽ vero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles. Dicũtur autem quantitates commensurabiles,

surabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam, seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusq; pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum, ita quoq; eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem cõtingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatã, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide, lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostendũtur, præter illas duas. Itaq; in numeris inuenitur sola proportio rationalis. At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum, & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, minus recte à quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis rectæ distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio è contrario est proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem: Posteriori vero in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, vt à nobis factum est. Ita enim membra diuidẽtia cum Diuiso (vtcum Dialecticis loquamur) in vtraq; diuisione reciprocantur. Scio recte posse subdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quam proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem, si in vtraq; diuisione subintelligatur Diuisum. Sed cur duplicem nostram diuisionem, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtrig; harum subdiuisionum prætulerim, supra exposui in responsione ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius subdiuidi nequit, cum quæcunq; quantitates æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeant proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis: Maioris inæqualitatis proportio est, quando maior quantitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis est, quando minor quantitas ad maiorẽ refertur, qualis est proportio 10. ad 20. Itẽ lineæ 6. pedũ ad lineã 8. pedũ, &c. Non est autẽ hæc diuisio inanis, & superuacanea, vt multi suspicantur. Neq; n. eadẽ est proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multũ inter se differunt, cũ valde diuersus sit vsus vtriusq;, vt perspicuum est iis, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla secluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinq; genera, vt in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientẽ, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientem. Horum autem quinq; generum priora tria sunt simplicia, posteriora vero duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur vero tantum sint quinq; hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, post explicationem omnium harum quinq; proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur, qualis est

proportio

proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorē bis tantū continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla, si centies, centupla, &c.

EX his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemq; modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quintupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorē continet quinquies. Itē proportio dupla lineæ 10. cubitorū ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inuestigatur: hoc est, numerus ille, & vnitas sunt primi, ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atq; numerus ille idem, atq; vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si vterq; duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionem multiplicem propositam: si vterq; idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propositæ: si vterq; quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæsitæ. Atq; ita si idem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quem numerus, qui vtrumq; terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes.

EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si idem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaq; si decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si vero millesima reperienda sit, multiplicandi erunt idem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusq; proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituantur duæ series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per seriem naturalem numerorum progrediatur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediatur q; per continuam additionem eiusdem numeri, primum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciei propositæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	75.	80. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16. &c.

Proportiones septuplæ.

7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84.	91.	98.	105. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15. &c.

Proportiones decuplæ.

10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90	100.	110.	120.	130.	140. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14. &c.

DE PROPORTIONE.

PROPORTIO superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & insuper vnitatem, quæ dimidiata pars est numeri 2. Ita quoq; linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c.

HAEC quoq; proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c.

VNDE ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

Inuenientur omnes proportiones superparticulares, siue omnes numeri, inter quos proportio superparticularis quæcunq; reperitur, hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expressam denominat. Ad eum enim numerus proxime maior, qui videlicet eum vna sola vnitate superat, habebit primam proportionem superparticularem propositam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, si duplicentur, triplicentur, vel per quemcunq; alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat.

Verbi causa, Si quærantur omnes proportiones sesquiseptimæ, quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum superans: atq; inter 8 & 7. prima proportio sesquiseptima existit. Qui duo termini si duplicentur, procreabuntur alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptima cernitur: si triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si deniq; centesima proportio eadem quæratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

Numeri quoq; omnes cuiusq; proportionis superparticularis comperientur, si constituantur duo ordines numerorum, quorum inferior a numero partem aliquotam denominante incipiat, superior vero a numero proxime maiore: vterq; vero per continuam additionem numeri, a quo initium sumit, primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic posuimus in proportionibus sesquialteris, sesquiseptimis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialteræ.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. 42. 45. &c.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. &c.

Proportiones sesquiseptimæ.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. 112. 120. &c.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. 105. &c.

Proportiones sesquidecimæ.

11. 22. 33. 44. 55. 66. 77. 88. 99. 110. 121. 132. 143. 154. &c.

10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90 100. 110. 120. 130. 140. &c.

DE PROPORTIONE
Superpartiente.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum quælibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. ipse autem ternarius ex illis compositus, non est pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superpartientes, cum tamen sint superparticulares, cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quanquam enim 10 contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum quælibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primum proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes vnam conficitur, proportio superbipartiens: si tres partes aliquotas, supertripartiens, si decem, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorē semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quod si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur superdecupartiens vndecimas. Quod si decem illæ partes sint decimætertiæ, vocabitur proportio superdecupartiens decimastertias, & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod a pleriſq; factum esse deprehendimus, diligenter considerandæ sunt ea, quæ sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunq; proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monstrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore supersint; alter vero, quotæ partes eæ sint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturq; syllaba illa (tri) quando dicitur, supertripartiens; posterior autem per vocem (octauas) expressius ostendit, illas tres partes aliquotas esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione superpartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, vt ex primo exemplo patet) eiusmodi esse debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem est omnium numerorum pars aliquota: hoc est, vt sint inter se primi. Numeros enim, qui præter vnitatem

nullam

nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter se, vt ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in superiori proportione supertripartiente octauas expressi. Nam sola vnitas, vt constat, est vtriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio posterior inter 22. & 16. supersextupartiens sextasdecimas, quamuis maior minorem contineat semel, & insuper sex vnitates, quarum quælibet decimasexta pars est minoris: Non, inquam, recte sic appellabitur, quia duo numeri 6. & 16. in ea expressi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$ ad $\frac{3}{8}$. atq; ita proportio ea dicenda est, supertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea notati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, seipsum, & bis repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{9}{6}$ reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{3}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cum maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atq; ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cum maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuiq; denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, propterea quod $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{8}$. constituunt $\frac{1}{4}$. & $\frac{2}{32}$. efficiunt $\frac{1}{16}$. denique $\frac{2}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$, confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturq; ab Euclide, ad initium libri 7.

Inuentio omnium proportionum superpartientium cuiuslibet speciei sic se habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt supra dictum est. VERBI gratia, si inquirendi sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri, 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione supertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum secundam proportionem constituunt, sunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centesima autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.

Eosdem numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore; superior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: vterq; deinde ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros conflatos, vt supra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum superbipartientium quintas superoctupartientium nonas, & superseptupartientium decimas.

Proportiones superbipartientes quintas.
7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. &c.
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70 &c.
Proportiones superoctupartientes nonas.
17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.
9. 18. 27. 36. 45. 54. 63. 72. 81. 90. 99 &c.
Proportiones superseptupartientes decimas.
17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.
10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100. 110. &c.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI SVPERPARTICVLARI.

PROPORTIO multiplex superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quãdo maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio 9. ad 4. Continẽt enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris, (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt recte proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem, triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & præterea dimidiatam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

Reperiemus verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoq; numero adijciamus vnitatem, habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum est. EXEMPLI gratia, si inueniendi sint omnes numeri proportionis sextuplæ sesquinonæ, ducemus 9. denominatorẽ partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus namq; numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expressæ habet primam proportionem sextuplam sesquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proportione. Tripli vero 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.

Eadem proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, superior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatorem proportionis multiplicis expressæ: Vterq; vero ordo per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ sesquiseptimæ, & decuplæ sesquitertiæ.

Proportiones duplæ sesquialteræ.												
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65. 70 &c.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20	22.	24.	26. 28. &c.
Proportiones triplæ sesquiseptimæ.												
22.	44.	66.	88.	110.	132.	154.	176.	198.	220.	242.	&c.	
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	&c.	
Proportiones decuplæ sesquitertiæ.												
31.	62.	93.	124.	155.	186.	217.	248.	279.	310.	341.	&c.	
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.	33.	&c.	

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI SVPERPARTIENTE.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas sextas, quia duæ sextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla sesquitertia.

Distribuitur autem hæc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam superpartientem: triplam superpartientem, &c.

Deinde quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens, tripla supertripartiens, &c.

Postremo quæuis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas, in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

Omnes proportiones multiplices superpartientes postremæ diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoq; numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atq; hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunq; numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes vndecimas, ducemus 11. denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroq; procreato 44. adijciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

Quod si duo numerorum ordines constituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem primum ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior vero incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoq; omnes numeros oblatæ proportionis, vt in superioribus quoq; diximus. Exempla hic vides in proportione dupla superbipartiente tertias, dupla superquintupartiente sextas, & quintupla supertripartiente quintas.

Propor-

Proportiones duplæ superbipartientes tertias.
8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. &c.
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. &c.
Proportiones duplæ superquintupartientes sextas.
17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.
6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. 66. &c.
Proportiones quintuplæ supertripartientes quintas.
28. 56. 84. 112. 140. 168. 196. 224. 252. 280. 308. &c.
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. &c.

DE PROPORTIONIBVS RATIONALIBVS MINORIS INAEQVALITATIS.

OMNIA, quæ dicta hactenus sunt de quinq. generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda sunt quoq. de quinq. generibus correspondentibus minoris inæqualitatis, præmissa tamen semper præpositione (sub) vt dictum est. Nam si in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. est centupla, ita proportio 1. ad 100. est subcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. est subtripla superbipartiens tertias; Atq. ita de cæteris.

Non videtur autem hoc loco prætermittenda insignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. nostræ Arithmeticæ construximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiusmodi est. Constructa tabula Pythagorica, (Est autem constructio facillima, cum numeri in sinistro latere constituant seriem numerorũ naturalem, in infinitum q. progredi possint; quælibet autem linea in transuersum procreetur ex continua additione numeri in sinistro latere, à quo incipit, ad seipsam, & ad numerum constatum, & sic in infinitum: ita vt hæ lineæ in transuersum nil aliud sint, quàm progressiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ sint primi numeri earundem linearum) primum omnes numeri cuiusuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in suprema linea acceptus ad vnitatem in sinistro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub vnitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiusdem speciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9. supremæ lineæ ad 1. in sinistro latere; secunda inter 18. sub 9. ad 2. sub 1. tertia inter 27. eiusdem lineæ à 9. descendentis, & 3. in sinistro latere, &c. atq. ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum est.

Deinde omnes numeri cuiusuis proportionis superparticularis sic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proxime insequens numerus primam proportionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctaua erit 9. ad 8. aliæ vero ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

Tertio sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Posit denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ ordine, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis vndecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partiũ, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem vndecimas. Secundum habebit numerus 38. ad 22. tertiam 57. ad 33. & alias aly numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descripti.

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308

Quarto numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere

accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expresse habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proxime insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positi. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sunt omnes numeri proportionis triplæ sesquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in sinistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16. proxime insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5. habet primam proportionem triplam sesquiquintam. Alias proportiones eiusdem speciei reperies in numeris, qui sub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum est.

Quinto, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis superpartientis hoc modo. In latere supremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propositam: qui quidem inuenietur quoq; in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde posi acceptum numerum multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum sit mentio. Vltimus namq; ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem superpartientem. Alias proportiones eiusdem speciei reperies sub illa prima, vt de alijs diximus. Vt si cupiat quis omnes proportiones quadruplas supertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium, qui est 5. Inueniet autem eum numerum esse 20. quippe in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui est 4. & denominatoris partium quintarum, qui est 5. descriptus sit. Deinde posi numerum hunc 20. inuentum numeret in supremo latere tres hos numeros 21. 22. 23. quod tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc est, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam supertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiusdem speciei continentur sub duobus illis numeris, vt in alijs traditum est.

Inuentis hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, si minores cum maioribus conferantur, inuenti quoq; erunt omnes numeri eiusdem proportionis minoris inæqualitatis.

Neq; vero silentio transiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ sic se habet. Inuentis minimis, siue primis terminis, numeri sue cuiuslibet proportionis, si constituatur progressio, seu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor sit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediensq; per ipsammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius progressionis tot numeri in serie naturali numerorum, quot vnitates sunt in primo termino constitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter secundos vero, qui primorum dupli sunt, tot, quot in secundo termino eiusdem progressionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiusdem progressionis continentur: atq; ita deinceps. Exempli gratia, si proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri sunt 2. & 1. constituetur progressio incipiens ab 0. (quod differentia inter 2. & 1. sit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progrediensq; per continuam additionem vnitatis, nimirum differentiæ inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaq; inter primos numeros duplæ proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus: Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet vnus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula apparet, vbi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, vt primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum seriei naturalis inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmeticæ.



QVOD si superiori proportionalitati Arithmeticæ superponas seriem naturalem numerorum, quæ ab 1. incipiat, ita vt singuli eius termini singulis terminis constitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri n. seriei huius naturalis indicabunt, quæ

quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, respondentes vero numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.

Ordo proportion. duplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo mediorum numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 12. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. numerus vna vnitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturq; per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprascripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui supra fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17 inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij, & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2.

RVRSVS detur proportio quacunq; superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inseruient hic eædem progressiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.

Ordo propor. sesquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

			9	8			
		18	17	16			
	27	26	25	24			
36	35	34	33	32			
45	44	43	42	41	40		
54	53	52	51	50	49	48	
63	62	61	60	59	58	57	56

OFFERATVR quoq; proportio superquadripartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. & 7. Differentia eorum est 4. Progressio ergo Arithmetica incipiet à 3. progredieturq; per 4. vt hic patet, vna cum serie naturali.

Ordo propor. superquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

Igitur inter primos numeros proportionis superquadripartientis septimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter secundos: Et 23. inter sextos, atque ita de cæteris, vt hic vides.

11. 10. 9. 8. 7.

22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14.

33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21.

44. 43. 42. 41. 40. 39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28.

ITEM data sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. & 6. Differentia eorum est 7. Incipiet ergo progressio à 9. habebitque differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, vna cum serie naturali numerorum.

Ordo propor. dup. sesquisex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

Inter primos ergo numeros proportionis duplæ sesquisextæ cadent 6. medij numeri, inter secundos, 13. & inter octauos, 55. &c. veluti hic cernitur.

13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18.

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium à 4. habebuntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, vna cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarum superbip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter secundos, 9 & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.

8. 7. 6. 5. 4. 3.

16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9.

32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cum ijdem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex iis, quæ de quinque speciebus proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis diximus, perspicue colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinquæ iam exposita. Cum enim, vt Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunquæ, inter quas, vt diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum: fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis: Aut semel dunt axat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque vero alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri potest. Eadem ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis. Recte ergo proportionem rationalem tum maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ exposuimus, partiti sumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIVM DENOminatoribus.

QVONIAM vero non exiguus est vsus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibusnam numeris singulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distincte, & aperte habitudinem vnius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ est $1\frac{1}{5}$ quoniam iste numerus significat, maiorē quantitatem proportionis, sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, vt arbitror, quod Euclides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius, quia denominator, vt diximus, ostendit, quanta sit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propositis exemplis constat.

EX ijs autem, quæ diximus, facile colligi potest denominator cuiusque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunque ea sit, est numerus integer tot continens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. Millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denominatæ. Vt denominator proportionis subduplæ, est $\frac{1}{2}$. subquintuplæ, $\frac{1}{5}$. subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$. subcentuplæ, $\frac{1}{100}$. submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo, denominatores aliarum proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neque vero vlla difficultas est in cuiusq; proportionis multiplicis vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea, quæ dicta sunt, recte intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestum est.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator est $1\frac{1}{2}$. sesquioctauæ, $1\frac{1}{8}$. sesquimillesimæ, $1\frac{1}{1000}$. &c. Neque difficile erit denominatorem cuiusque proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportionis prolatio denominatorem exprimat per suam partem aliquotam vt ex datis exemplis perspicuum est. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est $\frac{2}{3}$. subsesquioctauæ, $\frac{8}{9}$. subsesquimillesimæ, $\frac{1000}{1001}$. &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ in proportione expressæ,

& pro-

& pro eiusdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis subsesquidecimæ est $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiusuis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorem correspondentis proportionis superparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator superabit hic semper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator est partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam si huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator: & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propositæ proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsesquiseptima: quoniam denominator proportionis sesquiseptimæ, quæ illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hãc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior est, quam denominator partis aliquotæ. Quare si eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis sesquiseptimæ esse $\frac{7}{8}$. Facilius deniq; cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habentes proportionem superparticularem respondentem, vt supra docuimus. Nam fractio, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator vero, maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniam primi, siue minimi numeri habẽtes proportionem sesquiseptimam sunt 8. & 7. si ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis sesquiseptimæ propositæ, vt prius.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superpartientis est vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis superpartientis septimas, est $1\frac{1}{7}$, supertripartientis vigesimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neq; vlla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod prolatio ipsa proportionis denominatorẽ proprium exhibet, vt ex superioribus exemplis liquido constat. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores sunt, quam earundẽ fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$. subsupertripartientis vigesimas: $\frac{20}{21}$. &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui si addatur numerus earũdem partium, habebitur eiusdem fractionis denominator proportionis subsuperquadripartientis vndecimas, est $\frac{11}{15}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiusdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusq; superpartientis correspondentis ad vnam fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidẽ numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot vnitatibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propositæ proportionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{11}{13}$. quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{2}{13}$. qui ad hanc fractionem $\frac{24}{13}$. reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{13}{24}$. Deniq; facilius cuiusuis proportionis subsuperpartientis denominator inuenietur fortassis, si reperiantur primi, vel minimi numeri habentes proportionem superpartientem correspondentem, vt supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator autem, maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartientis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem superquadrupartientem nonas sunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis est numerus integer multiplicem proportionem expressam denominans, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$. &c. Vt nullus omnino labor sit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis, quippe cum ipsa prolatio proportionis distincte exprimat & denominatorẽ multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla proposita declarant. Denominatores autẽ proportionũ sub multiplicium superparticulariũ, sunt fractiones, quarũ numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Vt denominator proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, est $\frac{7}{24}$. subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{9}{46}$. &c. Inuenietur autẽ denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, qui si multiplicetur per denominatorẽ proportionis multiplicis, addaturq; vnitas numero productο, habebitur denominator eiusdẽ fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{9}{25}$. cũ

huius

huius fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isque ductus sit in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiusdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum submultiplicium superparticularium inuenientur, si denominator cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis respondentis reuocetur ad vnam fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id est, numeratorem eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutent ordinem inter se, fiet denominator proportionis propositæ. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisexta: quoniam denominator correspondentis proportionis quadruplæ sesquisextæ est $4\frac{1}{6}$. ducemus 4. id est, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc est in denominatorem fractionis adhærentis, numeroque producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiusdem fractionis, vt totum denominatorem $4\frac{1}{6}$ reuocemus ad hanc fractionem $\frac{25}{6}$. Cuius termini si inter se ordinem permutent, fiet hæc fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis subquadruplæ sesquisextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortasse denominatorem cuiusque proportionis submultiplicis superparticularis inuenies, si duos primos, minimosue numeros proportionis multiplicis superparticularis correspondentis reperias, vt supra traditum est. Nam fractio, cuius numerator sit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propositæ. Vt si offeratur proportio subtripla sesquiseptima: quoniam primi, siue minimi numeri proportionis triplæ sesquiseptimæ sunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc $\frac{7}{22}$. pro denominatore proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, atq; ita de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expressam, cum illis partibus aliquotis, non constituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est $3\frac{5}{8}$. quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quod aperte, & distincte in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contentæ, quam partes aliquotæ, vt perspicue in exemplis prolatis apparet. Denominatores vero proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{25}$. subquadruplæ superbipartientis quintas, $\frac{5}{12}$. &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroq; producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est $\frac{13}{34}$. quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertias decimas: qui si ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, producto; numero 26. adiyciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiusdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoq; cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis sic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis superpartientis, quæ propositæ respondet, ad vnã fractionẽ, vt in Arithmetica præcepimus, nimirũ multipileando denominatorẽ multiplicis proportionis per denominatorẽ fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorẽ eiusdem fractionis Nã huius fractionis termini, si inter se permutent ordinẽ, dabunt fractionẽ, quæ denominator erit proportionis submultiplicis superpartientis. Veluti si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas, reducemus denominatorem correspondentis proportionis quintuplæ supertripartientis decimas, hoc est. $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. producto; numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. supponendus est. Nam si hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis subquintuplæ supertripartientis decimas, $\frac{1}{53}$. &c. Sed forsitan facilius denomtnatorem cuiusuis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisq; fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositæ. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla supertripartiente decimas sunt 53. & 10. constituetur ex eis denominator proportionis propositæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. & sic de cæteris.

DENOMINATOR deniq; proportionis æqualitatis perpetuo est vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil præterea, quod quidem vnitas significat.

EX his, quæ de proportionum denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re, & nomine ipsas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantum, non autem & verbo, siue nomine, denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquido constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ superquadrupartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. hoc est, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum distincte, apertẽq; nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At vero denominator correspondentis proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{31}$. id est, nouem trigesimæprimæ partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cum vere significet, minorem quantitatẽ in ea esse maioris

nouem

nouem partes trigesimas primas, quod omnino necessarium est, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem subtriplam super quadrupartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{31}$ hoc est: nouem partes trigesimas primas cum nomine proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.

QVARE si denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expressus sit, videlicet per fractionem, vt dictum est; vt scias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præposita tantum syllaba, sub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Vt si detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius propartio suboctupla. Quando enim numerator fractionis est vnitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdem fractionis denominatore denominata. Quod si datus denominator sit $\frac{12}{327}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorem, sit Quotiens $16\frac{7}{80}$. Denominator igitur fractionis $\frac{12}{327}$. ad numeratorem habet proportionem sedecuplam superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio, cuius denominator est $\frac{12}{327}$. dicenda est subsedecuplæ superseptupartiens vigesimas, & sic de cæteris.

QVIA vero non semper commode omnes proportiones propriis nominibus appellari possunt, (quis enim proportionem, v.g. 37. ad 1. commode dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commode proportionem 48. ad 29. dixerit supernouemdecupartientem vigesimas nonas? &c.) solent Geometræ plerumq; in suis scriptis exprimere proportionem quamcunq; per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplã. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quam subtredecuplam. Ita quoq; proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ alias diceretur supertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, quæ est 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur subsupertripartiens decimas, & sic de aliis.

QVANQVAM autem proportio qualibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: perneccessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen plane, quænam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifeste declarat, maiorẽ numerum continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atq; hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quod si quando minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facile possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quoslibet duos numeros, siue minimi ij sint, siue non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunq; per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam cuius denominator est $1\frac{5}{19}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimas nonas, sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{12}{24}$. atque ita de reliquis; quoniam videlicet denominator clarissime demonstrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum est.

DENOMINATOR porro proportionis inter duos quoslibet numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 13. Quotientem videlicet numerum diuisionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quod si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hæc $\frac{3}{39}$. vel $\frac{30}{390}$. Nam quando minor numerus per maiorem diuiditur Quotiens semper est fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtraque fractio, si eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hanc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse $\frac{1}{13}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator siue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc est, in minimis numeris $\frac{10}{13}$. Præterea proportio 100. ad 20. denominatorẽ habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis vero 20 ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quod diuisis 20. per 100. Quotiens est $\frac{1}{100}$. id est, in minimis numeris $\frac{1}{5}$. Deinde denominator proportionis 48. ad 10. erit $4\frac{8}{10}$. quod diuisis 48. per 10. Quotiens sit $4\frac{8}{10}$. hoc est in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id est, in minimis numeris $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadripartientem quintas (quod diuisis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$. appellabitur proportio 10. ad 48. subquadruplasuperquadripartiens quintas. Vt enim vtrique proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt supra diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum est, eoque reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est $2\frac{108}{120}$. si reducatur ad hanc vnam fractionem, $\frac{348}{120}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoque numero 20. eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est $\frac{8}{11}$. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7. & 1. Vicissim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator est $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque, si quærantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inuiendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum est, isque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæsiti. Vt si quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiso antecedente per consequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{40}{90}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{4}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de cæteris.

IAM

IAM vero si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtra earum maior sit, vel minor, dices eam maiorem esse, cuius denominator maior est, minorem vero eam, cuius denominator est minor. Quod si denominatores sint æquales, proportiones quoque æquales esse pronunciabis. Vt si proponantur duæ hæ proportiones, superoctupartiens decimasquintas, & superdecupartiens decimas septimas, quarum denominatores sunt $1\frac{8}{15}$ & $1\frac{10}{17}$. dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vero arte cognoscas, vtra duarum fractionum maior sit, vel minor, an vero æquales sint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, si offerantur duæ proportiones, quarum denominatores sint $10\frac{1}{1000}$. $9.\frac{100}{107}$ dicemus priorem esse maiorẽ. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor sit fractione $\frac{100}{107}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior est. Sic si dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior est huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeru, dignoscemus facile, vtra earum sit maior, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior est: Et si duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter se æquales erunt. Vt si proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem esse, quia illius antecedens 17. in huius consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in consequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rursus si dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72 quam ex antecedente posterioris 108. in consequentẽ prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsæ æquales inter se erunt. Ratio huiusce operationis est: quia hac ratione propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tam extremi duo, quam duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur si procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat maiorem numerum, quam secundus in tertium, maiorem esse primum, quam vt eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor esse deberet, vt eundem numerum posset producere ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, sive ij primi sint, sive non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum assumptum, vel diuidemus, per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui diuisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam. Verbi gratia, si sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoque si inueniendi sint duo numeri in proportione dupla sesquitertia, cuius denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{3}$. Item si numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuisus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam sesquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, si quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in proportione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, assumi potest quilibet numerus. Vt si desiderentur duo numeri proportionis triplæ superbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis est 18. vel 27. 36. 45 &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145, qui ad assumptum numerum 45. proportionem habet datam. Sic etiam si cupiat quis proportionem subquadruplam, cuius denominator est $\frac{1}{4}$. sumendus erit numerus à 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$ producet 3. numerum integrum, qui ad assumptum 12. habet proportionem subquadruplam. Si vero per diuisionem agendum sit, & fractiones vitandæ, sumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In aliis autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numerusque sumendus à numeratore numeratus. Vt si quæratur proportio quintupla, sumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuisus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem desideretur proportio, cuius denominator sit $4\frac{3}{4}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{19}{4}$. sumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiso per $\frac{19}{4}$. fit Quotiens 14. ad quem acceptus numerus 62. habet proportionem à $4\frac{3}{4}$. denominatam, nimirum quadruplam supertripartientem septimas. Cæterum si duo numeri proponantur, cupiatque quis alios duos in eadem proportione reperire satis erit, si vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propositi duo numeri. Item si proposito quouis numero, inueniendus sit alius, qui ad eum proportionem habeat datam, vel ad quem is datam habeat proportionem, assequeris primum, si propositum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at secundum obtinebis, si eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quod si proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quispiam numerus; si quidem inueniendus sit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad secundum: si quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus est, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certe, siue denominator cognitus sit, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per secundum datum, hoc est, per consequentem terminum datæ proportionis. productusque numerus per primum, siue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt si dentur duo numeri 47. quorum proportionis denominator est $\frac{5}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{5}{7}$. produceturque quartus numerus quæsitus, 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per secundum 7. & productum numerũ 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si vero inueniendus sit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri, si quidem denominator notus est, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel siue notus sit denominator, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per secundum, id est, per consequentem terminum, diuidendus. Vt datis eisdem duobus numeris 47. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{5}{7}$. denominatorem, gigneturque quæsitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumque productum 80. partire per secundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA vero diximus, eam proportionem esse maiorem; cuius denominator maior est, sit, vt in proportionibus multiplicib. detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores

portionum multiplicium est minimus, maximus autem dari nō potest, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones superparticulares reperiri maximam, nimirum sesquialteram, denominata à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum proportionum superparticularium maximus est, minimus autem dari non potest, num denominatores fractionū progredi possint in infinitum. Constat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionē, cuius denominator maior est, minorē esse, si idem sit numerator; fractionē autē, cuius denominator minor est, si idē sit numerator, maiorem esse. Cum ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denig, in aliis proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de vltimis speciebus. Nam si de vltimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima; superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares, maxima, erit multiplex sesquialtera; minima vero, dupla superparticularis. Inter multiplices denig, superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertias; minima vero, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, vt subsesquialtera, non autem maxima: In aliis denig, proportionibus minoris inæqualitatis neq, maxima, neq, minima dari potest. Quæ omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc esse connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt qualibet proportio maioris inæqualitatis maior sit proportione æqualitatis, qualibet vero proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quod quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantumuis minimus, maior est vnitate, qua denominator est proportionis æqualitatis, cum ille minor esse nequeat, quam vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis semper minor est, quam vnitas, cum sit fractio, cuius numerator à denominatore superatur vt ex iis, quæ supra diximus, patet. Itag proportio æqualitatis media est inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduersione dignum est, Proportionem maioris inæqualitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario vero proportionem minoris inæqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici proposita datur minor, ac minor, vsque ad duplam, quæ omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quæcunque, in qua cum minima non possit dari, omnisg, proportio eiusmodi maior sit proportione æqualitatis, liquido constat, proportionem maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non posse peruenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inæqualitatis minor sit proportione æqualitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inæqualitatis attingere non posse proportionem æqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed vt vtrumg exemplo etiam discātur, sciendum est, si inter duos numeros quosuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet vno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorem diuisam esse in duas minores, quarum vna est maioris numeri ad medium interpositum, altera vero numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuisam esse in duas maiores, quarum vna est minoris numeri ad medium interpositum, altera vero medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. quæ dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquitertiam 4. ad 3. quarum vtraque minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. quæ subdupla est, diuisa erit in subsesquitertiam 3. ad 4. & subsesquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquinta, quam proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero tam proportio superbipartiens tertias 3. ad 5 quam subsesquiquinta 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari possunt. Verum vtrumg demonstrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum, maiorem proportionem, quam idem maior ad medium, & quam medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad maiorem, vt manifestum est vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicauimus, vel ex propos. 8. huius lib. 5. vbi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inæqualibus maior is ad tertiam aliquam esse maiorem proportionem, quam minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad maiorem habere minorem proportionem, quam ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse proportionem eiusdem numeri 6. ad minorem 3. quam ad medium 4. maiorem: Item maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quam minoris 4. ad eundem 3. Contra vero, maiorem esse proportionem eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quam ad maiorem 6. Item maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quam minoris 3. ad eundem 6. Eadem g in cæteris ratio est. His positis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. diuisa hic, 8. 7. 6. quam proportio 6. ad 4. quæ eadem est, quæ 3. ad 2. hic 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem est, quæ 8. ad 7. diuisa hic, 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. quæ eadem est, quæ 7. ad 6. hic 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. quæ eadem est, quæ 6. ad 5. hic, 17. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atg ita fieri potest in infinitum. E contrario vero proportio subsesquialtera 4. ad 6. diuisa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem est, quæ 4. ad 5. diuisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. quæ eadem est, quæ 5. ad 6. hic 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem est, quæ 8. ad 9. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem est, quæ 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem est, quæ 10. ad 11. hic. 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem est, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atg huius incrementi nunquam erit finis. Idemg experiri licebit in quibusuis aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuisa hic est, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio subsuperseptupartiens vndecimas 11. ad 18. diuisa hic, 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: sed præcipuæ proportionalitates, quas autores nominati Medietates vocant, sunt hæ tres, Arithmetica, Geometrica, & Musica, siue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, siue Medietas, est, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet suum antecedentem ternario superat, dicuntur constituere proportionalitatem Arithmeticam. Est autem duplex, continua, & discreta. Continua est, quando in progressione numerorum nulla sit interruptio, sed quilibet cum proxime antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Discreta autem est, quando in numerorum progressione interruptio fit, ita vt bini tantum inter se conferantur, non autem quilibet cum proxime præcedente, vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia est inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas, siue Medietas est, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim proprie proportionalitas dicitur, siue Analogia: aliæ vero improprie, cum non sit eadem semper inter earũ terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos, interijciuntur. Vt hi numeri, 2. 6. 18. 54. quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proportionem triplam, constituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoq; est, continua, & discreta. vt in 4. defi. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, discreta autem in hisce sex, 2. 3. 12. 18. 20. 30. Nam bini tantum 2. 3. & 12. 18. & 20. 30. eandem habent proportionem sesquialteram, non autem quilibet ad proxime præcedentem

MVSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos sit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3. 4. 6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id est, ad 1. (cum vtrobiq; proportio sit dupla.) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Musicam, siue Harmonicam: Ipsi vero neq; eandem habent differentiam, neq; eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri 42. 12. 7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobiq; proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerumq; eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ diapente dicitur, siue Quinta. item inter 4. & 3. est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denig; inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quæ Diapason consonantiam, siue octauam constituit. Atq; eodem modo implerisq; aliis idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM PROPORTIONALITATVM, siue, Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quam medij ad minimum. Vt hic patet. 2. 4. 6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musicæ, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic vides. 3. 4. 6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denig; numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem est proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, apparetq; in hisce tribus numeris 3. 6. 12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad 3. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atq; Harmonicam, cum in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quam inter minores; Contra vero in Harmonica inter maiores numeros maior, quam inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum est.

II.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones vero eorundem inæquales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones vero eorundem æquales.

HARMONICA denique neque differentias, neque proportiones terminorum æquales habet: Patet hoc ex superioribus exemplis.

III.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoq; vnitatibus, quæ constituunt eiusdem medij $\frac{4}{7}$. Item hi 15. 20. 25. medius 20. superat minorem 15. quinq; vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinq; vnitatibus, quæ constituunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic 4. 6. 9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{2}$. medij superaturq; à maiore 9. ternario, qui quoq; est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoq; $\frac{2}{5}$. ipsius maioris 25.

IN

IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3. 4. 6. medius 4. superat minorem 3. vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superatur q3 à maiore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris $\frac{5}{7}$. quoq3 ipsius maioris 42.

IIII.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3. 7. 11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quam Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4. 6. 9. & 3. 4. 6. tam summa 13. extremorum 4. 9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate; qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorum, quam summa 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentiam maiorum, nimirum, 2. superat differentiam minorum, quæ est 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9. 25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differentiam minorum, 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3. 7. 11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis est, vt hic, 4. 6. 9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 42. 12. 7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe in Arithmetica minus producatur ex primo in tertiam, quam ex medio in se, in Harmonica vero plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3. 7. 11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum. 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, num. 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorum in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3. 4. 6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continue proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmetice, cum eundem habeant excessum 3. vides 6. 8. 12. Harmonice proportionales esse, cum eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6. 8. 12. proportionales Harmonice, vt diximus, vides 6. 9. 12. Arithmetice esse proportionales, cum eundem excessum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometrice non continue proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmetice inter extremos 4. 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonice; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continue proportionalibus siue Arithmetice, siue Geometrice, siue Harmonice, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica quando tres primi sunt Harmonice proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quam paribus, atq3 etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo æqualis multitudo numerorum inter quos sui impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Præterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atq3 ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES ARITHMETICÆ.

	3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.	31.	35.	39.	43.	47.	51.	55.	59.
	3.		11.		19.		27.		35.		43.		51.		59.
		7.		15.		23.		31.		39.		47.		55.	
	3.			15.			27.			39.			51.		
		7.			19.			31.			43.			55.	
	3.				19.				35.				51.		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960
5		20		80		320		1280		5120		20480	
	10		40		160		640		2560		10240		40960
5			40			320			2560			20480	
	10			80			640			5120			40960
5	10			80				1280				20480	

Proportionalitates Harmonicæ.

	252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520	
	252		315		420		630		1260		
		280		360		504		840		2520	
	252			360			630			2520	
		280			420			840			
	252				420				1260		

IX.

QVOTQVOT numeri proportionalibus datis sive in Arithmetica proportionalitate, sive Geometrica, aut Harmonica. si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur, aut diuidantur, habebunt quoq; producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item diuisos per 4.

Arithmetica proportional.			*Geometrica proportional.*			*Harmonica proportional.*		
20	28	36	20	40	80	60	84	140
Producti			*Producti*			*Producti*		
80	112	144	80	160	320	240	336	560
Quotientes			*Quotientes*			*Quotientes*		
5	7	9	5	10	20	15	21	35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem speciem proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientum vero differentia ad differentiam numerorum diuisorum habet proportionem submultiplicem à diuisore denominatam, præposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. est 8. at inter 5. & 7. est 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atq; inter Quotientes, numerosq; diuisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas esse differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At vero differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. esse earundem differentiarum subquadruplas.

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunq;, si eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroq; dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atq; ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam vltimo inuento semper adjicias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia est 7. constituetur hæc proportionalitas Arithmetica, quæ extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate: vtroq; minorem. Et si differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate. Atq; ita deinceps inuentes alios minores, si differentiam ab vltimo inuento semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis numeris 30. 34. quorum differentia est 4. constituetur hæc proportionalitas Arithmetica vsq; ad 2. qua vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius subtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroque dato maior. A quo duplicato si proxime præcedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. si à 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoque demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, vt hic apparet. 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius numerus vtroque minor. Et si ex huius duplo proxime præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, idest, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi non potest, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides. 27. 20. 13. 6.

II.

Quando terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter distant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.

QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus, siue semissis summæ extremorum, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino æqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum, hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est semissem summa extremorum 6. & 30. toties, quot vnitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summæ extremorum, siue ad medium terminum, proportionem habebit noncuplam. Eademq; in cæteris est ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum, proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar est, facile inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atq; hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper par) erit eius semissis numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à semisse numeri terminorum denominatam. Cum enim summa quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium æqualis sit summæ extremorum, continebitur hæc summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atq; idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est summa omnium terminorum ad 38. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de aliis.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summam omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar; sed semissis numeri terminorum semper erit integer cum $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si extremi termini, vna cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atq; differentia, in cognitionem alterius extremi perueniri possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremū, hoc modo. Numerū proxime minorem numero terminorū in differentiā datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto

detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quaritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. minimum numerum proxime minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adyciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si vero proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximo minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proxime minor est, in differentiam, maiorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quaestio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, vt proponitur. Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inuentri minus extremum; propterea quod numerus 25. productus ex 5. qui proxime minor est terminorum numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quod si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse aequalem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quaestio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret haec proportionalitas Arithmetica.

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI extremi termini noti sint, vna cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proxime minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quaesita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmeticae, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proxime minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quae quaeritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressioq; proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proxime minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quaestio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc templo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi Vna cum differentia, noti sint eliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adijciamus 1. conflabimus numerum terminorum quaesitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quaestio proposita sit possibilis, hoc est, vt vere in rerum natura existat progressio aliqua, quae habeat omnes conditiones propositas, necesse est, maiore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vna cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorũ numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proxime minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summam 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proxime minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quaestio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certe, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extremorum summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionẽ. Si vero extremorum proportio maior sit quam dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quam tripla: Si denique minor sit extremorum proportio quam dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quam tripla. Vt hic, 8. 12. 10. proportio extremorum 16. & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirum maior quam dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quam tripla. Hic denique, 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionem habent supertripartientem quartas, quae minor est quam dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem quam triplam.

VIII. IN-

VIII.

INTER quosuis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmetice, si eorum summæ accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semissis 18. medio loco proportionalis est Arithmetice inter 6. & 30. vt hic manifestum est, 6. 18. 30. Itaq; si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, vtrumq; numerorum datorum esse vel parem, vel imparem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt possit habere dimidium sine fractione vnitatis. Nam quando summa extremorum impar est: quod accidit cum alter extremorum par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus eum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorum est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmetice, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmeticæ, quam si minori numero proposito adijcias, conflabis primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eam differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proxime maior est numero mediorum constituendorum) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunq; tales duo numeri proponuntur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quod inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proxime maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quemcunq; numerum, eumque adde cuicunq; alij numero, quem numerus proxime maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmetice, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proxime maior est numero mediorum constituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficies q; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus, & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroq; producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorum differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumq; datorum numerorum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemq; sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem, addendo primo quemq; ad seipsum deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas à Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmetice proportionales. Vtroq; diuiso per 5. hoc est, per numerum proxime maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmetice proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Deniq; ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaq; in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum vsque, in secundo vero ab infimo ad supremum vsq; ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoq; differentiam proportionalitatis constituendæ. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differētia

etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, si minor à maiore subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adiiciatur, & huic composito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnit ate superat, si fractiones euitandæ sint: Vel certe inueniendos esse duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoq; vitantur, etiamsi eos numerus numero mediorum proxime maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendæ sunt 9. termini medij. Si igitur vterq; per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperientur, si per quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines instituantur ascendentes, vt dictum est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propositum distribuemus in partes, quotquot quis iusserit, proportionalitatem Arithmeticam seruantes, hac ratione. Diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotientem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati sunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurq; reliquum numerum per numerum proxime minorem numero terminorum. Ita namq; prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hac differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, constituetur numerus terminorum datus, quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmetice proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuendus sit in 10. partes proportionales Arithmetice; partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotientemque 166. secabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis constituendæ. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proxime minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

RVRSVS si numerus 10. diuidendus sit in 10. partes proportionales Arithmetice, diuidemus eum per 5. semissem terminorum. Quotientem vero 2. in duas partes inæquales secabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquam 1. per 9. numerum proxime minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continue addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuisus erit numerus 10. in 10 partes Arithmetice proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. siue $\frac{9}{18}$. vltima vero $1\frac{1}{2}$. siue $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

CERTVM autem est, hac ratione variis modis datum numerum diuidi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diuiso per numerum terminorum datum, dabit quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quod huius extremorum summæ semissis, id est, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc est, in diuisorem, producit summam omnium terminorum, nimirum datum numerum, vt in secunda regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales secemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proxime minorem numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adiiciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9 partes Arithmetice proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proxime minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

HIC etiam manifestum est, variis medis datum numerum distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atq; alias partes binas sectus fuerit pro extremis duobus terminis.

SED fortasse facilius (quamquam operatio aliquanto longior sit) idem hoc absolues hac ratione, Cape tot numeros Arithmetice quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datum numerum duc, procreatosque numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam, partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmetice. Sume 10. numeros Arithmetice proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Ductis autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur hæ 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientemque in singulos assu-

assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas queris. Vt in dato exemplo. si datus numerus 525. diuidatur per 175. summam assumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eadem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac breuior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis acceptæ multiplicare per datum numerum, productos q3 numeros per summam omnium terminorum eiusdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel facis est, dato numero per summam assumptorum numerorum diuiso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperientur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & sic deinceps. Liquido autem hic quoq3 constare puto, datum numerum variis modis distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atq3 alij numeri eiusdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint assumpti, vel quorum alia atq3 alia sit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim easdem proportiones inter se, quæ inter terminos proportionalitatis assumptos eodem ordine reperiuntur. Perpetuo autem singuli numeri acceptæ proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem supertripartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. & 6. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

ITAQVE, si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus sit differentia omnium terminorum, habebunt primæ partes duplam quoq3 proportionem, atq3 ideo prima erit quoq3 differentia, ex cuius additione aliæ partes coaceruentur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicasses q3 primum quemq3 in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quamlibet propriam, vt priorem per 55. & posteriorem per 165. diuisisses, inuenisses primam partem $9\frac{6}{11}$. quæ eadem esset differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæ.

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{8}{11}$. $75\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibuslibet duobus numeris, si denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc est, si diuiso maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroq3 dato maiorem. Et si eundem denominatorem, sine Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atq3 ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quod diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

QVOD si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroq3 minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quod diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. Denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quod diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuisis 8. per 2. idemq3 cum producto numero facias, constituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoq3 in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$.

EXTENDETVR quoq3 eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in se, & productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroq3 maior. Hunc si iterum in se ducas, productum q3 per proxime præcedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit, 144. quo diuiso per 6. fit 24. quartus terminus, atq3 ita in infinitum. vt hic vides 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productum q3 per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertium terminum vtroq3 minorem. Quem si rursus in se duxeris, productum q3 per proxime præcedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 18. fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quo diuiso per 6. fit $\frac{4}{6}$ siue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris pro quarto termino atq3 ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{3}{27}$. &c.

IAM vero si quamcunq3 proportionem non multiplicem (in multiplici enim, si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continue proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione sit mentio; tot, inquam, cape terminos, quot in proposita propor-

Proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atq; ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatem extendi sine fractione. Verbi gratia. si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet 1.2.4.8.16.32.64. Si ergo à 64. incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialteræ, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facile hi termini, si ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoq; si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarum, qui est 5. videlicet. 1.5.25.125.625.3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione dupla superbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

QVI termini facile reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adijcias, & rursus $\frac{2}{5}$. secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atq; numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, fit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. Facilius ijdem termini reperientur, si inuentis duobus minimis terminis in data proportione, per maiorem multiplicetur primus ex illa proportione multiplici inuentus, & productus per minorem diuidatur. Ita enim secundus terminus reperietur. Qui si rursus ducatur in maiorem minimorum terminorum, & productus per minorem diuidatur, inuenietur tertius terminus; & sic deinceps. Vt in posteriori exemplo, minimi termini proportionis duplæ superbipartientis quintas sunt 5. & 12. Si igitur sextum 3125. proportionis quintuplæ, qui debet esse primus sex terminorum quæsitorum, ducatur in 12. & productus 37500. per 5. diuidatur, prodibit secundus terminus 7500. qui si rursus in 12. ducatur, & productus 90000. per 5. diuidatur, producetur tertius terminus 18000. &c. In proportione porro multiplici quacunq; minimi termini quotcunq; perpetuo incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla sunt hi, 1. 4. 16.

II.

Quando numerus terminorum continue proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium multiplicatione inter se creatur, & ei quoq; qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialteræ.

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quam ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

Quando autem proportionalium terminorum numerus est par, etiamsi non continue sint, proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes habeant vnam eandemq; inter se proportionem, hoc est, dummodo secundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quoque non continue proportionales, in diuersa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus semper æqualis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris duplæ proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.

Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemq; proportionem. videlicet triplam, quæ à sesquitertia diuersa est.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC *sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsum producitur; numerusque ipsum producens latus eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerum vero ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, siue radix cubica appellatur) cuius latus, siue radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primum in se, deinde in productum ex alijs duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex aliis duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.*

SEQVITVR *quoque, quando sunt 4. numeri siue continue, siue non continue proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuo multiplicare continue, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri*

sint

sint multiplicati) esse quadratum cuius latus, siue radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum si in productum ex secundo in tertium (qui producto ex primo in quartum æqualis est) multiplicetur. Quãdo autem sunt 6. numeri siue continue, siue non continue proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoq; non continue proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix, latusue est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium productus: qui videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus mediis: quippe cum tres hi numeri producti sint inter se æquales.

III.

SI, propositis quotcunq; terminis continue proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denig; maiori extremo adjiciatur. constabitur summa omnium terminorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proxime antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$. fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

Itaq; vt vides, ad explorandam summam quotcunq; terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vna cum proportionis denominatore. Quo vero artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunq; terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiose tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt superuacaneum sit, ea hoc loco repetere.

IV.

Propositis quotlibet numeris se mutuo æqualiter superantibus, id est, Arithmetice proportionalibus; si totidem alij numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi eodem ordine sumpti; superabunt se quoq; posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmetice proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19. Arithmetice proportionales proponantur, sumanturq; alij sex cum ijsdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. comperies ipsos quoq; Arithmetice esse proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem posse conuerti: Neque enim si dentur quotuis numeri Arithmetice proportionales, & totidem alij Arithmetice quoq; proportionales sumantur, etiamsi vtrobiq; eadem sit differentia, necessario hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. habent proportionem duplam, at posterioris duo primi 3. 5. superbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam, &c.

V.

Duobus quibusuis numeris datis, si eorum alterutro in quotlibet partes distributo, singulæ partes in alterum ducantur, & singuli numeri producti per priorem numerum diuidantur, constituent omnes Quotientes simul sumpti posteriorem numerum, habebuntq; ordine easdem omnino proportiones inter se, quas partes prioris numeri inter se eodem ordine habent: at singuli Quotientes, siue partes posterioris numeri ad singulas partes prioris, vt prima ad primam, secunda ad secundam, &c. vnam eandemq; prorsus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285. si prior secetur in partes, quæ simul additæ ipsum conficiant, 2. 5. 10. 40. & earum quælibet in posteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10. 25. 50. 200. qui in vnam collecti summam constituunt posteriorem numerum 285. habentq; easdem proportiones, quas habent partes 2. 5. 10. 40. nimirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli vero ad singulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

Easdem partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, partiaris, Quotientemque factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiso numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2. 5. 10. 40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ, 10. 25. 50. 200. vt prius.

Hinc facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris æquales, ita vt partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusq; numeri inter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi numerum propositum in quotuis partes Arithmetice

propor-

proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præscripsimus. Nam sumptis totidem numeris Arithmeticæ proportionalibus, erit eorum summa, numerus in illos, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum summam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propositi in eisdem proportionibus. Quare Arithmetice quoq; proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifestum est.

VI.

QVOTLIBET numeri continue proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continue quoq; in eadem proportione proportionales. Vt in appositio exemplo tam numeri, quam eorum differentiæ, habent continuam proportionem sesquialteram.

Differentiæ.	32	48	72	108	162	243	
	64	96	144	216	324	486	729

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod sequitur, habent & numeri, & eorum differentiæ, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum sunt differentiæ. Id quod soli proportioni duplæ cuicunq; accidit: quia in ea quilibet numerus maior proxime præcedentem minorem superat ipsomet numero proxime antecedente, cuius duplus est, hoc est, quem bis continet.

Differentiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896	
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunq; numeris continue proportionalibus, si eorum summa per eos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continue proportionales. Et si Quotientium summa per ipsos Quotientes sigillatim diuidatur, creabuntur ijdem prorsus Quotientes ordine conuerso: atq; ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientium æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, vel deniq; si terminorum numerus est impar, ex medio in se ipsum ducto. Quod sane incredibile videri possit. Exempli causa. Si dentur hi 4. numeri continue proportionales in proportione dupla 3. 6. 12. 24. si eorum summa 45. per singulos diuidatur, erunt Quotientes $15.7\frac{1}{2}.3\frac{3}{4}.1\frac{7}{8}$. conuerso ordine in eadem proportione dupla continue proportionales. Et si per hosce Quotientes diuidatur eorum summa $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerso ijdem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa vero summa $28\frac{1}{8}$. æqualis est numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. si eorum summam partiemur per eos sigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes $121.40\frac{1}{3}.13\frac{4}{9}.4\frac{13}{27}.1\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum summa $180\frac{61}{81}$. producitur vel ex 121. in $1\frac{40}{81}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{13}{27}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$. in seipsum. Vbi duo consideratione sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam Quotientium esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreetur, vt dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex diuisione summæ quotcunq; terminorum proportionis eiusdem continuæ, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continue dupli, siue magni, siue parui, erunt perpetuo hi Quotientes, $7.3\frac{1}{2}.1\frac{3}{4}$. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt, $15.7\frac{1}{2}.3\frac{3}{4}.1\frac{7}{8}$. In quinq; numeris continue triplis, erunt hi semper Quotientes, $121.40\frac{1}{3}.13\frac{4}{9}.4\frac{13}{27}.1\frac{40}{81}$. Ac denique in quinq; numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. $13\frac{1}{13}.8\frac{10}{14}.5\frac{11}{18}.3\frac{40}{54}.2\frac{40}{81}$.

EX hac proprietate et inueniemus quotcunq; terminos in data proportione continue proportionales, quorũ summa æqualis sit numero, qui sit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet æqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continue proportionales, quot inuemendi sunt, siue magni, siue parui, eorumq; summa per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quod si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero terminorum impari æqualis, &c. Quæ res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continue proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in aliis etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex diuisione summæ alicuius quotcunq; terminorum continue proportionalium, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterum procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atq; eorum summa per eosdem sigillatim diuidatur, satisfiet quæstioni propositæ per Quotientes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114. per 87. & 27. diuisa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{3}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{110}{261}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $4\frac{3}{9}$. gignitur.

VIII.

INTER duos quoscunq; numeros constituemus medium Geometrice proportionalem. si eos inter se multiplicemus. & procreati

procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proporportionem quadruplã, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaq; si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex vno in alterum productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantq; hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, quæ quidem radix maior est, | 7. | R. q. 63. | 9. | quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor vero quam 8. cum huius quadratum sit 64. Neq; vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad finem 8. demonstrabimus, cuiusmodo non est numerus 63.

IX.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometrice proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunq;, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmetice proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometrice inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum. secundus vero numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicue in hoc exemplo apparet.

Tres num. assump.	Primus. 8.	quintup. pri. 40.	Septup. pri. 56.
Quad. Arit. pro.	64	1600	3136.
Medij Geomet.	320	2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui se æqualibus differentijs mutuo superent, si pro radicibus eorum sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato, reperientur alij duo maiores cum illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus, secundus, 40. & tertius. 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmetice proportionalibus, si eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, si quam habent, diuidas, erunt producti quoq; numeri, aut Quotientes Arithmetice proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur, qui medij reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inuentos per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt si superiores quadrati, vna cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128	3200	6272
Medij Geometr.	640	4480	

SI vero diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem quælibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proportio.	8	200	392
Medij Geometr.	40	280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti eadem semper proportiones, quas quadrati, eorumq; medij inter se habent. Quod si hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios 2. 50. 98. Arithmetice proportionales, inter quos cadunt Geometrice medij, 10. & 70. Et si denig; hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometrice sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunq; inter tres numeros Arithmetice proportionales, siue quadrati sint, siue non, cadunt duo medij Geometrice proportionales, vnus inter primum & secundum, & inter secundum ac tertium alter, quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmeticæ proportionalitatis, & quadratum posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum, 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmetice proportionales, habentes differentiam eandem communem 30400. & sic de cæteris.

X.

Inter quoscunq; duos numeros reperiemus quotcunq; medios continue proportionales, iucunda sane, & artificiosa operatione; quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atq; ita in se ipsam ducta producit tertium terminum, qui est numerus quadratus, radixq; ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est,

bus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Deniq; si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum fiet quintus terminus : Et si ponatur quinquies, fiant q; quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atq; ita in infinitum: Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus, notandæ sunt tres infra scriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ sunt Arithmeticæ, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoq; initium ducens. Vbi perspicue apparebit, quàm egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri significantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. propor.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum, secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatos numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis positam bis hoc modo, 2 2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2.2.2. atq; ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de alijs. Vt verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2. tertij ordinis positam septies, hoc pacto, 2.2.2.2.2.2.2. & in se continue sexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum, Nam ex 2. primi loci in 2. secundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex 32. in 2. sexti loci fiunt 64. & deniq; ex 64. in 2. septimi loci fiunt 128. &c. Atq; hoc non solum verum est in proposita proportione continua dupla, sed in omnibus alijs ab vnitate incipientibus, quicunq; numerus secundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

Itaq; si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorum in primo ordine. Nam ex vtroq; numero dato extrahenda est radix, quæ toties ordine posita, & continue multiplicata vtrumq; producat, quot vnitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerum mediorum constituendorum in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inuentas sub datis numeris colloca, quamq; sub suo, & ab eisdem ascende per continuam vtriusq; multiplicationem, (ducendo primum quamq; radicem in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices institutas à radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini quæruntur. Post hæc singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis aduersos, & oppositos, hoc est, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita vt in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsq;, in altero vero ab infimo vsq; ad supremum ascendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inueniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis, sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroq; numero dato eruendam esse radicem quadratam, quæ videlicet bis posita, per eius multiplicationem vtrumq; producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ sunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus desideratur, non sunt instituendæ proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, sed ipsæ radices inter se multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. Vt hic vides, 9.36.144. Sic etiam si inter 18. & 288. constituendus sit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, signabimus priorem hoc modo, R.q.18. posteriorem autem sic. R. q. 288. Hæ autem radices inter se multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferri, inter se multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonstratio ex lib. 10. petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferri non possunt, quales sunt R.q. 18. & R.q. 288. docebimus in Algebra.

Rursus si dati sint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij constituendi sint accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex vtroq; dato numero extrahenda est radix, quæ quater posita, & continue multiplicata vtrumq; producat, quæ quadrati quadrata, vel Zensizensica dici solet, cuiusmodi in dato exemplo sunt 2. & 5. Constitues ergo hos ordines trium terminorum sub 16. & 625. Geometrice proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. supremo primi ordinis in 5. infimum secundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio secundo. Deniq; ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV autem dignum est, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100.

& 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, si maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inuentarum, multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursum per eundem Quotientem multiplicetur, atq; ita deinceps, constituentur inter duos extremos datos medij termini, idem, etiamsi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. secundum medium: Et denique, si 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertium medium.

Perspicuum autem est, inter datos quoslibet numeros non semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales: propterea quod dati numeri non habent semper illas radices, quæ extrahendæ sunt: aut certe non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices possint extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadrati quadratas, hoc est, quæ quater positæ eos suis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoq; inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet, 48. 120. 300. 750. 1875.

Quamobrem si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunq; datam habentes proportionẽ. Eorum enim vterq; si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel, & continue multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini constituentur eo modo, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{1}{3}$. sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem tertias, & vtrumq; quinquies ponemus hoc modo, 6. 6. 6. 6. 6. & 10. 10. 10. 10. 10. Ex multiplicatione enim continua vtriusq; existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{1}{3}$. proportionis superbipartientis tertias in minorem numerum inuentum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

XI.

Numerum quemcunq; datum distribuemus in quotuis partes proportionales Geometrice in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continue proportionales in data proportione siue minimos siue non minimos, in quot partes datus numerus distribuendus est. & per eorum summam datum numerum partire. Quotiens namq; per singulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri seruantes datam proportionem inter se. Veluti si datus numerus 756. secandus sit in 6. partes continue proportionales in proportione dupla; si sumantur 6. termini continue dupli, 3. 6. 12. 24. 48. 96. quorum summa est 189. & per hanc summam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4. per singulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continue dupli, conficientesq; simul in vnam summam collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, si sumantur hi alij 6. numeri continue dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. quorum summa est $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorum summa est 6300. Nam datus numerus 756. diuisus per summam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuisus per posteriorem summam 6300. facit Quotientem $\frac{756}{6300}$. qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandem partem primam 12. & sic de cæteris.

Quod si cupias numerum, qui secari possit in quotuis partes proportionales sine vlla fractione, (Nam nisi seruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunq; in fractiones) assequeris propositum. si sumas quemcunq; numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit distribui in 5. numeros integros sesquialteram proportionem continuam habentes; sumptis 5. terminis in sesquialtera proportione continue quibuscunq; vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum summa est 844. accipiemus huius summæ quemcunq; numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum secabitur in 5. numeros integros proportionis sesquialteræ continuæ, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessario sit numerus integer.

Hinc nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua iubeamur in data proportione continua reperire quotuis numeros qui in vnam summam collecti constituant numerum quemcunq; datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales datæ proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuæ, quorum summa sit 100. secandus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportionis triplæ, vt in $2\frac{2}{80}$. $7\frac{1}{80}$. $22\frac{1}{80}$. $67\frac{1}{80}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quod si conficere debeant summam 400. erunt numeri quæsiti in tripla proportione continua hi. 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si denique summam conficere debeant non superantẽ 1. erunt huiusmodi numeri, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est, 1.

DE PROPORTIONALITATE HARMONICA.

I.

Tres numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunq;, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2. 3. 6.	21.33.77.	24.32 48.	600.1100.6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo vero in tertium, tertius.

Alio modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi vero eiusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in ijsdem exemplis manifestum est.

Hinc fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

Quapropter si reperiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atq; adeo & differentiæ, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis constituendus: ac deinq; ex hisce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt si quærantur tres, quorum extremi habeant proportionem sesquitertiam, sumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: sed quia eorum summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumq; per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos, enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmetice. 7. nimirum semissis eorum summæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmetice proportionalibus orientur hi tres Harmonice proportionales. 42. 48. 56. quorum extremi, atq; adeo & differentiæ proportionem sesquitertiam datam habent.

Sequitur etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primũ, vt in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, vt in hac est secundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo vero posteriores Harmonicæ procreati sunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.

Vicissim si primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo vero extremi Harmonicæ inter se multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem scilicet prorsus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2.3.6. gigni hanc Arithmeticam, 6.12.18. Siue enim ducas primum 2. in secundum 3. & tertium 6. Item secundum 3. in tertium 6. produces 6.12.18. siue ducas medium 3. in extremos 2.6. facies extremos 6.18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

Harmonica proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos siue ad maiores numeros progrediendo, siue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonice, & tertio adiunguntur duo cum eo constituentes quoq; eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus est, adiunguntur eodem modo alij duo, atq; vltimo, siue septimo, alij duo; & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2.3.6. Harmonice proportionalibus, si posteriores duo, 3. 6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9.18. atq; ita erunt iam quinq; termini, 2.3.6.9 18. Harmonice proportionales: Et si posteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis. erunt septem hi termini, 2.3.6.9. 18. 27. 54. continue proportionales Harmonice: & sic progredi poterimus in infinitum, ita vt semper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, vt per tertium, quantum, septimum, nonum, &c. Quòd si versus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inuenti iterum diuidendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18.9. 6. si minores duo, 9.6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18.6. fient 3.2. atq; ita erunt iam quinq; termini, 18. 9. 6. 3. 2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3. 2. diuidantur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18. 9. 6. 3. 2. 1⅔. atq; ita deinceps progredi licebit in infinitum.

Alio modo, & quidem magis proprie, continuatur proportionalitas Harmonica, siue ad maiores numeros progrediendo, siue ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonice proportionales; Item relicto primo, alij sequentes tres; & relictis duobus sequentes alij tres, atq; ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris, 3.4.6.12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3.4.6. quam tres 4.6.12. Harmonice proportionales sunt: sed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorum 4. 12. triplam. Item continuata esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinq; terminis, 10.12.15.20.30 quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15.20.30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in vtramq; partem hoc modo continuanda sit, quando continuari potest, (neq; enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continue Harmonice proportionales, vt exposuimus, reperiri possint, ex ijs, quæ sequuntur, constabit.

II.

INTER quosuis datos duos numeros constitues medium Harmonice proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum

ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam, Quotienteмq; minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem summam. Si enim Quotientem ex maiore dato subtrahas, reliquus fiet medius terminus quæsitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuenturus medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum summam 75. Nam si Quotientem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, si eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum summam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

Vides ergo, quando summa datorum duorum numerorũ non metitur productũ ex eorundẽ differentia in minorẽ eorum, vel in maiorem, medium inuentum esse necessario integrum cum fractione. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem summam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, 7. $8\frac{4}{17}$. 10. Quia tam 10. ad 7. habent proportionem supertripartientem septimas, quàm differentia maiorum $1\frac{13}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumq; numerum 30. partire per eorum summam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$. subtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

Alij tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuisione differentiæ datorum duorum numerorum per summam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerum minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato subtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur. Vt si inter 20. & 30. sit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. sunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum summam 5. fit Quotiens 2. quem si ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel si eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur semper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

Breuius ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerũ, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate superat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; si eorum differentia 30. diuidatur per 3. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate superat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo 10. 16. 40.

Sed ad memoriam inuandam inueniemus fortasse commodius, (licet aliquanto longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non sunt impares, vel pares, sed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos constitue medium Arithmeticè proportionalem, qui semper erit semissis summæ eorum. Per eos deinde tres numeros Arithmetice proportionales quære ex regula 1. tres Harmonice proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter se proportionem habent, quam dati duo extremi. Quod si fiat, vt primus inuentus ad secundum, ita primus datus ad aliud; hoc est, si per primum inuentum diuidatur numerus ex secundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius, duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par est, cuius semissis 17. est medius Arithmetice inter 14. & 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonice proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus 238. ad secundum 280. ita primus datus 9. ad aliud, inuenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius est Harmonice inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

Propositis duobus numeris, reperiemus tertium vtroq; maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest, (Pulchre autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum, qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroq; dato maior, quem quærimus. Quod si quando diuisor reperiatur esse 0. vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet facta subtractione differentiæ amborum, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4. termini Harmonice proportionales, 12. 16. 24. 48. Quod si tentemus his adiungere alium maiorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur diuisor esse 0. Differentia enim amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quod si quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroq; maior, 15. Ad hos vero duos 10. 11. apponetur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90. 99. tertius. 110. At vero ad 3. 6. nullus adiungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. dempta ex maiore 3. relinquit 0. Atq; eodem modo quando dati numeri habent proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minori termino æqualis. Multo magis cum dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonice quia differentia amborum tunc semper maior est minore termino, atq; idcirco subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3. 7. quorum proportio est dupla sesquitertia, nimirum maior, quam dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

Alij ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumq; productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientem denicq; maiori adijciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad minorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum duplam minorem. Ex quo liquido constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros, si de continuatione secundo modo accepta loquamur, quæ propria

est, vt in prima regula diximus. Nam cum primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessario proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

Sequitur quoq; ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertium procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertium numerum, vt diximus. Constat autem numero per vnitatem diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri 6.12. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6.11.66. Idem cernitur in hisce numeris, 2.3.6. & 10.19.190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorum duorum sola vnitate.

Ex posteriori vero regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adjiciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c. Vt datis eisdem numeris, 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

Quare facile quoq; reperiri possunt tres numeri Harmonice proportionales. si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo vero eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio denio; numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tam extremorum hoc modo inuentorum, quam differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuo impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

Vnde si quærantur tres minimi numeri integri Harmonice proportionales in quacunq; proportione multiplici, si quidem denominator est numerus impar, statuemus eũ denominatorẽ in medio semissem autẽ numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denio; collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id est, semissem numeri 8. proximè maioris quam 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4.7.28. Si vero denominator est par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio vero collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denio; ponemus denominatorem duplicatum. Vt si inueniendi sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum; in medio denio; duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet. 9. 16. 72.

Quod si tres numeri Harmonice proportionales in data proportione inueniendi sint, siue illi minimi sint & integri, siue non, agendum erit illo modo. In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denio; loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si quærantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas; erit denominator huius proportionis $2\frac{5}{7}$. collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirum semissis numeri $3\frac{5}{7}$. qui denominatorem $2\frac{5}{7}$. vnitate superat. Tertius denio; erit $4\frac{8}{28}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{5}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$. $2\frac{5}{7}$. $5\frac{8}{28}$. qui ad hos tres eiusdem denominatoris reuocabuntur, $\frac{84}{49}$. $\frac{110}{49}$. $\frac{140}{49}$. si prius quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 110. 140. erunt numeri integri Harmonice proportionales, erit q; extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, quæ videlicet data est.

IV.

Duobus numeris datis, reperiemus tertium vtro; minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterum productum partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quæritur, Vt si dentur duo numeri 6.12. si diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. summam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem vtro; illis proportionalem, vt hic cernis, 4.6.12. Hunc extendemus regrediendo versus minores numeros, si duobus 4.6. minorem tertium adiungemus 3. hoc modo 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3.4 adiungetur tertius minor $2\frac{2}{7}$. Atq; in hunc modum decresceat proportionalitas qualibet Harmonica continue in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem sane varietatem inter has tres proportionalitates, Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.

II. HARMONICA contra, decrescit in infinitum, sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam. Hoc est, vt primus, secundus, ac tertius sint Harmonice proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in vtram q; partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, vt supra in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denio; & augetur, & decrescit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuos, qui varie inter se comparati præcipuas perfectas q; consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratæ; 8. anguli solidi; 12. latera; & 24. anguli plani constituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continue proportionales Harmonice. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, quæ consonantiam Diatessaron, siue Quartam, constituit. Proportio vero 12. ad 8. sesquialtera est, continens siue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Dtapenten, hoc est, Duodecimam. Denio; proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, si quicunq; numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus per singulos diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonice proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmetice proportionales. Verbi gratia. Sint Arithmetice proportionales, 1.2.3.4.5.6. Numerus, quem metiuntur, est 720. ex eorũ continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos datos diuiso, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

POSTERIORE autem per eosdem datos diuiso, reperientur hi.

60. 30. 20. 15. 12. 10.

ATQVE hi numeri inuenti easdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum: Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoq; per minimum numeratum inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quod si vicissim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmetice proportionales: & si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt iidem numeri Arithmetice proportionales, per quos Harmonice proportionales inuenti sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contra.

IGITVR si quis cupiat quotcunq; terminos continue Harmonice proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmetice quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus (& minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cum sit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12 in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex secundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentiis, vt in his 6. terminis apparet.

Differentiæ	2	4	
Propor. Har.	6	8	12

Differentiæ.	30	10	5	3	2	
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

NAM ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20 fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunq; termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cum suis differentiis, si differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac secundum, producantq; vtrobiq; numeros æquales, erunt termini omnes continue proportionales Harmonice, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinq; minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac deinde primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione cõtinue proportionales, ita vt inter primum ac secundum cadat medius Arithmetice proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonice proportionalis, medius denique trium datorum numerorũ sit inter medios inuentos media proportionalis Geometrice, atq; quinq; numeri ita inuenti sint minimi omnium in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione. Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9.3.1. Inter primos duos statuatur medius Arithmetice, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in secundo ordine vides. Quod si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18.12.6. Arithmeticam habent proportionalitatem, 12.3.6. Geometricam, & 6.3.2. Harmonicam: ac denique 18.6.2, triplam datam. Quod si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

9.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	1.
9.	6.	3.	$\frac{3}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

SI minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis, 1.3.9 subtriplis hos quinque 2.4.6.9.18. Nam 2.4.6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4.6.9. Geometricam: 6.9.18. Harmonicam; & 2.6.18. subtriplam. propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	2.	3.	$4\frac{1}{2}$.	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	9.
2.	4.	6.	9.	18.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9.6.4. Inter 9. & 6. medius est Arithmetice, $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine, Reuocetur ad vnicã hanc fractionẽ $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factum est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentique erunt quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
90.	75.	60.	48.	40.

SI minores numeri cum maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data, subsesquialtera quinque termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris est ratio.

4.		6.		9.
4.	5.	6	$7\frac{1}{2}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{36}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45

POTES quoque. si placet in primo ordine omnes quinq; numeros constituere, & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem; Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinq; numeros minimos integros quæsitos. Vt si subquadruplæ proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1.4.16. Additis simul 1.4. erit summæ dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmetice inter eos. Et si diuidatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonice inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducentur ad eandem denominationem, vt in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinq; minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine vides. Atq; in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permistæ sunt fractiones, ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16
1.	$2\frac{25}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	25.	40.	64.	16

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi sint Geometrice proportionales non continue, vnus autem mediorum cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipsis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio quæ 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmetice constituatur 7. hoc modo 12.7.2. Quod si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmetice proportionalibus inueniantur tres Harmonice proportionales per primam regulam, 84.24.14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84.14. qui semper ita inuenti pares erunt, statuatur etiam medius Arithmedice, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84.49.24.14. Nam extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14 vt liquido constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84.49.14. Arithmetica. Ac denique inter 84.24.14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

Tres proportio-	84.	49.	24.	14.	nalitates simul.					
Geometrice prop.	84.	49.	24.	14.	Vel	84.	24.	49.	14.	
Arithmet. prop.		84.	49.	14.						
Harmonice prop.		84.	24.	14.						

RVRSVS sit data proportio. quæ 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorum dupli 6.4. inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 4. hoc modo, 6.5.4. Ex his per primam regulam inuenio Harmonice proportionales 30.24.20. Constituto autem medio Arithmetice 25. inter 30. & 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti, 30.25.24.20. cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

Geometrice proport.	30	25	24	20	Vel	30	24	25	20
Arithmet. proport.	30.		25.			20.			
Harmon. proport.	30.		24.			20.			

EOSDEM 4. numeros maximæ harmoniæ reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmetice: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometrice proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorũ est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si vero admistæ sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmetice proportionalis, hoc modo, 12.9.6. Si igitur fiat vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius. Quare sic stabunt 4. numeri maximæ Harmoniæ, 12.9.8.6. Postremo si in eadem proportione dupla extremorum $13\frac{1}{2}$. 10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $40\frac{0}{2}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij. si inuentos per denominatorem 3, multiplicemus, vt hic vides. 60. 45. 40. 30.

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continue proportionales Geometrice, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16.24.36. & inter extremos inueniatur medius Arithmetice proportionalis, 26. erunt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16.24.36 Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmetice proportionales sunt, ex constructione.

SI vero sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunq; continue proportionales Geometrice. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quærũtur.

Vt si

Vt si sumantur ijdem tres sesquialteri, 16.24.36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, 22 $\frac{2}{3}$. Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16.22 $\frac{2}{3}$.24.36. qui reducentur ad hos integros. 208.286.312.468. Si accepisses hos 3. numeros tres duplos. 20.10.5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20.10.8.5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonice proportionales. Si namq; inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumantur hi tres 6.8.12. erit inter priores duos medius Arithmetice proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6.7.8.12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6.8.10.12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmetice proportionales, & non solum tres 8.10.12. ex constructione at soli tres accepti 6.8.12 habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi sint quotcunq; numeri Arithmetice proportionales continue, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonice proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmetice proportionales, quot quæruntur; & bini in proportione binorum proximorũ minimi. Si n. accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorum, atq; hic in singulos acceptos numeros Arithmetice proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim veri gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunq; numeros Arithmetice proportionales, 3. 6.9.12. & 1.2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2.3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3. 4. minimos in proportione 9. ad 12. erunt q; tres summæ binorum minimorum 3.5.7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3.6.9.12. procreabu 4. numeros Arithmetice proportionales, quos desideras. 315.630.945.1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.

Arith. proport.	315		630		945		1260	
Medii Harm.		420		756		1080		

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonice, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos datæ proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini 1.3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16.24.48. Si datæ proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumq; in eorum summam 4. factiq; essent hi duo numeri. 4. 12. inter quos cadit Harmonice medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunq; terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris in hoc artificio. Sume tot minimos numeros continue proportionales Geometrice, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erunt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inquiendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4.6.9. & duos minimos in eadem, 2.3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt. dupla. habebisq; propositos numeros 40.60.90. Nam inter 40.60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60.90. Harmonicum medium est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. prop.	40			60			90	
Medii Harm.		48			72			
Medii Arith.			50			75		

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter secundum proportionalitatem Arithmeticam, & secundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, si eorum summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero vterq; nõ est par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3. 4. eorum q; summa, 7. Si ergo duces 7 in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21.28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli, 42.56. ij quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quam inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifestum est.

Numeri inuenti.	42			56			84			112
Medii Harmo.		48			Vel			96		
Medii Arithm.			49						98	

XI.

SI vero quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniantur per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales 2.50.98. inter quorum priores binos sit medius Geometrice, 10. & inter binos posteriores, 70. statuanturque ordine sic 2.10.50.70.98. Minimus autem numerus ab his quinq; numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdem quinque numeros, Quotientes sint, 1225, 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares vel impares, erunt primus, tertius, & quintus, vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonice proportionales, vt constat ex 5. regula, cum sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quem numeri 2.50.98. Arithmetice proportionales numerant, per eosdem numeros 2.50.98. Inter binos autem cadunt Geometrice proportionales, 245. secũdus Quotiẽs; & 35. tertius Quotiens. Habent n. 1225.245.49. easdem proportiones conuerso ordine, quas continue proportionales 2.10.50. habet, vt

constat

constat ex 7 regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemque modo 49.35.25.easdem habebunt proportiones, quas conuerso ordine habent continue proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quam hi, sint Quotientes producti per diuisionem eiusdem numeri 2450.per 2.10.50.& per 50.70.98.Certum autem est,inter binos eosdem 1225. 49. & inter 49.25.cadere quoque singulos Arithmetice proportionales,cum omnes pares ponantur,vel impares. Quod si non omnes sint pares,duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, vt pares numeri fiant,qui idem omnino præstabunt, quod quærimus. Habebunt enim easdem proportiones,quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium secundus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometrice proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmetice,constat propositum. Exemplum superius ob oculos hic propositum esse vides.

Tres Har.prop.inuenti.	1225			49			25
Medii Arith.		637			37		
Medii Geometr.			245			35	

XII.

RVRSVS si quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometrice vnus, & alter Harmonice, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Reperiantur iterum, per 9.regulam proportionalitatis Geometricæ,tres numeri Arithmetice proportionales. 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica;sumanturque duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum : Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum;& horum summæ 26.74.numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeant quas eorum submultiplices 2. 50. 98. sit vt quemadmodum inter binos horum singuli cadunt medij Geometrice, ita quoq; inter binos illorum singuli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summæ minimorum numerorum 1.25.& 25.49.in proportionibus 2.ad 50.& 50.ad 98.(qui tres,2.50.98.Arithmetice sunt proportionales)numerant minimum numerum 962.qui in eos tres,2.50.98.ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum triũ singuli medij Harmonice proportionales,vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum mediis sic stabit.

Arit.prop.nu.	1924			48100			94276
Medii Har.		3700			63700		
Medii Geo.			9620			67340	

XIII.

EX his,quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales siue Arithmetice,siue Geometrice,siue Harmonice,inter quorum binos cadant terni medij,vnus Arithmetice,alter Geometrice,& reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmeticæ proportionalitatis.Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij.vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoq; inter binos singuli Arithmetice proportionales, atq; adeo quæstioni satisfacient.Si vero non omnes pares sint,aut impares,eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ,qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arith.prop.	1924			48100				94276
Medii Har.		3700			63700			
Med. Geo.			9620			67340		
Med. Arith.				25012			71188	

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate,inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli,sitque proportio data, quam medij Geometricæ proportionalitatis efficere debent,nimirum sesquialtera. Capiq; quinq; numeros minimos datæ proportionis continue proportionales,16.24.36.54.81.& duos minimos 4.9.in proportione primi 16.ad tertium 36.& tertij 36.ad quintum 81.Horum minimorum summam 13.duc in eundem primum 16.tertium 36.& quintum 81.Producti enim numeri 208.468.1053.duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt,aut impares;alias non essent duplicandi)nimirum 416.936.2106.(vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmetice) sunt ij,quos quærimus.Nam inter binos cadunt bini medij, alter Haromonice, & Arithmetice alter,vt ex 10.regula patet:Et inter eosdem cadant medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24.& tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geo.prop.	416			936				2106
Med. Ha.		576			1296			
Med. Geo.			624			1404		
Med. Ar.				676			1521	

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225.49.25.inter quorum binos cadant bini Medij,vnus Arithmetice,& alter Geometrice,vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25.1.& proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri 49. 25. quorum summæ 26. 74. numerent minimum numerum 962. Hunc si in tres inuentos duxeris, gignes tres quæsitos 1178450. 47138. 24050.Nam inter binos cadent,bini medij, vnus Arithmetrice, & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum submultiplices 1225.49.25.minimum numeri,qui fiunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonice, vt ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres.Exemplum hic habes.

Har.

Har. pro.	1178450				47138				24050
Med.Ar.		612794				35594			
Me.Geo.			235690				33670		
Me. Ha.				90650				31850	

XIV.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4.2.1. eritque ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. datæ. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60.15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120.30. sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuenti.		120						30	
Medius Arithmet.			75						
Medius Geometr.				60					
Medius Harmon.					48				

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunque propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonice proportionales, in quot partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonice proportionales; si sumantur tres numeri 6.8.12. ex 5. regula inuenti, & per eorum summam 26. diuidantur numeri 780.1040.1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6.8.12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130. per 26. summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in singulos acceptos, 6.8.12. erunt procreati numeri 30.40.60. eædem partes, quas inquirimus. Constituunt enim datum numerum 130. suntque Harmonice proportionales, sicuti assumpti numeri, 6.8.12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes $2, \frac{4}{1}, 3\frac{1}{1}, 4\frac{8}{1}$. eodem modo proportionales. Eademq; ratio est de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE æqualitatis omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis æqualibus, siue vnitatibus siue numeris, mirabile dictu est, quam facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

ÆQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares, hoc seruato ordine. DVPLI inuersi producunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitertios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie SESQVIALTERI inuersi exhibent superbipartientes. SESQVITERTII inuersi supertripartientes: SESQVIQVARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QVARTO ex iisdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dant duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos sesquitertios: DVPLI sesquitertij triplos sesquitertios: TRIPLI sesquitertij quadruplos sesquitertios, &c. SESQVIQVARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: TRIPLI sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis superpartientibus inuentis elicientur omnes multiplices superpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES generant duplos superbipartientes. DVPLI superbipartientes triplos superbipartientes, TRIPLI superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoque pariunt duplos supertripartientes; DVPLI supertripartientes, triplos supertripartientes: TRIPLI supertripartientes, quadruplos supertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES item gignunt duplos superquadrupartientes: DVPLI superquadrupartientes, triplos superquadrupartientes: TRIPLI superquadrupartientes, quadruplos superquadrupartientes: atque sic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem exposuimus, est vnicus, isq; facillimus, nimirum hic.

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia genetari debet, semel sumpto, & secundo bis, & tertio semel exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ.

SECVN-

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

ATQVE hoc præceptum triplex sub oculos ponitur hoc appositio typo, vbi liquido constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi: vt termini alterius proportionalitatis constituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS PROPORTIONIS GEOMETRICÆ ex alia Geometrica.

Ordo termin. datæ proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus constituitur, si dati term. ita sumantur.	Semel	Bis.	Semel
Secundus constituitur, si term. dati ita sumautur.		Semel.	Semel
Tertius constituitur, si ita sumantur dati term.			Semel

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram vero in binarijt. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1	8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1	18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1	32	8	2
Quintupli ex quadruplis	25	5	1	50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

Dupli inuerso ordine.	1	2	4	2	4	8
Sesquialt. ex duplis inuersis.	9	6	4	18	12	8
Tripli ordine conuerso.	1	3	9	2	6	18
Sesquiter. ex triplis inuersis.	16	12	9	32	24	18
Quadrupli ordine conuerso.	1	4	16	2	8	32
Sesquiquar. ex quad. conuersis.	25	20	16	50	40	32

GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

Sesquialteri inuersi.	4	6	9	8	12	18
Superb. ex sesquial. inuersis.	25	15	9	50	30	18
Sesquiter. ordine inuerso;	9	12	16	18	24	32
Supertr. ex sesquit. inuersis.	49	28	16	98	56	32
Sesquiquart. conuerso ordine.	16	20	25	32	40	50
Superquadrupar. ex sesquiquar. conuersis	81	45	25	162	90	60

GENERATIO MVLTIPLICIVM. Superparticularium.

Sesquialteri directo ordine.	0	6	4	18	12	8
Dupli sesquialteri ex sesquialt.	25	10	4	50	20	8
Tripli sesquial. ex dupl. sesquial.	49	14	4	98	28	8
Quadrupl. sesqual. ex tripl. sesquial.	81	18	4	162	36	8
Sesquitertii ordine recto.	16	12	9	32	24	18
Dupli sesquiter. ex sesquit.	49	21	9	98	42	18
Tripli sesquit. ex dup. sesquit.	100	30	9	200	60	18
Quadr. sesquit. ex trip. sesquit.	169	39	9	338	78	18
Sesquiquarti ordine recto.	25	20	16	50	40	32
Dupli sesquiquar. ex sesquiqua.	81	36	16	162	72	32
Tripl. sesquiq. ex trip. sesquiq.	169	52	16	338	104	32
Quad. sesquiq. ex trip. sesquiq.	289	68	16	578	136	32

GENE-

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart.ordine recto.	25	15	9	50	30	18
Dupli superbip.ex superbip.	64	24	9	128	48	18
Tripli superbi.ex dupl.superbip.	121	33	9	242	66	18
Quadr.superb.ex trip.superbip.	196	42	9	392	84	18
Supertripart.directo ordine.	49	28	16	98	56	32
Dupli supertrip.ex supertrip.	121	44	16	242	88	32
Trip.supertri.ex dup.supertri.	225	60	16	450	120	32
Quad.supertri.ex trip.supertr.	361	76	16	722	352	32
Superquadrup.recto ordine.	81	45	25	162	90	50
Dupli superquad.ex superq.	196	70	25	392	140	50
Trip.superq.ex dup.superq.	361	95	25	722	190	50
Quad.superq.ex trip.superq.	576	120	25	1152	140	50

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

HIC enim perspicue cernis, quos libet tres terminos ex tribus proxime antecedentibus procreatos esse ex præscripto triplicis præcepti superioris. Vt verbi gratia postremi hi tres. 576. 120. 25. ita producti sunt ex tribus antecedentibus 361. 95. 25. Primus 576. coaceruatus est ex primo 361. semel, & ex secundo 95. bis, & ex tertio 25. semel. Secundus autem 120. constatus est ex secundo 95. semel. Tertius denique 25. est tertius 25. semel sumptus, vt hæc apposita formula demonstrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti sunt, mittio facto à terminis æqualibus 3.1.1. vel 2.2.2

QVO PACTO VICISSIM OMNIS PROPORtio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.

PROPOSITIO rursus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, restituetur vicissim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quam facili ratione, per variam subtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINVS trium terminorum inæqualium datorum statuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem subtracto ex medio, reliquus numerus constituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quæuis proportio trium terminorum inæqualium reuocatur ad aliam proportionem, conferendo semper maiores numeros cum minoribus; & hæc rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quod si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Æqualitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Proportio supertripartiens quartas.	46	28	16
Sesquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis semper esse duplam, hanc vero statim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio, consistere in tribus vnitatibus: Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis consistere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49. 28. 16. minimos esse in proportione supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc æqualitatem. 1.1.1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150. 30. 6. sextum locum inter omnes tres numeros continuæ proportionis quintuplæ, propterea quæ æqualitas inuenta est inter hos tres senarios, 6. 6. 6. Minimi enim siue primi numeri quintuplæ proportionis sunt, 25. 5. 1. Secundi. 50. 10. 2. Tertij, 75. 15. 3. Quarti, 100. 20. 4. Quinti 125. 25. 5. Sexti autem, 150. 30. 6. vt manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus aliis proportionibus.

SED & hoc obseruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & sic de cæteris, vsq; ad æqualitatem. In exemplo vero posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquitertiam ordine inuerso. Constat autem, numeros sesquitertios conuerso ordine gignere supertripartientes, vt supra diximus. Item sesquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta est ad triplam ordine inuerso, quemadmodum tripla inuersa generat sesquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, reducta est ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

NEQVE vero silentio prætereundum censeo, ex tribus terminis cuiuscunq; proportionalitatis Geometricæ, siue ea æqualitatis sit, siue inæqualitatis, gigni posse quamlibet trium proportionalitatum, quas supra explicauimus. si ipsi termini varijs modis inter se coagmententur. Proportionem enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, si primus terminus semel, secundus bis, & tertius semel pro primo termino sumatur; pro secundo autem secundus, & tertius semel; pro tertio denique ipse tertius semel, perspicue constat ex iis, quæ paulo ante scripsimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & secundo termino bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis

SVMMAM vero ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

TERTIVM denique terminum constitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS PROPORTIONIS Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum duæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus.	Tertius
Primus fit ex datis term. ita coaceruatis.	Bis.	Bis.	Semel
Secundus vero fit.	Semel	Semel	Semel
Tertius denique hoc modo.			Semel

NIHIL porro interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an vero maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ Proportionalitatis ex Geometrica.

Geomet. prop.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Arith. propor.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1.1. In secundo, 8. summam scilicet ex 4.4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9.6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4.6. collectam, atq; ita in alijs.

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis. vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoq; ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectam ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil interest, vtrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porro huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS HARMONICÆ proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus fit ex ter. datis sic in vnum collect.	Bis	Ter	Semel
Secundus vero sic.		Bis	Semel
Tertius denique hoc modo.		Semel	Semel

GENERATIO PROPORTIONALITATIS Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Harmo. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15

IAM vero è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunq; ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

HOC

HOC medio inuento ſublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus ſemel, & medius inuentus bis in vnam ſummam collecti, & ex maximo dato ſubtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semiſſis ergo huius erit ipſum alterum extremum

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt ſupra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas propoſita oritur ex illa Geometrica, ſi ſuperius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata eſt. Exempla hic vides.

Harm.propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom.propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA.

Harmon.propor.	3	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr.propor.	2	1	1/2	5	10	20	2	4	8
Æqualitas.	1/2	1/2	1/2	5	5	5	2	2	2

ARITHMETICA proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam conſtituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio conſtituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur ſi hic numeris reliquus duplus eſt minimi, ſecto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum: reductaque erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

VT detur Arithmetica proportionalitas, 3.9.15. ſi in Geometrica conſtituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmeticæ datæ, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. ſupererunt 6. qui numerus duplus eſt minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc 3.3.3. ex qua oritur ſecundum ſuperius præceptum.

	3	9	15
	3	3	3

SI vero reliquus ille numerus non eſt duplus minimi, ſecandus erit in duas partes, quæ cum minimo conſtituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 34.19.4. Facto in Geometrica extremo vno 4. minimo datæ Arithmeticæ proportionalitatis, eo, ſubducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non eſt duplus minimi. Quare ſecto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9.6.4. ex qua rurſus ortum ducet, ex præſcripto ſuperioris præcepti.

	34	19	4
	9	6	4

SED quoniam reliquus ille numerus non poteſt ſemper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo conſtituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuiſio facienda ſit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propoſ. 17. lib. 6.) niſi numeri ſurdi, irrationalesue adſciſcantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam ſtatim ad æqualitatem, ex qua, ſi termini æquales cum differentia propoſita coaceruentur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis ſubducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino ſublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 20.27.34. cuius differentia eſt 7. ſi 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. demetur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erũt alij duo termini æquales. 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmeticæ proportionalitatis habere debent, conficietur ipſa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

	20	27	34
	20	20	20

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat ſecundus terminus. Eidem denique minori extremo adiiciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui ſi differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et ſi eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. conſtabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15.15.15. ſi ex ea conſtitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia ſit 20. addatur hæc differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas ſecundum terminum 35. Quod ſi eadem differentia duplicata, hoc eſt, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adjciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem eſt 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

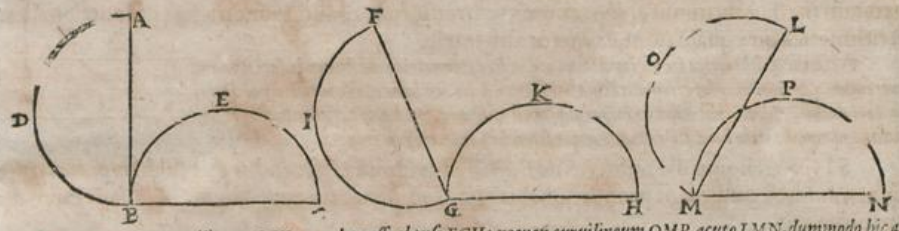
Differentia 20.	15	15	15
	15	35	55

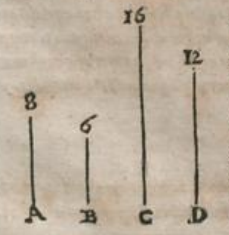
ATQVE pauca hæc prælibaſſe hoc loco ſufficiat ex infinitis, quæ de immenſa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibuſq; proprietatibus dici poſſent. Plura enim & quidem ſcitu periucunda in pleniore noſtra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

V.

RATIONEM habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe mutuo ſuperare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum alijs auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet, adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles,
a 20. primi a erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoq; circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; At q; è contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectam esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porro lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoq; inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus ABC, contentus rectis æqualibus AB, BC, circa quas semicirculi describantur ADB, BEC. Quoniam igitur anguli semicirculorum ABD, CBE, sunt æquales; addito communi angulo mixto ABE, fiet angulus totus curuilineus DBE, toti angulo recto ABC, æqualis. Similter ostendes, angulum curuilineum IGK, æqualem esse obtuso FGH; necnon curuilineum OMP, acuto LMN, dummodo hic ab angulis semicirculorum LMO, NMP, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea LM, & curua MP. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere: quare proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunq; multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neq; superficies cum corpore, eandem ob causam, vllam habebit proportionem. Deniq; non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus, quantumuis multiplicatus minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiam minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram posit superare, alias vero non, etiamsi in eodem quantitatis genere videantur comprehendi, quales sunt linea finita, & infinita, angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob causam in plerisq; demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alterum excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, siue infimo continentur. Hac enim ratione non esset proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineasque, cum non sub eodem contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Sileant quoque qui existimant, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, vt Logici loquuntur; ita vt satis sit, vt duæ quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel lineæ, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ existant: quorum vtrumque falsum esse, liquido ex hac definitione constat.





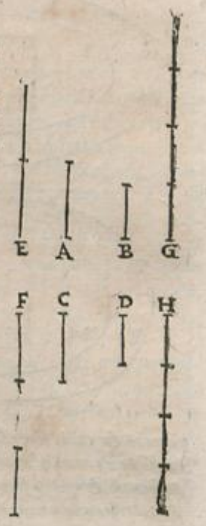
PERSPICVVM est ex his, quam inepte, & quam falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem duæ quæcunque propositæ quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quam illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.

VI.

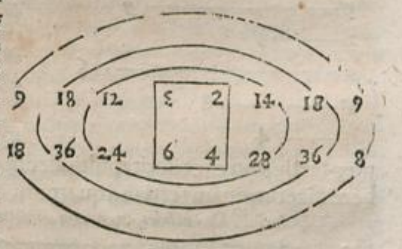
In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum

cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualisecunque sit hæc multiplicatio, vtrumq; ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt: si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B secunda; C, tertia; & D, quarta sumanturq; primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, & quartæ alia quæcunq; æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quod si iam inter se conferantur sumpta æque multiplicia ea, quæ inter se respondent, vt multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est, F, & H; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se habere, vt si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H. multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique, si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quam H: (quod est vtrumq; ab vtroq; vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & vt nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale. Denique vt nunquã E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æque multiplicia quæuis accepta, perpetuo se se ita habere, vt dictum est; dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinẽ B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex D, deficere à multiplici G, non autem multiplex E, deficere à multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandẽ habere proportionẽ, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuũ.



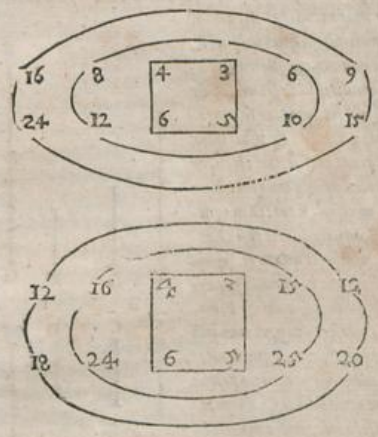
ITAQVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionẽ, concludantur quatuor quãtitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs seruatur) quæcunq; æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuscunq; æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoq; necesse est, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eãdem defectus, æqualitatis, aut excessus conditionem, Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perspiciatur, quonam pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionem habentibus: quædam æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, à quibusdam æque multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, vtrumq; ab vtroq; vna deficiant; alia vero vna æqualia sint; alia denique vna excedant, si ea sumantur, quæ inter se respondent; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. sumanturq; primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æque multiplices, vt septupli 14. & 28. Vides igitur tum 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij à 28. multiplice quarti. Rursus primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nimirum sextupli, 18. 36. Item secundi, & quarti sumantur alij æque multiplices, vt noncupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, superare 8. multiplicẽ quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus, in quacunq; sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.



CAMPANVS vero atq; Orontius, longe aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle, tum demũ quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum primæ, & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, vtrumq; ab vtroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum æque multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandem proportionem habet multiplex primæ ad multiplex secundæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demõstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplicia eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoq; habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, vt propriis locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, vt exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex primæ deficit à multiplici secundæ, vel æquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale sit, vel excedat, quicunq; sit ille defectus, excessusue, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici secundæ deficere, multiplicem vero tertiæ non deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem esse multiplici secundæ, multiplicem vero tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem esse multiplice secunda,

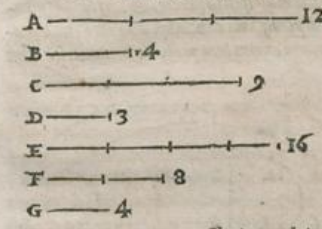
cundæ, ad multiplicem tertiæ multiplici quartæ non maiorem. Propositis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æque multiplicia sumpta, vt dictum est, perpetuo eam conditionem in defectu, æqualitate, & excessu seruant, dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem ; quicquid sit de earum æque multiplicium proportione, quæ nunc non consideratur: sed quarto postea Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumue esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nam si de quocunq; intelligeretur, essent ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, vt pote 4. & 6. sumantur æque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti nempe 3. & 5. æque multiplices, dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secundi, quam 12. multiplex tertij 10. multiplicem quarti. Idemq; cernitur, si primi, & tertij sumãtur quadrupli 16. & 24. secũdi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, vt æque multiplicia accepta vna excedant sese quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non sese excedant proportionaliter, vt constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quãuis enim numeri æque multiplices ab eo prolati sese vna excedant, tamẽ quam plurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidẽ multiplicem secũdi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si n. in eius exemplo, primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quintuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, sed deficiet. Quod si primi, & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secundi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici secundi; At vero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur qualibet æque multiplicia dictorum numerorum sic se habere: vt si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoq; necessario multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æque multiplicibus ita esse contingat: non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius ex 8. definitione constabit.



CÆTERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem. si modo secunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunque sumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab æque multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel æqualia sunt, vel vna excedunt, &c.

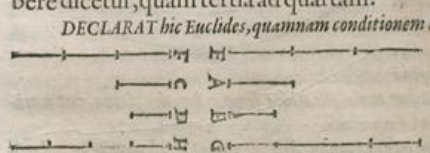
VII. EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.



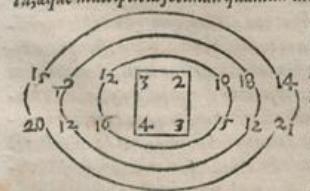
VT si magnitudinũ A, B, C, D, eadẽ sit proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicẽtur ea magnitudines proportionales. Eadẽ ratione, si eadẽ sit proportio E, ad F, quæ F, ad G, dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sũt autẽ quædã magnitudines, pportionales continuæ inter quas reperitur, pportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G: Quædã vero proportionales sunt nõ continuæ, sed discretæ, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his n. interruptio fit proportionũ; in illis vero nequaquã, vt dictũ est in 4. definitione.

VIII. CVM vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicẽs. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprehensumq; fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplice secundæ multiplex autẽ tertiæ nõ esse maius multiplice quartæ, sed vel minus, vel æquale; dicetur maior esse proportio primæ magnitudinis ad secundã, quã tertiæ ad quartã: vt perspicuũ est in appositio exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt triplicia E, & F; secundæ vero B, & quartæ D, quæ adrupliciæ G, & H. Et quoniã E; multiplex primæ maius quidẽ est quã H, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius non est quã H, multiplex quartæ, immo minus; dicetur maior esse proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundã q̃ C, tertiæ, ad D, quartam.



NON est autẽ necesse, vt quatuor magnitudinũ, prima ad secundã dicatur maiorẽ habere proportionẽ q̃ tertia ad quartã, æque multiplicia secundũ quamuis multiplicationẽ sic se habere, vt multiplex quidẽ primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, vt secundũ aliquã multiplicationẽ ita se habeant. Potest namq; interdũ fieri, vt tã multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quã multiplex tertiæ multiplice quartæ. Itẽ vt & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen q̃a hoc nõ contingit in omni multiplicatione, sed aliquãdo multiplex primæ superat qdẽ multiplex secũdæ, at multiplex tertiæ vel minus est, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorẽ dicetur habere proportionẽ prima magnitudo ad secundã, quã tertia ad quartam, non autem eandem, vt perspicuum est in appositio exemplo.



Itaq; vt quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, vt æque multiplicia earũ, iuxta quascunq; multiplicationes accepta, vel vna deficiant, vel vna æqualia sint, vel vna excedant, vt in 6. def. fuit expositum: Vt autẽ maiorẽ dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, vt secundum aliquam multiplicationem, multiplex

prima

primæ excedat multiplex secundæ, multiplex vero tertiæ non superet multiplex quartæ quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia primæ, ac tertiæ vna excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ.

QVOD si quando è contrario multiplex primæ deficiat à multiplice secundæ, non autem multiplex tertiæ à multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere porportionem, quam tertia ad quartam: quamuis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ vna deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. & VIII. QVATVOR MAGNITUDINES proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, vt est tertia ad quartam, cum æquemultiplicia primæ ac tertiæ iuxta quamcumque multiplicationem, & æquemultiplicia secundæ ac quartæ iuxta quamcumque etiam multiplicationem accepta ita se habent, vt quotiescunque multiplex primæ maius est quam multiplex secundæ, multiplex quoq; tertiæ maius sit quã multiplex quartæ; quotiescunq; vero multiplex primæ æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertiæ æquale sit multiplici quartæ; quotiescunque denique multiplex primæ minus est quam multiplex secundæ, multiplex etiam tertiæ minus sit quam multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertiæ ad quartam, cum aliquæ æquemultiplicia primæ ac tertiæ, & alia æquemultiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, vt multiplex primæ sit maius quam multiplex secundæ, at multiplex tertiæ maius non sit, quam multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc possit, quod ex illo excessu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similitudo proportionum, dissimilitudoue: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æquemultiplicia ita se habent, vt dictum est, quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quam commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus esse, vt ratio asseratur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius, definitionem traditam eidem conuenire, demonstretur. Id quod in aliis etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. libr. 1. angulum rectum appellauit eum, qui sit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima libr. 3. definiuit similia circulorum segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tunc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent. quam explicauit, ita vt nunquam ei credendum sit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionem, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, vere magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solum Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulo accuratius, Euclidem recte eo modo definiuisse magnitudines proportionales, atque adeo sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, vere eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio. 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionem; Rationalem, quæ inter quantitates commensurabiles existit, atque adeo omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalem, quæ inter quantitates incommensurables existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Sit igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secundæ, & tertia quartæ, æquemultiplex est. vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe (vt nos ad eam defi. addidimus) cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter, continet, eademque insuper illius partem, vel easdem partes. Non proportionales vero magnitudines ita definire potuisset. Magnitudines non proportionales sunt, hoc est, prima ad secundam habet maiorem proportionem, quam tertia ad quartam, cum prima secundæ magis multiplex est, vel maior pars, maiores ue partes, quam tertia quartæ: Vel certe cum prima secundam sæpius continet, quam tertia quartam, siue eadem pars, aut partes vtrobique supersint, siue non; Vel cum prima secundam toties continet, quoties tertia quartam. sed prima maiorem insuper partem, maiores ue partes secundæ includit, quam tertia quartæ. Potuisset, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales. si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eadem, vel diuersa, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, aliisq; scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesue: Vel certe secundum quod illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, de quibus supra egimus; tum ex iis, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM vero Euclides non solum proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quod in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex esse potest maioris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere; Minor item maioris neque pars esse potest, neque partes; quippe cum magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, possint habere. Quocirca coactus est se se conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cum omnis proportio rationalis, siue magnitudinum commensurabilium, sit, vt proportio numeri ad numerum, vt libr. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam. est inuestigare aliquid, quod certum sit conuenire quibuslibet quatuor numeris siue magnitudinibus commensurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeo vt si idem illud conuenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quam quælibet quatuor magnitudines commensurabiles eandem habentes proportionem, vel non eandem, necessario habere demonstratur. Neque enim aliunde cognoscere, vel ex-

plicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certum sit conuenire, vt diximus, numeris quibuscũq;, vel magnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudoue proportionum cernitur. Quemadmodum quia quando in circulorum segmentis anguli æquales existentes. sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorum, sunt quoque ipsa segmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem libr. 6. demonstrabimus; vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoque similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, vere illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem partes circulorum, licet hoc in segmentis, quando anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, non cernatur, quod tunc segmenta neque eadem pars, neque eadem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existant. Neque enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse aut dissimilia, nisi angelorum in eis existentium æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabilium colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quamquam hæc similitudo in segmentis, quæ circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis, quæ circulis sunt commensurabilia; ita non recte fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hæc proportionum similitudo non tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam propositis, quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti æquemultiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus. si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorem quoque esse necessario multiplice quarti; Et si ille æqualis est, hunc quoque esse æqualem; & si minor, minorem: Et contra quia, propositis quatuor numeris, sumptisq; æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationẽ. itẽ æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem. si multiplex primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit, quam multiplex quarti: Et si illo existente æquali, hic quoque æqualis sit, & illo existente minore, hic similiter minor existat, perpetuo verum est, quatuor numeros esse proportionales: Rursus quia propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionem habeat, quam tertius ad quartum, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, necessario interdum accidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit maior multiplice quarti: Et contra quia quatuor propositis numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti. sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse proportionem primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita se res semper habet in numeris, atq; adeo & in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt contrarium nunquam inueniatur, non immerito dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommensurabiles, eandem habere proportionem, cum sumptis æquemultiplicibus primæ ac tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundæ ac quartæ secundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuo deprehenditur, multiplicem tertiæ maiorem esse multiplice quartæ, quotiescunque multiplex primæ maior est multiplice secundæ; multiplicem vero tertiæ æqualem esse multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis est multiplici secundæ; multiplicem denig; tertiæ minorem esse multiplice quartæ, hoc ipso, quod multiplex primæ minor est multiplice secundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunque magnitudines tam commensurabiles, quam incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionem primæ ad secundam, quam tertiæ ad quartam, cum, sumptis æquemultiplicibus, vt dictum est, interdum contingit, multiplicem primæ esse maiorem multiplice secundæ, multiplicem vero tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autẽ in non proportionalib. perpetuo reperitur, vt iamiã demonstrabimus; nullumq; aliud indicium habere possumus, quo magnitudines incõmensurabiles cognoscantur esse proportionales: vel nõ proportionales præsertim cũ magnitudines incommensurabiles aliis magnitudinibus, quæ hoc modo proportionales esse demonstrantur, sæpenumero alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum sit, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum æquemultiplices ita se habent, vt in 6. definit. dictum est, sint proportionales, &c. Nisi enim hoc verum esset, sequeretur haud dubie ex illa proportionalitate aliquando absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur, verissima esse plerumque alia via, vt diximus, ostenduntur; vt postea etiam demonstrabimus. Quæ cum ita sint, liquido constare existimo, cur Euclide: in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem recte) magnitudinum propositarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus Geometrice demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. definit. aut ex demonstrationibus huius libr. 5. pendent, vt commodissime ante libr. 5. possint demonstrari; atq; adeo hic assumi, vt iam demonstratæ. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertii æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit quoque multiplex tertii maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi, erit & multiplex tertii æqualis multiplici quarti; si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertii multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunque hæc multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quam G, multiplex secundi B, maiorem quoque esse F, mul-

multiplicem tertij C, quam H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualem quoque esse F, ipsi H. Si demique E, minor sit quam G, minorem quoque esse F, quam H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D: [b] Vt autem A, ad C, ita est E, ad F; quod idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquemultiplices. Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt E, ad F, ita G, ad H. [c] Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quam G, erit quoque F, maior quam H, vt in primo exemplo. Si vero F, æqualis est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, æqualis, vt in secundo exemplo: Si demique E, minor est quam G, erit quoque F, minor quam H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.

E, 9	A, 3	C, 6	F, 18	
G, 4	B, 2	D, 4	H, 8	
				a 13. septimi.
E, 18	A, 3	C, 6	F, 36	b 17. septimi.
G, 18	B, 2	D, 4	H, 36	
E, 12	A, 3	C, 6	F, 24	c 13. septimi.
G, 14	B, 2	D, 4	H, 28	

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quam tertii ad quartum, si sumantur æquemultiplices primi ac tertii, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit, quam multiplex secundi, multiplex autem tertii non maior, quam multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quam tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, vt sumptis æquemultiplicibus primi A, vt tertij C, itē æquemultiplicibus secundi B, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quam multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quam multiplex ipsius D, quarti, multiplicantes enim se mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. libr. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fietque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronunciat. 9. libr. 7. hoc est numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E, tertium, [a] erit vt D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.

K, 56	H, 7	O, 21	I, 28	
F, 8	G, 1	A, 3	C, 4	
	E, 6	B, 2	D, 3	
M, 54	N, 6	P, 20	L, 30	
K, 160	H, 440	O, 60	I, 20	
F, 8	G, 22	A, 3	C, 1	
	E, 80	B, 8	D, 10	a 19. septimi.
M, 160	N, 80	P, 24	L, 39	

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunciat. 7. libr. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunciat. 11. libr. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F G, fietque idcirco ex B, in F G, numerus, quem B, metitur per F G, ex pronunciatio 9. lib. 7. hoc est numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F G, quartum, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, [b] erit vt B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad F G, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita F G, ad E. Quoniam ergo est, vt F G, ad E, ita A, ad B; Est autem proportio A, ad B, posita maior, quam C, ad D; erit quoque proportio F G, ad E, maior quam C, ad D: Ostensum autem est, esse vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio F G, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus F G, maior erit numero F: quæ omnia ex iis, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicue consequuntur. Superet igitur F G, ipsum F, numero G.

b 19. septimi.

SVMANTVR iam ipsorum F, G, C, æque multiplices K, H, I, ea lege, vt H, sit quidem maior quam E, at I, non minor quam D, eritque ex scholio propos. 5. lib. 7. totus K H, ita multiplex totius F G, vt est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æquemultiplices L, M, N, ea lege, vt L, sit multiplex ipsius D, proxime maior quam I, hoc est, tales æque multiplices, vt subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quam I, sed vel æqualis, vt in secundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniam ostensum est ita esse D, ad C, vt E, ad F; & ita est C, ad I, vt F, ad K, ex constructione, quod I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æquemultiplices; [a] erit quoque ex æque, vt D, ad I, ita E, ad K.

K, 56	H, 7	O, 21	I, 28	
F, 8	G, 1	A, 3	C, 4	
	E, 6	B, 2	D, 3	
M, 54	N, 6	P, 20	L, 30	
K, 160	H, 440	O, 60	I, 20	a 14. septimi.
F, 8	G, 22	A, 3	C, 1	
	E, 80	B, 8	D, 10	
M, 160	N, 80	P, 24	L, 39	

PRÆTEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque, D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita est L, ad M N; quod idem numerus ipsos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cum L, M N, sumpti sint ipsorum D, E, æquemultiplices: Et eadem de causa, vt C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. libr. 7. erit quoque, vt L, ad M N, ita I, ad K, & permutando, vt L, ad I, ita M N, ad K.

QVIA ergo est, vt totus L, ad I, ita totus M N, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex M N, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. scholij propositio 22. lib. 7: vt reliquus ex L, ad I, ita reliquus ex M N, ad K:

ad K: Est autem reliquus ex L, non maior quam I, sed vel minor, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in posteriori; propterea quod reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proxime maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & reliquus ex MN, maior non erit quam K; atque idcirco si ex MN, detrahatur N, ipsi E, æqualis, erit reliquus M, vel minor ipso K, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in posteriori. Cum ergo H, multiplex ipsius G, sit maior quam E, vel N, ex constructione; erit totus KH, toto MN, maior.

DENIQVE sumpto O, ita multiplici ipsius A, vt KH, multiplex est ipsius FG, vel I, ipsius C: Itẽ P, ita multiplici ipsius B, vt MN, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniam ostensum est, ita esse FG, ad E, vt A, ad B, sumptique sunt ipsorum FG, & A, primi ac tertij, æquemultiplices KH, & O; item ipsorum E, & B, secundi ac quarti æquemultiplices MN, & P, sequitur ex antecedente propositione si KH, maior est quam MN, ipsum quoque O, maiorẽ esse quam P. Cum ergo KH, ostensus sit maior quam MN, erit quoque O, maior quam P. Quocirca cum O, I, sint æquemultiplices ipsorum A, C, primi ac tertij; & P, L, æquemultiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratumque sit, maiorem esse O, quam P, sit autem I, minor quam L, ex constructione; fieri potest, vt existente maiore proportione primi A, ad secundum B, quam tertij C, ad D, quartũ, sumptisq; æquemultiplicibus, vt dictum est, multiplex primi, nimirum O, maior sit quam P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quam L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

QVOD si minor sit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, sumanturque æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri quoque potest, vt nonnunquam mutiplex primi sit minor multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit multiplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, demonstratumque est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quam L, multiplicem secundi D, at O, multiplicem tertij A, maiorem esse quam P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisq; æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertii maior quoque sit necessario, quam multiplex quarti: & illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoque perpetuo minor sit: erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertii ad quartum.

E, 9	A, 3	C, 6	F, 18
G, 4	B, 2	D, 4	H, 8
E, 18	A, 3	C, 6	F, 36
G, 18	B, 2	D, 4	H, 36
E, 12	A, 3	C, 6	F, 24
G, 14	B, 2	D, 4	H, 28

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices qualescunque E, F. Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunque etiam hæc sit multiplicatio. Dico si E, F, multiplices primi ac tertij semper sint vel maiores, quam G, H, multiplices secundi & quarti, vel æquales, vel minores, ita esse A, primum ad B, secundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, quam C, ad D, fieri posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, vt E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quam G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quam H, multiplex quarti. Quod est contra hypothesin. Est ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat ostendendum.

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque primi ac tertii æquemultiplicibus, item secundi & quarti æquemultiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem vero tertii non maiorem multiplice quarti; Maior erit proportio primi ad secundum, quam tertii ad quartum.

E, 21	A, 3	C, 4	F, 28
G, 20	B, 2	D, 3	H, 30

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquæmultiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi A, maior quam G, multiplex secundi B, at F, multiplex tertij C, non maior quam H, multiplex quarti D. Dico maiorem esse proportionem primi A, ad B, secundum, quam C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior est E, quam G, at F, non maior quam H, erit maior proportio E, ad G, quam F, ad H, cum illa sit proportio maioris inæqualitatis. hæc vero vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoque permutando maior proportio E, ad F, quam G, ad H.

a 17. septimi.

a Est autem, vt E, ad F, ita A, ad C, quod idem numerus ipsos A, C, multiplicans procreauerit E, & F; quippe cum E, F, æquæmultiplices sint ipsorum A, C; Eademque de causa est, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quam B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod ostendendum erat.

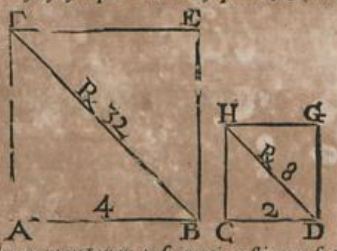
QVOD si multiplex primo sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.

E, 28	A, 4	C, 3	F, 21
G, 30	B, 3	D, 2	H, 20

EADEM enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quam G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quam H, multiplex quarti, &c.

SED

SED demonstremus iam, in magnitudinibus, quæ aliis incommensurabiles sunt, & quæ ex definit. 6. proportionales sunt eam plerumq; reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo vt vere proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. euenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulo ante demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, rectæ CD, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata ABEF, CDGH; cum diametris BF, DH. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati ABEF, quam quadratum diametri DH, quadrati lateris CD, hoc est, quadrati CDGH, duplum est; si ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplū, 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cum ea maior sit quam 5. minor autem quam 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem CDGH, erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa DH, erit radix quadrati numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit; cum ea maior sit quam 2. minor autem, quam 3. &c. ita vt proportio tam AB, ad BF, quam CD, ad DH, sit irrationalis, diameterque propterea BF, lateri AB, & diameter DH, lateri CD, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex iis, quæ l. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cum idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.



RVRSVS quoniam diametri BF, DH, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam, vt in scholio propos. 34. libr. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH, CHD, semirecti, ideoq; inter se æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, sint æquales, æquiangula erunt triangula ABF, CDH. Quare [a] erit, vt AB, ad BF, ita CD, ad DH; [a] 4. sexti. Et permutando, vt AB, ad CD, ita BF, ad DH. Est autem posita recta AB, rectæ CD, dupla. Igitur & BF, ipsius DH, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. eo deducti simus, vt credamus diametrum BF, diametri DH, esse duplam, quamuis vtraque diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4. lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse AB, ad BF, vt CD, ad DH, pendet ex propos. 2 & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autem propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, vt ex proposit. 16. libr. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum BF, diametri DH, vere duplam esse, vt ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, quod latus AB, lateris CD, duplum ponitur, etiamsi proportio tã lateris AB, ad diametrum BF, quam lateris CD, ad diametrum DH, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita cognoscemus. Quoniam latus AB, lateris CD, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Posito ergo quadrato AE, 4. erit quadratum CG, 1. Et quia tam quadratum diametri BF, quadrati AE, quam quadratum diametri DH, quadrati CG, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri BF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atque idcirco illud huius quadruplum erit. Quocirca ex scholio propos. 4. lib. 2. recta BF, rectæ DH, dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius libr. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos peruenisse ad conclusionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: vt dubium non sit, quin magnitudines vere proportionales sint, quarum aquemultiplicia eam conditionem habent, quam definitio 6. præscribit. Porro ex regulis quoque numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum BF, hoc est, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum DH, id est, ad R. 8. Nam siue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens sit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denominat; siue R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atque hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. huius libr. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæres argumento rursum est, magnitudines, quibus defin. 6. huius lib. conuenit, vere esse proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuo consentire comperitur, vt iis, qui in Algebræ præceptis versati sunt, notissimum est.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitum secetur, gignere possit integrum numerum 32. hoc modo facile demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{1}{7}$. hoc modo $5\frac{1}{7}$. reuocetur que, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{36}{7}$. Certum autem est, denominatorem 7. non metiri numeratorem 38. Alioquin diuisis 38. per 7. fieret. Quotiens numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, quam denominator 7. in se ducatur.) gignatur q; fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt ostendimus, [a] non metietur quoque quadratus 49. quadratum [a] 16. Octa-
1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei [ui.
adhæret bit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratum 1444. cuius contrarium demonstrauimus. Atq; eadem ratione demonstrabitur, quemcunq; numerum integrum cum fractione qualibet in seipsum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quod si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se dicatur, producetur semper fractio, cuius numerator etiam minor est denominatore. Nam cum numerator fractionis productæ sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, si autem datæ fractionis numerator minor denominatore, erit quoq; illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{3}{4}$. in se gignitur

tur fractus numerus $\frac{4}{8}$. cuius numerator denominatore minor est. Itaq; quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio $\frac{200}{25}$. quæ 4. integras vnitates constituit.

IX.

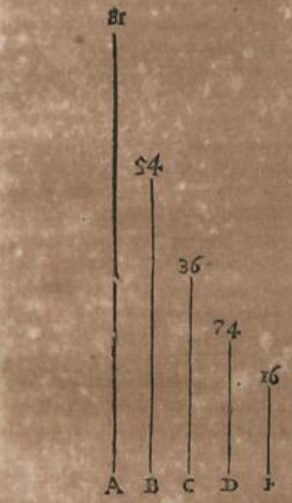
PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.



QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines; At vero si fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atq; hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunq; solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.



VELVTI ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D: & D, ad E: proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, ad D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atq; idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam: Sic quoq; proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD ſi è contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, ſi proponantur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplam proportionis primæ quantitatis ad ſecundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, eſſe triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam, &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad ſecundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, vt diximus. Non autem intelligit, illam duplam eſſe huius, ne Theorema proponeret, quod merito quiſpiam concedere recuſaret, Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit eſſe quincuplam? At vero, illam dici huius duplicatam ad ſenſum expoſitum, nemo inficiabitur, eo quod bis ſit poſita, & continue, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor ſit, hæc autem maior? Nam per propoſ. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quam ad quantitatem 25. propterea quod 25. maior eſt, quam 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licet ſit eius quinta pars. Quare etſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio eſt eiuſdem dupla. Quemadmodū etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, ſit ſedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Denig; in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continue proportionalibus, qui fieri poteſt, vt proportio primi ad tertium dupla ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quod hæc ordine bis poſita eſt continue inter primum numerum & tertium.

SED

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamq; debere esse maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda sit necessario de proportione continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non est, vt aiunt, negq; proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. negq; proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hæc expositio non solum vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisq; in locis, triplicatam proportionem reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clarissimus est, vt alios omittam, in propos. 12. lib. 12. vbi demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata ratione esse diametrorum, quæ in basibus. Nam si referatur maior conus, vel cylindrus ad maiorem; necessario in secunda parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propos. 8. eiusdem lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit propositiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonstrantur habere rationum laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuersales, si solum de proportione maioris inæqualitatis essent intelligenda. Explicanda ergo est hæc definitio, vt nos exposuimus.

Itaq; hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentium librorum percipiantur, rebusq; possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propositione 20. lib. 6. constat, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est nōcupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur sphæras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propositis duabus sphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt sphæræ ipsæ proportionem millecuplam, cum hæc sit decuplæ triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem esse triplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius trigecuplam decuplæ esse triplam?

Cæterum proposita quacunq; proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio sedecupla dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis sub quadruplæ, in se, producantur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atq; ita de cæteris. Itaq; proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis positio, atq; ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ proportionis denominatore ter posito, & sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic 3. 3. 3. atq; ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicatæ exorietur ex denominatore quater posito: Quintuplicata ex eodem quinquies posito, atq; ita multiplicato, &c. Itaq; duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defin. agitur nihil aliud est, quam multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atq; sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continue proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atq; ita multiplicato, dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam in uersis ijsdem numeris, vt sint continue proportionales in proportione subquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter positio, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$ in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quam hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione subquadruplæ 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{1}{4}$. atq; ita proportio subsesqui-

Denominatores.	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

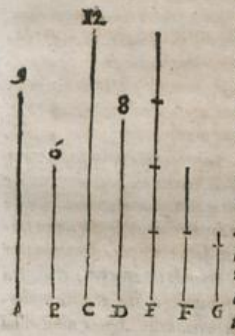
Denominatores.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Num. propor.	3	12	48	192

seſquitertia dicetur tripla proportionis ſubquadruplæ : ſicut etiam non proportio à 64. denominata, ſed proportio duodecuplæ, eſt proportionis quadruplæ tripla; propterea quod denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. ſed 12. Porro continuatis quotcunq; numeris proportionalibus, ſiue maiores cum minoribus, ſiue minores cum maioribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter ſe multiplicatis, demonſtrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum eſſe alterius, duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus eſt, vel triplus, &c. ita vt proportio decupla ſit dupla quintuplæ, & ſextupla ſit tripla duplæ, &c. oſtendemus ad finem lib. 9. tractatum q; eſt hoc argumentum copioſe à Rodulpho Voluminio in Diſputatione de proportione proportionum. Nunc ſatis ſit, hoc ipſum communi hominum iudicio ex ſenſibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens ſit 10. & Patiens 1. quis tam mente captus erit, qui non ſtatim intelligat, ſi idem Agens augeatur, vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorem habere potentiam reſpectu eiuſdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla cuius denominator 20. duplus eſt denominatoris 10. dupla eſt proportionis decuplæ, non autem proportio centupla, vt auctores contrariæ ſententiæ volunt. ſed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in ſe, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interijciuntur, vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiam ſi è contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia ſubdecuplam, ita vt Agens ſit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod ſit 2. duplo eſſe potentius reſpectu eiuſdem Patientis 10. quàm Agens 1? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem ſubquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis ſumpto, erit profecto proportio ſubquintupla proportionis ſubdecuplæ dupla, non autem illa, quæ ſubcentupla eſt. vt prædicti auctores volunt, cum hæc longe minor ſit, quam ſubdecupla. Dicetur tamen proportio ſubcentupla proportionis ſubdecuplæ duplicata, propter cauſam ſæpius explicatam, vt hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obſcure colligi poteſt, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, ſapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vero, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habere conditionem ſuperficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Deniq; proportionem, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interijciantur, obtinere naturam ſolidi, atq; adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus conſurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebræ regulam expoſuerunt.

XI.

HOMOLOGÆ, ſeu ſimiles ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.



Definiuit ſupra proportionalitatem, proportionum eſſe ſimilitudinem. Docet iam, non ſolum in proportionalitate quauis proportiones dici ſimiles; Verum etiam terminos ipſos, ſeu quantitates, ſimiles dici, homologasue; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, ſeu ſimiles proportione inter ſe, nec non conſequentes inter ſe, vt intelligeremus in quam plurimis demonſtrationibus, quænam latera figurarum inter ſe comparata, antecedentia debeant eſſe proportionum, & quænam conſequentia, vt in 6. lib. perſpicuum fiet. Si igitur eſt proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicetur quantitas A ſimilis quantitati C, & B, ſimilis ipſi D. Propter ſimilitudinem enim proportionum, neceſſe eſt, vtram q; magnitudinem antecedentem vel æqualem eſſe vtriq; conſequenti, vel eodem modo maiorẽ, aut minorem: Alias non haberet vtraq; antecedens ad vtram q; conſequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propoſitis, in quibus antecedentes minores ſunt eodem modo conſequentibus, vtpote dimidio minores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tam E, & F, homologæ ſunt, quam F, & G, vt conſtat. Atq; hanc ob cauſam Euclides in defin. 6. & 8. iuſſit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc eſt, antecedentium: Item alia æque multiplicia ſecundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum conſequentium. Hæ enim ſimiles ſunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione conſtat: in magnitudinibus vero non proportionalibus diſſimiles.

Orontius, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter ſe conferri poſſe & antecedentes magnitudines; & conſequentes; veluti in ſequentibus definitionibus patebit. Verum ſi verba definitionis diligentius ponderentur, & vſus eiuſdem in 6. lib. conſideretur, noſtram expoſitionem huic anteferendam eſſe, nemo dubitabit.

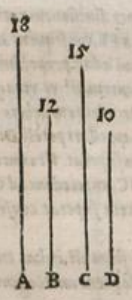
XII.

ALTERNA ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentẽ, & conſequentis ad conſequentem.

EXPLICAT hic quoſdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentiſſimus eſt vſus apud Geometras. Hi autem ſunt numero ſex. Primus dicitur proportio alterna, ſine permutata: Secundus, inuerſa, ſeu proportio è contrario: Tertius, compoſitio rationis, ſeu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuiſio rationis, vel diſiuncta proportionalitas; Quintus, conuerſio rationis, ſiue euerſa proportionalitas: Sextus deniq; vocatur proportio ex æqualitate, ſeu æqua proportio. Alterna igitur ſeu permutata proportio, inquit eſt, cum propoſitis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem eſſe proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem poſterioris, quam habet conſequens illius ad conſequentem huius. Vt ſi ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem eſſe proportionem A, ad C, quæ eſt B, ad D, dicemur argumentari à permutata proportione. Græci ſcriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt eſt A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, ſeu vicißim, erit

quo-

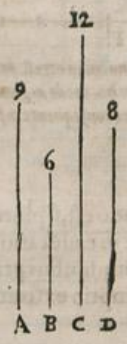
quoq; A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Caterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt vt assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D, cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur; possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis, & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

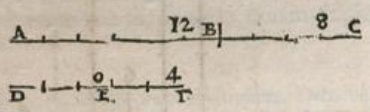
VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione In hac argumentatione sic ferè loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel è contrario, erit quoq; B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Rectè namq; licebit inferre: vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D, Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll. propos. 4. constabit.



XIV.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoq; esse proportionem totius AC, nempe antecedentis cum consequente, ad BC, consequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum consequente, ad EF, consequentem; dicetur huiusce modi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentione; Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



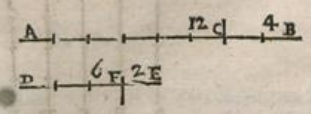
Huic modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt si est. vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimus q; Ergo vt AC, ex antecedente, & consequente conflata, ad antecedentem AB, ita est DF, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionem rationis conuersam.

Alter modus dici potest, Compositio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimus q; per compositionem rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad totam AC, ex antecedente, & consequente compositam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & consequente compositam. Atq; hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib. ostendemus.

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

VT si dicatur, quæ proportio est totius AB, ad CB, ea est totius DE, ad FE; Igitur erit & AC, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad CB, consequentem, vt DF, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad FE, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.



Possunt etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus; quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antecedens, refertur. Vt si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad

 FE, con-

FE, concludimusq; per diuisionem rationis conuersam; Ergo erit, vt CB, consequens ad AC, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita FE, consequens ad DF, excessum quo antecedens superat consequentem. Valere autem hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib,

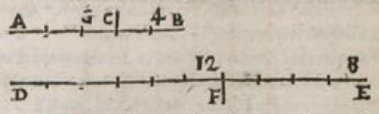
Perspicuum autem est, vt vtraq; harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Alias Diuisio fieri non posset.

Alter modus appellari potest Diuisio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. Ita se habet AC, ad AB, vt DF, ad DE. Igitur erit quoq; per diuisionem rationis contrariam vt AC, antecedens ad CB, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita DF, antecedens ad FE, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam à nobis ad propos. 17. huius lib.

Porro manifestum est, in hac Diuisione rationis contraria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentem superat.

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.



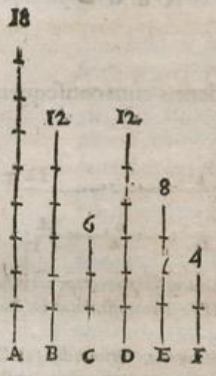
QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.

Liquido etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadē ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.



SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F. sintq; binæ ac binæ in eadem proportione, hoc est; A, ad B, vt D, ad E, & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis mediis, colliguntur habere vnam, eandemq; inter se proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, altero vero, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentib. definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad cōsequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

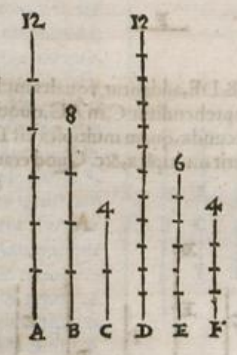
VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cum vtrobiq; conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eam argumentationem esse bonam.

XIX.

XIX.

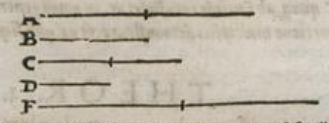
PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur huiusmodi proportio, Perturbata: quòd non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.



Vtuntur Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam, quod vt hic subijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.



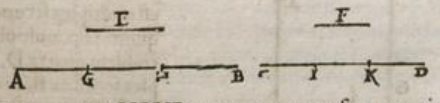
VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, vt Philosophi loquuntur, neq; absurdi aliquid ex eo consequatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

j.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æquè multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F, si AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi E, æquales, & CD, quoque in magnitudines CI, IK, KD, ipsi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, C, D, sint ipsarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in in AB, perfectè contineatur, quoties F, in CD, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus, constat) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot sunt magnitudines CI, IK, KD, Quoniam vero AG, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales CI, & F,[a] erunt AG, CI, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt GH, & IK, simul æquales ipsis E, & F, simul; Nec non HB, & KD, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, simul, in AB, CD, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul, ipsarum E, & F, simul, vt constat ex ijs, quæ in defin. 2. lib. huius scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 2. *prop.*

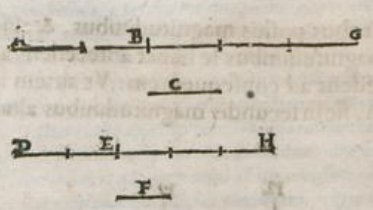
SCHOLIVM.

HOC idem demonstrabitur vniuersè propos. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Necessarium autem fuit, idipsum prius hoc loco in proportione multiplici demonstrare, quia ex eo aliæ propositiones demonstrandæ sunt, antequam propositio 12. possit demonstrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

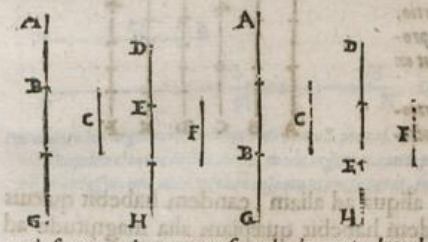
ij.

SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ, erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.



SIT magnitudo prima AB, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex DE, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est EH, sexta ipsius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex est, DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH. erunt totæ multitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH: Ideoq; tã multiplex est AB, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est DH, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.



QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta vero & sexta, æque multiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices fuerint secundæ & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota AG, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota DH, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim AG, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi DH, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, vt perspicuum est in appositis figuris. Si vero tam prima & tertia, quã quinta, & sexta æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius est primam & quintam simul, atq; tertiam & sextam simul, æquemultiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

HOC quoq; ab Euclide concludetur, in omni genere proportionis vniuerse propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.

iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.



a 2. quinti.

b 2. quint.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æquè multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in EG, GH, HI, & FK, KL, LM, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypotesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL. Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex est eiusdem secundæ B, quam multiplex est KL, sexta eiusdem quartæ D, [a] Erit & EH, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex FL, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum sit EH, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est FL, tertia quartæ D, vt proxime demonstratum est; sit autem & HI, quinta tam multiplex secundæ B, quam est LM, sexta multiplex quartæ D; [b] Erit & EI, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est FM, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ bina sumptæ eandem habent proportionem, siue rationalem, siue irrationalem, sed necessarium fuit ipsum prius hic in proportione multiplici demonstrare, vt insequens propos. 4. demonstrari posit.

iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si pro vt inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationẽ: situe E, F, ita multiplices sint ipsa-

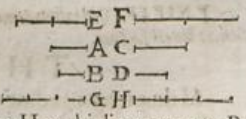
ipsarum A,C,sicut G,H,ipsarum B,D,sive non. His positis,constat ex defin.6.huius lib.si E,deficit a G,etiam F,deficere ab H; Et si E,æqualis est ipsi G,etiam F,æqualem esse ipsi H: Et denique si E,excedit G,etiam F, excedere H. Alioquin non esset,per defin. 6.eadem proportio A,ad B,quæ C,ad D,si earum æque multiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum vna deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ,aut vna æqualia esse, aut vna excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est si rursus E, statuatur prima magnitudo; G,secunda; F,tertia,& H,quarta; sumanturq: ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipsarum GH,quæcunq; etiam æque multiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere, vt vult definitio 6. Idem namq; est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia sumpta diximus, vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere. Capiantur enim rursus I,K ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I,K,æque multiplices ipsarum E,F,primæ ac tertiæ: *b* Erunt quoque ex æquo IK,æque multiplices ipsarum A,C,secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L,M,ipsarum B,D,æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B,secundam,quæ C, tertiæ ad D, quartam, ostensæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ A,C. Item L,M,æque multiplices secundæ & quartæ B,D, *c* fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsum L, etiam K, excedat necessario ipsam M: Idemq; ostendetur in quibuscunq; æque multiplicibus magnitudinum E,& F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunq; sint, *d* æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A,C, & B,D. Itaque cum I,& K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumq; sit, si I, multiplex primo minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque esse, quam M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione; *e* Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



a 3. quinti.
b 3. quinti.
c 6. defin. quinti.
d 3. quinti.
e 6. definit. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides defi. 13. explicauit; hoc est si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum BD, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, *f* necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si vtraq; E, F, minor est, quam vtraq; G, H, erit contra vtraque G, H, maior quam vtraque E, F, & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtriq; E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraque E, F, maior est, quam vtraque G, H, erit vice versa, vtraque G, H, minor, quam vtraque E, F. Itaque quoniam primæ B,& tertiæ D, sumpta sunt, æquemultiplicia G, H; Item secundæ A, & quartæ C, æquemultiplicia E, F, ostensumque est, G, H, vel vna excedere E, F, vel vna æqualia esse vel vna deficere, secundum quamcumq; multiplicationem ea multiplicia sumantur; *g* erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum.



f 6. defin. quinti.
g 6. defin. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio cum suo corollario vera est, sive duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C,D, sive non, vt ex demonstratione liquet.

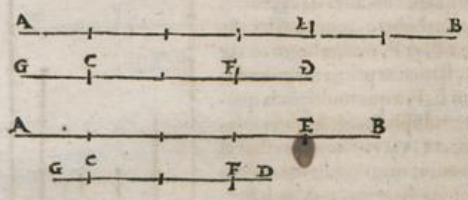
ORONTIVS *quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I,K, esse æque multiplices magnitudinum A,C; Item L,M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices secundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. vt ipse explicauit, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habēt proportionem; quod est absurdum, tum etiam, quia eodem modo statim à principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quam in his. Reijcienda est ergo huiusmodi demonstratio, vna cum expositione 6. definitionis, vt supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quam L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam M, quemadmodū & idem constat in æque multiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque aliis, si sumantur, pro vt inter se respondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illa 6. definitio conuenit.*



THEOR. 5. PROPOS. 5.

v. SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ : Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

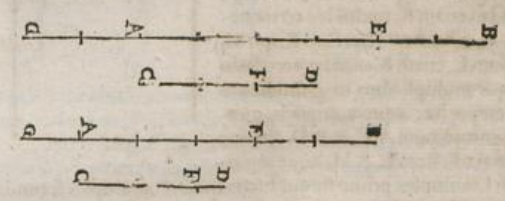
IT A multiplex ſi tota AB, totius CD, vt eſt multiplex AE, ablata ablatæ CF, ſiue AE, CF, ablatæ ſint totis AB, CD, commenſurabiles, vt in prima figura, ſiue incommenſurabiles, vt in ſecunda figura. Item ſiue AE, CF, compoſitæ ſint ex eiſdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figura, ſiue non ex eiſdem, vt in poſteriori figura. Dico reliquam EB, ita eſſe multiplicem reliquæ FD, vt eſt tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuſpiam magnitudinis, videlicet ipſius GC, vt eſt AE, multiplex ipſius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque ſunt multiplices ipſarum CF, GC; *a* erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipſius CF, hoc eſt omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB ipſius CD, quam eſt multiplex AE, ipſius CF. Igitur AB, tam eſt multiplex ipſius GF, quam multiplex eſt ipſius CD; *b* atque idcirco æquales ſunt GF, CD. Ablata igitur cõmuni CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipſius FD, quam multiplex eſt ipſius GC. Sed ita multiplex poſita fuit EB, ipſius GC, vt AE, ipſius CF, hoc eſt, vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex eſt reliqua EB, reliquæ FD, quam eſt tota AB, totius CD, quod eſt propoſitum.



a 1 quinti.

b 6. pron.

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, vt ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, eſſe ſic multiplicem, vt eſt tota totius. Poſita enim GA, ita multiplici ipſius FD, vt eſt AE, ipſius CF, vel vt tota AB, totius CD, quoniam AE, GA, æque multiplices ſunt ipſarum CF, FD; *c* erit tota GE, ſic multiplex totius CD, vt AE, ipſius CF: Sed ita quoque multiplex eſt AB, eiuſdem CD, vt AE, ipſius CF, ex hypotheſi. Æque multiplices ſunt igitur GE, AB, ipſius CD; *d* atque adeo inter ſe æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB: Ideoque æque multiplices ipſius FD; cum GA, ſit multiplex poſita ipſius FD: Atqui ita eſt multiplex poſita GA, ipſius FD, vt AB, ipſius CD. Igitur & EB, reliqua ſic erit multiplex ipſius FD, reliquæ vt AB, tota totius CD; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.



c 1. quintl.

d 6. pron.

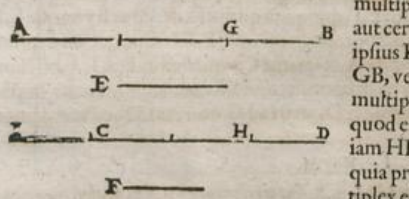
SCHOLIVM.

VNIVERSE id ipſum demonſtrabitur propoſ. 19. in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, & non tantum multiplicis, vt hic eſt factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

vj. SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

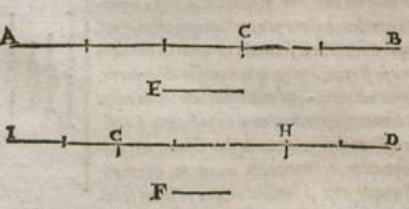
SINT magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipſi E, vel eius multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicẽ, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E. Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim, CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quã CH, tertia multiplex eſt quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartæ F; *a* erit AB, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, vt HI, tertia cum ſexta, multiplex eſt quartæ F. Atqui CD, ipſius F, erat quoq; tam multiplex, quam AB, multiplex eſt ipſius E. Æque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F. *b* Ideoq; æquales inter ſe. Quare dempta CH, communi remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod eſt propoſitum.



a 2. quinti.

b 6. pron.

SIT deinde GB, multiplex ipſius E. Dico ita quoq; eſſe multiplicem HD, ipſius F. Poſita namque CI; ita multiplici ipſius F, vt eſt multiplex GB, ipſius E; *c* erit vt prius AB, ita multiplex ipſius E, vt HI, multiplex eſt ipſius F. *d* Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, eſt ita multiplex ipſius F, vt GB, ipſius E, multiplex eſt, ex hypotheſi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipſius F, quã GB, ipſius E, multiplex eſt, quod eſt propoſitum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, &c. Quod oſtendendum erat.



c 2 quinti.

d 6. pron.

SCHO-

SCHOLIVM.

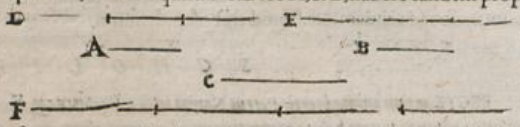
Hoc quoq; ostendemus vniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.

BREVIVS totam propos. ita demonstrabimus. Quoniam AB, CD. sunt ipsarum E, F, æque multiplices; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipsi E, quod sunt magnitudines in CD, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem EF, æque multiplices sunt; erunt quoq; in AG, tot magnitudines ipsi E, æquales, quod sunt magnitudines in CH, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde si GB, æqualis sit ipsi E, erit quoq; HD, ipsi F, æqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex HD, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E: quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in HD, existit, vt ostensum est.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij

ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoq; proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum æqualium A, B; *a* eruntq; D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, vtcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur DE, æquales sunt, sit vt vtraque vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; *b* erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.



a 6. pron.

b 6. defin. quinti.

EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B, vel vna æqualis sit, vel maior; *c* Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit, esse A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. Quod erat demonstrandum.

c 6. defin. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex defin. 6. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neq; enim per demonstrationem constat, vtramq; multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F, sed solum, cum illæ sint æquales, vtramque esse vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici F. Idemq; cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt: Vt merito illa expositio reiecta sit à nobis.

EODEM fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem. si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omisit, vtitur tamen eo nonnunquam in ijs, quæ sequuntur, perinde ac si in hac propos. 7. esset demonstratum. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C, & D, secundæ, & quartæ; d *erunt tam E, & F, inter se æquales, quam G, & H, inter se. Quare si E, multiplex primæ deficit à G, multiplice secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit.* e *Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod est propositum.*



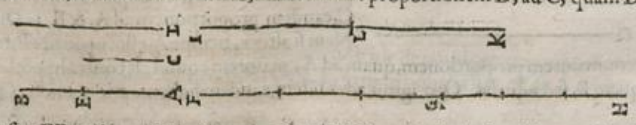
d 6. pron.

e 6. definit. quinti.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

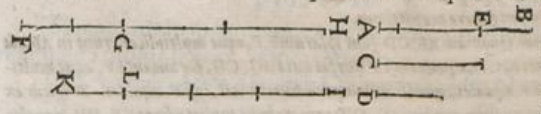
INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

SINT magnitudines inæquales, AB, maior & C, minor, tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad AB. Intelligatur n. in AB, magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis minori C, vt sit reliqua EB. Vtraque deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt GF, multiplex ipsius EB, maior quidem sit, quam D; At HG, multiplex ipsius AE, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas ipsarum EB, AE; quia dupla ipsius AE, esset minor, quam D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æquemultiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior est, quam D. Possent tamen produplis sumi quæcunq; aliæ maiores æque multiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarum BE, EA; *a* erit & tota FH, ita multiplex totius AB, vt FH, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & AE. Capiatur quoque ipsius D, multiplex IK, quæ proxime maior fit, quam HG, nempe dupla, vt in priori figura. Quòd si dupla maior non fuerit quam HG, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est IK, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla quam tripla minor est, quam HG, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo LK, quæ æqualis sit ipsi D, non erit IL, maior quam HG, (alias IK, non esset multiplex ipsius D, proxime maior quam HG; sed & IL, maior quoque esset quam GH. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse maiorem, quam HG, cum



a 1. quinti.

HG, cum HG, posita sit non minor quam D, hoc est quam IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipsi IL, vel maior. Et quia FG, maior est posita quã D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, maior quam LK. Cum ergo HG, non minor sit quam IL, vt demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quam IK.



Itaque cum FH, HG, sint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, maior quam IK, multiplex secundæ; At HG, multiplex tertiæ, non sit maior, quã IK, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi; (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, maior quam HG,) *b* erit maior poportio AB, primæ ad D, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

b 8. *def.*

QVONIAM vero è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda & AB, quarta) maior est quam HG, multiplex secundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non est, quã FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, maior sit, quam IK, vt ostensum est; *c* erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

c 8. *defin.*

SCHOLIVM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in sua Algebra de proportione agens, per hanc propos. 8. probari non posse, angulum rectum maiorem habere proportionem ad quemuis alium angulum, quam angulum semicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior sit angulo semicirculi: quia excessus anguli recti supra angulum semicirculi, qui est angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus superare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propos. demonstratione requiritur. Nam FG, multiplex excessus EB, superare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum semicirculi non dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui eiusdem naturæ non est cum vtroque angulo, quod ita multiplicari non posit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim: si ad lineam vnius palmi addi posset punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur proprie linea illa composita maior, quam linea vnius palmi, propterea quod excessus est indiuisibilis, & alterius naturæ; Item quemadmodum si ad figuram planam quamcumq; apponeretur linea vnius palmi, non diceretur hæc magnitudo ex diuersis magnitudinibus constata ad figuram illam planam habere proprie proportionem maioris inæqualitatis, quod excessus non sit eiusdem naturæ cum plana illa figura: Ita quoq; non habet angulus rectus proprie ad angulum semicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atque adeo rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersa naturæ, vt dictum est. Itaque non solum eæ magnitudines proportionem proprie non habent quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neque eæ proprie dicentur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solum proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoq; potest vtramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & quæ vix recte intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est, sphæram tangere planum in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus continue moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsque diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.

ix.

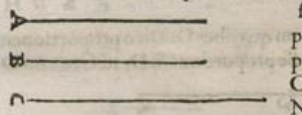
THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior & B, minor. *a* Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; *b* haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. *quinti.*

b 8. *quinti.*



SCHOLIVM.

CONVERTIT hæc præpositio 9. vtramq; partem theorematis 7. vt manifestum est.

x.

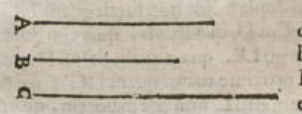
THEOR. 10. PROPOS. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B: Si enim A, foret ipsi B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, *b* haberet B, maior ad C, proportionem maiorem, quam A, minor ad eandem C, quod est cõtra hypothesin. Non est igitur A, æqualis vel minor quam

a 7. *quinti.*

b 8. *quinti.*



quam B, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; c alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hy- c 7. quinti.
pothesin. Neque vero B, maior erit quam A, d alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam d 8. quinti.
ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quam A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

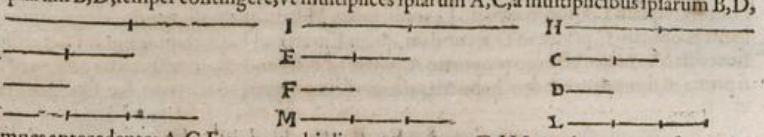
SCHOLIVM.

HÆC quoq; propositio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perspicuum est.

THEOR. 11. PROPOS. 11. xj.

QVÆ eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. hoc est sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, C; Item æquemultiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, vt multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedãt. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam vt E, tertia ad F, quartam; a fit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: b Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior est quoque H, minor quam L, vel æqualis, vel maior; propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et si G, æqualis est, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque aliis æque multiplicibus. c Quapropter erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.



a 6. defin. quinti. b 6. defin. quinti. c 6. defi. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione. Quæ eisdem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Vel si sit, vt A, ad B, ita C, ad D, sit autem E, ad F, vt A, ad B, & G, ad H, vt C, ad D: erit quoque E, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem sunt proportioni A, ad B, d erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D, e erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.

A,	3.	B,	2:	C,	6.	D,	4.
E,	9.	F,	6:	G,	12.	H.	8.

d 11. quint. e 11. quint.

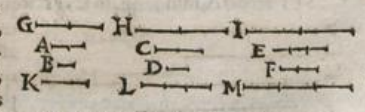
RVRSVS. si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se: sit autem vt A, ad B, ita G, ad H, & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H, I, ad K; & L, ad M, eadem inter se. Nam vt proxime in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quod hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad K, ita L, ad M; cum proportiones I, ad K, & L, ad M, eadem sint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales sunt. Item erit, vt G, ad H, ita L, ad M; cum hæ proportiones eædem sint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio est de pluribus.

A,	3.	B,	2.	C,	6.	D,	4.	E,	9.	F,	6.
G,	12.	H.	8.	I,	18	K.	12.	L,	30.	M.	20.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

SI sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentium ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequẽtium, a erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; b sit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quam K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, vel æquales vel maiores. c Quocirca vt est A, prima ad B, secundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.



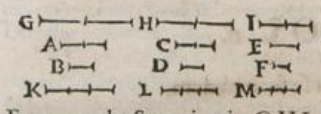
a 2. quinti. b 6. defin. quinti. c 6. defin. quinti.

THEOR.

xiij. ## THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsarum A, E; Item æque multiplicibus ipsarum B, F, contingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicē ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam; *a* fit vt si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, *b* non necessario I, excedit ipsam M. sed æqualis aliquando erit. vel minor; quod maior ponatur proportio C, primæ ad D, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur si G, excedit K, non necessario I, excedit M. *c* Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quamobrem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.



a 6. defin. quinti.
b 8. def. quinti.
c 8. defi. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, sextam; erit quoq; proportio A, primæ ad B, secundam minor quam E, quintæ ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quam E, ad F, hoc est, proportio E, primæ ad F, secundam maior quam C, tertiæ ad D, quartam; [d] *fit vt si I, excedit ipsam M, non necessario H, excedat ipsam L, sed aliquando deficiat, vel ei æqualis sit.* [e] *Sed si H, deficit ab L, vel æqualis est, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessario G, excedet ipsam K,* [f] *atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, secundam, quam tertiæ ad B, quartam, hoc est, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F. Quod est propositum.*

d 8. defi. quinti.
e 6. defi. quinti.
f 8. defin. quinti.

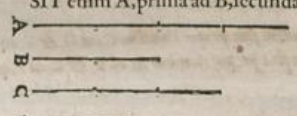
EODEM modo. Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

QVOD si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

xiv. ## THEOR. 14. PROPOS. 14.

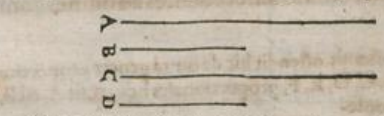
SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, secundam vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D. Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primum A, maior quam C, *a* eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam vt A, tertia ad B, quartam, proportio autem A, tertiæ ad B, quartam maior est, vt ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam: *b* Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. *c* Minor est ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod est propositum.



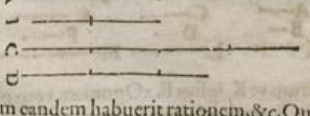
a 8. quinti.
b 13. quint.
c 10. quint.
d 7. quinti.

SIT deinde A, æqualis ipsi C; *d* eritque ideirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, *e* erunt quoq; inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod est propositū.



e 11. quint.
f 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C, *g* eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam: *h* Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; *i* Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



g 8. quinti.
h 13. quinti
i 10. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si secunda maior sit, vel æqualis, vel minor, quam quarta, erit quoq; eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quam tertia. Sit enim primum B, maior, quam D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem esse, quam C. Cum enim k 8. quinti. *B, maior sit quam D; k erit maior proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur est, vt prima A, ad secundam B, ita tertia C,*

ad quar-

ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est maior, quam C, quintæ ad B, sextam; [l] *erit quoq; proportio A, primæ ad B, secundam maior, quam C, quintæ ad B, sextam:* [m] *ac proinde A, maior erit, quam C, quod est propositum.*

l 13. quinti
m 10. quin.

DEINDE sit B, æqualis ipsi D, vt in secunda figura. Dico & A, ipsi C, esse æqualem. Cum enim B, ipsi D, sit æqualis [n] *erit C, ad B, vt C, ad D: Est autem quoq; A, ad B, vt C, ad D.* [o] *Igitur erit quoq; vt A, ad B, vt C, ad B; propterea q; A, ipsi C, æqualis erit. Quod est propositum.*

n 11. quint.
o 9. quinti.

TERTIO sit B, minor quam D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quam C. Cum enim B, minor sit quam D, erit [p] *minor proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur est, vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est minor, quam C, quintæ ad B, sextam,* [q] *erit quoq; proportio A, primæ ad B, secundam minor, quam C, quintæ ad B, sextam.* [r] *Igitur maior erit C, quam A, ac proinde A, minor erit, quam C. Quod est propositum.*

p 8. quinti.
q 13. quint.
r 10. quint.

BREVIS. Si B, maior est, quam D, & A, dicatur non maior, quam C. sed vel minor, vel æqualis, [s] *erit quoq; B, minor, quam D, vel æqualis. quod est contra hypothesin. Eadem q; ratio est in alijs casibus.*

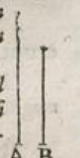
s 14. quint.

VEL sic. Si est A, ad B, vt C, ad D; erit conuertendo B, ad A, vt D, ad C. Ergo si B, maior est, vel minor, vel æqualis ipsi D; [t] *erit quoque A, maior, vel minor, vel æqualis ipsi C.*

t 14. quin.

NON demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel æqualis vel minor, quam secunda, tertiam quoq; maiorem esse vel æqualem, vel minorem, quam quartam; (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarum tum veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perspicuum est ob similitudinem proportionum. Hinc enim fit, si vtraque est proportio maioris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem, id est, primam ac tertiam, maiorem esse vtraque magnitudine consequente, hoc est, secunda ac quarta: Si vero vtraque proportio est æqualitatis, vtramque magnitudinem antecedentem vtrique consequenti æqualem esse. Si denique vtraque proportio est minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraque consequente esse minorem.

VERBI gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca si A, prima maior est quam B, secunda, erit & C, tertia maior quam D, quarta; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamen Geometrice ostendemus cum Federico Commandino, licet id non sit necessarium, ad propos. 16. huius lib.

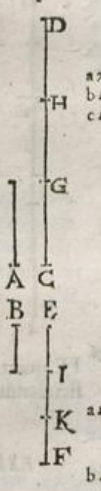


THEOR. 15. PROPOS. 15. xv.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B, continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CH, GH, HD, æquales ipsi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B. [a] eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & HD, ad KF, vt A, ad B, [b] ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad B, [c] ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 7. quinti.
b 11. quint.
c 12 quint.

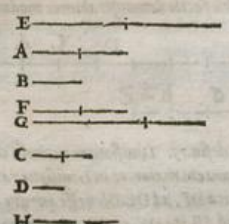


THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIC demonstratur alterna, siue permutata proportio. seu ratio, quæ defin. 12. explicata est. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ ac secundæ, æque multiplices E, F. Item ipsarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices G, H; [a] eritque E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipsæ [b] inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; [c] erunt & ipsæ eædem inter se; hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [d] Quare si E, prima maior est quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, secunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. [e] Est igitur A, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æquemultiplices C, secundæ & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

a 15. quint.
b 11. quint.
c 11. quint.
d 14. quin.
e 6. defin. quinti.

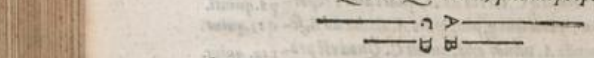


SCHOLIVM.

PORRO demonstratio huius propos. locum solum habet quando quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Nam si duæ A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoq; multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius; in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quam G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorũ generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionum ostendimus, recepimusq; non demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.



QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notum sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; C, tertiam maiorem esse quarta D, & si est æqualis, æqualem; & si minor, minorem. [f] *Erit enim per-*

f 16. quint. g 14. quin.

mutando, vt A, ad C, ita B, ad D. [g] *Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, secunda maior, quam D, quarta; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. Quod est propositum.*

SED & hæc demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14. factum est. Ita enim verum erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

xvij. ## THEOR. 17. PROPOS. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad EF. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; *a* eritque GI, ita multiplex ipsius AB, vt est GH, ipsius AC, hoc est, vt KL, ipsius DF, *b* ita quoque multiplex est KM, ipsius DE. Æque multiplices ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æque multiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE; *c* erit & HN, sic multiplex secundæ CB, vt LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item secundæ & quartæ CB, FE, æque multiplices HN, LO, *d* sit vt si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiã KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab LO, abatis communibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF: Idem IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartæ FE, ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptæ) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel vna deficere, vel æquales esse, vel vna excedere; *e* Erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam, quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

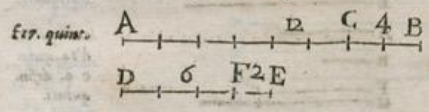


a 1. quinti. b 1. quinti. c 2. quinti. d 6. defin. quinti. e 6. defi. quinti.

SCHOLIVM.

EX his facile demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; esse quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF, quod ita patet. Quoniam est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, [f] *erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.*

f 17. quint.



NVLLO etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem defin. 15. Diuisionem rationis contrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, vt ea, quam proxime demonstrauimus. Sit enim vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico esse quoque per diuisionem rationis contrariam, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim

g 17. quint.

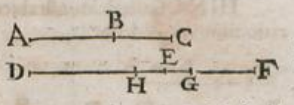
est vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. [g] *Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Ac proinde conuertendo rursus, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.*

THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoq; compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint n. diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse h. e. vt est AC, ad BC, ita esse DF, ad EF. Si n. nõ est, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad ali-

ad aliquam magnitudinem minorem ipsa EF, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF, ad GF; *a* Erit diuidendo quoque, vt AB, ad BC, ita DG, ad GF: Sed vt AB, ad BC, ita proposita quoque est DE, ad EF. *b* Igitur erit etiam, vt DG, prima ad GF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima maior sit, quam D, tertia, *c* erit quoque GF, secunda maior quam EF, quarta, pars quam totū. Quod est absurdū.



a 17. quint.
b 11. quint.
c 14. quint.

HABEAT deinde, si fieri potest, DF, ad HF, maiorem ipsa EF, eandem proportionem, quam AB, ad BC, ita DH, ad HE. Sed vt AB, ad BC, ita posita etiam est DE, ad EF. *e* Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor sit quam DE, tertia, erit quoque HF, secunda minor quā EF, quarta, totum quam pars, quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF, erit, vt AC, ad BC, quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

d 17. quint.
e 11. quint.

SCHOLIVM.

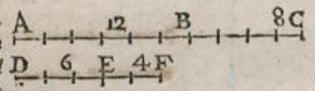
HANC propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem ferme ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo. Sint diuisæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, AC, ad CB, vt DF, ad FE. Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt AB, quidem ad CB, ita DE, ad FE. Sumantur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum AC, CB, DF, FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM. Item ipsarum CB, FE, aliæ æque multiplices IN, MO, [f] *eruntque rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, æque multiplices.* [g] *Item HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in præcedenti Theoremate ostensum est. Quoniam vero ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam, sumptæque sunt GH, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF. Item secundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices IN, MO,* [h] *sit vt si GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice secundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, deficiat ab MO, multiplice quartæ FE, & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GH, ab IN, quam KL, ab MO, additis communibus HI, LM, deficiet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, æqualis fuerit ipsi IN, & KL, ipsi MO; additis communibus HI, LM, erit & GI, ipsi HN, æqualis, & KM, ipsi LO. Et denig, si GH, excesserit ipsam IN, & KL, ipsam MO, additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipsam HN, & KM, ipsam LO. Quoniam ergo si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficit ab LO, multiplice quartæ FE, & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit,* [i] *erit AB, primæ ad CB, secundam, vt DE, tertia & FE, quartam. Quod est propositum. Itaq, si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.*



f 1. quinti.
g 2. quinti.
h 6. defin. quinti.
i 6. defi. quinti.

VERVM hæc demonstratio non recte colligit propositum ex defin. 6. propterea quod HN, LO, non sunt ita multiplices ipsarum CB, FE, vt multiplices acceptæ sunt IN, MO, earundem CB, FE. Vnde merito dubitare quis posset an secundum quamcunque multiplicationem æque multiplices seruent eam conditionem defectus æqualitatis, at g, excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit, quandoquidem in hac demonstratione liberum non est assumere ipsarum CB, FE, quascunq, æquemultiplices. sed tales duntaxat, quales consurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obyci non potest: quippe cum IN, MO, sumptæ sint ipsarum CB, FE, æquemultiplices qualescunque, ipsæq, eadem remanent æquemultiplices earundem CB, FE, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem præferenda est Euclidis demonstratio huic demonstrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eam studiosus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt bonam: præsertim cum ostensiua sit, illa vero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersam. Sit enim vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quog, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. [k] *Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE, quod est propositum.*



k 18. quint.

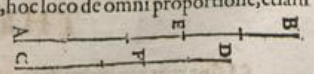
POSTERIOREM modum uocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, Dico per compositionem rationis contrariam, esse quog, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. [l] *Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

l 18. quinti

THEOR. 19. PROPOS. 19. xix.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum, ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

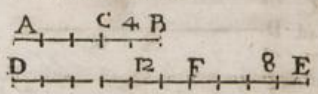
QVOD in propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, vt est tota AB, ad totam CD. Cum enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF, *m* erit & permutando AB, ad AE, vt CD, ad CF. *n* Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF. *o* Quare permutando rursus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totam CD, cum posita sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.



a 16. quint.
b 17. quint.
c 16 quint.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.



d 17. quin.

SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, *d* erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF,

a 18. quint. *e* ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt AB, ad CB, ita

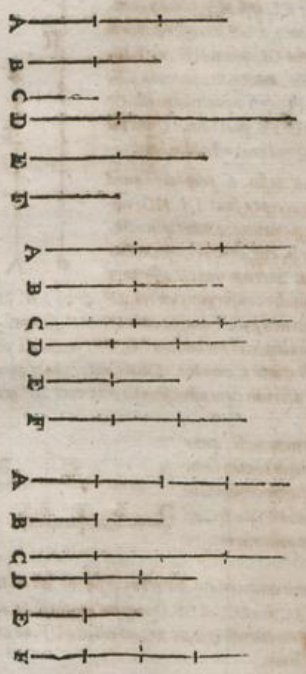
f 16. quinti. *DE, ad FE,* [f] *erit permutando, vt tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE. & Igitur vt tota AB, ad totam DE, ita*

g 19. quon. *erit quoq; reliqua AC, ad reliquam DF; Et proinde permutando rursus, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea vsurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates AB, CB, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores vero duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel superfices, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

xx. ## THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoq; minor erit.



a 8. quinti.
b 13. quint.
c 10. quint.
d 7. quinti.
e 11. quint.
f 9. quinti.
g 8. quinti.
h 13. quint.
i 10. quinti.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, *a* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita ad D, ad E. *b* Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E. Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E, *c* quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C æqualis *d* erit A, ad B, vt C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. *e* Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B: At vt C ad B, ita est F, ad E. per inuersam rationem. vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E: *f* Ideoque æquales erunt D & F. Quod est propositum.

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, *g* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. *h* Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quam C, ad B. Est autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E, *i* propterea que D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c.

SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & E, vt hic demonstrauit; sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

xxj. ## THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT,

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, primo maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta, F. Cum enim A, maior sit quam C, *a* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. *b* Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. *c* Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.



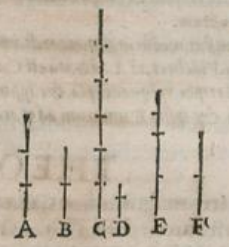
a 8. quinti.
b 13. quint.
c 10. quint.

SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, *d* erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. *e* Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; *f* atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.



d 7. quinti.
e 11. quint.
f 9. quinti.

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, *g* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. *h* Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; *i* ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.



g 8. quinti.
h 13. quinti
i 10. quinti.

SCHOLIVM.

CÆTERVM propos. 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D, non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demonstrare non poterat, vt ex propos. illa 23 patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxij.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadē ratione sumātur: Et ex æqualitate in eadē ratione erunt.

IAM hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoq; ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H: Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K: Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam, *a* erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; *b* erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; *c* fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M, æque multiplicibus secūdæ C, & quartæ F, vel vna æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia: *d* erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.



a 4 quinti.
b 4 quinti.
c 10. quint.
d 6. defin. quinti.

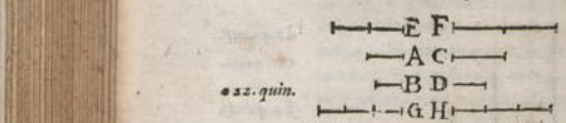
DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita

N,ita D,ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F: ponatur autem C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam eandem rationem: Item æque multiplices secundæ & quartæ ad primam ad tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æque multiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æque multiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturque E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices: Item G, H, aquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D; Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cum vtrobiq; sit eadem proportio multiplex; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; [c] *erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quod vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estque vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C,)* [f] *erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.*

a 22. quin.
f 22. quint.

DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt A, ad E, ita C, ad F, quod ex constructione vtrobique sit eadem proportio submultiplex; [g] *erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D: est* [h] *vt B, ad G, ita D, ad H, quod ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex;* [h] *erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.*

g 22. quin.
h 22. quin.

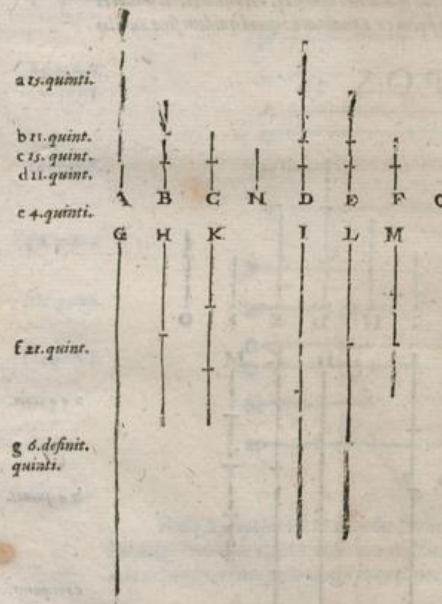
EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissime vtuntur Geometræ, maxime Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet, vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius A, ad B, ita quoque erit F, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius, D, videlicet ad H.

xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erũt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æquemultiplicibus K, L, M, [a] Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A, B, æquemultiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F; [b] Igitur vt G, ad H, ita quoq; est E, ad F; [c] Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M, quod L, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. [d] Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [e] erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumantur, estque earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; [f] si vt si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis, & si deficit deficiat. Itaque cum G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant; [g] erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.



a 15. quinti.
b 11. quint.
c 15. quint.
d 11. quint.
e 4. quinti.
f 21. quint.
g 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

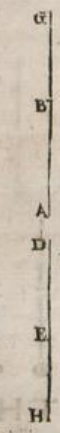
Quod si fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio perturbata, mirum si fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O, quanquam proportio ex æqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quam in tribus, quæ causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus, quod ita probatur. Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt F, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quæ binæ in eadem sumuntur proportione, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinq; magnitudinibus, per quatuor, sicut vt in quatuor fuit demonstratum, per tres. Et sic de pluribus. Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24. xxiv.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVOD propositione 2. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, vt EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt BG, ad C, ita EH, ad F, erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, vt DE, ad F, & C, ad BG, vt F, ad EH, [a] erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. [b] Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, vt DH, ad EH, & BG, ad C, vt EH, ad F: [c] erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F. Quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



a 22. quin.
b 18. quint.
c 22. quin.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera est, siue magnitudines AB, BG, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate sexto huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

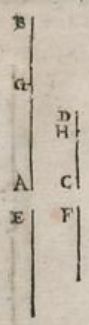
Habeant enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detractæ AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem; ita vt sit quoq; AB, ad C, vt DE, ad F. Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim sit vt AB, ad C, ita DE, ad F, erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG, ad C, vt DH, ad F, & C, ad AB, vt F, ad DE: [d] erit ex æqualitate AG, ad AB, vt DH, ad DE. [e] Diuidendo erit quoq; vt BG, ad AB, ita EH, ad DE. Itaq; cum rursus sit BG, ad AB, vt EH, ad DE, & AB, ad C, vt DE, ad F: [f] erit ex æquali BG, ad C, vt EH, ad F. Quod est propositum.

d 22. quin.
e 17. quin.
f 22. quint.

THEOR. 25. PROPOS. 25. xxv.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitque AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH: [a] erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E, fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quam E & CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



a 19. quint.

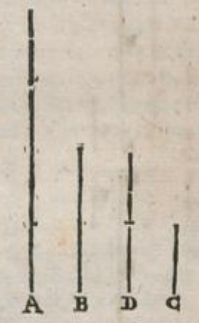
SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo cernere licet. Cum n. sit vt AB, ad CD, ita E, ad F, & AB, prima maior quam tertia E, [b] erit quoq; CD, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est AB, quam CD, erit quoq; E, maior quam F, ob eandem proportionem AB, ad CD, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si è contrario antecedens

b 14. quin.

vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt CD, ad AB. Debent quoq; omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neq; ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multũ dissimile, videlicet.

SI tres magnitudines fuerint proportionales : Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



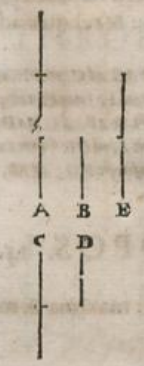
b 25. quin.

SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sit q; A, & maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul, [b] vt proxime demonstratum est, hoc est, quam dupla ipsius B. Quod est propositum.

HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adiciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpenumero grauissimi Scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easq; quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinib. improportionalibus, quarum prima hæc est.

xxvj. THEOR. 26. PROPOS. 26.

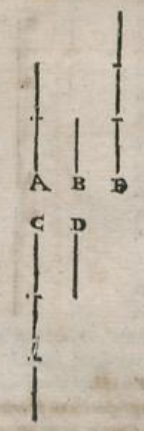
SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.



a 10. quint.
b 8. quint.

HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritq; proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B, [a] ac propterea A, maior erit quam E. [b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.

SCHOLIVM.



c 10. quint.
d 8. quinti.
e 26. quint.

EODEM fere modo demonstrabimus, si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem esse proportionẽ secundæ ad primam, quam quartæ ad tertiam; dummodo vocem, maioris, mutemus in vocem, minoris, & contra.

SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico, conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Erit q; proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, [c] ac propterea A, minor erit, quam E. [d] Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.

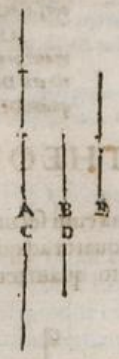
ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B. [e] Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quam D, ad C. Quod est propositum.

THEO-

THEOR. 27. PROPOS. 27. xxvij.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D, eritque proportio A, ad B, maior etiam quam E, ad B: [a] Ideoque A, maior erit quam E. [b] Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. [c] Quoniam vero permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D, (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod est propositum.



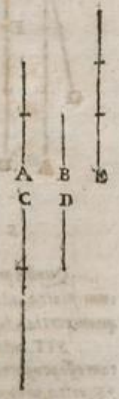
a 10. quin.
b 8 quinti.
c 16. quint.

SCHOLIVM.

Similiter ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, vicissim primæ ad tertiam minorem esse proportionem, quam secundæ ad quartam.

Sit namq; minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoq; esse proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoq; quam E, ad B; [d] Ac propterea A, minor erit, quam E. [e] Quare minor erit proportio A, ad C, quam E, ad C, [f] Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D, (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod est propositum.

Aliter. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B. [g] Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B: [h] ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quam B, ad D. Quod est propositum.



d 10. quint.
e 8. quinti.
f 16. quint.
g 27. quin.
h 16. quin.

THEOR. 28. PROPOS. 28. xxviij.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritq; proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC; [a] Ideoque AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, maior quam GC; [b] maiorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, [c] vt est GC, ad BC, ita est DF, ad EF, (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.



a 10. quint.
b 8. quinti.
c 18. quin.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ostendemus, si proportio primæ ad secundam minor fuerit, quam tertiæ ad quartam, minorem quoque esse proportionem primæ & secundæ simul, ad secundam, quam tertiæ & quartæ simul, ad quartam.

SIT



a 10. quin.
b 8. quinti.
c 28. quin.

SIT enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; erit q; proportio AB, ad BC, minor quoq; quam GB, ad BC; [a] *ideoq; AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC,* [b] *minor q; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.*

ALITER. Quoniam minor est proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF; erit maior proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. [c] *Igitur componendo, maior quoq; proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Quod est propositum.*

xxix.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

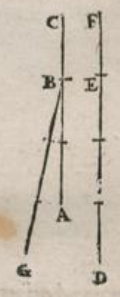
SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.



a 10. quint.
b 8. quinti.
c 17. quint.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse propoportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritq; proportio AC, ad BC, maior quoq; proportione GC, ad BC: [a] ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC; maior erit AB, quam GB: [b] Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. [c] Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

SCHOLIVM.



d 10. quint.
e 8. quinti.
f 17. quint.
g 29. quint.

Quod si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

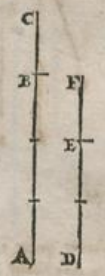
SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico diuidendo quoq; minorem esse proportionem AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF; erit q; proportio AC, ad BC, minor quoq; quam GC, ad BC: [d] *ideoq; minor erit AC, quàm GC. Ablata ergo communi BC; minor erit AB, quàm GB:* [e] *Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC:* [f] *Sed diuidendo est, vt GB, ad BC, ita DE, ad EF. (Posita namq; est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur minor quoq; proportio erit AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quod est propositum.*

ALITER. Quoniam minor proportio est AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quam AC, ad BC. [g] *Igitur & diuidendo, maior erit proportio DE, ad EF, quam AB, ad BC: atq; idcirco minor erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.*

xxx.

THEOR. 30. PROPOSITIO 30.

SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.



a 29. quin.
b 26. quin.
c 28. quin.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad EF; [a] erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. [b] Quare conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE; [c] Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.

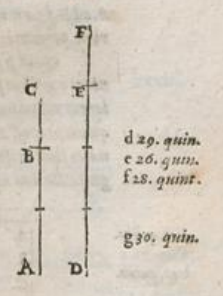
SCHO-

SCHOLIVM.

Non dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem primæ & secundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam.

Sit enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cum enim minor sit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF; [d] *erit & diuidendo minor proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF.* [e] *Quare conuertendo, erit maior proportio BC, ad AB, quàm EF, ad DE.* [f] *Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum.*

Aliter. Quoniam minor proportio est AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. [g] *Ergo per conuersionem rationis minor erit proportio DF, ad DE, quàm AC, ad AB: Hoc est, maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum.*

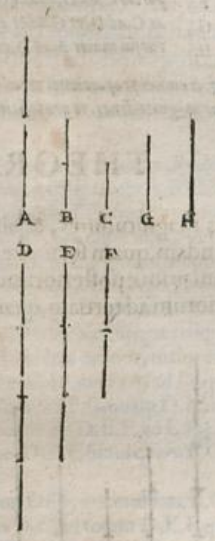


d 29. quin.
e 26. quin.
f 28. quint.
g 30. quin.

THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxj.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ primorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quam D, ad E: Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F, eritque propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C; [a] Ideoque B, maior erit quam G. Quare [b] maior erit proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; [c] Ideoque A, maior erit, quam H. [d] Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: [e] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.



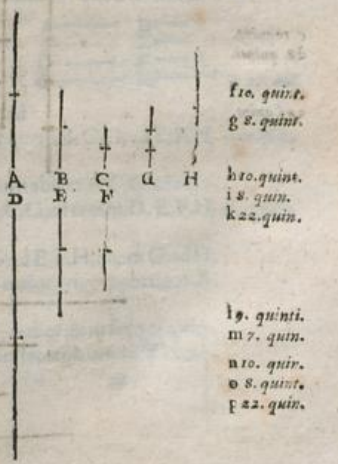
a 10. quint.
b 8. quint.
c 10. quin.
d 8. quinti.
e 22. quin.

SCHOLIVM.

Eadem ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F. Vel contra, si proportio A, ad B, fuerint maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F, ex æqualitate maiorem esse quoq; proportionem A, ad C, quam D, ad F.

Sit enim primum A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quam E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F, erit q; propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C: [f] *Ideoq; B, maior erit quam G.* [g] *Quare maior erit proportio A, ad G, quam A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E, erit q; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G,* [h] *Ideoq; A, maior erit, quam H.* [i] *Quare maior erit proportio A, ad C, quam H, ad C.* [k] *Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F, (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G, & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoq; erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.*

Deinde sit maior proportio A, ad B, quam D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F, erit q; propterea etiam B, ad C, vt G, ad C: [l] *ideoq; B, ipsi G, æqualis erit.* [m] *Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit quã D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E, erit q; propterea maior proportio A, ad G, quã H, ad G,* [n] *Ideoq; A, maior erit, quam H.* [o] *Quare maior proportio erit A, ad C, quam H, ad C:* [p] *Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G, & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoq; proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.*



f 10. quint.
g 8. quint.
h 10. quint.
i 8. quin.
k 22. quin.
l 9. quinti.
m 7. quin.
n 10. quin.
o 8. quint.
p 22. quin.

Non dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorũ magnitudinũ minores fuerint, etiã proportionem extremarũ esse minorem.

minorem. Idemq; euenier, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quam E, ad F: Aut contra, si proportio A, ad B, fuerit minor, quam D, ad E, at B, ad C, sit, vt E, ad F. Eadem namq; semper erit demonstratio, si modo vocem, maioris, vbiq; permutes in vocem, minoris, vt patet.

Quod si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum, siue vna tantum maior, quam vna, vel duæ, &c. ostendemus maiorem vel minorem quoq; esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius propos. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis. Item vsurpando hoc scholium, quando vna tantum proportio in tribus magnitudinibus æqualis est vni tantum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

a 31. quint. b 31. quint. c 22. quin.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

Nam si maior est proportio A, ad B, quam E, ad F, & maior B, ad C, quam F, ad G, & maior C, ad D, quam G, ad H; [a] erit ex æquo maior proportio A, ad C, quam E, ad G. Quia igitur rursus maior proportio est A, ad C, quam E, ad G, & maior C, ad D, quam G, ad H; [b] erit quoq; ex æquo maior proportio A, ad D, quam E, ad H.

Quod si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales sint, sed maior sit proportio C, ad D, quam G, ad H: [c] erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior proportio erit A, ad D, quam E, ad H.

Si vero maior proportio sit A, ad B, quam E, ad F, sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H, erit ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quam E, ad G; Et rursus maior A, ad D, quam E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

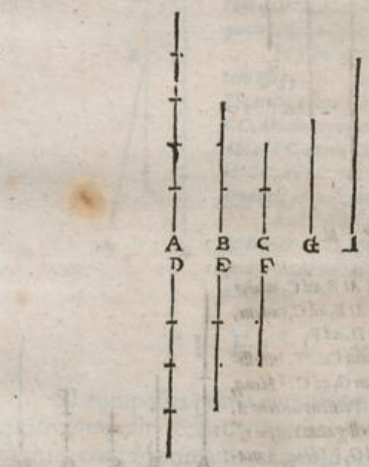
Si autem maior sit proportio A, ad B, quam E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quam G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F, sed maior proportio B, ad C, quam F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quam E, ad G: ac proinde rursus maior A, ad D, quam E, ad H, &c.

Idem concludes, si omnes proportiones vnius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna vel duæ. Item si sint plures magnitudines, vt propositione 22. diximus.

xxxij.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

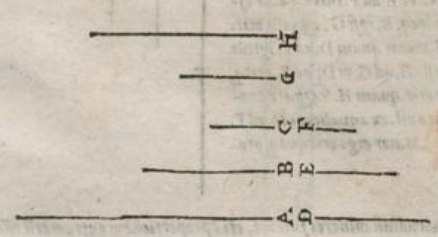
SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.



a 10. quint. b 8. quinti. c 10 quint. d 8. quinti. e 23. quint.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quam E, ad F. Item maior B, ad C, quam D, ad E, Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E, eritq; propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C. [a] Ideoque maior erit B, quam G. [b] Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam eiusdem A, ad B, maiorem; Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; [c] ideoque maior erit A, quam H. [d] Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C: [e] At vt H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C, & vt E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo etiã est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLIVM.



EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F. At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F, at B, ad C, eadem, quæ D, ad E, ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quã D, ad F, vt in proposita figura perspicitur.

HAVD secus ostendemus si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam extremorum proportionem esse minorem, &c.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoq; vel minorem esse proportionem

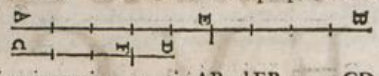
primæ

primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimam, ea arte, qua vsi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholij præcedentis propos. consyderentur.

THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxiij.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem esse, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim maior sit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; *a* erit quoque permutando, maior proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; *b* ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD, *c* Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est. EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.



a 27. quin.
b 30. quin.
c 27 quint.

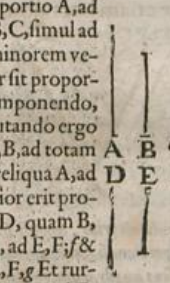
SCHOLIVM.

QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, vt ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce maioris; & vocem, maioris, pro voce minoris.

THEOR. 34. PROPOS. 34. xxxiv.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.

SINT primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F. Sit autem maior proportio A, ad D; quam B, ad E; Item maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem vero, proportione A; ad D; maiorem deniq; etiam proportione C, ad F. Cum enim maior sit proportio A, ad D, quam B, ad E; *a* erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E. *b* Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E; *c* Permutando ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; *d* habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quã tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. *e* Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; *f* & componendo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F, *g* Et rursus permutando maior proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quam B, C, ad E, F, quod est primum.



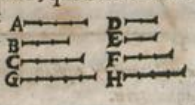
a 27. quin.
b 28. quin.
c 27. quin.
d 33. quint.
e 27. quin.
f 28. quint.
g 27. quin.

ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, ad totam DEF, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F, *h* erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum. h 33. quint.

QVONIAM veto maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; *i* erit permutando maior quoq; B, ad C, quã E, ad F; *k* & componendo, maior totius BC, ad C, quam totius E, F, ad F, *l* & rursus permutando, maior B, C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F, Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F, quod est tertium.

i 27. quint.
k 28. quin.
l 27. quint.

DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobiq; cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoq; maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. *m* Permutando ergo maior erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H, *n* & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H, *o* & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H, quod est primum.



m 27. qul.
n 28. quin.
o 27. quin.

ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, *p* erit & reliquæ A, ad reliquam D: maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod est secundum. p 33. quint.

QVONIAM vero, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

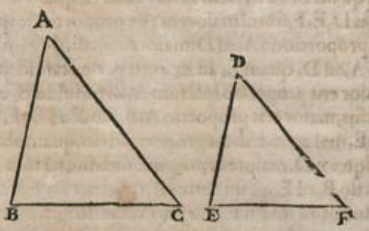
EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

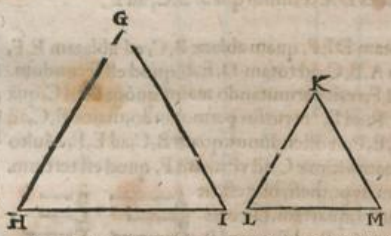
I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT *triangula ABC, DEF, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.*



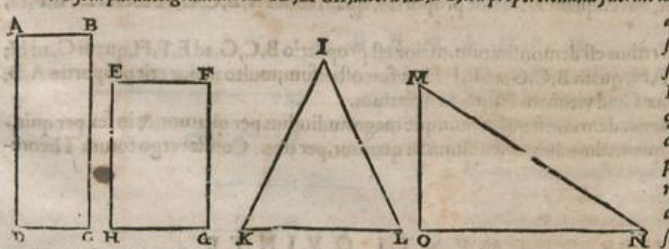
QVOD *si anguli vnius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ similes: cuiusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales, vtpote rectos, at latera vnius lateribus alterius proportionalia non sunt, quippe cum latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeãt proportionem æqualitatis, latera vero figuræ alterę parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inæqualitatis. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quanquam inter se maxime sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim æqualitatem, erit GH, ad GI, vt KL, ad KM. Item GH, ad HI, vt KL, ad LM, & GI, ad IH, vt, KM, ad ML, cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis æquiangulis, at æquilateris.*



II.

RECIPROCÆ autem figuræ sunt, cum in vtraq; figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

VT si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, vt vtrobiq; sit & antecedens, & consequens diuersarum proportionum, hoc est, vt sit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC, seu eadem AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (vtrog; enim modo AB, est antecedens vnius proportionis & BC, consequens alterius, in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, est consequens vnius, & FG, antecedens alterius; vel secundo modo FG, consequens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, reciproca, si fuerit vt IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel vt IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neq; memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quam in parallelogrammis, & triangulis.

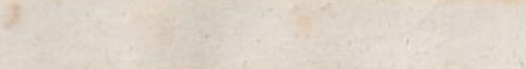


III. SE-

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

SI linea recta quæuis AB, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt sit, quemadmodum tota AB, ad maius segmentum AC, ita AC, maius segmentum ad CB, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub aliis verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. vt fiet perspicuum propos. 30. huius lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atq; vtilitates lineæ hoc modo diuisæ, vt ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. vt non immerito à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est diuisa.

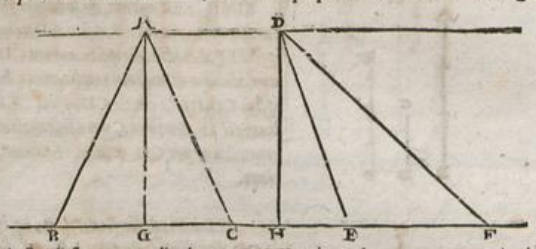


IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.

SI à vertice A, trianguli ABC, ad basin BC, perpendicularis ducatur AG, dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis AG. Sic etiam perpendicularis DH, ducta à D, vertice trianguli DEF, ad basin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaq; si duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad bases (siue hæ protractæ sint, siue nõ) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis; cuiusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo recti;[a] erunt rectæ AG, DH, parallelæ; Sunt autem & AD, GH, parallela, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;[b] ac propterea latera opposita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero AB, & DE; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad Basin DE, protractam æqualis non est perpendiculari ex C. ad basin AB, deductæ, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.

[a] 28. primi
[b] 34. prim.



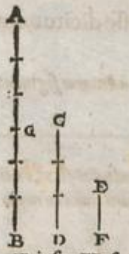
RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiusq; rei debet esse stata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataq; longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataq;. Qua de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in sphæram Ioan. de sacro bosco edidimus.

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partẽ quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quãtitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecuplæ componi dicitur ex duplæ, & sextuplæ; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quintuplæ. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius. Sic etiam proportio duplæ dicetur componi ex sesquialteræ, & sesquitertiæ: quia sesquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio duplæ componetur ex sesquiseptimæ, & supertripartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem duplæ proportio componi dicetur ex subsesquiquartæ, & duplæ sesquialteræ; propterea quod harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producunt quoq; eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis aliis proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici potest, vt paulo post patebit.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, vt quinto libro defin. 10. exposuimus: ita vt si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c Sic etiam in magnitudinibus quibuscunq; ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexãdrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonstrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propos. 11. Altera autem à Vitellione lib. 1. prop. 13. suæ Perspectiuæ, comprobabimus.



THEON igitur rem propositam ita conatur absoluere. Habeat AB, ad CD, rationem datam, veluti duplam aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoq; datam. Dico quod ipsius AB, ad EF, ratio constat ex AB, ad CD, & ex CD, ad EF, ratione, vel quod ipsius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipsius CD, ad EF, rationis quantitatem efficit ipsius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quam CD, maior; & CD, quam EF, & sit quidem AB, ipsius CD, dupla, & CD, ipsius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autem CD, dupla est AB; erit AB, ipsius EF, sextupla. Quoniã si triplũ alicuius duplicamus, fit sextuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, diuidatur AB, in ipsis CD, æqualia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est, æqualis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Idpropterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius FF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



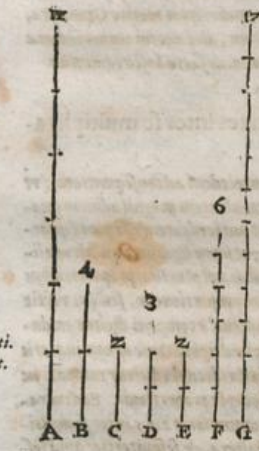
SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, vtraq; ipsarum AB, & EF, idipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla, at CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniam CD, ipsius EF, dimidia est, ipsius autem CD, tripla est AB, erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est, & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, æqualium ipsi CD, trium, talium est EF, duorum. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



SED iam rursus sit CD, vtraq; ipsarum AB, & EF, maior, & sit quidem AB, ipsius CD, dimidium, & CD, ipsius EF, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, talium est CD, quatuor, qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium EF, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius AB, ad EF, per CD, medium limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoq; & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si à composita ratione quælibet vna compositarum auferatur, vno simplicium electo, reliqua compositarum assumetur.

HÆC ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII vero demonstratio ita se habet.



SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio. Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. fit, vt $\frac{1}{5}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D, proportionis vero B, ad C, denominator sit E, & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est. si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namq; G, ex multiplicatione F, in C, Dico G, ipsi A, æqualem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B, (nam ex F, in C, fit G, & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) [a] erit vt F, ad E, ita G, ad B, Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A, [b] erit vt E, ad B, ita F, ad A, & permutando vt E, ad F, ita B, ad A, & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoque æquales, erunt quantitates A, & G.

a 18. septi.
b 17. septi.

A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4
G, 100. F, 20.

Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoq; A, ex F, in C, propterea q; F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad vltimam componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, cõponetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B. B, ad C. & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, vt ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoq; ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunq; magnitudinibus.



VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT

SINT tres magnitudines A, B, C, Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C, At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartã producitur, æquale est ei, quod ex D. secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) a erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio.

A, 100. B, 20. C, 5. D, 5. E, 4. F, 20.



a 19. septi.

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nam vt ostensum est, proportio A, ad F, cõponitur ex proportione A, ad B, & B, ad F. Hæc autem proportio B, ad F. componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hæc proportio C, ad F, cõponitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atq; hæc tandem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinq; denominatoribus quinq; proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
12.	6.	3.	2.	1.	4.

EX his liquido constat id, quod ad finem 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continue proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, de nominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in se ipsum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam sunt interpositæ: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita in se multiplicatur; triplicata vero, quando item denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita multiplicatur, primum in se, deinde iterum in numerũ productũ. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendũ est in infinitum. Est n. eadẽ demonstratio in magnitudinibus continue proportionalib. & in magnitudinib. non proportionalibus: Solum in illis denominatores æquales erũt. Vt si A, B, C, ponãtur cõtinuæ proportionales, æquales erunt denominatores D, E; & F. erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

ETSI autem demonstratio tam Eutocij, quam Vitellionis proprie quadrat in proportiones tantum rationales, cum vtraq; propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionib. demonstrantur, conueniunt quoq; magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraq; demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter se, vt demonstrauimus, non tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis hæc denominatorũ multiplicatio non vsurpetur. Nam quemadmodum, propositis pluribus magnitudinibus continue proportionalib. primam ad tertiam dixit Euclides definit. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quam prima habet ad secundam; nimirum compositam ex duabus proportionibus intermedijs, æqualibus: primam vero ad quartam habere proportionẽ triplicatam eius, quam prima ad secundam habet, h. e. compositam ex tribus intermedijs proportionib. æqualibus, & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorũ: Ita quoque, si ponãtur ordine plures magnitudines eiusdem generis non continue proportionalibus, dicetur prima ad vltimã habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se non sint omnes æquales, siue aliquæ sint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis. siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quod illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, & illam duplicationem, triplicationem, &c. quæ lib. 5. explicata est, quam quod in duplicatione, triplicatione, &c. proportionum interijciuntur proportiones omnes æquales, in compositione vero proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt sciamus, quænam sit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata, &c. vel quæ ex propositis proportionibus composita esse dicitur.

VERBI gratia. Vt sciamus, quæ proportio sit illa, quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100, denominator est proportionis, quæ decuplæ est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo 10. 10. 10. & primum in secundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de alijs quoq; proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absq; denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minor inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis du-

plicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1.10.100. Vel 3.30.300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla est, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentupla est, dicitur duplicata proportionis subdecuplæ 1. ad 10. vel. 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoscamus, quænam sit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3.2.1$\frac{1}{2}$.1$\frac{1}{3}$. eosq; inter se multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in 1$\frac{1}{2}$. & hunc rursus numerum procreatum 9. in 1$\frac{1}{3}$. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus n. productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionib. componi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc autem intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namq; proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintũ quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionib. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla sesquialtera, & sesquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. 1$\frac{1}{2}$. 1. Vbiq; enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartum sesquialteram, & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duo decupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.

ITAQVE cum Euclides demonstrat hoc lib. prop. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duab. proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit quam si duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogrãma inter se habere quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus secundi fuerit, vt 8. ad 3, proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quã si sumantur tres numer, 24. 9 18. quorum primus ad secundum est, vt 8. ad 3. & secundus ad tertium, vt 1. ad 1. proportionem parallelogrãmi primi ad secundũ esse eandẽ, quã habet primus numerus 24. ad tertiũ 18. quæ est sesquitertia. Proportio n. 24. ad 18. cõponitur vt dictũ est, ex proportionib. 24. ad 9. & 9. ad 18. h. e. ex proportionib. 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

PORRO quem ad modũ interpretes nonnulli Euclidũ volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionẽ, & triplicatam, &c. vere esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continue proportionalib. in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac compositione proportionum, extremorum proportionẽ, quæ ex proportionib intermedii componi dicitur, vere esse maiorẽ qualibet intermediarũ componentiũ, vtpote conflatã ex additione omniũ intermediarum proportionum inter se, ac proinde omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorum proportione. Verũ hoc falsum est, & Euclidi ommno repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex prop. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nã proposito tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent eadem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrãmi ad latera alterius parallelogrãmi habẽt; erit proportio parallelogrãmi ad parallelogrammũ eadẽ, quæ 24. ad 18. nimirũ ex laterũ proportionib. composita, vt Euclides demonstrat. Quis autẽ non videt, proportionẽ 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multo minorẽ esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiẽs tertias? Sed de hac re plura scribemus ad finem lib. 9.

HÆC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorẽ, statuẽdi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoscunq; tot numeri medij quicunque, quot proportiones cõponẽtes desiderãtur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio cõponatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. nã extremorũ proportio 100 ad 1. cõponitur ex intermediis tribus, h. e. ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq; si alios numeros statuas medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. cõponetur eadẽ proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiã vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionẽ compositã esse ex quatuor, nimirũ ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quod si quis petat quotuis proportiones datã proportionẽ cõponentes, quæ etiã omnes datæ sint præter vnã, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datæ proportiones cõponentes ordine. Hæ n. cũ proportione, quã vltimus medius ad alterũ extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinq; proportiones, quarũ quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. 4$\frac{1}{2}$. 1$\frac{1}{2}$. 1$\frac{1}{10}$. 6. ita vt 9. ad 4$\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & 4$\frac{1}{2}$. ad 1$\frac{1}{2}$. triplam, & 1$\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{3}{10}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vna cum proportione $\frac{3}{10}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. sesquialteram; & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiã. Nã quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{3}{10}$. ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX his nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua quispiam postulat sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunq; numerum. Si namq; sumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos statuantur tot numeri quicunq; minus vno, quot numeri desiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quæruntur. Nam ij inter se multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demõstratum est, hoc est, numerum datum. Veluti si quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. statuemus inter duos numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoscunque, hoc modo 500. 250. 50. 5. eruntq; tres quæsiti numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quod si quis postulet vnum numerum, qui vna cum quotlibet alijs datis, si inter se multiplicentur, producat datum quemcunq; numerum: Sumendi erunt rursus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis aliis numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt si dentur hi quatuor numeri, 2. 3. 1$\frac{1}{2}$. 5$\frac{1}{3}$. quæratur q; quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum 1$\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem sesquialteram habentes à dato numero 1$\frac{1}{2}$. denominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportiones à 2. 3. 1$\frac{1}{2}$. 5$\frac{1}{3}$. denominatas, hoc modo, 9. 4$\frac{1}{2}$. 1$\frac{1}{2}$. 1$\frac{3}{10}$. 6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis $\frac{3}{10}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{2}$. Nam quinque hi numeri 2. 3. 1$\frac{1}{2}$. 5$\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuentus, inter se multiplicati procreant datum numerum 1$\frac{1}{2}$. Idem quintus numerus $\frac{1}{32}$. inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288.

34.288.9. Denominator 11. proportionis 9. ad 288. est $\frac{1}{32}$. vt prius. Sic etiam si quærendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1. statuemus inter quosuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. $2\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. sunt quatuor numeri, qui quæruntur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.

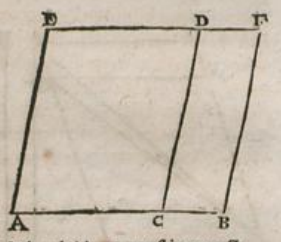
FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur, si tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerum productum, diuidatur datus numerus, qui gigni debet. Quotiens enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter sunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæstione, si hi tres numeri, verbi gratia, 4. 5. 6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. qui produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4. 5. 6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO neq; hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunq; numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentiis intermediorum numerorum. Vt hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20, est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 100. denig; & 713. est 613. quæ omnes differentiæ 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

ATQVE hæc dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. l. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam, quæ multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quam plurimæ aliæ decimi libri. Ea autem est eiusmodi:

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatq; cum eo totum vnum parallelogrammum.



SIT data recta linea AB, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit CB; & ducta BF, parallela ipsi CD, donec cum ED, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum secundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, appelletur defectus.

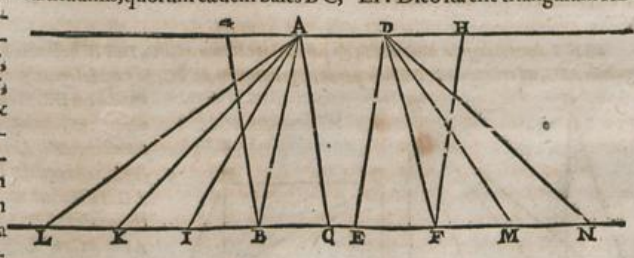
RVRSVS sit data recta linea AC, supra quam constituantur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB, maius recta data AC; & ducatur CD, ipsi BF, parallela. Parallelogrammum igitur AF, applicatum secundum rectam AC, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, vocetur excessus.

HIC autem defectus DB, vel excessus, in rectangulis quidem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perspicuum est.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

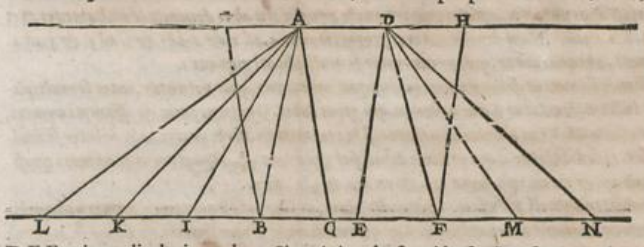
SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogramm ũ CG, ad parallelogrammum EH, vt est basis BC, ad basin EF. Hoc est, si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis EF, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartæ vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere, vt definitio 6. libr. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter eadem parallelas GH, LN. (Nam vt in defin. 4. dictum est, triangula ac parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinẽ, cum inter eadem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares à verticibus ad bases demissæ æquales erunt,) & ex BL, sumantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipsi BC, æquales; Item ex FN, abscindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN. [a] erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter eadem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quammultiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoq; erit triangulum ACL, ttianguli ABC; & quammultiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoq; multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis CL, æqualis fuerit basi EN, [b] necessario triangulum ACL, æquale est triangulo DEN, aç proinde si CL, maior fuerit quam EN, necessario ACL,



[a] 38. primi.

[b] 38. primi.

maius est quam DEN, & si minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & trangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta triangulo DEN, æquemultiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF, vel vna æqualia erunt, vel vna excedēt, si ea sumantur, quæ inter se respondent. [a] Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundam EF, basis ad basim, ea est tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. Quod est propositum.



a 6. defi. quinti.

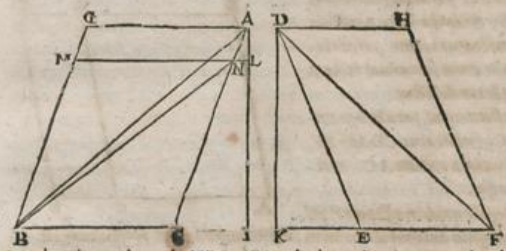
b 15. quinti. c 34. pri. d 34. pri. e 11. quinti.

QVONIAM autem [b] vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, ([c] quod duplum est trianguli ABC,) ad parallelogrammum EH; ([d] quod est duplum trianguli DEF,) perspicuum est, [e] ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.



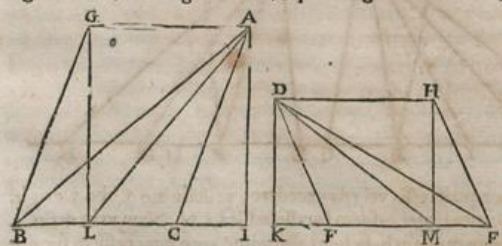
a 1. sexti. b 11 quinti. c 9. quinti.

SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammū AGBC, ad parallelogrammū DEFH, vt basis BC, ad basin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK; esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaque LM, ipsi BC, parallela, quæ latus AC, secet in N, coniunctaque recta BN; [a] erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF. [b] Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem; [c] Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eædem, ita se habent inter se, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia bases æquales BC, EF. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, est ad altitudinem DK. Si enim sumantur rectæ IL, KM, basibus BC, EF, æquales, ducanturque rectæ LA, MD; [d] erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum sint super bases æquales LI, BC, & inter easdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF. [e] Quare erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM. [f] Est autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam si bases ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod est propositum.



d 38. primi. e 7. quinti. f 1. sexti.

g 15. quinti. a 34. primi. b 34. pri. c 11. quinti

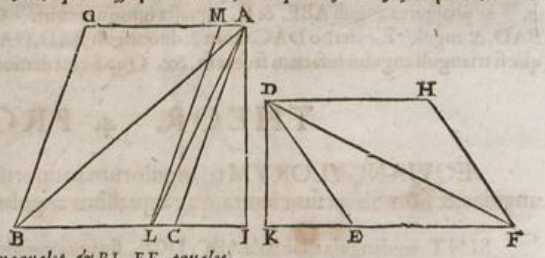
QVONIAM vero est, [g] vt ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC, [a] quod trianguli ABC, duplum est, ad parallelogrammum DEFH, [b] quod trianguli DEF, est duplum. [c] Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur LG, MH. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin.

HOC vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.

SIT

SIT *triangulum* ABC, *ad triangulum* DEF; *& parallelogrammum* AGBC, *ad parallelogrammum* DEFH, *vt altitudo* AI, *ad altitudinem* DK. *Dico eorum bases* BC, EF, *æquales esse.* Si enim non sunt æquales, *sit* BC, *si fieri potest, maior, quam* EF. *Abscissa igitur* BL, *ipsi* EF, *æquali, ductaque recta* LA; *erit vt proxime demonstrauimus,* ABL, *ad* DEF, *vt* AI, *ad* DK: *Sed vt* AI, *ad* DK, *ita ponitur esse* ABC, *ad* DEF, [d] *Igitur* ABL, ABC, *ad* DEF, *eandem habent proportionem;* [e] *Ac proinde inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases* BC, EF, *sed æquales. Eademque est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta* LM, *ipsi* GB, *parallela, ostendemus, parallelogramma* MGBL, AGBC, *æqualia esse, si bases* BC, EF, *dicantur inæquales, &* BL, EF, *æquales.*



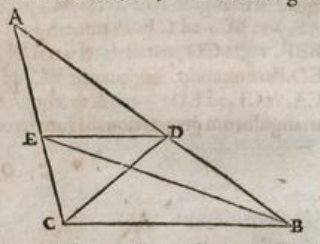
d 11. quinti
e 9. quinti.

IN *omnibus autem hu non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos assumpsimus casum difficiliorum, quãdo scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.*

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN trianglo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, [a] erunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta inter se æqualia. [b] Quare vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: [c] Atqui vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, vt triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. [d] Vt igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) quod est propositum.



a 37. primi
b 7. quinti
c 1. sexti.
d 11. quinti

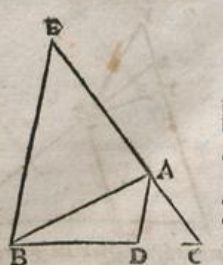
SECET deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE, [e] erit vt basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. [f] Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulũ DEB, ita AE, ad EC: Sed rursus [g] vt basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem. [h] Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. [i] Æqualia ergo sunt triangula DEB, & DEC: ac propterea, cum eandem habeant basin DE, [k] inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC. quod est propositum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

e 1. sexti.
f 11. quinti.
g 1. sexti.
h 11. quinti
i 9. quinti.
k 39. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo ABC, recta AD, secet primo angulum BAC, bifariam. Dico esse vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cum CA. producta conueniat in E; (coibunt autem omnino BE, CA, propterea quod anguli C, & CBE, minores sunt duobus rectis. Cum enim C, & CDA, [a] minores duobus rectis sint; [b] sit autem angulus CDA, angulo CBE, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & CBE, duobus rectis minores. [c] eritque angulus EBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter se æquales; [d] Ideoque & rectæ BA, EA, inter se æquales. [e] Vt igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. [f] Atqui vt EA, ad AC, ita est BD, ad DC. cum in triangulo BCE, tecta AD, sit parallela lateri BE. [d] Igitur vt BA, ad AC, ita est BD, ad DC. quod est propositum.



a 17. primi.
b 29. primi
c 29. primi.
d 6. primi.
e 7. quinti.
f 2. sexti.
g 11. quinti

SIT deinde vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD, parallela coiens cum CA, protracta in E. Quoniam igitur vt BA, ad AC, ita

e 2 sexti. f 11. quinti. g 9. quinti. h 5. primi. i 29. primi.

AC, ita ponitur BD, ad DC, e Vt autem BD, ad DC, ita est EA, ad AC; (quod in triangulo BCE, recta AD, sit lateri BE, parallela) f erit vt BA, ad AC, ita EA, ad eandem AC. g Æquales igitur sunt BA, & EB, inter se, h ac propterea anguli ABE, & E, æquales quoque erunt. i Cum igitur angulus ABE, æqualis sit alterno BAD, & angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli BAD, DAC, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

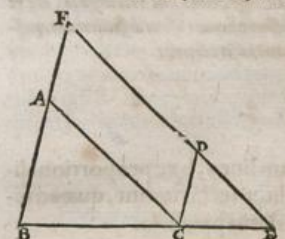
iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

ÆQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SINT æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE: Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC, CE, secundum lineam rectam, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterq; externus ACB, interno DEC, Et quia duo anguli ABC, ACB, a minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. b Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis est interno opposito ABC; c parallelæ erunt CD, & BF: Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF, quod angelus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF, d propterea q; recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, e erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando f igitur erit AB, ad BC. vt DC, ad CE. Rursus quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, g erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando h igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: i erit & ex æquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

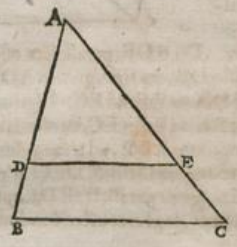
a 17. primi. b 13. prō. c 28. pri. d 34. primi e 2. sexti. f 16. quinti. g 2. sexti. h 16 quinti. i 22. quinti



COROLLARIVM.

HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triangulum ADE, triangulo ABC. esse simile. Æquiangula namque sunt, k cum anguli ADE, AED, Æquales sint angulis ABC, ACB, externis; & angulus A, communis. Quare vt demonstratum est, l habent latera circa æquales Angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

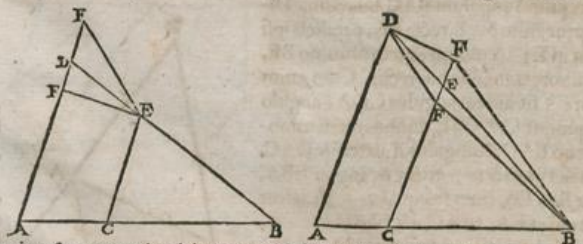
k 29. pri. l 4. sexti.



SCHOLIVM.

NON alienum à nostro instituto esse puto, si hic demonstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua; Secundum vero in commentariis in Apollonii Conica. Horum primum est.

SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelę inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionē habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum includens: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ transibit per extremum alterius lineæ.



SIT recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB. BC, ita vt sit AD, ad CE, sicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Itē rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire per punctum E. Si enim recta BE, non transit per D, coeat cum AD, in F. puncto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula BAF, BCE, similia sunt; a *erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando,* b *vt AB, ad BC, ita AF, ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoq; AD, ad CE.* c *Igitur erit, vt AE, ad CE, ita AD, ad CE:* d *Ac propterea æquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BE, per punctum D. Quod est primum.*

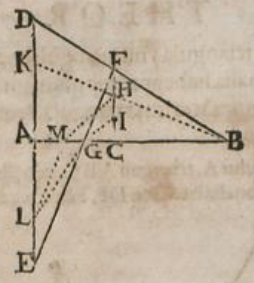
a 4. sexti. b 16. quinti. c 11. quinti d 9. quinti.

RVRSVS

RVRSVS si recta BD. non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, vt in secunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propos. triangula BAD, BCF, similia sunt; [c] erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF: [d] & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autē AB, ad BC. ita quoq; erat AD, ad CE. [e] Igitur erit, vt AD, ad CF, ita AD, ad CE: [f] Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod est absurdū. Transit ergo recta BD, per E. Quod est secundū.

c 4. sexti. d 16 quinti. e 11. quinti f 9. quinti.

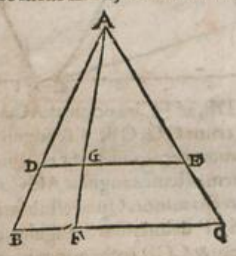
HOC etiam verum est, quando duæ parallelæ in diuersas partes ducuntur, habentes eandem proportionem, quam segmenta rectæ inter parallelas conterminas, & punctum idem intra datam rectam. Vt in figura problematis 7. scholij propos. 17. si fuerint parallelæ AE, FC, in diuersas partes ductæ, fueritque vt AE, ad CF, ita AG, ad CG, transibit recta EF, per G, hoc est, duæ rectæ EG, FG, vnam rectam constituent. Cum enim sit, vt AE, ad CF, ita AG, ad CG; erit permutando quoque, vt AE, ad AG. ita CF, ad CG. Cum ergo anguli alterni A, C, æquales sint; [g] erunt quoq; anguli AGE, CGF, æquales. Cum ergo AC, sit linea recta, constituent EG, FG, lineam quoq; rectam ex iis, quæ ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus. ALTERVM vero est.



g 4. sexti.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur: & ex quocunq; pūcto illius lateris ad angulū oppositū recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, ineasdē rationes.

IN triangulo ABC, ducta sit DE, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur FA, secans DE, in G. Dico esse, vt EF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; [h] erit vt AF, ad BF, ita AG, ad DG, [i] & permutando, vt AF, ad AG, ita BF, ad DG. At q; eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad AG, ita FC, ad GE. [k] Igitur erit, vt BF, ad DG. ita FC, ad GE, & permutando, vt BF, ad FC, ita DG, ad GF. Quod est propositum.



h 4. sexti. i 16. quinti k 11. quinti

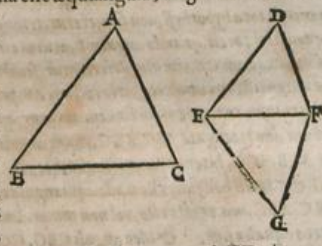
ALITER. Quoniam triangula ABF, ADG, similia sunt, nec non triangula AFC, AGE, per coroll. huius propos. [l] erit, vt BF, ad FA, ita DG, ad GA: Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE. [m] Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.

l 4. sexti. m 22. quinti.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SI duo triangula latera proportionalia habeant: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF, ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & Angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, conueniantque rectæ EG, FG, in G: [a] eritq, reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur sunt triangula ABC, GEF. Quare [b] vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [c] Igitur vt GE, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: [d] propterea q; æquales erunt GE, DE. Rursus, [e] quoniam vt BC, ad CA, ita est EF, ad FG: Vt autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; [f] erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; [g] ideoq; æquales erunt FG, FD. Itaq; cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & basis communis EF; [h] erunt anguli G, & D, æquales; [i] ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus, G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemq; modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit. quod est propositum, Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

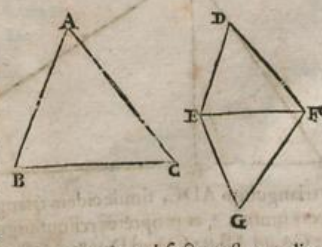


a 32. primi b 4. sexti. c 11. quinti. d 9. quinti. e 4. sexti. f 11. quinti. g 9. quinti. h 8. primi. i 4. primi.

THEOR. 6. PROPOSITIO 6. vj.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq; habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

SIT angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintq; latera AB, BC, proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulū scil. A, angulo D, & angulū C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciūt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG, eritq; vt in præcedenti propos. dictū est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare [a] vt AB, ad BC, ita est, GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [b] Igitur vt DE, ad EF, ita est GE, ad eandem EF; [c] atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus DEF, propterea que æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF.)



a 4. sextl. b 11. quinti c 9. quinti.

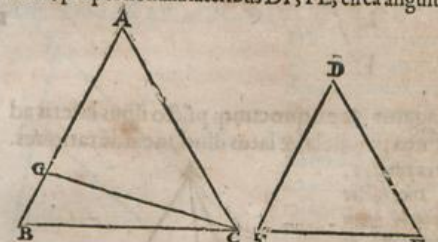
[a] erunt

d 4. pri. d erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam anguli A, C, æquales anguli D, EFD, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOSITIO 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIT angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F, & latera A C, C B, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc est sit vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, & F, non sunt æquales, sit ACB, maior: quam F: fiatque ipsi F, æqualis ACG, Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, a erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt. Quare b vt AC, ad CG, ita erit DF, ad EF: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. c Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB, d ac propterea æquales erunt CG, CB, e & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recto maior; f cum AGC, CGB, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.



a 32. pri.
b 4. sexti.
c 11. quinti
d 9. quinti.
e 5. primi.
f 13. primi.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, æqualis, ideoq; & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis. quod est absurdum. g Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli ACB, & F, sed æquales, atque h idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

g 17. primi.
h 32. primi

SCHOLIVM.

ADDIDIT Euclides, vtrumq; angulum reliquorum B, & E, debere esse vel minorē recto, vel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo ABC, sit CG, æqualis ipsi CB, (quod fieri potest, quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim i erit latus CA, latere CB, maius, Si igitur ex C, ad interuallum CB, circulus describatur, secabit is rectam AB, priusquam rectam AC, quæ longior est, quam CB, secet. Secabit autem ille circulus necessario rectam AB, propterea quod ob acutum angulum B, recta AB, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituit cum CB, vt patet ex propos. 16. lib. 3.) habebunt duo triangula ABC, AGC, vnum angulum vni angulo æqualem, immo angulum A, communem; & circum alios angulos ACB, ACG, latera proportionalia, hoc est, k vt AC, ad CB, ita erit eadem AC, ad CG, cum æquales ponantur rectæ CB, CG, & tamen non sunt vllo modo æquiangula triangula ABC, AGC, vt constat. Quod ideo euenit, quia non vterq; angulorum A B C, AGC, minor est recto, vel non minor. Immo ABC, est quidem recto minor. AGC, vero recto maior. Cum enim CG, CB, latera æqualia sint, l & ideo anguli CBG, CGB, æquales; m erit vterque eorum recto minor, n ac propterea AGC, recto maior.

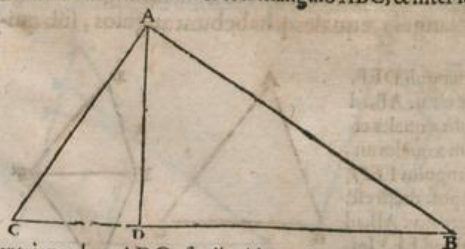
i 19. primi.
k 7. quinti
l 5. primi.
m 17. vel 32. pri.
n 13. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

viij.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perdendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, similia esse & toti triangulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis A BC, DBA, anguli BAC, & ADB, sint recti, & angulus B, communis; a erunt & reliqui anguli ACB, & DAE, æquales. Æquiangulū est igitur triangulum DBA, triangulo ABC, b ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt CB, ad BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita BD, ad DA; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD, Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4 huius libr. Quare simile est triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem modo ostenditur triangulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus C, communis; c ac propterea reliqui anguli ABC, & CAD, æquales. Quare d vt BC, ad CA, ita est CA, ad CD; & vt CA, ad AB, ita CD, ad DA, & vt CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB,



a 32. primi
b 4. sexti.
c 32. primi
d 4. sexti.

ADB,& ADC,cum anguli ADB,ADC,sint recti,& anguli ABD,CAD,ostensi æquales,nec non anguli BAD, ACD; Atque idcirco sit [c] vt BD,ad CA,ita DA,ad DC; & vt DA,ad AB,ita DC, ad CA; & vt AB, ad BD, ita CA,ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo,ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit,&c. Quod erat demonstrandum. [d] 4. sexti.

COROLLARIVM.

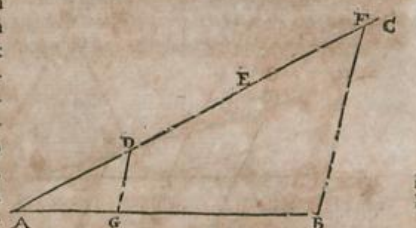
EX hoc manifestum est,perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur,esse mediam porportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium,medium proportionale inter totam basin,& illud segmentum basis,quod ei lateri adiacet.

OSTENSVM est enim,esse vt BD,ad DA,ita DA,ad DC; ac propterea DA, esse mediam proportionalẽ inter BD,& CD:Item esse vt CB,ad BA,ita BA,ad BD;& idcirco BA,mediam esse proportionalem inter CB,& BD: Denique esse vt BC,ad CA, ita CA,ad CD; ideoque CA,esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. xi.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.

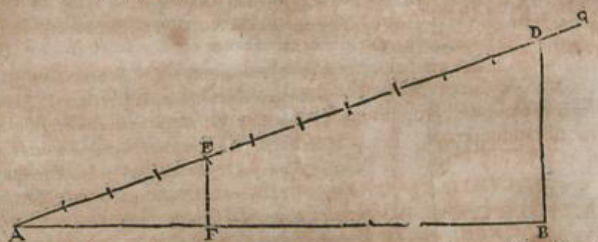
IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunq; faciens angulum CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis,quota pars detrahenda est ex AB, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG,esse partem tertiam imparatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB,parallela sit recta DG; [a] erit vt FD, ad DA, ita BG,ad GA. [b] Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA,erit ad GA: Sed FA,ipsius AD,est tripla, ex constructione. Igitur & BA,ipsius AG,erit tripla; ideoq; AG,tertia pars erit ipsius AB,quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendam erat.



[a] 2. sexti.
[b] 18. quinti

SCHOLIVM.

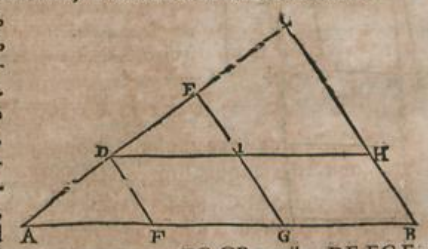
QVOD si ex AB, auferenda sit pars non aliquota, sed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor vndecimas ipsius AB, sumendæ erunt ex AC, vndecim partes æquales vsque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium. Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus vt DA, ad AE, ita BA, ad AF. Quare, & conuertendo vt AE, ad AD, ita AF, ad AB: Est autem AE, pars continens quatuor vndecimas ipsius AD, ex constructione. Igitur & AF, eadem pars erit rectæ AB. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex AB, pars complectens quotcunq; partes ipsius aliquotas non facientes vnam.



PROBL. 2. PROPOS. 10. xij.

DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

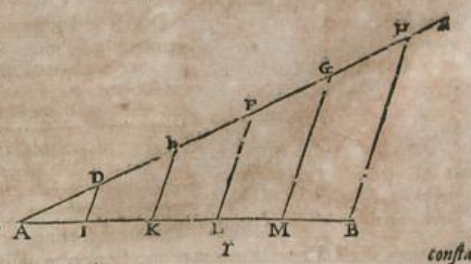
SIT recta AB,secanda similiter, vt secta est recta AC, in D,& E,hoc est,in partes,quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulũ quemcunq; BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E,agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB,similiter esse sectam in F,& G, vt est secta AC, in D,& E. [a] vt AD,ad DE,ita est AF, FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH,ipsi FB, parallela, secans EG,in I; [b] erit rursus, vt DE,ad EC, ita DI,ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; [c] quod FG,ipsi DI,& GB,ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoq; erunt partes FG, GB. partibus DE, EC. Eademq; ratio est de pluribus partibus,si ex E,& C,ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaq; datam rectam lineam insectam similiter secuimus,vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.



[a] 2. sexti.
[b] 2. sexti.
[c] 34. primi

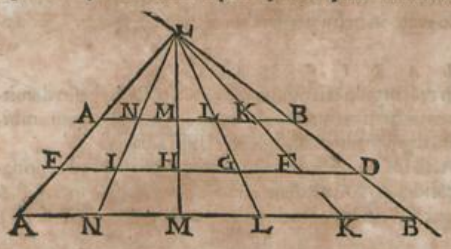
SCHOLIVM.

EX hoc problemate colligi potest facilis admodũ via, ac ratio diuidendi lineam rectam datã in partes quotcunq; æquales: id, quod nos ad propos. 10. l. 1. facturos recepimus, & alia iam via idẽ ad propos. 40. l. 1. demonstrauimus. Sit enim data recta AB, diuidenda in quinq; partes æquales: Ducta recta AC, faciente cum AB, quemcunq; angulum CAB, sumantur ex ea quinq; partes æquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta AH, vtcunq; est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta HB, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM; erit AB, similiter diuisa, vt AH, vt

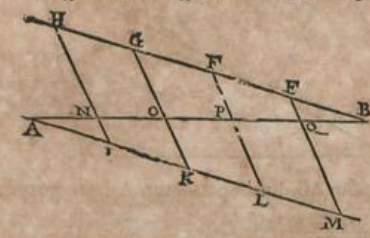


constat

constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur AH, sit diuisa in quinq; partes æquales, erit & AB, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta AB.



HVIC rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt aliæ non iniucundæ. vt propos. 10. l. 1. sumus polliciti, atq; ad propos. 40. l. 1. demonstrauimus. Sit enim rursus data linea recta AB, diuidenda in quinq; partes æquales. Ducatur ex B. recta BC, vtcunq; faciens angulum cum AB; Deinde ex assumpto puncto D, siue supra B, siue infra, agatur DE, parallela ipsi AB, ex qua abscindantur quinq; æquales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, vt si D, est supra B, recta DE, ex qnq; partibus æqualibus constans, minor sit, quam AB, maior vero, si D, existat infra B. postremo ex A. per E, recta ducatur AC, occurrens ipsi BC, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur CK, CL, CM, CN, quas dico diuidere rectam AB, in quinq; partes æquales. Cum enim DE, sit parallela ipsi AB, diuidentur EH, & AM in triangulo CAM, proportionaliter, ex schouio propos. 4. huius lib. Cum ergo EH, secta sit bifariam in I secta quoq; erit AM, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta MK, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo CLB, secta erit bifariam. Est ergo AN, ipsi NM; & NM, ipsi LM; & ML, ipsi LK; & LK, ipsi KB, æqualis; ac proinde AB, secta erit in quinq; partes æquales. Quod est propositum.



d 33. primi.

ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ BC, AD, inter se parallelæ; hoc est, constituentur anguli A, B, æquales: Et ex BC, abscindantur quatuor partes æquales BF, EF, FG, GH, vt sint tot partes, vna minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex AD, totidem æquales resecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM. FL, GK, HI, secantibus rectam AB, in N, O, P, Q, dico ipsam AB, sectam esse in quinq; partes æquales. Cum enim æquales sint, & parallelæ GH, IK, d erunt & HI, GK, parallelæ; Eademq; ratione parallelæ erunt GK, FL, EM. Quare cum AM, secta sit in quatuor æquales partes, erit & AQ, similiter in quatuor æquales partes diuisa, vt constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa erit & BN, in quatuor partes æquales, eo quod BH, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cum tam AN, quam BQ, æqualis sit singulis partibus NO, OP, PQ; erunt omnes quinque partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter se æquales. Quod est propositum.



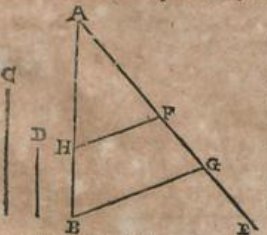
e 33. primi.

f 34. primi.

ALITER. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter se parallelis vtcunq; CD, EF; ex vtraq; abscindantur partes inter se æquales quotcunq;, saltem tot, in quot partes diuidenda, apponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ AB, diuidendæ, eaq; ex aliquo puncto lineæ CE, vt ex E, trãsferatur in instrumenti ea vsq; ad punctum I, illud linea trãsuersa, q; tot spatia terminat, in quot partes linea, apponitur diuidenda, qualis in exemplo est recta GH; ea enim includit qnq; spatia. Postremo ex E, ad I, recta ducatur EI, q; dico diuisam esse in qnq; æquales partes. Cum enim GK, HL, æquales sint, & parallelæ; e erunt quoq; GH. KL, parallelæ. Eodemq; modo oculis lineæ inter rectas CD, EF, inter se parallelæ ostendetur. Quare, vt ex demonstratione huius 10. prop. liquet, quemadmodum EG, diuisa est in qnq; partes æquales, ita etiam similiter in totidem diuisa erit EI. Nam si punctum E, sumptum non fuerit ide q; E, vel C, producenda est IE, donec cum EF, vel DC, coeat. Tunc enim vt in hac 10. prop. probatum est, erunt rectæ EI, EG, similiter diuisæ. Quod si forte IE, nec cum FE, nec cum DC, concurrat, sed vtriq; sit parallela, f erunt singulæ partes rectæ EI, singulis partibus rectæ EG, æquales. ob parallelogramma inter parallelas inclusa. Cum ergo omnes partes rectæ EG, sint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ EI, æquales. Si igitur beneficio circini singulæ partes lineæ EI, transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, æqualem, diuisa erit & AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

EST autem nonnunq; necesse lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadem linea transferatur ab M, vsq; ad N, punctum lineæ GH, protractæ, erit quoq; MN, diuisa in quinq; partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi EG, parallela, vsq; ad rectam GH: Vel si NM, producatur, donec cum GE, producta conueniat. Quod si linea diuidenda fuerit admodum brevis, accipienda erunt parallelarum CD, EF, minores, &c. Si vero linea sit longiuscula, & diuidenda in paucas partes æquales, transferri poterit in duplo plura spatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor spatia, &c. dabunt vnam partem. Vt si diuidenda sit in tres partes, transferatur q; in sex spatia, dabunt duo spatia vnam partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinq; spatia vnam partem propterea quod quinq; spatia conficiunt tertiam partem quindecim spaciorum. Sic si linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim spatia, dabunt nouem spatia vnam partem; quippe cum nouem spacia constituant semissem octodecim spatiorum: & sic deceteris.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, licebit nobis facili negotio sequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonstrare. quod est eiusmodi.



g 2 sexti.

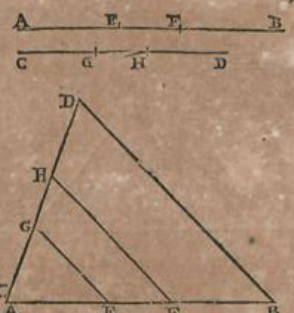
DATAM rectam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunq; datam.

SIT secanda recta AB, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea AE, faciens angulũ A, quemcunq;, ex qua abscindatur recta AF, ipsi C, & FG, ipsi D, æqualis: Ducta deinde GB, ducatur ei per F, parallela FH. Dico AB, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum erit, g cum sit, vt AF, ad FG, atque adeo, vt C, ad D, ita AH, ad HB.

POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddam ad lineas rum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.

SECEN-



SECENTVR rectæ, AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt sit AE, ad EB, sicut CG, ad GD; Itẽ AF, ad FB, vt CH, ad HD. Dico sectiones intermedias EF, GH, proportionales quoque esse cum duobus segmentis FB, HD; vel cum duobus AE, CG, hoc est, esse FB, ad EF, vt HD, ad GH. Item AE, ad EF, vt CG, ad GH. Cum enim sit, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD, erit componendo, vt AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, vt AF, & FB, ita CH, ad HD, erit componendo, vt AB, ad FB, ita CD, ad HD, ad conuertendo, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaq; cum sit, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et vt AB, ad EB, ita CD, ad GD: [h] Erit ex æquo, vt FB, ad EB, ita HD, ad GD, Et conuertendo, vt EB, ad FB, ita GD, ad HD: Et per conuersionem rationis, vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, & diuidendo, vt FB, ad EF, ita HD, ad GH, Quod est primum. k 22. quinti.

RVRSVS, quia est, vt AE, ad EB, ita CD, ad GD, Et vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, vt ostensum est; erit ex æquo, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH, Quod est secundũ.

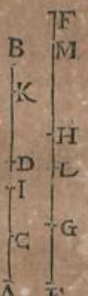
BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus BCD, vel BAD, iungaturque rectæ DB, HF, GE; Quia igitur ponitur, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD, [i] Parallela erit GE, ipsi DB, Rursus, cum ponatur, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD; [k] Parallela erit quoque HF, ipsi DB. [l] Quare & GE, HF, inter se parallelæ erunt: Ac propterea [m] erit, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est secundum. i 2. sexti. k 2 sexti. l 30. primi. m 2. sexti.

EODEM modo, si puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, vt BF, ad EF, ita HD, ad GH, & conuertendo, vt EF, ad FB, ita GH, ad HD. Quod est primum.

IDEM verum est, si magnitudines AB, CD, sint diuersæ, vt v. g. AB, superficies, & CD, linea, vel corpus vt ex priori demonstratione constat.

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema quod sequitur.

SI linea recta sit secta in quotcunq; partes Arithmetice proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ eadem inter se, quæ illæ proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.



RECTA linea AB, secta sit in partes AC, CD, DB, Arithmetice proportionales hoc est habentes eundem excessum: [n] Secetur autem recta EF, in partes EG, GH, HF, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere excessum, hoc est, Arithmetice esse proportionales. Sit. n. CI, ipsi AC, & DK, ipsi CD, æqualis: vt ID, sit excessus inter CD, AC; & KB, excessus inter DB, CD, atque adeo ipsi ID, æqualis. Sit quoque GL, ipsi EG, & HM, ipsi GH, æqualis; vt LH, excessus sit inter GH, EG, & MF, excessus inter HF, & GH. Probandum est, excessus LH, ME, æquales esse. Quoniam igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH, erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF, erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ AB, ad partes lineæ EF, singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continue proportionales. Itaque cum sit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL, [o] erit quoque reliqua ID, ad reliquam LH. vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc est, ita DK, ad HM, [p] erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH. [q] Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Est autem ID, ipsi KB, æqualis. [r] Igitur & LH, ipsi MF, æqualis erit: atq; idcirco EG, GH, HF, Arithmetice proportionales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum. n 10. sexti. o 19. quinti p 19. quinti q 11. quinti r 14. quinti

HOC theorema nullo modo conuerti potest. Non enim sequitur, si duæ lineæ secta sint in partes Arithmetice proportionales, partes vnius habere eadem proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ EF, secunda pars statuatur GM, ita vt excessus inter EG, GM, sit LM. Deinde ipsi GM, posti M, sumatur portio ipsi GM, æqualis, eiq; adiiciatur idem excessus LM, fient tres partes Arithmetice proportionales in linea EF, & tamen non habent eadem proportiones inter se, quas habent partes lineæ AB: [s] quippe cum minor sit proportio EG, ad GM, quam EG, ad GH, hoc est, quam AC, ad CD. s 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, vt AC, ad EG, hoc est, vt CI, ad GL, ita CD, ad GH; ostensum est ita quoque esse excessum ID, ad excessum LH, vt CD, ad GH, Itaque si AC, CD, sint duplæ, aut dimidiatæ partes ipsarum EG, GH, erit quoque ID, dupla vel pars dimidiata ipsius LH, &c.

EX his quoque hoc problema absoluemus.

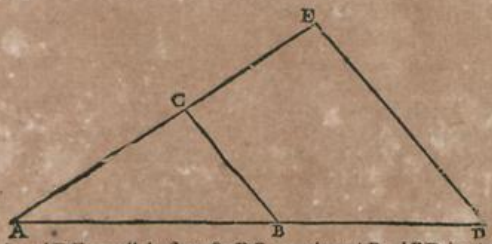
LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmetice proportionales secare.

SIT enim recta EF, secanda in tres partes Arithmetice proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunq; Arithmetice proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF, [t] secetur similiter in G, H, vt AB, in CD, secta est, erunt partes EG, GH, HF. Arithmetice proportionales, vt demonstratum est. t 10. sexti.

HÆC omnia vera etiam sunt in numeris, & in quibusuis aliis magnitudinibus, cum semper eadem sit demonstratio. Atq; ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ posteriorem rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ, cum semper fiat vt summa assumptorum numerorum, ad datum numerum, ita singuli numeri assumpti ad aliud. Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt, Arithmetice proportionales.

PROBL. 3. PROPOSITIO 11. x.

DVABVS datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

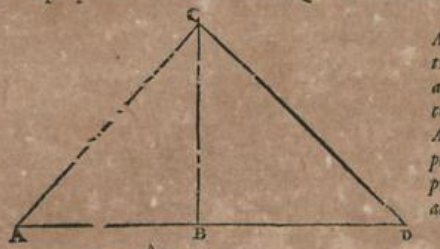


SINT duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum A, quemcunq; sitq; inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequens esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC; [a] erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: [b] Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiã proportionalẽ adinuenimus. Quod erat faciendũ.

a 2. sexti.
b 7. quinti.

SCHOLIVM.

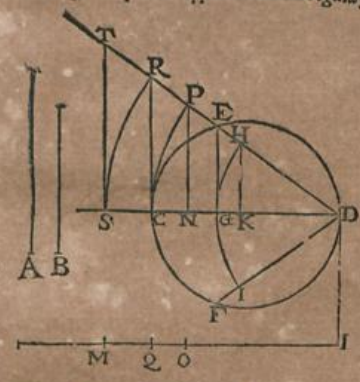
ALITER idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC, constituantur ad angulum rectum AEC, & coniungantur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad AC, perpendicularis CD, occurrens ipsi AB, productæ in D. Dico BD, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD, anguius ACD, sit rectus, & ab eo ad basin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propos. 8. huius libr. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc est, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD, Quod est propositum.



INVENTA autem tertia lineæ continue proportionali, si primam omiseris, & aliis duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis. sexta, septima, octaua; & sic in infinitum.



EXPEDITIVS reperiemus quolibet lineas continue proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primum data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam CD, ipsi A, æqualem describatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipsi B, æquales. Applicata autem regula punctis E, F, ducantur recta EG, quæ ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum transiens secet arcum ECF, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus DE, DF, ex semicirculis æqualibus DEC, DFG, reliqui arcus CE, CF, æquales erunt.) secabit eadem & rectam ductam EF, bifariam per ea, quæ in scholio propos. 27. l. 3. ostendimus. [c] Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si duceretur recta EC, [d] angulus ad E, in semicirculo rectus esset; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. DE, media proportionalis inter CD, DG: ac proinde DG, erit tertia proportionalis ipsis CD, DE, hoc est, datis duabus A, & B. Quod si ex D, per G, arcus describatur secans rectas DE, DF, in H, I; applicataq; regula ad puncta H, I, ducatur recta HK; erit DK, quarta proportionalis. Nam propter angulos HDG, IDG, (qui [e] ob æquales arcus EC, FC, æquales sunt) [f] arcus HC, IG, æquales erunt; ac propterea, ex scholio propos. 27. lib. 3. recta ducta HI, bifariam secabitur in K; [g] ideoq; & ad angulos rectos. [h] Parallelæ ergo sunt EG, HK. [i] Vt igitur recta ED, ad DG, ita erit DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor lineæ CD, DE, DG, DK, continue proportionales. Quod si ex D, per K, alius arcus describatur secans rectas DE, DF, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.



c 3. tertij.
d 31. tertij.
e 27. tertij.
f 26. tertij.
g 3. tertij.
h 28 prim.
i 2. vel 4. sexti.

DEINDE sit data proportio lineæ B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, & DI, perpendicularibus, abscindantur rectæ DN, LO, minori B, æquales, applicataq; regula ad puncta O, N, ducatur recta N, P, [k] quæ ad DC, perpendicularis erit, [l] cum sit parallela ipsi DL. Sumpta deinde recta DC, æquali ipsi A, maiori, describatur ex D, per C, arcus secans rectã NP, in P, extendaturq; ex D, per P, recta DPT, eritq; DP, ipsi DC, hoc est, ipsi A, æqualis. Abscissa quoque LQ, ipsi DC, æquali applicataq; ad puncta Q, C, regula. ducatur recta CR, quæ eadem ratione ad DC, perpendicularis erit, & ipsi NP, parallela. [m] Et quoniam est, vt ND, ad DP, hoc est, vt B, ad A, (quod ND, DP, ipsis B, A, acceptæ sint æquales) ita CD, ad DR, hoc est, ita DP, ad DR; erunt tres rectæ ND, DP, DR, continue proportionales; ideoq; DR, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quod si ex D, per R, arcus describatur secans DC, in S, & rectæ DS, æqualis auferatur LM, applicataq; regula ad puncta M, S, recta ducatur ST, erit DT, quarta proportionalis. Nam eadẽ ratione erit ST, ipsi CR, parallela, & ad DC, perpẽdicularis. [n] Quare erit, vt CD, ad DR, hoc est, vt A, ad DR, ita SD, id est, DR, ad DT. Sunt ergo quatuor lineæ ND, DP, DR, DT, cõtinue proportionales. Quod si ex D, per T, alio arcu describatur secãs rectã DC, ptractã, inuenietur eadẽ arte quinta proportionalis atq; ita in infinitũ.

k 29. primi
l 33. prim.
m 2. vel 4. sexti.
n 2. vel 4. sexti.

EX his sine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometrice omnino, sed quasi attentando, & praxim ipsam iterum atque iterum repetendo, donec id, quot quærimus, esse quamur. Vt si inter CD, DK, inueniendæ sint duæ mediæ proportionales, descripto circa maiorem CD, circulo CEDF, erigemus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducemusque DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demissa EG, auferat rectam DG, rectæ DH, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctũ G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Nã vt ostendimus, est

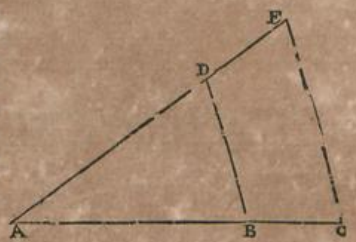
vt CD,

vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. propos. 8. huius lib. [a] *Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continue proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales sunt. Quod si rectæ DH, DG, comperiantur non esse æquales, si quidem DH fuerit minor, eleuanda erit DH, magis; si vero maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.* a 2. vel 4. sexti.

PROBL. 4. PROPOS. 12. xi.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

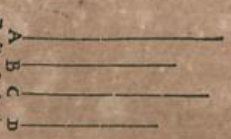
SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartã Disponantur primæ duæ AB, BC, secundũ lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta sit parallela BD; [a] erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



a 2. sexti.

SCHOLIVM.

HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sunt duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia quælibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.

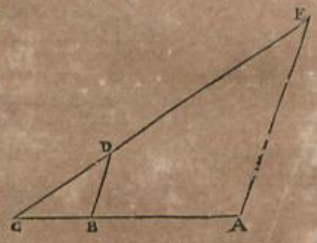


OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, oporteat q; inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam sit, vt AB, prima ad BC, secundam. Disponantur primæ duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam AC: Tertia vero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunq;. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ in E. Dico ED, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, vt est AB, prima ad BC, secundam. Hoc autem manifestum est, [b] *cum AC, EC, proportionaliter secentur in B, & D, punctis.*

ALITER. Ex secunda CB, sit prima, & ex prima AB, fiat secunda. [c] *atq; inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: vt sit secunda CB, ad primam BA, vt tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, secundam, vt DE, quarta ad CD, tertiam.*

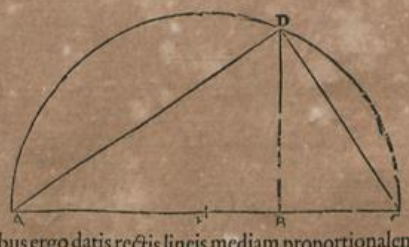


b 2. sexti.
c 17. sexti.

PROBL. 5. PROPOS. 13. xi.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

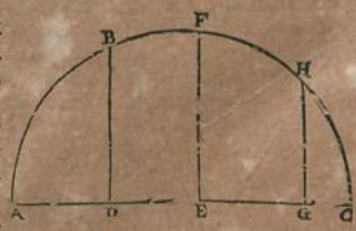
SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineã rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus describatur, ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsq;. Dico BD esse, mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; [a] erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB, erit per corollarium propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis mediam proportionalem adinueniemus. Quod erat faciendum.



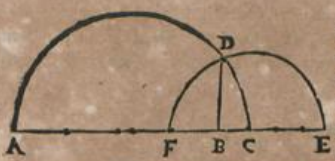
a 31. tertij.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus ABC, & ex puncto D, diametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpendicularis ipsi AC. Dico DB, esse proportionalẽ mediã inter AD, & DC: Id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB; [b] *fiet angulus ABC, rectus. Quare per coroll. propos. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, media proportionalis inter AE, & CE. Item GH, inter AG, & GC, atq; eodem modo de aliis quibuscunque dicendum est, quæ ex quibusuis punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur.*



b 31. tertij.

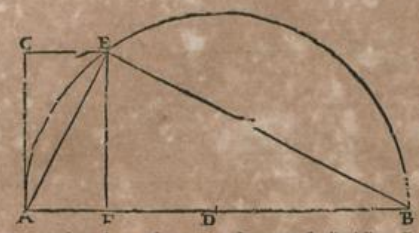


QVANDO minor data linea est valde exigua, secabit perpendicularis BD, nimis oblique circumferentiam in D. Quare vt exquisitius tunc punctum D, inueniatur, multiplicabimus minorem lineam BC, quoties libuerit. v. g. sumemus BE, ipsius BC, quadruplam, maiorem vero lineam AB, in tot partes æquales secabimus, quotuplex est BE, ipsius BC: sit q, vna pars BF: ita vt eandem proportionem habeat AB, ad BF, quam BE, ad BC. Ac tandem circa EE, circulus describatur secans BD, in D: eritq; BD, media proportionalis inter BF, BE, vt in hoc scholio demonstrauimus. Dico eandem esse mediam proportionalem inter AB, BC. Cum enim sit vt prima AB, ad secundam BF, ita tertia BE, ad quartam BC; [c] *erit rectangulum sub AB, prima, & BC, quarta, æquale rectangulo sub BF, secunda, & BE, tertia.* [d] *Sed hoc æquale est quadrato BD. Igitur & illud.* [c] *Quapropter BD, media proportionalis est inter AB, BC. Non autem te moueat, quod citauerimus propos. 16. & 17. huius, quæ nondum sunt demonstratæ: quia hæc demonstratio cum sua constructione differri potest post propositum. 17. huius, ita vt nullū periculum sit petitionis principij, vt Philosophi loquuntur.*

c 16. sexti.
d 17. sexti.
e 17. sexti.

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



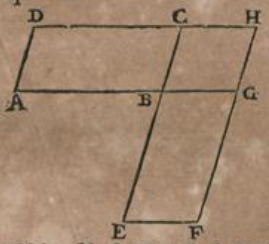
SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor nō sit, quam dupla ipsius AC, sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Disponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuisa AB, bifariam in D, ex D, centra, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus describatur AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, secans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessario CE, circumferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quam semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circumferētiam; tanget autem eandem circumferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ AB, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos eductæ. Cum ergo positum sit, AC, non esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, circumferentiam, aut tanget.) à quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportionalem inter segmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8. huius libr. EF, media proportionalis inter AF, & FB. [f] *Cum igitur EF, æqualis sit ipsi AC, eo quod parallelogrammum sit ACEF;* [g] *(Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem, & AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod est propositum.*

f 37. primi.
g 28. primi.

xiij.

THEOR. 9. PROPOS. 14.

ÆQVALIVM & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. libr. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec cocant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF: [a] erit vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed vt DB, ad BH, [b] ita est AB, basis ad basin BG, quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt BF, ad BH, ita est basis EB, ad basin BC. Igitur vt AB, ad BG, ita est EB, ad BC. Quod est propositum.

a 7. quinti.
b 1. sexti.

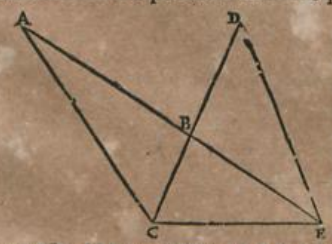
E CONTRARIO sint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogrammma DB, BF, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cum sit, vt AB, ad EG, ita EB, ad BC: [c] Vt autem AB, ad BG, ita DE, ad BH; & vt EB, ad BC, ita BF, ad idem BH; erit quoque DB, ad BH, ita BF [d] ad idem BH. Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

c 1. sexti.
d 9. quinti.

xiv.

THEOR. 10. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorū, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.



SINT duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt AB, BE, vnam efficiant lineam rectam. Quod facto, cum anguli ABC, DBE, sint æquales; erunt & DB, BC, vna recta linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sunt triangula ABC, DBE, [a] erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, [b] ita est basis AB, ad basin BE, quod hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt DBE, & BCE, ita est basis DB, ad BC. Quare vt AB, ad BE, ita est DB, ad BC. Quod est propositum.

a 7. quinti.
b 1. sexti.

IAM

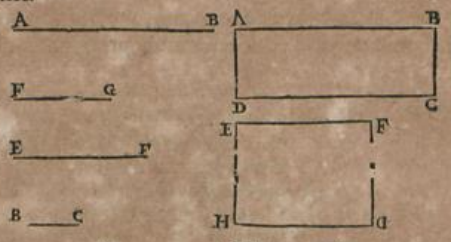
IAM vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt AB, ad BE, ita DB, ad BC; vt autem AB, ad BE, *c* ita triangulum ABC, ad triangulum BCE; & vt DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE; Erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, *d* propter eaque æqualia erunt triangula ABC, DBE. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

c 1. *sexti.*

d 9. *quinti.*

THEOR. 11. PROPOS. 16. XV.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo; illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; vt quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC: Sitque rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis AB, BC; rectangulum vero EFGH, comprehensum sub mediis EF, FG: Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC, erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. *a* Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod est propositum.

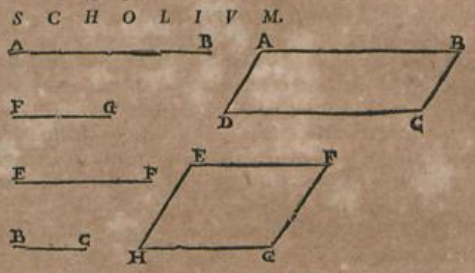
a 14. *sexti.*

CONTRA vero, sint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F, *b* erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

b 14. *sexti.*

SCHOLIVM.

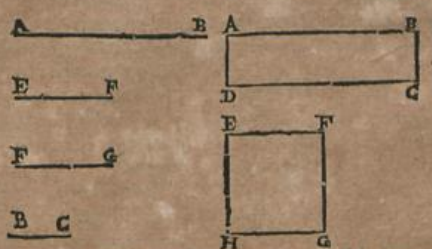
IDEM verum est, etiamsi parallelogramma AC, EG, non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.



THEOR. 12. PROPOS. 17. XVJ.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD, contentum sub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensum sub mediis EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. *a* Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub mediis EF, FG, comprehenso: Quod est propositum.



a 16. *sexti.*

SED sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; *b* erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: *c* Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

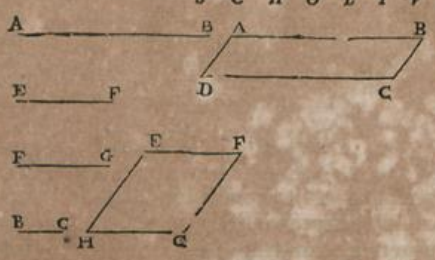
b 16. *sexti.*

c 7. *quinti.*

COROLLARIVM.

EX posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

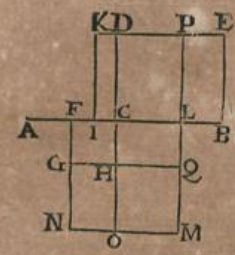
SCHOLIVM.



EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt EG. sit Rhombus, & AC, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, vt figura indicat.

LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans: quod est eiusmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales.



SIT recta AB, diuisa inter C, vtcunque, oporteatq; partem CB, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continue proportionales sint. Secetur AC, bifariam in F, & FC, iterum bifariam in I, vt CI, quarta pars sit primæ partis AC; & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares BE, IK, primæ parti AC, æquales, ducaturq; recta EK, ita vt rectangulum IE, comprehensum sit sub AC, prima parte, & rectæ IB, composita ex altera parte BC. & ex CI, quarta parte primæ partis. Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eiq; addita in rectum CB, [c] erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato ex CF, æquale quadrato ex BF: Est autem rectangulum IE, minus rectangulo sub AB, BC, vna cum quadrato ex CF, (Ducta enim CD, ad AB, perpendiculari, erit rectangulum CE, contentum sub AC, CB, minus rectangulo sub AB, BC: At rectangulum CK, quadrato ex CF, æquale, cum vtrumque quarta pars sit quadrati ex AC; rectangulum quidem CK, [d] quia fit est rectangulum CK, ad quadratum ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, vt CI, ad CA; ac proinde cum CI, sit quarta pars rectæ AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC; At vero quadratum ex CF, quarta pars est eiusdem quadrati ex AC, ex scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quoq; erit quadrato ex BF. Si igitur [c] fiat quadratum rectangulo IE, æquale, erit eius latus minus recta FB, maius autem quam FC, quippe cum quadratum ex FC, æquale sit ostensum rectangulo CK, ac propterea minus rectangulo IE. Sit ergo latus illud FL. Dico partem CB, ita sectam esse in L, vt tres partes AC, CL, LB, sint continue proportionales. Describatur enim ex FL, quadratum FM, rectaq; DC, extendatur ad O, & latus ML, ad P: sumptisq; duabus FG, LQ, ipsi CF, æqualibus, ducatur recta GQ, secans CO, in H. Eritq; CG, quadratum rectæ CF, ob æqualitatem rectarum CF, FG. Et quia ablatis æqualibus FC, FG, ex æqualibus FL, FN, reliquæ CL, GN, æquales sunt; [f] & est CL, ipsi HQ, & GN, ipsi HO, æqualis; æquales quoque erunt HQ, HO; ideoq; HM, quadratum erit rectæ CL. Rursus quia tam rectangulum CQ, comprehenditur sub CL, & CH, siue CF, semisse ipsius AC, quam rectangulum GO, sub GN, siue CL, & GH, siue CF, semisse eiusdem: AC, siue CD; [g] erunt duo rectangula CQ, GO, simul æqualia rectangulo CF, comprehenso sub eadē CL, & CD, quæ ipsis CH, GH, simul æqualis est. Itaq; cum rectangulum IE, quadrato FM, æquale sit; & rectangulum CK, quadrato CG; & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ, GO, simul: erit reliquum rectangulum LE, comprehensum sub BE, siue AC, & BL, reliquo quadrato HM, æquale. Quocirca, cum datis tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, sub extremis AC, BL, comprehensum æquale sit quadrato HM, mediæ CL; [h] erunt ipsæ tres lineæ AC, CL, LB, continue proportionales. Quod est propositum.

c 6. secundi

d 1. sexti.

c 14. secundi

f 34. primi.

g 1. secundi

h 17. sexti.

IN numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adijciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam si ex radice inuenta dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea AB, ponatur 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adijciemus CI, hoc est, 9. quartā partē prioris partis 36. ad CB, id est ad 40. posteriorem partem, & conflatum numerū 49. lineam scilicet IB, in priorē partē 36. siue in lineam AC, ducemus, atq; ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo IE, radicem quadratam eruemus 42. pro linea FL, ex qua si detrahemus CF, semissem partis AC, numerum 18. reliqua erit pars CL, 24. Hac ablata ex tota posteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes AC, CL, LB, numeri AB, 76. hæ tres. 36. 24. 16. continue proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non posse in numeris. Atque hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem scripsimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputauimus, non alienum erit à nostro instituto, de eisdem quoq; cum Pappo Alexandrino disserere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunq; Medietatis, siue Arithmeticæ, siue Geometricæ, siue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quam ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima hæc sit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT datæ duæ rectæ AB, & C, (quæ per vnitates in longum dispositas hic representantur) inter quas media proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex maiore AB, abscindatur alia æqualis AD: Diuiso autem segmento BD, bifariam in E, sumatur ipsi DE, æqualis HG. Dico FG, esse mediam Arithmetice proportionalem inter AB, & C. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH, siue DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint æquales, ex constructione, liquido constat rectas AB, FG, & C, Arithmetice proportionales esse

HINC

HINC efficitur, mediam lineam FG, esse semissem summæ ex extremis conflatæ. Cum enim tam AD, quam C, ipsi FH, fit æqualis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. [a] *Igitur & summa ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, semissis erit summæ extremarum. Quod est propositum.*

[a] 1. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, æqualis: & ipsi FH, ponatur æqualis C. Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, æquales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura datæ duæ rectæ C, & FG, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, æqualis, eiq; addatur EB, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat, æqualis. Dico AB, esse tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres AB, FG, & C, sint proportionales Arithmetice. Nam AB, excedit ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH. Cum ergo duo excessus BE, GH, ex constructione, sint æquales, patet propositum.

ITAQVE datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. si semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adiiciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmetice, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summæ extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46. & eius semissis 23. medium terminum constituit.

SI vero ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.

SI denique maiori 30. adiiciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet. 44. 30. 16.

IIII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT datæ rectæ AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometrice proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus describatur secans AB, in E. Dico BE, mediam proportionalem esse inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica: Ductis enim rectis AD, BD; [a] *erit angulus ABD, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.*



[a] 31. tertij.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportioualitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura datæ rectæ AB, BE, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometrice proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam ADB, in D, puncto ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DC. Dico BC, tertiam proportionalem esse ipsis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD, [a] *erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius erit BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis inter AB, BC: Id est, erit AB, ad BE, vt BE, ad BC. Quod est propositum.*

[a] 21. tertij.

VI.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

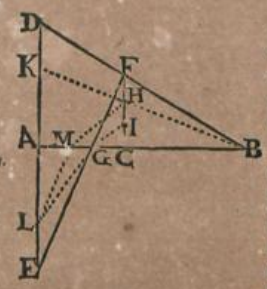
SINT in eadem figura data recta CB, BE, eundem terminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometrice proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis CD, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta BD, excitetur ad eam in D, perpendicularis DA, secans BE, productam in A. Dico AB, tertiam proportionalem esse ipsis CB, BE. Quoniam enim angulus ADB, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib BD, hoc est, BE, ipsi æqualis, media proportionalis inter BC, & AB: Hoc est, erit CB, ad BE, vt BE, ad AB. Quod est propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0265-2



m 28. quin.

n 4. sexti.

SINT data recta AB, BC, eundem terminum B, possidentes, inter quas inuenienda sit media Harmonice proportionalis. Ducta per A, ad AB, perpendiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantæcunque. Excitetur quoq; ex C, ad AB, perpendicularis CF, secans ductam rectam BD, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur FE, secans AB, in G. Dico BG, esse mediam Harmonice proportionalem inter AB, BC, hoc est, esse AB, primam ad tertiam BC, vt AG, excessum inter primam AB, ac mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC: [m] Quoniam enim CF, parallela est ipsi DE, ob rectos angulos A, C, erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit vt AB, ad AD, ita BC, ad CF; & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF, hoc est, ita AE, ad CF. Rursus ob similitudinem triangulorum AEG, CFG, [n] erit vt AE, ad AG, ita CF, ad CG; & permutando vt AE, ad CF, ita AG, ad GC. Erat autem vt AE, ad CF, ita AB, ad BC. Igitur erit quoq; AB, ad BC, prima linea ad tertiam, vt AG, excessus inter primam AB, & mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quod est propositum.

NON determinantur autem magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunq; sumantur siue maiores, siue minores, eadem media BG, inuenietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL. Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LH: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A & G, ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim rursus triangula æquiangula ALM, MHC. Si recta est HML. Est autem vt AB, ad BC, ita AG, ad GC, vt ostensum est. Igitur erit quoque AM, ad MC, vt AG, ad AC, quod est absurdum. Nam [o] minor est proportio AM, ad GC, quam AG, ad GC: Sed adhuc minor est proportio AM, ad MC, quam ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM, ad MC, quam AG, ad GC. Non ergo ita est AM, ad MC, vt AG, ad GC; ac propterea HL, non secabit AG, in M. Eodem modo non secabit GC. Transit igitur per G: atque idcirco eadem media BG, inuenietur per rectas AK AL, æquales.

o 8. quinti.

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT in eadem figura data recta AB, BG, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonice proportionalis. Ducta DE, ad AB, perpendiculari, ponantur æquales AD, AE, quantæcunque: iuncta autem recta BD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in F, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur FC. Dico BC, ipsis AB, BG, esse Harmonice proportionalem, hoc est, esse AB, primam ad BC, tertiam, vt est AG, excessus inter primam & secundam, ad GC, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in præcedenti propositione.

NON determinantur etiam hic magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunq; sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BC, reperietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL. Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungatur q; recta LG, quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, vt in I. ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AK, ad CH, hoc est, ita AL, ad CH. Vt autem AB, ad BC, ita erat AG, ad GC. Erit igitur quoq; vt AG, ad GC, ita AL, ad CH. Et quia si recta linea est LGI, ob similitudinem triangulorum ALG, CIG, [p] est vt AL, ad AG, ita CI, ad GC, erit permutando, vt AL, ad CI, ita AG, ad GC. Cum ergo ostensum sit esse vt AG, ad GC, ita AL, ad CH, erit AL, ad CH, vt ad CI. [q] Æquales sunt igitur CH, CI, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet LG, infra H, eodemq; modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, vbi BK, perpendicularem CF, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis HC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonice.

p 4. sexti.

q 9. quinti.

HINC sequitur, datis tribus rectis Harmonice proportionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita AG, ad GC: sit autem AB, prima maior quam AG, excessus inter primam AB, & media BG; [r] erit quoq; BC, tertia maior quam GC, excessus inter mediam BG, & minimam BC.

r 14. quinti

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.



s 28. prim.

t 4. sexti.

SINT data recta AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonice proportionalis. Ducta per A, ad BC, perpendiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantæcunque, ducatur q; recta BD, quam productam secet EC, producta in F, puncto (quod autem conueniant BD, EC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis FG. Dico GB, ipsis CB, BA, Harmonice proportionalem esse: Hoc est, esse GB, primam ad BA, tertiam, vt GC, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam CB, & tertiam BA. [s] Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile, id est, erit vt GB, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, vt GB, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad AE. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC, [t] erit vt FG, ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad AE, ita GC, ad CA. Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoq; vt GB, prima, ad BA, tertiam ita GC, excessus inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam BC, & tertiam BA. Quod est propositum.

QVOD autem BD, EC, conueniant, sic probabitur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia, siue minima, maior erit BA, tertia quam CA, excessus, quo media BC, minimam BA superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quam AC, non posset reperiri tertia maior: cum ea inuenta, semper demonstraretur tertia AB, maior excessu AC, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, æqualis, connectaturq; recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales, vtpote rectos, siue ad verticem A, [u] erunt & anguli ACE, AHD, æquales: qui cum alterni sint;

u 4. primi.

sint;[b] erunt rectæ EC,HD,parallelæ;[c] ac proinde anguli interni DHC,HCF, duobus rectis æquales erunt. Cum ergo[d] angulus DHC, maior sit interno augulo B, erunt duo anguli BCF, CBF, duobus rectis minores.[e] Quocirca BD,EC, coibunt vt est propositum. b 27.primi. c 29.primi. d 10.primi. e 13.prim.

NON determinantur quoq; hic magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunq; sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BG,reperietur. Sint enim aliæ æquales AI, AK: Ducta autem recta BI, quæ producta secet perpendicularem FG, in L, ducatur KC, quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M, ostendemus eodem modo, esse vt GB,ad BA, ita GL,ad AI,id est,ad AK. Vt autem GB,ad BA,ita erat GC,ad CA. Erit igitur vt GC,ad CA, ita GL, ad AK. Et quia, si recta linea est KCM,ob similitudinem triangulorum GMC,AKC,[f] est vt GM,ad GC,ita KA, ad AC, erit permutando, vt GM, ad KA,ita GC,ad CA. Cum ergo ostensum sit,esse vt GL,ad AK,ita GC,ad CA,erit quoq; GM,ad AK, vt GL, ad AK.[g] Æquales sunt igitur GM,GL,pars & totum,quod est absurdum. Non ergo cadet KC, infra L eademq; ratione neq; supra cadet. Cadit ergo in L, vbi BI,producta perpendicularem FC,secat; ac proinde ex L,demissa perpendicularis LG, ad GB, cadet in G,exhibebitq; eandem tertiam GB,maiorem, Harmonice proportionalem. f 4. sexti. g 9.quinti.

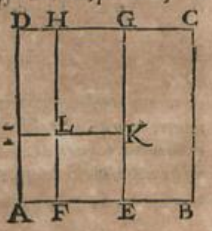
Ex his perspicuum est,quando duo numeri proportionem habent duplam,vel dupla maiorem,illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 3. regula proportionalitatis Harmonicæ diximus. Quia enim ostendimus, BA, minimam lineam esse maiorem excessu AC, quo media BC, minimam AB,superat;erit AB,maior semisse ipsius BC;ac proinde BC,ad AB,media ad minimam, minorem proportionem habebit, quam duplam. Quod si BC,ad AB,esset dupla,vel maior quam dupla,,esset AB,vel æqualis ipsi AC,vel minor. Quare vt ostensum est,non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate:quia EC,cum BD,non coiret.

SED demonstremus etiam cum Io.Baptista Benedicto,qua ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonicæ in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium,quas in tractatione proportionum in lib. 5, explicauimus. Vtemur autem nonnullis propositionibus libri 7. cum ea ex lib. 5. & 6.non pendeant, atq; idcirco ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus.

X.

EX datis quibusuis duobus numeris,tres numeros Harmonice proportionales,quorum extremi eandem proportionem habeant,quam dati duo numeri,reperire.

EX qualibet recta AB, describatur quadratum ABCD, sumptisq; duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB,ducantur EG,FH,ipsis AD,BC,parallelæ. Item sumpta recta AI,æquali ipsi BE,vel EF,agatur IK,ipsis AB, DC, parallela secans FH,in L. Erit rectangulum AG,contentum sub AB,(id est,sub summa rectarum AE,EB;[a] cum EG,sit ipsi BC, ideoq; ipsi AB, æqualis) & AE, (maiore scilicet parte summæ AB.) Rectangulum vero EC,continebitur sub AB,(hoc est,sub eadem summa rectarum AE,EB,) & EB,(minore videlicet parte eiusdem summæ AB.) Tam denique rectangulum AK, quam GL,sub partibus AE,EB,comprehendetur; propterea quod AI, sumpta est ipsi EB, æqualis; & HL, LK,ipsis AE,EB,æquales.[b] Cum enim FH, ipsi AD, hoc est,ipsi AB;& FL, ipsi AI, hoc est ipsi EB,sit æqualis:erit reliqua HL,reliquæ AE, æqualis:at[c] KL, ipsi EF, siue ipsi EB,æqualis est. Ex quo fit,duo rectangula AK, KH,simul continere duplum eius,quod sub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & summam duorum rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC,constituere proportionalitatem Harmonicam:hoc est,vt est AG,primum, ad EC,tertium, ita esse IH,excessum inter primum AG,& secundum HLIAEG,ad AL,excessum inter secundum HLIAEG, & tertium EC,siue FG,[d] quod ipsi EC,æquale est. Nam cum HL,ipsi AE;& LF,ipsi EB,æqualis sit,vt ostendimus;[e] erit AE,ad EB,vt HL,ad LF. Vt autem AE,ad EB,[f] ita est AG,ad EC: Et vt HL,ad LF,ita est HI, ad HL. Igitur erit quoq; AG,primum ad EC,tertium,vt HI, excessus inter primum ac medium,ad AL,excessum inter medium ac tertium. Quod est propositum.



a 34. primi. b 34.prim. c 34.prim. d 38.primi. e 7. quinti. f 1. sexti.

ITAQVE si AE,ponatur 6.& EB, 4.erit summa AB,10.quam si ducamus in AE,& EB,fiet AG,60.& EC,40. Duplum autem eius,quod fit ex AE,in EB,hoc est, HLIAEG,fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonice proportionales erunt 60.48.40.quorum extremi eandem proportionem habent,quam dati numeri 6.4. Cum enim eadem summa 10.ex 6.& 4.collecta multiplicans vtrumq; 6.4.produxerit extremos 60 40.[g] erit 60.ad 40.vt 6.ad 4. Quod etiam patet ex figura.[h] Est enim AG,id est,60.ad EC,id est,ad 40.vt AE,id est, 6.ad EB,id est,ad 4. g 17. septimi. h 1.sexti.

HAC arte,si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumq; seorsum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem,quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.

EX his facile etiam inueniemus tres numeros Harmonice proportionales, quorum extremi proportionem habeant datam,& medius sit dato numero æqualis. Vt si extremi debeant habere proportionem quintuplam, mediusq; sit 30.sumendi sunt 5. & 1. in data proportione, & eorum summa 6. in vtrumq; ducenda, vt fiant 30.& 6. inter quos statuatur medius 10. qui duplus est producti ex multiplicatione datorum numerorum 5.& 1.vnius in alterum:eruntq; 30.10.6. Harmonice proportionales,vt dictum est. Deinde datus medius 30. diuidatur per medium inuentum 10. & Quotiens 3.per tres inuentos 30.10.6. multiplicetur. Ita enim fient tres numeri quæsiti 90.30.18.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6.4. statuatur medius Arithmetice proportionalis, 5. nimirum semissis eorum summæ, hoc modo. 6.5.4. Deinde medius 5. in extremos 6.& 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quem extremi inter se multiplicati producunt,hoc modo, 30.24.20. Dico hos tres esse Harmonice proportionales. Quoniam enim tres numeri 60.48.40.qui fiunt ex summa 10.datorum numerorum 6.4. in datos numeros 6.& 4.& ex 4.in 6.bis dupli sunt triũ numerorum hic inuentorũ,quod hi producti sint ex semisse summæ datorum numerorũ in datos numeros, & ex 4.in 6.semel, vt perspi-

vt perspicuum est: erit quoq; tam excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quam excessus inter
60. 48. 40 48. & 40. ipsius excessus inter 24. & 20. vt ad propos. 10. ostendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Har-
30. 24. 20. monice proportionales, vt in præcedenti problemate demonstrauimus; erunt quoque eorum semisses, 30. 24. 20.
i 15. quinti. [i] eadem habentes proportiones, Harmonice proportionales; quandoquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum excessus numerorum 30. 24. 20. semisses sint horum numerorum 60. 48. 40. excessuum, vt dictum est.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis Harmonice. Dematur ex maiore AB, 15. numerus BD, minori BC, 10. æqualis, & reliquus numerus AD, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem BC, 10. productusq; numerus 50. diuisus per AC, 25. summam datorum numerorum, faciat Quotientem DE, 2.

A... E.. D..... B..... C

qui additus minori BD, 10. faciat BE, 12. Dico BE, esse medium proportionalem Harmonice inter AB, BC, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AD, in BC, fit, diuiso per AC, Quotiens est DE; producetur idem numerus diuisus ex DE, Quotiente in diuisorem AC, vt constat ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex AC, primo, in DE, quartum qui ex BC,
b 19. septimi. vel BD, secundo in AD, tertium; [b] erit AC, primus ad BC, secundum, vt AD, tertius ad DE, quartum: Et diuidendo, AB, ad BC,
vel 16. sexti. primus datus ad tertium datum, vt AE, excessus inter primum AB, & medium inuentum, BE, ad DE, excessum inter medium BE, & BD, siue tertium BC. Sunt ergo AB, BE, BC, nimirum 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.

Itaq; si differentia datorum numerorum ducatur in minorem, numerusq; productus diuidatur per datorum numerorum summam, ac denig; Quotiens minori adijciatur, constabitur medius terminus Harmonicæ proportionalitatis.

XII.

DATIS duabus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & AC, 12. quibus inueniendus est minor Harmonice proportionalis. Addatur BD; æqualis ipsi BC, excessui inter datos numeros. Per hanc summam AD, 18. collectam ex maiore numero, & differentia datorum nu-

A..... E.. C... B... D

merorum, diuidatur numerus 36. factus ex minore dato AC, in BC, differentiam datorum numerorum; & Quotiens CE, ex minore dato AC, detrahatur. Dico reliquum AE, 10. esse terminum tertium minorem quæsitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BC, fit, diuiso per AD, Quotiens est CE, producetur idem numerus diuisus ex CE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex Diuisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex AD, primo, in CE,

A..... E.. C... B... D

k 19. septimi. vel 16. sexti. quartum, qui ex BC, secundo in AC, tertium; [k] erit AD, primus ad BC, secundum, hoc est, ad BD, vt AC, tertius ad CE, quartum. Et diuidendo, AB, ad BD, hoc est ad BC, vt AE, ad CE: Et permutando, AB, primus datus ad AE, tertium inuentum, vt BC, excessus inter primum AB, & medium AC, ad CE, excessum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, id est, 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.

Itaq; si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus. Quotiensq; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rursum dati duo numeri AB, 15. & AC, 12. quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Maiori AB, addatur BD, æqualis differentiæ BC, 3. datorum numerorum. Et per summam AD, 18. diuidatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum AB, AC, hoc est, 15. 12. inter se procreatus. Sit q; quotiens AE, 10. Dico AE, minorem extremum esse in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex AB, in AC, gignitur, diuiso per AD, Quotiens fit AE, producetur idem nu-

A..... E.. C... B... D

merus diuisus ex AE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex defin. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus fit
b 19. septimi. vel 16. sexti. ex AD, primo in AE, quartum, qui AB, secundo in AC, tertium; [b] erit AD, primus ad AB, secundum vt AC, tertius vt AE, quartum; ac proinde cum AD, maior sit, quam AB, erit quoq; AC, maior quam AE. Quare erit & diuidendo BD, id est, BC, ad AB, vt CE, ad AE: Et conuertendo AB, ad BC, vt AE, ad CE; Et permutando AB, primus ad AE, tertium inuentum, vt BC, excessus inter primum AB, & medium AC, ad CE, excessum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, hoc est, 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII. DA-

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT dati duo numeri AB,10.& AC,12.quibus inueniendus sit tertius maior in Medietate Harmonica.Ex minore AB, detrahatur BD,æqualis differentiæ BC,2.datorum numerorum.Et per reliquum numerum AD,8. diuidatur numerus 24.factus ex maiore numero AC, 12. in differentiam datorum numerorum BC, 2. vel BD. Quotiens autem CE, 3. maiori numero

A..... D.. B.. C... E

AC,12.adijciatur.Dico summam AE,15.esse terminum maiorem in proportionalitate,siue Medietate Harmonica,hoc est,tres numeros AE,AC,AB,nimirum 15.12.10.esse Harmonice proportionales. Quoniam enim numero,qui ex AC, in BD,fit, diuiso per AD,Quotiens sit CE,producetur idem numerus diuisus ex CE,Quotiente in diuisorem AD,multiplicato.Quia igitur idem numerus gignitur ex AC, primo in BD, quartum, qui ex CE, secundo in AD, tertium, [a] *erit AC, primus ad CE,secundum vt AD,tertius ad BD,quartum:Et componendo AE,ad CE,vt AB,ad BD, hoc est, ad BC: Et permutando AE, primus ad AB, tertium,vt CE, excessus inter primum AE, & medium AC,ad excessum BC, inter medium AC, & tertium AB. Sunt ergo tres numeri AE,AC,AB,nimirum 15.12.10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.*

[a] 19. septimi. vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris,si eorum differentia ex minore auferatur,& per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus,Quotiensque maiori numero adjciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rursus duo dati numeri AB,10.& AC, 12. quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore AB, dematur BD,æqualis excessui BC,datorum numerorum: Et per reliquum numerum AD, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum AB,10.& AC,12.procreatus, Quotiensq; sit AE,15. Dico AE,esse terminum maiorem in

A..... D.. B.. C... E

proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB,in AC,diuiso per AD,Quotiens est AE,producetur idem numerus diuisus ex AE,Quotiente in diuisorem AD, ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus gignitur ex AB,primo in AC,quartum,qui ex AD, secundo in AE,tertium; [b] *erit AB,primus ad AD,secundum, vt AE,tertius ad AC,quartum;ac proinde cum AB,maior sit quam AD,erit & AE,maior quam AC.Et cum sit,vt AE,ad AC,ita AB, ad AD,erit per conuersionem rationis AE,ad CE, vt AB, ad BD,hoc est,ad BC. Et permutando AE,primus inuentus ad AB,tertium,vt CE,excessus inter primum AE,& medium AC,ad BC,excessum inter medium AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE, 15,AC, 12.AB, 10. Harmonice proportionales sunt. Quod est propositum.*

[b] 19. septimi. vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris,si eorum differentia ex minore auferatur,& per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare,quibus ad finem tractationis proportionum,ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & vicissim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate.Geometrica tam æqualium terminorum, quam inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIV.

PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus siue æqualibus,siue inæqualibus;Summa ex primo semel,secundo bis,& tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel:ac tertius semel,sunt Geometrice proportionales.

SINT tres termini continue proportionales Geometrice,A,B,C.sitq; D,summa ex A,semel, & B, bis & C, semel collecta: At E.summa ex B,& C,semel conflata,ac denique F,ipsi C,æqualis.Dico D, E, F, Geometrice quoq; proportionales esse. Cũ enim sit A, ad B,vt B,ad C;erit quoque componendo A, B, simul ad B, vt BC, simul ad C. [a] *Igitur omnes antecedentes simul,* [c] 12. quin.

A,	1.	B,	1.	C,	1.
D,	4.	E,	2.	F,	1.

A,	12.	B,	6.	C,	3.
D,	27.	E,	6.	F,	3.

nimirum A,B, & B,C,ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc est, B,C, ad vnam consequentem C.Est autem D,æqualis ipsis A,B,& B,C;& F,ipsis B,C,ac denique F,ipsi C.Igitur erit quoq; D,ad E,vt A, ad F:ac proinde D,E,F, Geometrice sunt proportionales.Quod est propositum.

HINC manifestum est, si termini A,B,C,sint æquales;D,E,F,esse duplos. Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quod E,ipsis B, C;& F,ipsi C;sit æqualis. Cum ergo D,E,F,sint continue proportionales,ipsi erũt in dupla proportione. Quod si termini æquales A, B, C, sint vnitates,generabitur dupla proportionalitas D, E, F,in minimis terminis 4.2.1.propterea quod F,æqualis est ipsi C, hoc est,vnitati.

A,	B,	C,	
1.	1.	1.	
D,	E,	F,	6.
4.	2.	1.	

A, B, C, 4. 2. 1. D, E, F, 9. 3. 1.

SI vero A,B,C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atq; eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitum.

A, B, C, 1. 2. 4. D, E, F, 9. 6. 4.

AT si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C; erit summa ex B, C, collecta, hoc est, F, ipsius C, siue ipsius F, sesquialtera. Eodem modo si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B, erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel, & insuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atq; ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex aliis proportionibus recte esse prascriptas in tractatione proportionum. Item recte quamcumq; proportionem inaqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inaqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

A, B, C, 1. 3. 9. D, E, F, 16. 12. 9.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus Geometrice proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo & tertio semel conflata: ac deniq; tertius semel, sunt Arithmetice proportionales.

SINT tres termini Geometrice proportionales, A, B, C, sitq; D, summa collecta ex A, bis ex B, bis & ex C, semel: At E, summa conflata, ex A, B, C, semel: Ac deniq; F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, esse Arithmetice proportionales. Quoniã n. summa

A, 1. B, 1. C, 1. D, 5. E, 3. F, 1.

A, 12. B, 6. C, 3. D, 39. E, 21. F, 3.

ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex ABC, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto. Item summa ex A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminum C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto

A, 3. B, 20. C, 1. D, 47. E, 24. F, 1.

erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F; ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituent. Quod est propositum.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: vt in hoc exemplo perspicuum est.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & deniq; summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonice proportionales sunt.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C, sitq; D, summa collecta ex A, bis ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis & C, semel conflata: Ac deniq; F, summa ex B, semel & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportio-

A, 1. B, 1. C, 1. D, 6. E, 3. F, 2.

A, 12. B, 6. C, 3. D, 45. E, 15. F, 9.

nalitatem, siue Medietatem Harmonicam. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. vt A, bis ad
a 12. quinti *B, ita B, bis ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, semel ad B, ita B, bis, & C, semel ad C.* [a] *Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B, semel, excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel, hoc est, excessus inter D, primum terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoq; D, E, F, Harmonice proportionales erunt. Quod est propositum.*

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquido constat ex his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis sesqui-

A, 9. B, 6. C, 4. D, 40. E, 16. F 10.

A, 1. B, 4. C, 16. D, 30. E, 24. F, 20.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 70. E, 40. F, 28.

quialtera, & in secundo ex minimis terminis subquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, tum demum (quod mirum est) minimi termini Medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exempla demonstrant.

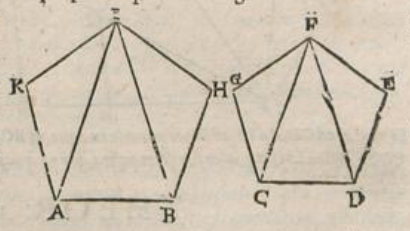
A, 4. B, 6. C, 9. | D, 35. E, 21. F, 15. | A, 16. B, 4. C, 1. | D, 45. E, 9. F, 5 | A, 16. B, 12. C, 9. | D, 77. E, 33. F, 21.

PROB.

PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A DATA recta linea dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere.

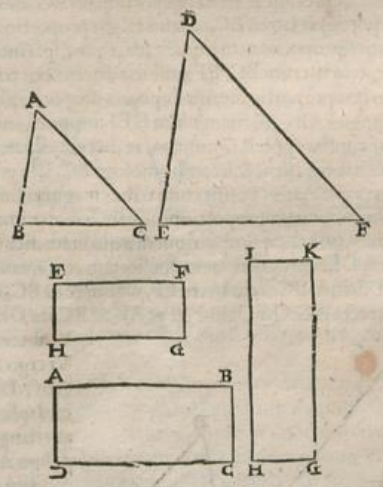
SIT data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similerque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI; coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cum æquales sint duobus angulis FCD, FDC, *a* qui duobus rectis sunt minores) *b* eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus BIH. Et *c* quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in punctο H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: *d* Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atq; ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterq; positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt constat ex cõstructione; cum singulæ partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero *e* ita est AB, ad BI, vt CD, ad DF: & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE: *f* erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, *g* quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. *h* Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC: & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. *i* Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantq; latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq; descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum descripsimus. Quod faciendum erat.



a 17. primi.
b 32. prim.
c 17. primi.
d 17. primi.
e 4. sexti.
f 22. quint.
g 4. sexti.
h 4. sexti.
i 22 quint.

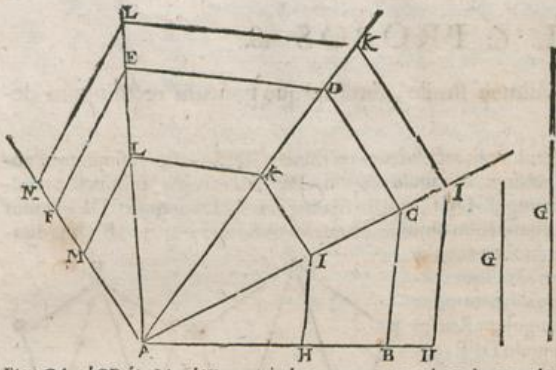
SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quam latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solum erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At supra rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta (quamquam similia sint) cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam vt AD, ad DC, ita est, EH, ad HG, &c. At vero rectangula AC, IG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, GH.



CÆTERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoq; positæ similiter super quælibet earum latera.

FORTASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum, similiterq; positum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ AC, AD, AE, quantumlibet. Deinde ex AB, abscindatur AH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipsa AB, vlterius productæ, si forte G, fuerit maior, quam AB. Post hæc per H, agatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF, factumq; erit, quod proponitur: hoc est, figura AHIKLM, super rectam



k 29. primi

14. sexti.

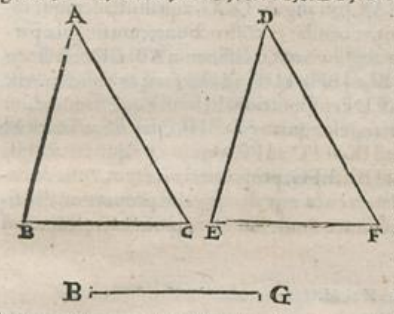
AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterq; positæ figuræ propositæ ABCDEF, super rectam AB, constitutæ. Cum n. angulus HAM, sit communis; & angulis ABC, AFE, [k] æquales sint anguli AHI, AML; Itẽ angulus ACB, ACD, æquales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus HIK; Eodemq; modo angulus CDE, DEF, æquales sint anguli IKL, KLM: Æquiangula erunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF; Erit, [l] vt AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus vt BC, ad CA, ita HI, ad IA. Et vt CA, ad CD, ita IA, ad IK: ac proinde ex æquo, vt BC, ad CD, ita HI, ad IK, &c. Igitur ex defin. similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atq; adeo similiter posita, per ea, quæ proxime hoc scholio scripsimus.

xvij.

THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SINT triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF, vel AB, & DE, vel AC, & DF; Hoc est, si homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG: ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defi. 10. lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF: proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, FF. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continue proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, [a] quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis EF, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam latus BC, ad latus EF, habet, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex defin. 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam eius, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod est propositum.



a 28. primi

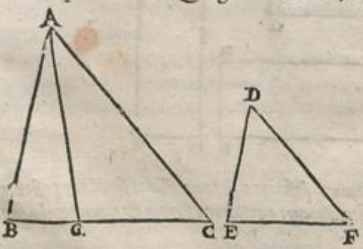
SIT deinde BC, latus latere EF, maius; & ex BC, [b] abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturq; recta AG. Quia igitur est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem BC, ad EF, ita est per constructionem EF, ad BG, Vt ergo AB, ad DE, [c] ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, [d] ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulũ ABC, ad triangulum DEF, [e] ita erit idem triangulum ABC, ad triangulum ABG. Vt autem triangulum ABC, ad triãgulum ABG, eiusdem altitudinis, [f] ita est basis BC, ad basin BG. Igitur vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

b 11. sexti.

c 11. quinti

d 15. sexti. e 7. quinti.

f 1. sexti.

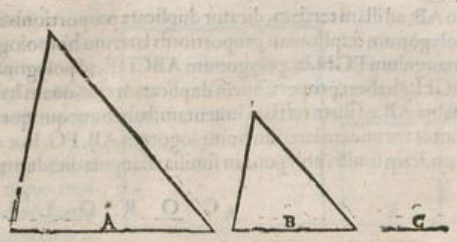


COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

SINT

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterq; descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B, g *Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoq; proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.*



g *19. sexti.*

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterq; descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterq; posita B, & A. Dico, vt est, recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum N. Cum proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A, h *Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa: Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.*

h *19. sexti.*

SCHOLIVM.

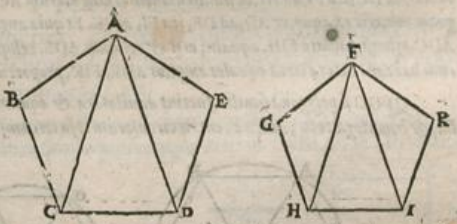
ITAQVE si proportio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoq; ex hac posit. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum ABC, ad triangulum DEF. Si enim proportio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{11}{25}$. Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, vt hoc theoremate ostensum est; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem propotionem triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{5}$. in se multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id est, $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis. quæ duplicata est proportionis laterum; ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quod hac etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cum hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata est.

THEOR. 14. PROPOS. 20. xviij.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

SINT polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; *a* æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Itē angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppositos: *b* Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter se similia erunt. Eadem ratione erunt similia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK æquales. Deinde *c* quia est vt AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; vt autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. *e* Quare triangula ACD, FHI, cum habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque similia. Eademque ratio est de aliis omnibus triangulis, si plura fuerint.



a *6. sexti.*
b *4. sexti.*
c *4. sexti.*
d *22. quinti.*
e *6 sexti.*

DICO præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonū. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI; cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neq; dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequens, *f* ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

f *12. quint.*

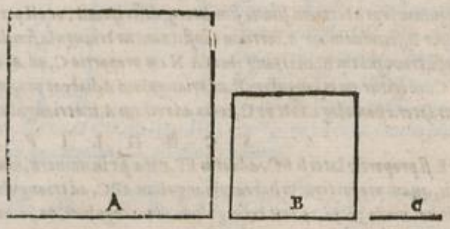
DICO postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt est prima linea AB, ad tertiam inuentā: ac proinde, cum proportio AB,

tio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG, dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, [g] habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentam. Itaq; similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

g 19. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterq; descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptũ ad polygonum super tertiam simile similiterque descriptum.



HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate. Vt perspicuum est in hac figura apposita.

SCHOLIVM.

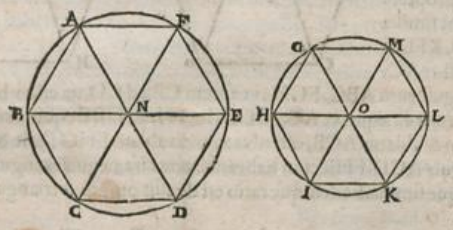
QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figura, demonstrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI, similia esse. Quoniam anguli ACB, FHG, æquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; si auferantur ex angulis BCD, GHI, qui æquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eadem q; ratione æquales ostendentur anguli ADC, FIH: ac propterea [h] *& reliqui CAD, HFI, æquales erunt. Igitur cum æquiangula sint triangula ACC, FHI,* [i] *habebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde similia erunt.*

h 32. primi.
i 4. sexti.

AT vero quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propos. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quia non possunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prope præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, ostendi non potest æqualis angulo FIH; quod tunc alia adhuc triangula super sint vsque ad triangula similia AED, FKI; &c. Hoc ideo dixerim, ne quis existimet frustra in propos. nos dixisse, ita esse AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI: ac proinde ex æqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideo q; cum anguli ACD, FHI, sunt æquales, similia esse triangula ACD, FHI. Hæc enim demonstratio est omnino necessaria, conuenit q; omnibus polygonis quotcunq; angulorum; cum omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, vt perspicuum est. Nam si triangula ADE, FIK, non essent vltima, demonstrarentur similia hoc modo. Quoniam est vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob similitudinem triangulorum ACD, FHI: Item vt DC, ad DE, ita IH, ad IK, ob similitudinem polygonorum; erit ex æquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK. Et quia angulus CDE, æqualis ponitur angulo HIK: Est autem & ablatus ADC, ostensus ablato FIH, æqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, æqualis. [k] *Quare triangula ADE, FIK, similia erunt* [l] *cum habeant latera circa æquales angulos ADE, FIK, proportionalia. Atq; ita deinceps, si fuerint plura triangula.*

k 6. sexti.

QVOD si polygona similia, fuerint æquilatera, & æquiangula, diuidentur quoq; in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis à centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia æquilatera, & æquiangula ABCDEF, GHIKLM, quæ circumscribantur à circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, & homologa totis polygonis. Quoniam enim anguli CND, IOK, æquales sunt; (quod æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam vtrumque spatium N. & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cum enim anguli in centro N, insistant æqualibus arcubus, [l] *ipsi inter se æquales erunt: eadem q; ratione anguli in centro O, æquales erunt) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum vtrobiq; sit proportio æqualitatis;* [m] *Similia erunt triangula NCD, OIK. Eadem q; est ratio de cæteris. At vero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, vt patet,* [n] *habebunt vtiq; eandem cum ipsis proportionem.*



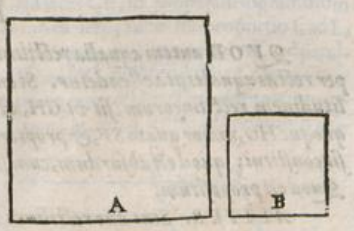
l 27. tertii.
m 6. sexti.
n 15. quin.

PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, vt constat ex defin. 1. huius lib erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B, quæ cum inter se proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt hic apparet 1. 2. 4.

SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, vt dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in exemplo adducto superius apparet.



ITAQVE si proportio lateris AB, ad latus FG, in polygonis, quæ in propos. descripsimus, nota sit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoscemus quoq; ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. siue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere; demonstratum q; est hoc theoremate, polygona quoq; habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in se multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{5}{4}\frac{5}{4}$. id est, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex iis, quæ in defin. 10. libr. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum, cum hæc sit etiam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.

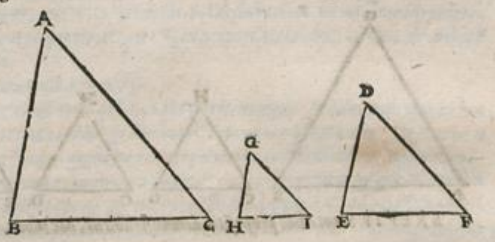
SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cum hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

THEOR. 15. PROPOS. 21. XX.

QVÆ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinẽ, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Itẽ eadẽ de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdẽ rectilinei GHI; [a] erũt ãguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cum ob eandẽ similitudinẽ, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet iis, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI; [b] erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Atq; adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

a 1. pron.



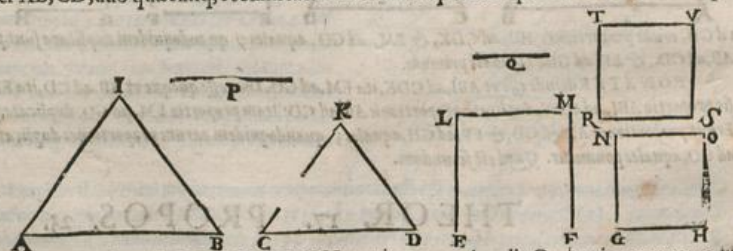
b 11. quinti

XXI.

THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterq; descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterq; descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturq; super AB, CD, duo quæcunq; rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcũq; rectilinea similia similiterq; descripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. [a] Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. [b] eritque ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q: Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex coroll. propos. 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. [c] Igitur vt ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.



a 11. sexti.
b 22. quinti.
c 11. quinti

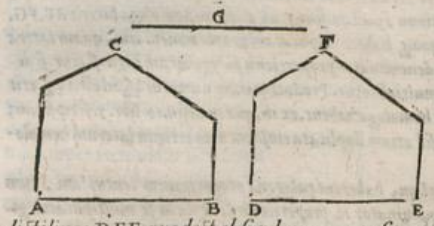
DEINDE sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoq; proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. [d] Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterq; positum; [e] & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoq; vt iam est ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoq; ponitur EM, ad GO. [f] Igitur erit vt EM, ad RV. ita EM, ad GO; [g] Atq; idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterq; posita, consistent necessario, vt mox ostendemus super rectas RS, GH, æquales. [h] Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. [i] Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

d 12. sexti.
e 21. sexti.
f 11. quinti
g 9. quinti.
h 7. quinti.
i 11. quinti

LEMMA.

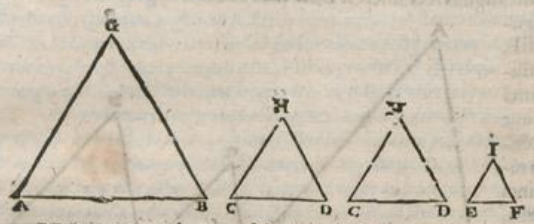
QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterq; descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, maior quam RS, erit quoque HO, maior quam SV, & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS, Quod est propositum.

ALITER. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterq; posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ AB, DE, esse æqualia. Si enim non credantur æqualia, sit AB, maius, quam, DE, inueniaturq; rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, vt AB, ad DE, ita DE, ad G, Est autem AB, maior, quam DE, Erit quoq; DE, maior, quam G, ac propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19, vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior sit, quam G, erit quoq; rectilineum ABC, maius rectilineo DEF, quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta quam recta DE. Sed neq; minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus offenderetur rectilineo DEF. quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB, DE.



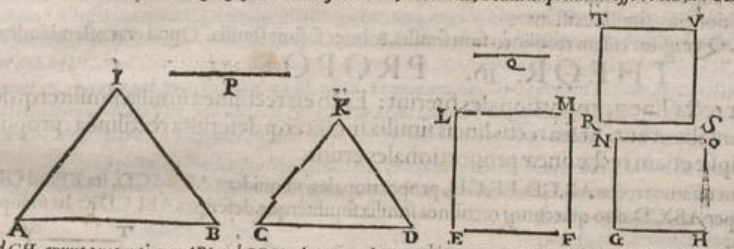
SCHOLIVM.

Eodem modo, si fuerit tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterq; descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusq; rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod à secunda est descriptum, æquale sit ei, quod à tertia, immo idem; manifestum est, quod proponitur.



BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo, Ponatur primum esse vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoque vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO, [a] Cum enim sit proportio rectilinei ABC, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD. Item proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, a d GH, erunt proportiones ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium AB, ad CD, & EF, ad GH. Quod est primum.

a 19. vel 20. sexti.



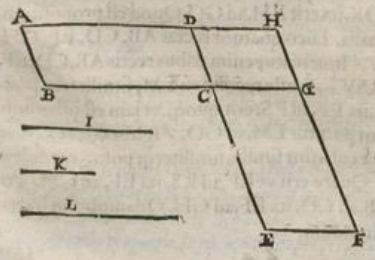
b 19. vel 20. sexti.

PONATVR deinde esse vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico esse quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. [b] Cum enim sit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD: Item proportio EM, ad GO. duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD, & EF, ad GH, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales ponuntur. Quod est secundum.

xxiiij.

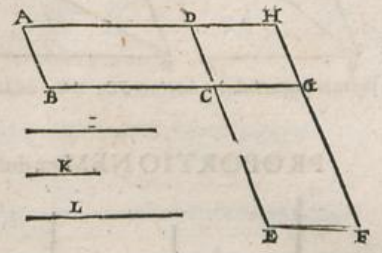
THEOR. 17. PROPOS. 23.

ÆQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.



SINT parallelogramma æquiangula AC, CF. habentia angulos BCD, ECG æquales. Dico ꝓportionẽ corũ esse cõpositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in vno Parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectã CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L,

K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defi. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallel. CF, dici cõpositã esse ex eisdẽ ꝓportionib. hoc est, ex ꝓportionib. BC, ad CG, & DC, ad CE. Cõiungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG. efficiant vnam lineam rectam: Quo posito, cum anguli BCD, ECG. sint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde AD, FG, donec conueniant in H; Sumptaque recta I, quacunq; [a] inueniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta propositionalis L. Quoniam igitur est, [b] vt BC, ad CG, ita AC, ad CH, Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K, [c] erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, [d] ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L: [e] Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defi. huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex propositionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Æquiangula itaq; parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.



a 12. sexti.
b 1. sexti.
c 11. quinti
d 1 sexti.
e 22. quin.

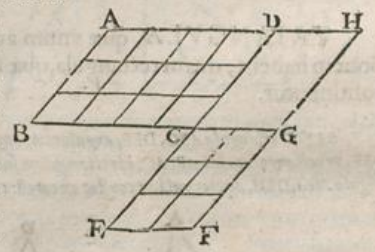
SCHOLIVM.

EXPEDITIVS idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [f] *Cum sit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG, & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE; Proportio autem AC, ad CF, componatur, per definitionem, ex intermediis proportionibus AC, ad CH, & CH, ad CF; componetur quoq; eadem proportio AC, ad CF, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE, quæ illis intermediis sunt æquales. Quod est propositum.* f 1. sexti.

HANC porro propos. demonstrat etiam Euclides in num. lib. 8. propos. 5.

ITAQVE si proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ sint in numeris, veniemus quoque ex hac propos. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris, hoc modo. Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad CE, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc est, ex proportionibus laterum, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, [g] *quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorum denominabitur à* $1\frac{2}{7}$. *Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex iis, quæ propos. 4. lib. 8. demonstrantur, vel certe hoc modo. Posita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturq; numerus* $7\frac{5}{7}$. *Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones, 11. 5.* $7\frac{5}{7}$. *Quod si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem* $\frac{55}{7}$. *& alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus.* g 23. sexti.

SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4, ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hisce minimis 2. 1. 1. Et quia prius ad tertium est duplus, erit quoq; parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus BC, diuidatur in 4. partes æquales, & CG, in 2. At DC, in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem, habeat duplam, at DC, ad CE, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum AC, 12. rhombos æquales, at CF, solum 6. atque adeo parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum est.



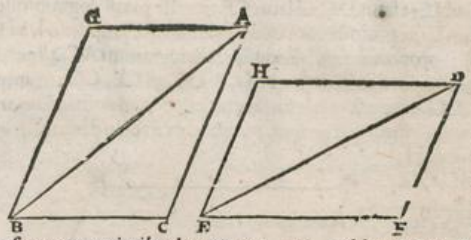
PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione composita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CG, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. *quæ maior est proportione parallelogrammorum, cum huius denominator sit* $1\frac{2}{7}$. *In posteriori vero exemplo proportio lateris BC, ad CG, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione, quod iidem interpretes negant. In exemplo namq; priori proportio lateris DC, ad CE, est minoris inæqualitatis, in posteriori vero, æqualitatis. Sed hac de re plura scribemus ad finem libri 9.*

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoq; afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

I.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

SINT



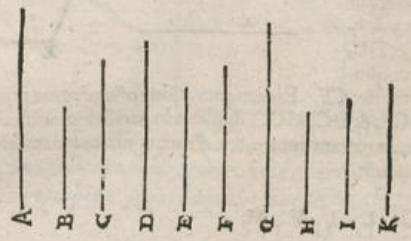
a 23. sexti.
b 34. primi
c 15. quinti.

SINT triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F. habentia æqualem. Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF; Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis CG, FH, erunt ea æquiangula; [a] *atq; adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipsis,* [b] *quorum sunt dimidia,* [c] *eandem habeant proportionem; Erit quoq; proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF. composita ex proportionibus laterum BC, AC, ad latera EF, DF.*

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

d 12. sexti.

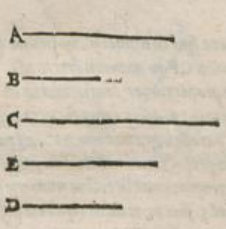


HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipsis vnam proportionem componere. [d] *Fiat Vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H: H, ad I: & I, ad K, per defi. 5. huius l. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F; quod his illa sumpta sint æquales.*

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

e 12. sexti.



SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. [e] *Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; statuatur q; E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C ad D, reliquam q; esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus, C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est, A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.*

VERVM hæc compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio proprie, quia alias totum esset æquale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad finem libri 9. ostendemus.

IV.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Ductis enim ad AC, DF, perpendicularibus BG, EH; erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, vt constat ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE, sint æquales. [f] *Igitur erit, vt GB, ad BA, ita HE, ad ED: Vt autem GB, ad BA.* [g] *Ita est rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC. (Nam si bases ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC,) Et eadem ratione, vt HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF,* [h] *Rectangulum igitur sub BG, AC ad rectangulum sub AB, AC, est, vt rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed vt rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF,* [i] *ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF,* [k] *quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases AC, DF, altitudinesque easdem BG, EH; ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoq; triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.*

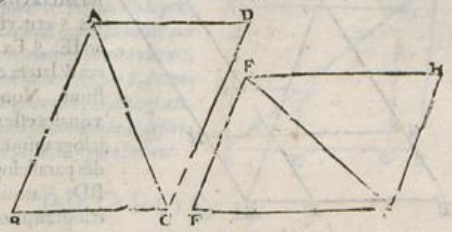
f 4. sexti.
g 1. sexti.
h 11. quinti
i 15. quinti.
k 41. primi

ALITER, & facilius. Ex theoremate 1. huius scholij, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: [l] *Sed & proportio rectanguli sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, ex eisdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF, composita est. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, quod est propositum.*

l 23. sexti.

V. PA-

V. PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.



SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, vt parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendãt; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. [m] *Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG:* [n] *quod hæc ipsorum sint dimidia;* [o] *Erit quoq; vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.*

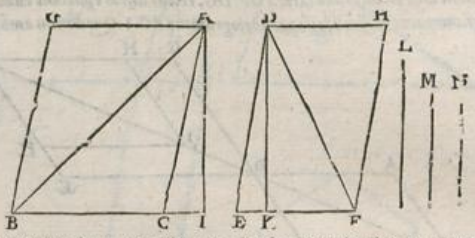
m 15. quin.

n 34. primi
o 11. quinti

VI.

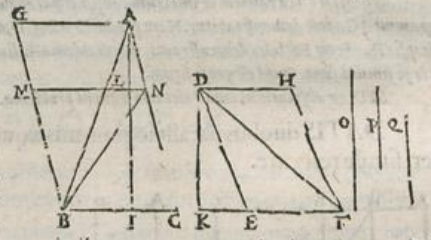
TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sint enim primum altitudines æquales, bases vero vel æquales etiam, vel inæquales: Fiat [p] *vt BC, ad EF, ita L, ad M; Vt autem AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi N, æqualis, quod & AI, ipsi DK, æqualis ponatur:* [p] *Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc est, vt BC, ad EF.* [q] *At vero, vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum, EH.* [r] *Igitur quoq; erit, vt L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.*



p 7. quint.
p 1. sexti.
r 11. quinti

SINT iam altitudines AI, DK, inæquales, & AI, maior; bases vero BC, EF, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde IL, æquali ipsi DK; ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, iungaturq; recta BN. Quoniam igitur est triangulum ABC, ad triangulum NBC; & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipsi IL, æqualem, hoc est, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propos. huius lib. ex Commandino ostendimus; quod triangulorum, & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Et vt triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, [s] *ita est basis BC, ad basin EF, (cum eadem sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q:* [t] *erit ex æquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK; & ex proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH. Quod est propositum.*



s 1. sexti.
t 22. quin.

EODEM pacto ostendetur proportio trianguli DEF, cuius altitudo minor est, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, composita esse ex proportione basis EF, ad basin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; [u] *erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallel. CM, vt EF, ad BC, hoc est, vt Q, ad P. Item triangululum NBC, ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum CG, vt LI, seu DK, ad AI, hoc est, vt P, ad O; ex iis, quæ ad propos. 1. huius lib. ex Commandino demonstrauimus.* [x] *Ex æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, ex proportione basis EF, ad basin CB; & ex proportione P, ad O, id est, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH ad CG, ex eisdem proportionibus. Quod est propositum.*

u 1. sexti.
x 22. quin.

THEOR. 18. PROPOS. 24. xxii.

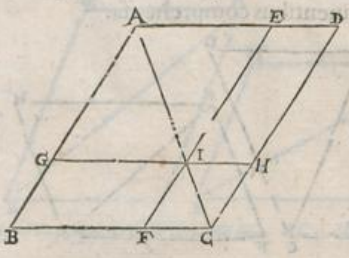
IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

ESTO parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducãtur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, FH, circa diametrũ, similia esse & toti parallelog. & inter sese. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostẽdetur. Nã angulus GAE, idẽ est, qui angulus BAD; [a] & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulũ est EG, parallelog. parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autẽ latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cũ triangulũ AGI, æquiangulũ sit trian-

a 29. primi.

sit triangulo ABC,& triangulum AEI,triangulo ADC, vt perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. [b] erit vt AB,ad BC,ita AG, ad GI,atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus [c] erit. vt BC,ad CA, ita GI,ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE. [d] Ex æquo igitur,vt BC,ad CD,ita est GI,ad IE,ac propterea & latera circa æquales angulos BCD,GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales esse proportionalia. Quare p definitionẽ,simile erit parallelogrammum EG,toti parallelogrammo BD. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD; [e] atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo,quæ circa diametrũ sunt,&c. Quod erat ostendendũ.

b 4. sexti.
c 4. sexti.
d 22. quin.
e 21. sexti.

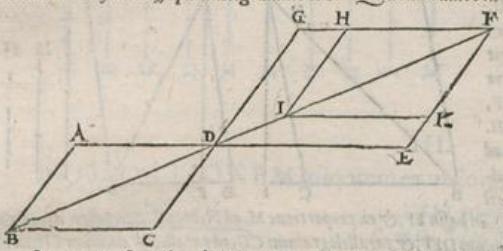


SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia,quæ habeant vnum angulum cum tota parallelogrammo communem,vt manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, iisdem fere mediis ostendetur,hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD, sit producta ad F, circa quam consistat parallelogrammum DEFG,cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrammi AC. Dico parallelo-
f 29. primi. *grammum GE. simile esse parallelogrammo AC. Quod enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur.* [f] *Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno ADG, huic autem æqualis quoq; est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G.* [g] *Quare his oppositi C, & E, æquales quoq; erunt.* [h] *Rursus quia anguli ADC, GDE, ad verticem, sunt æquales,* [i] *erunt his quoq; oppositi ABC, GFE, æquales. Igitur æquiangula sunt, GE, AC, parallelogramma. Quod autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum BAD, æquiangulum sit triangulo DGF, & triangulum BCD, triangulo DEF,*
k 4. sexti. *vt constat ex propos. 29. lib. 1.* [k] *Erit vt BA, ad AD, ita DG, ad GF. Rursus vt AD, ad DB, ita GF, ad FD, & vt DB, ad DC, ita*
l 22. quin. *FD, ad FE,* [l] *ac propterea ex æquo vt AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sunt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos, G, GFE, qui illis æquales sunt. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma AC, GE.*

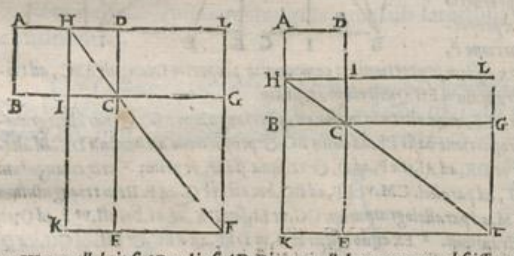
g 34. pri.
h 15. pri.
i 34. pri.



QVOD si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC, idem demonstrabitur. Nam productis AD, CD, donec occurrant rectis FK, FH, productis in E, &; Gerit HK, simi-
m 24. sexti d 21. sexti. *le ipsi GE,* [m] *vt Euclides demonstrauit: Atqui eidem GE, simile est quoq; AC, vt nunc ostendimus.* [n] *Igitur & HK, AC, inter se similia sunt. Quod est propositum.*

SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

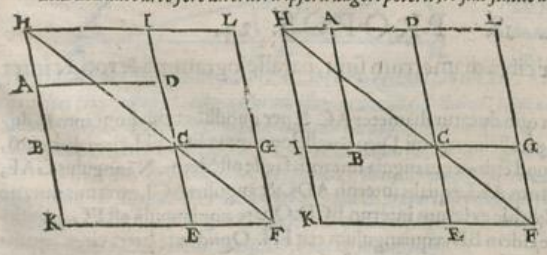
DATIS duobus parallelogrammis æqui angulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile reseçare.



DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint ABCD, CEFG, & ex ABCD, abscindendũ sit parallelogrammum ipsi CEFG. simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales BCD, ECG, ita vt sit vna linea recta BCG, & propterea, vt ad propos. 15. lib. 1. demonstratum est ECD, quoq; vna recta linea. Deinde ducta diameter FC, producatur, donec in H, secet vel latus AD, vel latus AB, (Neq; enim in punctũ A, cadet: quia AC, esset simile ipsi CF, vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur HI, parallela ipsi AB, vel ipsi AD. Dico parallelogrammum abscissum HC, simile esse ipsi CF. Si enim totum parallelogrammũ KL, compleatur, erunt HC, CF, circa diametrũ. Quare inter se similia erunt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.

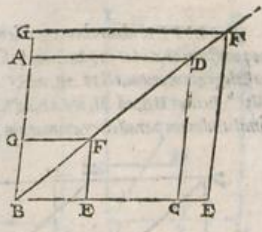
EADEM autẽ arte fere alterutrũ ipsorũ augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendũ ABCD, vt fiat ipsi CEFG, simile cõiungatur vti prius, & diameter FC, exitẽ datur, donec in H, secet vel latus BA, protractũ, vel latus DA, protractum. Neq; enim in punctum A, cadet: quia AC, esset ipsi CF, simile, vt demõstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI, parallela ipsi AD, vel ipsi AB, donec secet vel latus CD, protractum, vel CB, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum HC, simile esse parallelogrammo CF. Nam si compleatur totum parallelogrammũ KL, consistent HC, CF, circa diametrũ; [o] *Quare similia inter se erunt.*

o 24. sexti.



PERSPI-

PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo ABCD, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus vnum, nempe BC; Atq; ex E, quolibet puncto vltra C, ipsi CD, parallela EF, ducenda, secans diametrum BD, productam in F, & per F, ducenda FG, parallela ipsi AD, occurrens rectæ BA, productæ in G. [p] *erit enim parallelogrammũ GE, simile similiterque positũ ipsi AC, & maius eodẽ. Quod si minus debeat describi, sumendũ erit punctũ E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.*

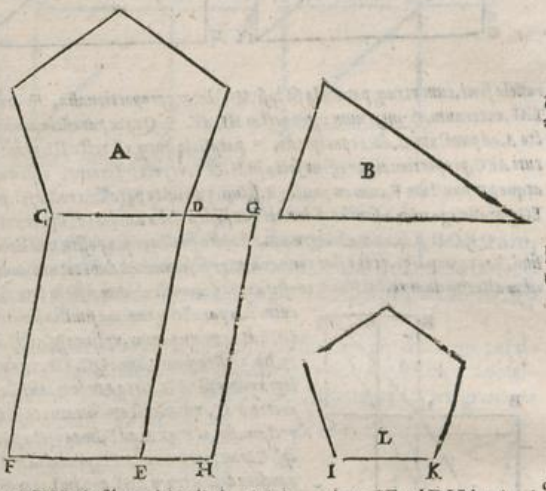


p 24. sexti.

PROBL. 7. PROPOS. 25. xxv.

DATO rectilineo simile similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineũ, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, [a] constituatur parallel. CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectã DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallel. DH, æquale ipsi B, eritq; tam CDG, quã FEH, linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. 1. [b] Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK, [c] super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint, pportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. vt CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterque descriptum: [d] Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammũ DH, eiusdem altitudinis. [e] Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. [f] Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. [g] Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; [h] propterea q; æqualia erunt rectilinea B, & L: Est autem & L, simile ipsi A, similiterq; positum per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.



a 44. vel 45. primi.

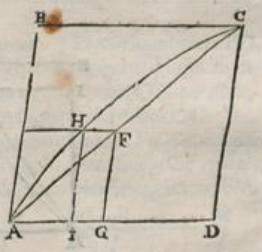
b 13. sexti.
c 18. sexti.

d 1. sexti.
e 11. quint.
f 7. quinti.
g 11. quint.
h 9. quinti.

THEOR. 19. PROPOS. 26. xxiii.

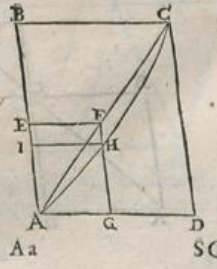
SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterque positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; [a] ipsa erunt similia similiterque posita. [b] Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA, ad AD, ita quoq; est EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam simila, similiterq; posita. [c] Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG, [d] Ac propterea æquales erunt rectæ, AIAG, pars, & totum: quod est absurdum.



a 24. sexti.
b 1. defi. sexti.
c 11. quint.
d 9. quinti.

QVOD si dicatur recta AHC, secare alterum latus FG, Tunc ducta HI, parallela ipsi EF, [e] erunt rursus similia parallelogramma BD, IG, similiterque posita. [f] Quare erit vt DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque est GA; ad AE, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG. [g] Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE, [h] ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum: Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F; & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstradum.

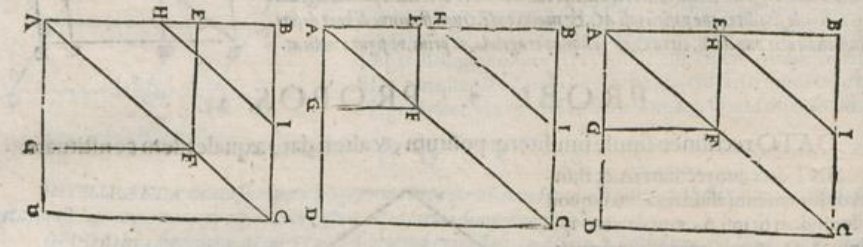


e 24. sexti.
f 1. defi. sexti.
g 11. quint.
h 9. quinti.

SCHOLIVM.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiue, hoc modo. Diuisis lateribus AB,BC, bifariam in punctis H,I, siue punctum H,cadat in punctum E,siue supra siue infra, ducantur rectæ,HI,AE. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum,est vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autem tota AB,ad totam BC, [i] ita est dimidia HB, ad dimidiam BI; [k] Erit vt HB,ad BI, ita AE,ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob [l] similitudinem parallelogrammorum BD, EG: Vel quia vnus est internus, & alter externus in parallelis BC,EF, [l] quæ parallelæ sunt,cum vtraq; parallela sit ipsi AD,) latera proportionalia, [m] erunt æquiangula,habebunt q; æquales angulos BHI, EAF,externum,& internum inter rectas HI, AF. [n] Quare parallelæ erunt rectæ HI,AF. Quoniam vero recta, quæ ex puncto A,ad punctum C,duci concipitur, [o] parallela quoq; est rectæ HI. propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc constituti ABC,proportionaliter essent secta in H,& I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta AC, eadem fiat quæ AF, transeatque per punctum F,cum ex puncto A,solum vna linea parallela rectæ HI,posit duci,vt manifestum est.Consistunt ergo BD, EG,parallelogramma similia,similiterque posita circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.

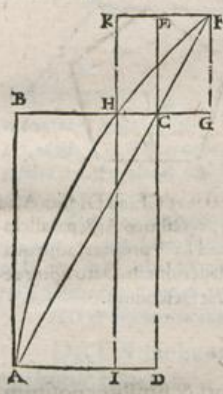
k 15.quinti
k 21.quinti
l 30.primi.



m 6.sexti.
n 28.primi.
o 2. sexti.

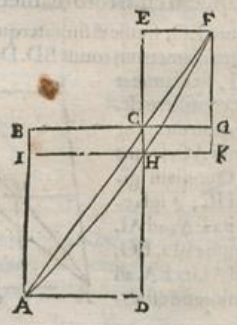
QVOD si duo parallelogramma similia similiterque posita non habeant angulum communem, sed vnum sit extra aliud, hac tamen lege,vt ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus iisdem fere mediis,ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterq; posita BD,EG,quæ ad angulos æquales BCD, GCE,ita coniungantur,vt lineæ BC, CG,in directum iaceant, & ob id,per ea,quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus,lineæ DC, CE, vnam quoque lineam rectam componant. Dico parallelogramma BD,EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, vnam rectam lineam conficere. Si enim AC, FC, non faciunt vnam lineam rectam,ducatur ex A,ad F,linea recta secans BC,in H,puncto,per quod agatur HI parallela ipsi CD,occurrens rectæ FE,productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma BI, KG,circa eandem diametrum AHF,producta consistunt;efficiunt q; duæ rectæ BH,HI,cum duabus rectis HG,HK, duas lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq; posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit vt HB, ad BA,ita FK, ad KH. [p] Habet autem CB,maior ad BA,proportionem maiorem,quam HB, minor ad eandem BA; & est vt CB, ad BA,ita FE,ad EC, eo quod parallelogramma BD, EG, ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & FE, ad EC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem quam HB,ad BA,hoc est, quam FK,ad KH. Quamobrem si FE, ad KH, maiorem habeat proportionem,quam FK,ad eandem KH; [q] erit EF,maior quam FK; pars quam totum. Quod est absurdum.

p 8. quinti.
q 10. quin.



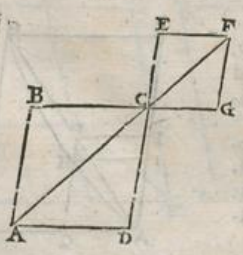
QVOD si quis dicat,rectam, AHF,secare latus CD, Tunc per H, ductæ rectæ BC, parallelæ HI, quæ occurrat rectæ FG,protractæ in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit vt HD,ad DA, ita FK, ad KH. [r] Habet autem CD, ad DA, maiorem proportionem, quam HD, ad DA; Et est vt CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterque posita sunt concessa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem,quam FK, ad KH, [s] ideoq; FG, maior erit, quam FK;pars quam totum: Quod est absurdum.

r 8. quinti.
s 1. quarti.



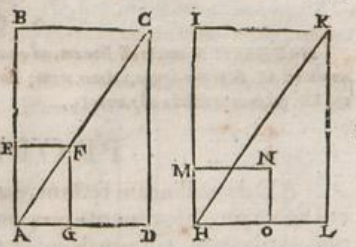
OSTENSIVE idem hoc ratione ostenderetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD,EG, anguli B, E, sunt æquales, estque vt AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC,CEF, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; [t] atque idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos BCA,EFC, æquales. Addito ergo communi angulo BCF, erunt duo anguli BCA,BCF,duobus angulis EFC,BCF,æquales: [u] Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA,BCF,duobus erunt rectis æquales; [x] Ac propterea AC,FC, vnam component rectam lineam. Quod est propositum.

c 6. sexti.
u 29. primi
x 14. primi.



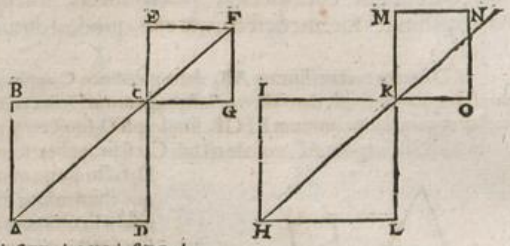
RECTE

RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, vt ostendatur circa eandem esse cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longius EG, circa eandem cum toto diametrum consistens, [x] erit EG, simile similiterq; positum. At vero si in rectangulo IL, quod sit æquilaterum, & æquiangulum ipsi BD, sumatur HM, æqualis ipsi EF, & MN, æqualis ipsi AE, &c. erit quidem rectangulum MO, æquale & simile rectangulo EG, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo IL; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto IL, diametrum.



x 24. sexti.

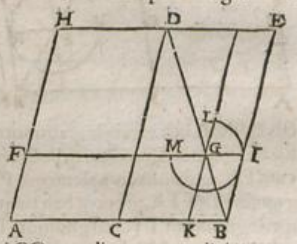
IDEM quoq; hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula BD, EG; & IL, MO; in quibus EG. quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo BD, quoniam est similiter positum: At vero MO, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo IL, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cum prorsus sit æquale ipsi EG. Nam KM, æqualis est ipsi EF, & MN, ipsi FC, &c.



THEOR. 20. PROPOS. 27. xxvi.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur; maximum, id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta AB, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam BC, constituatur quodcunque parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum ABEH, erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC, consistens, applicatum secundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & existens simile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum deficiensq; parallelogrammo CE, maximum esse omnium, quæ secundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterque positis ipsi CE. Sumpto enim puncto G, vtcunq; in diametro BD, & ductis per G, rectis FGI, KG, quæ sint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, secundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, [a] quod ipsi CE, simile est, similiterq; positum, cum sit circa eandem cum CE, diametrum. [b] Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: [c] Est autem CI, æquale ipsi CF, propter bases æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additaq; communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cum CE, manus sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, [d] æquale existens ipsi CE, propter bases æquales AC, CB, maius quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo DG. Eodemq; modo ostendetur AD, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam AB, applicantur, vt punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse AC, habentq; minorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similes sint ipsi CE.

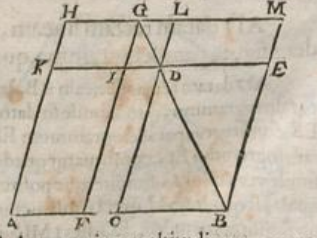


a 24. sexti.
b 43. prim.
c 36. primi.
d 36. primi.

ALITER demonstrabitur AD, maius esse parallelogrammo AG, hoc modo. [c] Parallelogramma FD, DI, sunt æqualia, cum bases HD, DE, sint æquales: Est autem DI, maius quam GE, hoc est, quam complementum CG, ([f] quod ipsi GE, æquale est.) parallelogrammo DG. Igitur & FD, maius erit, quam CG, parallelogrammo eodem DG. Atq; idcirco addito communi CF; maius erit AD, quam AG, parallel. eodem DG.

c 36. prim.
f 43. primi

QVOD si punctum G, sumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq; rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammum AG, applicatum secundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM, [g] ipsi CE, est simile similiterq; positum, cum sit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc maius esse AD, ipso AG. Protracta enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, [h] cum æquales sint æqualibus AC, CB; [i] ideoq; æqualia parallelogrāma HD, DM. [k] Cū igitur DM, sit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis concludes AD, maius esse quocunq; parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, vt punctum G, sit vltra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse AC, habetq; maiorem altitudinem, quam AD: dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.



g 4. sexti.
h 34. pri.
i 36. primi.
k 43. pri.

SCHOLIVM.

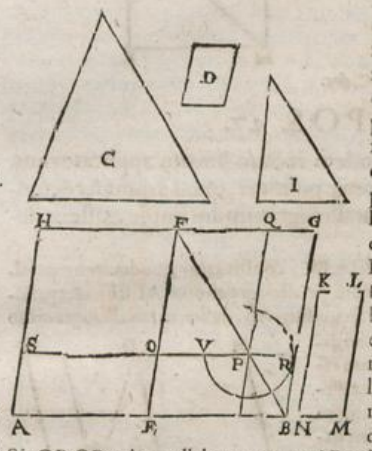
MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidiata AC; qualis est AK, in priori figura, vel minorem; cuiusmodi est AF, in figura posteriori: pro vt punctum G, sumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

xxvii.

PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

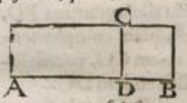
AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallel. quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam in E, super medietatem EB, [a] describatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterq; positum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale est ipsi C; cũ sit applicatũ ad AB, deficiens parallelogrammo EG, simile ipsi D; factum erit, quod iubetur. Si autem AF, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllum ad AB, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoq; sibi æquale EG, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) [b] & constituatur parallelogrammum KLMN, simile quidem similiterq; positum ipsi D, seu ipsi EG, æquale vero excessui inuento I; vt sit EG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, simul; & ob id maius quam KM. Cum igitur ob similitudinem sit vt EF, ad FG, ita NK, ad KL; erunt quoq; latera EF, FG, maiora lateribus NK, KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam EG: æquale ipsi NL, vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis FO, FQ, quæ sint æquales ipsis KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO; erit hoc est ipsi LN, æquale, & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi EG: [c] atq; adeo circa eandem diametrum cum EG; consistet, quæ sit BF, productis iam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, [d] quod simile est ipsi EG, similiterq; positum, & propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse ipsi C, rectilineo. [e] Nam cum PG, æquale sit complemento PE; si addatur commune PE, erit & BQ, æquale ipsi ER, hoc est, ipsi ES, [f] quæ æquale est ipsi EK, propter bases æquales EA, EB. Quare si æqualib. AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis est rectlineo C, (Nam cum EG, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum LN, si auferantur æqualia QO, LN remanebit gnomon TV, ipsi C, æqualis.) Igitur & AP, eidẽ C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrãmo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.



[a] 23. sexti. [b] 25. sexti. [c] 26. sexti. [d] 24. sexti. [e] 43. 1. m. [f] 36. prim.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super EB, constituerimus EG, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Quæ de re, si placet, consule eorum commentarios.



PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad AB, applicetur AC, deficiens quadrato CB, erit AC, applicatum, rectangulum contentum sub AD, & DC. Cum ergo DC, æqualis sit ipsi DB, propter quadratum CB; contimebitur quoq; AC, sub segmentis AD, DB, per applicationem factis. Quod est propositum.

xxviii.

PROBL. 9. PROPOS. 29.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

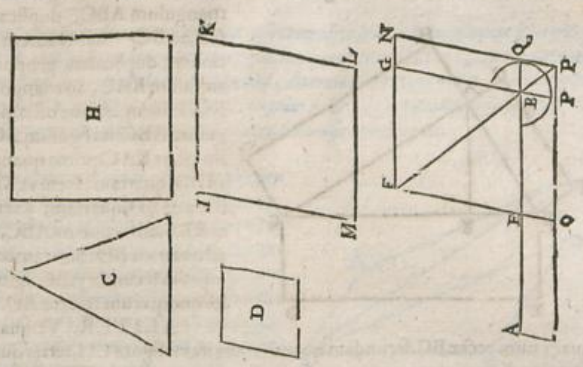
AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit Parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa AB, bifariam in E; [a] super dimidiam EB, construatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum. [b] Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; [c] cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterque positum; eritque propterea IKLM, maius quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoq; MK, vel æquale ipsi EG, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur FE, FG, vt rectæ FO, FN, æquales sint rectis IM, IK, & completo parallelogrammo ON; erit hoc simile similiterq; positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterq; positum. [d] Quare ON, EG,

[a] 10. sexti. [b] 14. secun. [c] 25. sexti. [d] 26. sexti.

circa

circa eandem diametrum consistent, quæ sit FP. Productis iam AB, GB, ad Q. R; & PO, donec cum AS, ipsi FO, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo QR, [c] quod simile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. [f] Nam cum AO, ER, sint æqualia, [g] & ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi. OQ. fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cum MK, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, vna cum EG; si auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ. quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

c 24. sexti.



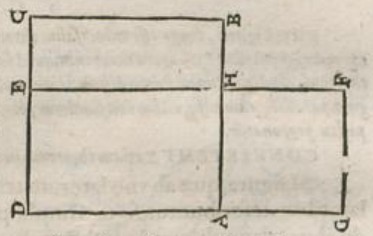
f 36. prim.
g 43. primi

PROBL. 10. PROPOS. 30. xxix.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIT recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABC; [a] ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simile ipsi quadrato, ita vt sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si demptur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE. vtpote rectos, [b] erunt latera circa illos reciproca, hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AP, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, ita segmentum AH, ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

a 29. sexti.



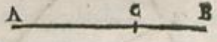
b 14. sexti.

ALITER quoq; ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitq; rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; [c] erunt ipsæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

c 17. sexti.

ALITER totum problema conficiemus. [d] Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulũ sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. [e] Erunt enim rursus, v prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.

d 11. secun.



e 17. sexti.

SCHOLIVM.

PRAXIS diuisionis lineæ rectæ extrema ac media ratione instituenda est, vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

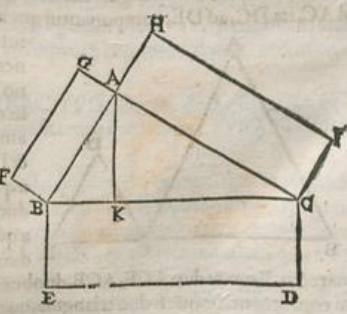
HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes vtilitates, proprietatesq; vt in libris Stereometriæ manifestum erit, vt non sine causa à plerisq; Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab aliis vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

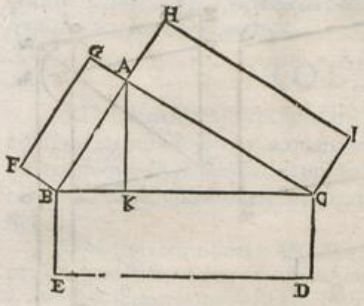
TRIANGVLVM rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectum; describaturq; super BC, quæcunque figura rectilinea BCDE, [a] cui similes similiterq; positæ super AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK. erit per corall. propos. 8. huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primam, ad figuram CH, super secundam similem similiterq; positam, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non secus ostẽdetur, esse quoq; vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, sint quoq; proportionales, &c. Quoniã igitur est vt CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; [b] erit vt prima CK, cum quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia CH. cum sexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta BK, simul æquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, simul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod est propositum.

a 18. sexti.



b 24. quin.

l 8. sexti. ALITER. c Cum triangulo ABC, simile sit triangulum KAC, sintq; homologa latera ipsorum, BC, CA;
d 19. sexti. (Nam est vt BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) d habebit triangulum KAC, ad



triangulum ABC, duplicatam proportionem eius, quam habet CA, ad BC. e habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC. f Quare erit vt triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione ostendetur esse, vt triangulum KBA, ad triangulum ABC: ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergo rursus est, vt KAC, prima quantitas ad ABC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt KBA, quinta ad ABC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; g erit & prima KAC, composita cum quinta KBA, ad secundam ABC, vt composita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam BD: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta simul, æquales quoq; erunt quartæ BD. Quod est propositum.

c 19. vel 20. sexti.
f 11. quinti
g 24. quinti.

ALITER. Vt quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem; h cum vtraq; proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit vt quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem. i Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD: k Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis; &c. Quod erat ostendendum.

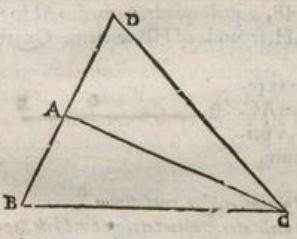
h 19. vel 20. sexti.
i 24 quint.
k 47. primi

SCHOLIVM.

VIDES igitur, longe esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod sese ad omnes figuras similes similiterq; descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. menuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisq; etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo figuris q; similibus, & similiter positis proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter quã 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterq; positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



l 31. sexti.

DETVR triangulum ABC, sitq; figura quæuis super latus BC, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, esse rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quæ sit ipsi AB, æqualis, & connectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus est, l erit figura super CD, (quæ similis sit ei, quæ super BC, similiterq; posita) descripta æqualis figuris sup AD, AC, descriptis, quæ ei similes sint, similiterq; positæ. Est autẽ figura sup AD, æqualis figuræ super AB, ob æqualitatẽ laterũ. Igitur figura super CD, æqualis erit figuris super AB, AC. Cũ igitur figura super BC, eisdẽ figuris sup AB, AC, æqualis ponatur, erunt figuræ super CD, BC, inter se æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erũt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius l. Quoniã igitur latera AC, AD, triãguli ADC, æqualia sunt lateribus AB, AC, triãguli ABC; & basis DC, ostẽsa est quoq; æqualis basi BC; m erũt anguli DAC, BAC, æquales. Quare cũ DAC, rectus sit, ex constructione, rectus quoq; erit BAC. Quod est propositũ.

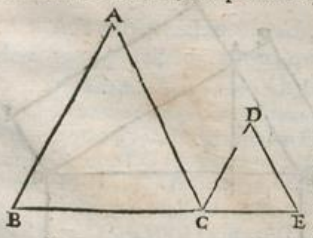
m 8. primi.

xxx.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturque ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC; Item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ sint AB, DC, a erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoq; existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa b erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fiẽt tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: c Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: d Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.



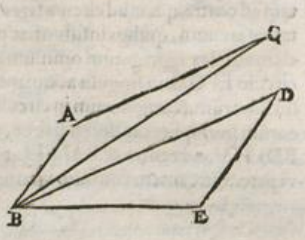
a 29. primi.
b 6. sexti.
c 32. primi
d 14. primi.

DEBENT

SCHOLIVM.

DEBENT autem prædicta duo triangula ita secundum vnum angulum esse composita, vt vterq; angulorum à lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quem triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum vterq; lateribus proportionalibus, continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atq; adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.

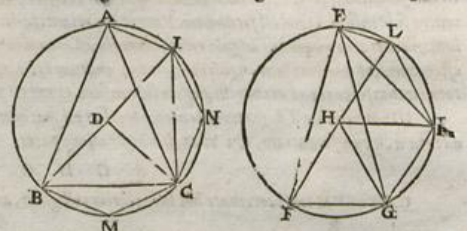
QVOD si vterq; angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; composita q; sunt ad angulum CBD; ita vt tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt, vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterq; angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.



THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxiij.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra D, H; sumanturq; ex circulis duo arcus quicunq; BC, FG quibus ad centra quidem insistant anguli BDC, FHG; ad circumferẽtias vero anguli BAC, EFG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG, & angulum BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, *a* applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidẽ ipsi BC, At vero GK, KL, ipsi FG: ducanturq; rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, *b* erunt quoque æquales arcus BC, CI, *c* ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erũt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKI, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, *d* necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, maior est angulo FHL, & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. *e* Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG: secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.



a 1. quarti.
b 28. tertij.
c 27. tertij.
d 27. tertij.
e 6. defin. quinti.

ATQVE hoc verum etiam est de spatiis circa centra, hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt spatiũ ad centrum D, insistens arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insistens arcui FEG, vt ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt insistunt æqualibus arcubus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.

QVONIAM vero vt angulus BDC, ad angulum FHG, *f* ita est angulus BAC, ad angulum FEG, *g* cum illi horum sint dupli, perspicuum est, *b* ita esse quoq; angulum, BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcũ FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

f 15. quin.
g 20. tertij.
h 11. quinti

QVOD si ad circumferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non constituant angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erunt spatia BDC, FHG, quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias, ex scholio propos. 20. lib. 3.

CONSTITVANTVR iã in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, *i* qui æquales erunt, cũ insistant arcub. æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmẽta BMC, CNI, *k* atque adeo inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, *l* quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus BDC, CDI ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor,

i 27. tertij.
k 24. tertij.
l 4. primi.

minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & sector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC,& tertiæ BDC,ab arcu FGKL,& sectore FHL,æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG,& quartæ FHG, vel vna æqualia erunt:vel vna excedent;si ea sumantur, quæ inter se respondent. *i* Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis,ad arcum FG,secundam magnitudinem,ea erit sectoris BDC,tertiæ magnitudinis,ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis,&c. Quod demonstrandum erat.

i 6. defin. quinti.

COMMODIVS fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotuis circuli æquales circulo ABC,atque in singulis capiantur singuli arcus arcui BC,æquales,quibus insistant anguli tam ad centra,quam ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus insistunt:ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo EFG,& in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales,&c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum,& angulorum in circulis ABC, EFG, quæ necessario oritur,quando arcus BC, FG, sunt magni,& eorum multiplices accipiendi sunt, vt perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistunt anguli BDI, FHL,ad centra,& BAI, FEL,ad circumferentias;non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraq; enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. *k* Quare & inter se eædem erunt.

k 11. quinti

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoq; est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

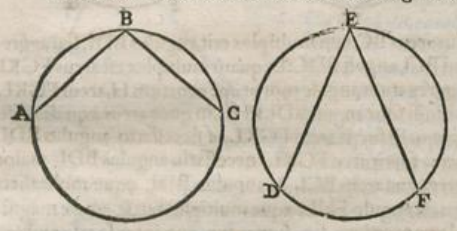
l 33. sexti. *NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro,* [l] *ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est, vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabitur.* [m] *Cum sit, vt angulus rectus in centro, ad angulum in centro ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.*

m 33. sexti.

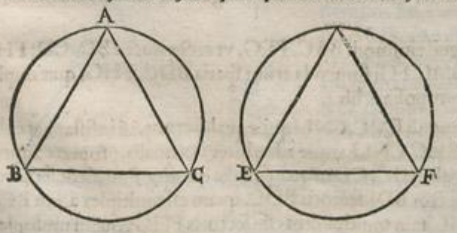
IDEM verum est de spatio in centro: hoc est vt est spatium in centro ad quatuor rectos, ita est arcus subtensus illi spatio ad totam circumferentiam, &c vt ex demonstratione patet.

SCHOLIVM.

CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum qui circumferentiæ alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum, in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam constituti sint B, E, maior quidem B, minor autem E. Quo posito, erit arcus AC, maior arcu DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio vero arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.



Non obscure quoq; ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione, 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentiæ similes ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoq; sit alia circumferentia similis totius suæ circumferentiæ; veluti in expositione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF. Quo posito, segmenta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circumferentias. Cum vero circulorum æqualitatem, [n] *arcus BC, EF, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF esse quoq; æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiamponuntur,* [o] *eandem proportionem habebunt; Atq; idcirco, quæ pars est arcu BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD.*

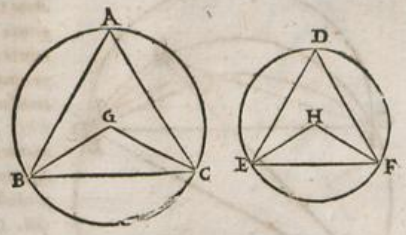


n 26. tertij.

o 7. quinti.

SINT

SINT deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoq; ad centra anguli G, & H, æquales, [p] cum hi illorum dupli existant: Vel erunt spatia ad centra æqualia, cum hæc quoq; sint angulorum ad circumferentias dupla, ex scholio propos. 20. lib. 3. [q] Quare quatuor recti ad angulum, vel spatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, vel spatium H. Atqui vt quatuor recti ad angulum vel spatium G, ita est tota circumferentia ABCA, ad arcum BC: Et vt quatuor recti ad angulum, vel spatium H, ita est tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. [r] Igitur vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuersionem ergo rationis erit quoque, vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circumferentia DEFD, ad arcum EDF. Et conuertendo, vt arcus BAC, ad totam circumferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circumferentiam DEFD. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circũferentiæ ABCA, eadẽ pars erit arcus EDF, totius circumferẽtiæ DEFD. Quod est propositũ.



p 20. tertij.
q 7. quint.
r 11. quinti

Constat igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

Facile ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in sphæram, & ad propos. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunq; duas lineas intercepti similes.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, circa idem centrum I, descripti. Si igitur egrediantur è centro I, duæ rectæ IB, ID, efficientes vnã lineam rectã BD, manifestũ est, arcus BAD, FEH, similes esse, cum sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur duæ rectæ IA, ID, constituentes angulum rectũ AID, per spicuum quoq; est, arcus AD, EH, similes esse, cum ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.



Emittantur iam ex I, duæ rectæ ID, IK, facientes quemcunq; angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, similes esse, hoc est, ita esse arcum DK, ad totam circumferentiam ABCD, vt est arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. huius propos. tam arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quam arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH; [s] erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH, ac proinde arcus DK, HL, similes erunt. Quod est propositum.

s 11. quinti

Breuius idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HL, insistunt in centro I, anguli æquales, immo idem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus DK, HL, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulo ante ostensum est.

Eadem ratione ostendemus: arcus BAK, FEL, similes esse, id est, habere ad totas circumferentias eandem proportionem.

Sed placet etiam hic demonstrare lemma, quod ad propos. 6. lib. 3. Theodosij proposuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem est eiusmodi.

ÆQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorque est arcus minoris circuli, quam vt similis sit arcui circuli maioris.

SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, descripti. Ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunq; EA, EB, secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntq; arcus AB, CD, similes, vt proxime demonstrauimus. Et quoniam rectæ EA, EB, sectæ sunt in C, D, proportionaliter, quod tam EA, EB, quam EC, ED, inter se æquales sint; [t] erunt ductæ rectæ AB, CD, parallelæ; atq; ideo triangula EAB, ECD, ex coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. [u] Erit igitur vt EA, ad AB, ita EC, ad CD. Est autem EA, maior quam EC. [x] Igitur & AB, maior erit quam CD. Accommodetur ergo ipsi CD, in circulo AB, æqualis EF; erit q; ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, similis sit; erit arcus CD, maior, quam vt similis sit ipsi FB. Æquales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inæqualibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, maiorq; est arcus CD, circuli minoris, quam vt similis sit arcui FB, circuli maioris. Quod est propositum.



t 2. sexti.
u 4. sexti.
x 14. quint.

HINC perspicuum est, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quam vt similis sit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, æqualis ipsi BF, auferat arcum CD, maiorem, quam vt similis sit arcui FB; multo magis linea maior quam CD, auferet maiorem arcum, quam vt similis sit arcui FB, cum illa maiorem arcum abscindat, quam CD, vt in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

HÆC autem demonstratio propositum tantum colligit, quando arcus abscisi sunt semicirculo minores, quales sunt BF, CD, vt ex ipsa demonstratione constat. Nam alias non constitueretur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verum nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quam vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris, multo maiorem esse arcum semicirculo maiorem circuli minoris, quam vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quod si quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquido constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quam vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris; neq; opus tunc erit alia demonstratione.

HINC etiam nullo negotio ostendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus simpliciter, & absolute inæquales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcu circuli maioris, & non solum maior, quam vt similis sit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, æquales, auferatque CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico simpliciter arcum CED, maiorem esse arcu FGB. Congruente enim recta CD, rectæ FB, cadet necessario arcus CED,

cus CED, extra arcum FGB; atq; idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra se contineat, sintq; ambo arcus in eandem partem caui, atq; eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de sphæra & cylindro. Neque vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipsum cadet. Nã si dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atq; adeo æquales erunt circuli, quod est absurdum, cum inæquales ponantur. Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcum FGB, cuiusmodi est arcus CAD, quoniam, vt paulo ante ostendimus, arcus CED, id est, CAD, maior est, quam vt similis sit arcui FGB; sumatur arcus BFH, arcu CAD, similis, atque ideo maior arcu FGB: Assumpto autem in arcus CAD, puncto A, vtcunque, ducantur rectæ AF, AB, productæque recta FA, donec arcum FGB, secet in G, ducantur rectæ GH, GB. Itaque quoniam arcus CAD, HFB, similes sunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis segmentis existentes æquales. [y] Quia vero angulus CAD, angulo CGB, maior est, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque totum parte; erit multo maior angulus CAD, angulo HGB, quod est absurdum. Ostensus enim est æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcũ FGB: sed neq; ei congruit, vt demonstratũ est. Cadet ergo extra; atq; ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictũ est. Quod est propositũ.

y 16. primi.

EX quo liquido constat, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abscindit.

QVONIAM vero Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil vero de superficierum, vel planorum proportionalium inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa inuentionem superficierum proportionalium versantur, scitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis propriis, huic sexto libro annectam: quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducantur. Hinc autem exordium capiemus.

I. A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterq; positum.

SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars quæ similis sit, similiterq; posita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B, simile, & similiter positum. [a] Constituatur rectilineum CD, æquale quidem ipsi A, simile vero, & similiter positum ipsi B; superq; vnum eius latus CE, semicirculus describatur CFE. [b] Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturq; rectæ CF, EF, [c] super quas constituantur rectilinea FH, FI, similia similiterq; posita ipsi CD. Dico igitur factum esse, quod iubetur. [d] Cum enim angulus CFE, rectus sit, quippe qui in semicirculo existat; [e] erit rectilineum CD, æquale rectilineis HF, FI, atq; adeo, si auferatur rectilineum FI, simile similiterq; positum ipsi B, ex rectilineo CD, hoc est, ex æquali A, relinquetur rectilineum HF, simile quoq; ipsi B, similiterq; positum. Quod autem rectilineum ablatum FI, sit tertia pars rectilinei CD, ita ostendetur. [f] Quoniam est, vt recta CC, ad GF, ita recta CF, ad FE; [g] quod triangula CGF, CFE, sint similia; Habet autem CG, ad GE, proportionem duplicatam proportionis CG, ad GF, propterea quod proportionales sunt tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propos. 8. huius lib.

a 25. sexti.
b 6. sexti.
c 18. sexti.
d 31. tertij.
e 31. sexti.
f 4. sexti.
g 8. sexti.

[h] Item rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE; Erit vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineum FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt CE, ad GE, ita duo rectilinea HF, FI, simul, hoc est, rectilineũ CD, quod est illis æquale, ad rectilineum FI: Est autem CE, ipsius GE, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.

h 19. vel 20. sexti.

QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte. [i] Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammũ GD, æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata; & per E, agatur ipsi BG, parallela EF. Dico DF, tertiam esse partẽ ipsius DG, hoc est, rectilinei dati A. Cũ n. sit [k] vt DE, ad DB, ita DF, ad DG: Sit autẽ per constructionẽ DE, ipsius DB, pars tertia; erit & DF, ipsius DG, tertia pars. Quod est propositum.

i 45. primi.
k 1. sexti.

II.

Duobus datis rectilineis, tertiũ proportionale inuenire.

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum sit tertiũ proportionale. [l] Constituatur ipsi A, rectilineum æquale EFG, simile vero similiterq; positũ ipsi BCD. Deinde laterib. homologis EF, BC, [m] inueniatur tertia linea proportionalis HI; [n] super quã constituatur rectilineum HIK, simile similiterq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertiũ proportionale. Cũ enim

l 25. sexti.
m 11. sexti.
n 18. sexti.

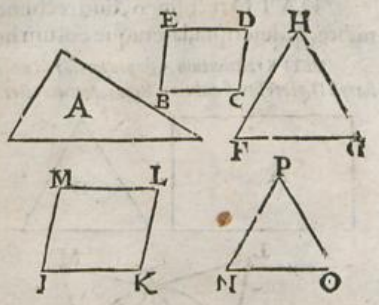
[o] 22. sexti. proportionales sint rectæ EF, BC, HI, [o] erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, abillis descripta (cum sint similia, similiterq; posita) proportionalia. Cum ergo EFG, per constructionem, æquale sit ipsi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod est propositum.

III. TRI-

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartum sit inueniendum proportionale. [a] *Constructur rectilineum IKLM, æquale quidem ipsi A, simile vero similiterque positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG,* [b] *inuenta quarta proportionali NO;* [c] *constituatur super NO, rectilineum NOP, ipsi FGH, simile similiterq; positum. Dico NOP, rectilineum esse quartũ proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales;* [d] *erunt & rectilinea similia similiterq; posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cũ igitur IL, constructum sit æquale ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod est propositum.*

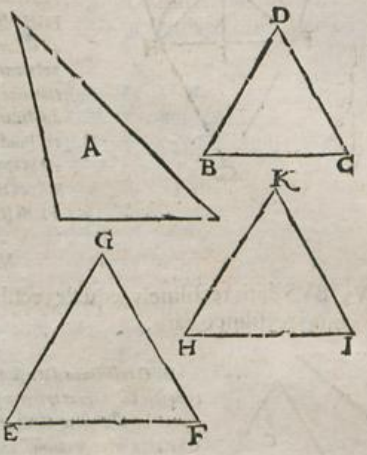


a 25. sexti.
b 12. sexti.
c 18. sexti.
c 22. sexti.

IV.

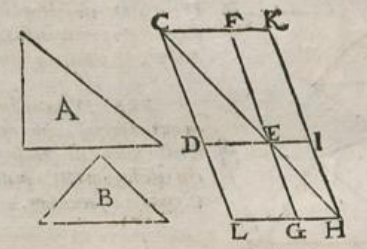
IV. DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

SINT duo rectilinea A, BCD, quib. medium inueniendum est proportionale. [a] *Constituatur rectilineum EFG, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC,* [b] *inuenta media proportionali HI;* [c] *construatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, medium esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ EF, HI, BC,* [d] *erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita. Cum ergo EFG, constructum sit æquale ipsi A; erunt quoque rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc est, erit vt A, ad HIK, ita HIK, ad BCD: ac proinde HIK, medium proportionale erit inter A, & BCD. Quod est propositum.*



a 25. sexti.
b 13. sexti.
c 22. sexti.
d 22. sexti.

ALITER. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. [e] *Constituatur ipsi A, æquale parallelogrammum quodcunq; CDEF,* [f] *ipsi vero B, æquale parallelogrammum EGHI, simile vero similiterque positum ipsi CDEF. Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, vt DE, EI, efficiant vnam lineam rectam, ac propterea, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus, vna quoque linea recta componatur ex FE, EG; perficiaturq; totum parallelogrammum KL. Dico vtrumlibet EK, vel EL, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint similiterque posita DF, GI; erit vt DE, ad EF, ita GH, ad HI, hoc est, ita EI, ad EG,* [g] *quod rectæ EI, EG, rectis GH, HI, æquales sint. Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG.* [h] *Vt autem DE, ad EI, ita est DF, ad EK, & vt FE, ad EG, ita EK, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI; ac proinde EK, medium proportionale erit inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.*



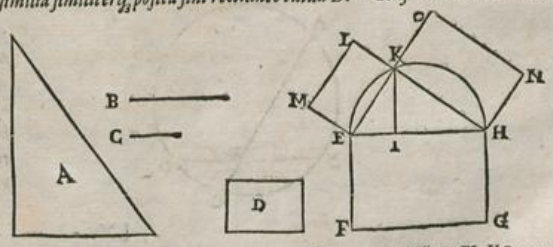
e 45. primi.
f 23. sexti.
g 34. primi
h 1. sexti.

QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum DE, GI, similia sint, similiterque posita, [i] *consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, æqualia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita est EL, ad GI,* [k] *quod vtrag; proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, vt DF, ad EK, ita EK, ad GI. Quod est propositum.*

i 26. sexti.
k 1. sexti.

V. DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunq; rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, dataque proportio rectæ B, ad C, oporteat q; constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantq; proportionem, quam B, ad C; ac similia similiterq; posita sint rectilineo cuiuis D. [a] *Constituatur rectilineum EFGH, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuiso deinde latere eius EH, in I, secundam proportionem B, ad C, ex iis, quæ ad prop. 10. huius lib. demonstrauimus: describatur circa EH, semicirculus EKH, & ex I, ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectãturque rectæ EK, HK.* [b] *Describantur iam super EK, KH, rectilinea EKLM, KHNO, ipsi EG, vel ipsi D, similia, similiterq; posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi EG, seu ipsi A, habereq; proportionem datam B, ad C.* [c] *Cum n. angulus EKH, in semicirculo existens rectus sit;* [d] *erunt rectilinea EL, HO, æqualia rectilineo EG, cum sint similia inter se, similiterq; descripta.* [e] *Quoniam vero est, vt EI, ad IK, ita EK, ad KH, cum triangula EIK, EKH, similia sint; Est autem EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis EI, ad IK, quod tres EI, IK, IH, sint, ex coroll. prop. 8. huius lib. proportionales.* [f] *Item EL, ad HO, in proportione duplicata eius, quam habet latus EK, ad latus homologum KH; erit vt EI, ad IH, hoc est, vt B, ad C, ita EL, ad HO. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo simul æqualia EL, HO, quæ similia sunt, similiterque posita dato rectilineo D, habentq; proportionem inter se datam B, ad C. Quod est propositum.*



a 25. sexti.
b 18. sexti.
c 31. tertij.
d 31. sexti.
e 4 sexti.
f 19. vel 20. sexti.

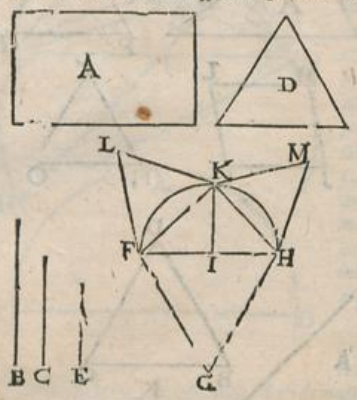
VI. DA-

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint similiterq; descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio rectæ B, ad rectam C; oporteat q; constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & simili ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C. [a] *Inuentis ipsis B, C, tertia proportionali E,* [b] *fiat rectilineum FGH, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuisoque latere FH, in I, secundum proportionem B, ad E, vt ad propos. 10. huius lib. ostendimus; describatur circa FH, semicirculus FKH; & ex I, ducatur ad FH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ FK, HK.* [c] *Describantur iam super FK, HK, rectilinea FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D, similia similiterq; posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, eorumq; latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C.* [d] *Cum enim angulus EKH, in semicirculo rectus sit;* [e] *erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoq; & rectilineo A, æqualia.* [f] *Quoniam vero est, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH; Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata duplicationis FI, ad IK; (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex constructione) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C, quando quidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositum.*

a 11. sexti.
b 25. sexti.
c 18. sexti.
d 31. tertij.
e 31. sexti.
f 4. sexti.

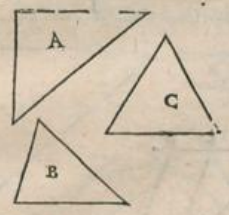


VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.

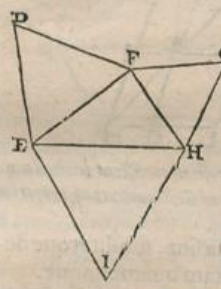
DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendum, simile similiterq; positum ipsi C. [a] *Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autem similiterq; positum ipsi C. Item ipsi B, æquale constituatur GFH, simile vero eidem C, similiterq; positum. Deinde rectilinea DEF, GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa FE, FH, constituant angulum EFH, rectum, cui subtendatur recta EH,* [b] *super quam describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est ipsi C.* [c] *Perspicuum autem est EHI, æquale esse duobus DEF, GFH, atq; idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.*

a 25. sexti.
b 18. sexti.
c 31. sexti.



BREVIVS. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1 docuimus. [d] *Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum EHI, quod simile sit similiterq; positum alteri dato rectilineo C; Constitutum erit rectilineum EHI, æquale duobus rectilineis A, B, & simile similiterq; positum rectilineo C. Quod erat faciendum.*

d 25. sexti.

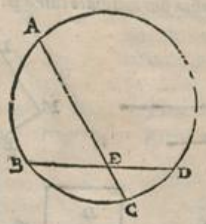


VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint: erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.

IN circulo ABCD, se mutuo secent rectæ AC, BD, in E. Dico segmenta AE, EC, esse reciproca segmentis BE, ED: Hoc est, esse vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt AE, ad ED, ita BE, ad EC. [a] *Cum enim rectangulum sub AE, EC, comprehensum æquale sit rectangulo sub BE, ED, contento;* [b] *erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.*

a 35. tertij.
b 14. sexti.

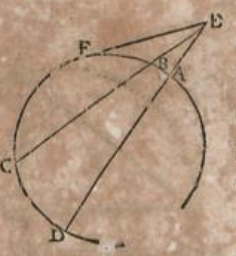


IX.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.

EXTRA

EXTRA circulum ABCD, sumatur punctum E, à quo cadant rectæ EC, ED, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB, esse reciprocas rectis ED, EA: Hoc est, esse, vt EC, ad ED, ita EA, ad EB. Velvt EC, ad EA, ita ED, ad EB. Ducta enim EF, tangente circulum in F; [a] erit rectangulum sub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula sub EC, EB, & sub ED, EA, æqualia erunt. [b] Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. [c] Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale est tam rectangulum sub EC, EB, quam rectangulum sub ED, EA, [d] erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quam tres ED, EF, EA, proportionales, atque adeo EF, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.



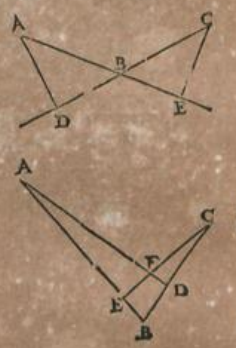
a 37 tert. ely.
b 1. sex.
c 36. tert. ely.
d 17. sex.

X.

SI duæ rectæ lineæ seseè mutuo secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem intericitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciprocæ.

DVÆ rectæ AB, CB, se mutuo secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; AD, quidem ad CB, at verò CE, ad AB; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, productas vltra B, si angulus ABC, fuerit obtusus; in ipsas verò introrsum, si idem angulus acutus fuerit, vt figuræ indicant. Dico rectas AB, BE, (quarum prior intericitur inter terminum A, & sectionem B, posterior verò inter sectionem B, & perpendicularē CE, quæ nimirum ad ipsam AB, assumptam ducitur) reciprocas esse duabus CB, BD, (quæ inter similes terminos includitur) hoc est, esse vt AB, ad B, C ita BD, ad BE: Velvt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cum enim anguli ABD, ADB, trianguli ABD, æquales sint angulis CBE, CEB, trianguli CBE, (Nam ADB, CEB, recti sunt; [a] & ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula. [b] Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt AB ad BC, ita BD, ad BE. Quod est propositum.

PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, sint æquiangula; [c] erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoq; vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod est propositum.



a 15. pri.
b 4. sex.
c 4. sex.

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelę se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, esse proportionalia. [a] Cum enim sit vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC; [b] Erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod est propositum.

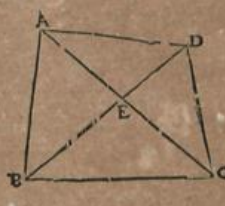


a 1. sex.
b 11. quin.

XII.

OMNE quadrilaterum à duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

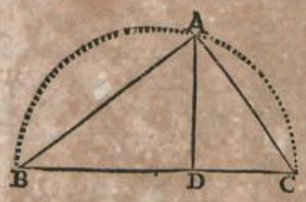
DIVIDANT diametri AC, BD, se mutuo secantes in E, quadrilaterum ABCD. Dico quatuor triangula AED, CED, AEB, CEB, esse proportionalia. [a] Erit enim vt AE, ad EC, ita triangulum AED, ad triangulum CED, & triangulum AEB, ad triangulum CEB. [b] Quare vt triangulum AED, ad triangulum CED, ita triangulum AEB, ad triangulum CEB. Eademque ratione ostendes esse, vt BEA, ad DEA, ita BEC, ad DEC; [c] cum vtraque proportio eadem sit proportioni BE, ad ED. Constat ergo propositum.



a 1. sex.
b 11. quin.
c 1. sex.

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continue proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continue proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.



a 17. sexti.
b 17. sexti.

IN rectangulo triangulo ABC, ex angulo recto A, demissa perpendicularis AD, secet basim BC, in D, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum BD: ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus AB, latere AC, maius. Dico tria latera BC, BA, AC, esse continue proportionalia. Quoniam enim per hypothesin est, vt BC, ad BD, ita BD, ad DC: [a] erit quadratum ex BD, rectangulo sub BC, CD, æquale. Rursus quia ex coroll. propos. 8. huius lib. AC, media proportionalis est inter BC, CD; [b] erit quoque quadratum ex AC, eidem rectangulo, sub BC, CD, æquale. Quare quadrata ex BD, AC, æqualia inter se erunt, ac proinde & rectæ ipsæ æquales erunt. Est autem ex coroll. propos. 8. huius lib. AB, inter BC, BD, media proportionalis. Igitur eadem AB, media proportionalis erit inter BC, AC: hoc est, erit, vt BC, ad AB, ita AB, ad AC. Quod est propositum.

c 11. quin.
d 9. quin.
e 7. quin.
f 11. quin.

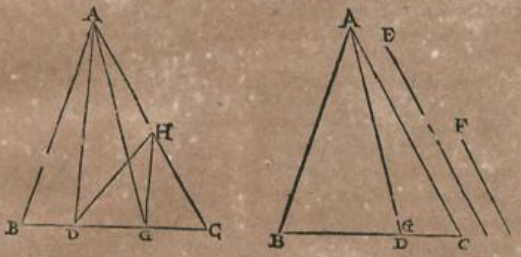
SINT deinde tria latera BC, AB, AC, in triangulo rectangulo ABC, continue proportionalia, hoc est, sit BC, ad AB, vt AB, ad AC, demittaturque perpendicularis AD, ad basim BC. Dico BC, sectam esse in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim est, vt BC, ad AB, ita AB, ad AC: Est autem vt BC, ad AB, ita quoque AB, ad BD: quod AB, media proportionalis sit inter BC, BD, ex coroll. propos. 8. huius lib. [c] erit vt AB, ad AC, ita AB, ad BD: [d] ac proinde æquales erunt AC, & BD. [e] Vt igitur AC, ad CD, ita erit BD, ad CD. Sed vt AC, ad CD, ita est BC, ad AC, quod ex coroll. propos. 8. huius lib. AC, sit media proportionalis inter BC, & CD. [f] Igitur erit quoque BC, ad AC, hoc est, ad BD, vt AC, hoc est, vt BD, ad CD: ac propterea BC, in D, secta erit extrema ac media ratione. Quod est propositum.

g 31. ter.

ITAQVE si super datam rectam BC, construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continue proportionalia sint, secanda erit data recta BC, extrema, ac media ratione in D. Descripto deinde semicirculo BAC, circa eandem datam BC, erigenda erit ad BC, perpendicularis DA, iungendæque rectæ BA, CA. Triangulum enim ABC, rectangulum erit, [g] cum angulus BAC, in semicirculo rectus sit; ac proinde cum perpendicularis AD, secet basim extrema ac media ratione; tria latera continue proportionalia erunt, vt proximè demonstratum est.

XIV.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

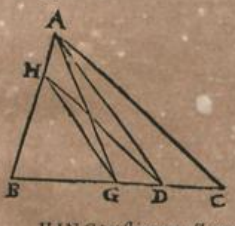


a 1. sex.

SIT triangulum ABC, oporteatque à dato puncto D, in eius latere BC, lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmenta secundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur BC, in G, secundum proportionem E, ad F, eadatq; primò punctum G, in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturque recta DA. [a] Quoniam igitur est, vt BD, ad DC, ita triangulum BDA, ad triangulum CDA, secabit recta DA, triangulum datum secundum proportionem datam BG, ad GC, hoc est, E, ad F. Quod erat faciendum.

b 37. pri.
c 7. quin.
d 17. quin.
e 1. sexti.

CADAT deinde punctum G, inter C, & D, vt in secunda figura. Ducatur ergo recta DA, cui per G, parallela agatur GH, coniungaturque recta DH. Dico rectam DH, secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt E, ad F, seu vt BG, ad GC. Ducta enim recta, [b] erunt triangula HGA, GHD, æqualia, cum sint super eandem basim GH, & inter easdem parallelas GH, DA. Addito igitur communi triangulo CGH, fient æqualia triangula CGA, CDH: [c] Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionem ad CGA, & ad CDH. [d] Dividendo igitur erit, vt triangulum BGA, ad triangulum CGA, ita trapezium BDHA, ad triangulum CDH. [e] Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur erit & trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt BG, ad GE, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.



f 37. pri.
g 7. quin.
h 17. quin.
i 1. sexti.

CADAT tertio punctum G, inter B, & D, ducaturque recta DA, cui rursus per G, agatur parallela GH. Dico igitur rursus, rectam ductam DH, secare triangulum ABC, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum BDH, ad trapezium CDHA, vt E, ad F. Ducta enim recta GA, [f] erunt, vt prius, triangula HGA, GHD, æqualia; additoque communi BGH, æqualia fient BGA, BDH. [g] Quare erit ABC, ad BGA, vt ad BDH. [h] Dividendo ergo erit vt CGA, ad BGA, ita trapezium CDHA, ad triangulum BDH, & conuertendo, vt BGA, ad CGA, ita BDH, ad trapezium CDHA, [i] Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur & BDH, ad trapezium CDHA, erit vt BG, ad GC, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.

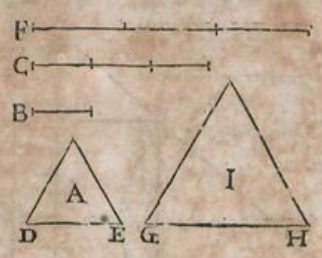
HINC perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c. factum erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator est æqualis denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumptæ addatur vnitas, quæ ante deerat.

XV.

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.

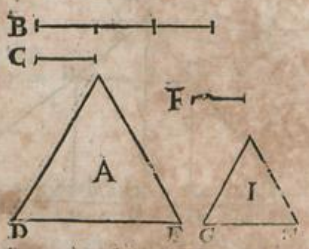
SIT

SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque) [a] inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, [b] inueniatur media proportionalis GH; [c] super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quàm A, secundum proportionem datam B, ad C. Cũ enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterque positum. Quod erat faciendum.



a 12. sexti.
b 13. sexti.
c 18. sexti.

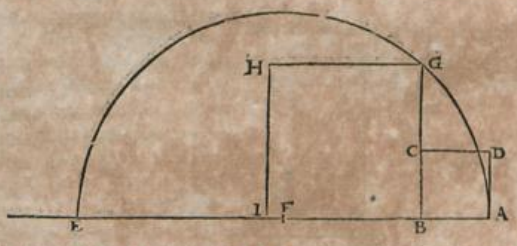
NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterq; positum, secundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio atque demonstratio.



FACILE igitur ex his quadratum quodcunq;, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Aut aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namq; proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua verò perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterque descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

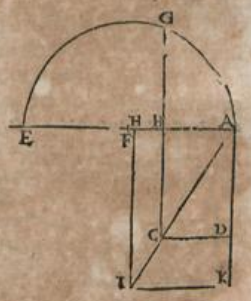
NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunque oblatum. Ex hac enim construemus quoque rectilineum simile similiterque descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio a præcedenti differt, vt mox ostendemus.

SIT igitur quadratum ABCD, quintuplicandum. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi AB, æquales, a puncto B, incipiendo, vsq; ad E, vt sit BE, quintupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producaturq; latus BC, ad circumferentiam vsq; in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, descriptum, quintuplum esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiam, ita BH, quadratum secundæ, ad AC, quadratum tertiæ, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quintupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod est propositum.



QVOD si rectæ BE, sumatur sextupla lateris AB, erit & quadratum rectæ BG, quadrati ABCD, sextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.

SIT rursus rectangulum ABCD, cui inueniendum sit simile similiterq; positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere AB, producta sumatur BE, dupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur AH, æqualis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protractæ in I, perficiaturq; parallelogrammum HI; [d] erit HK, ipsi BD, simile similiterq; positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD. Cum enim proportionales sint tres rectæ, EB, BG, BA, ex corollario propos. 13. huius lib. Erit vt prius, sicut EB, prima ad BA, tertiã, ita rectangulũ HK, supra AH, secundam (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secundæ æqualis) ad rectangulum BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterq; descriptum. Quod est propositum.



d 24. sex.

EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterq; positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionẽ habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

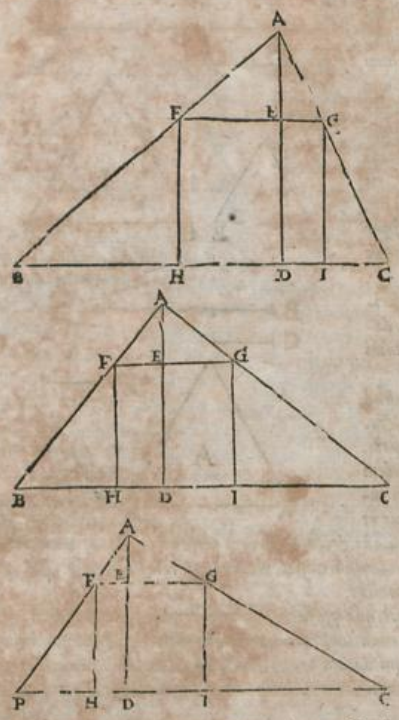
PERSPICVVM autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione à nostra antea tradita non differre, nisi quod hæc simul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo quocunque A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propos. 13. lib. 2. Hæc autem in E, ita secetur, per ea, quæ in scholio propos. 10. huius libri docuimus, vt eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inscriptum esse quadratum. Cum enim FG, ipsi BC, sit parallela; erit vt BD, ad DC, ita FE, ad EG, ex scholio propos. 4. huius lib. & componendo, vt BC, ad DC, ita FG, ad EG. [a] Sed vt DC, ad AD, ita est EG, ad AE, quod per coroll. propos. 4. huius lib. triangula ADC, AEG, sint similia. [b] Igitur erit ex æquo, vt BC, ad AD, ita FG, ad AE. Quia verò per constructionem est vt AD, ad BC, ita AE, ad ED, [c] erit rursus ex æquo, vt BC, ad BC, ita FG, ad ED: Est autem BC, ipsi BC. æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & FG, ipsi ED. [d] Quare cum FG, ipsi HI; & ED, ipsis EH, GI, æqualis existat; Erunt quatuor latera FG, GI, IH, HF, æqualia inter se. [e] Et quia anguli EDH, FHD, duobus rectis æquales sunt: Est autem EDH, per constructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti sunt in parallelogrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum est. Quod est propositum.

a 4. sex.
b 22. quin.
c 22. quin.
d 34. pri.
e 29. pri.



NON secus idem problema absoluemus, si datũ triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularem demittamus, vt in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 15. lib. 2.

QVOD si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem sit proportio AD, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelam ducemus DE; per E, verò ipsi AB, aliam parallelam EF. [f] Quoniam igitur est, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD, quod triangula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autem per constructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB, [g] erit ex æquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Est autem BC, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.

f 4. sex.
g 22. quin.



VERVM hoc problemate Commandini multo ingeniosius est id, quod sequitur.

XVII.

INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.

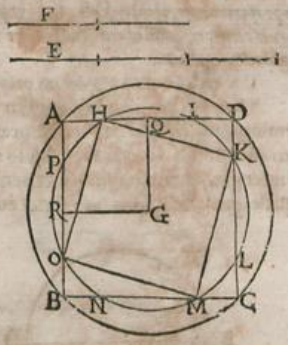
SIT quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quam recta E, ad rectam F, quæcunque ea sit, dummodo maior non sit, quam dupla. Nam si latera quadrati secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, descriptus est quadrato illi inscripto circumscriptus, vt in hac figura perspicuum est, erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio propos. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, describi nequeat, quam illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido constat quadratum ABCD, ad nullum quadratum inscriptum proportionem posse habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla, nimirum sesquialtera. Inueniatur ex propos. 15. huius scholij quadratum, ad quod habeat datum quadratum ABCD, proportionem datam E, ad F. Erit q, eius semidiameter maior quam semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod nimirum quadrati ABCD, subduplum est, vt diximus, minor vero semidiametro quadrati ABCD. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati ABCD, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ HK, KM, MO, OH. relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO, esse quadratum in circulo HIKLMNOP, descriptum. atque adeo æquale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HK, MO, habeat datam proportionem E, ad F. Describito enim circulo circa datum quadratum ABCD, ex centro G, ductisque ex G, ad latera AD, AB, perpendicularibus GQ, GR, [a] sectæ erunt tam rectæ AD, AB, quam rectæ HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, æquales sunt, [b] æqualiter distabunt à centro G, propterea que & HI, OP, æqualiter ab eodem centro distabunt. [c] Quare æquales erunt HI, OP, ideoq;

a 3. ter.
b 14. ter.
c 14. ter.



& earum

& earum semisses OH, OI, RO, RP, inter se erunt æquales. Sunt autem & semisses QA, QD, RA, RB, æqualium laterum æquales. Igitur si illæ ab his demantur, reliquæ erunt æquales HA, ID, PA, OB. Eademque ratione, si ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, ostendentur æquales NB, MC, LC, KD, & inter se, & illis quatuor HA, ID, PA, OB. Item quia æquales sunt HI, OP, si addantur æquales ID, PA, fient totæ æquales HD, AO. Atque eadem de causa æquales erunt BM, KC, & inter se, & illis duabus HD, AO. Itaque quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum rectos; [d] erunt & bases HK, HO, æquales. Eodemque modo demonstrabuntur KM, MO, æquales & inter se, & duabus HK, HO. Æquilatera ergo est figura HKMO. Dico & rectangulam esse. Cum enim latera HK, KM, MO, OH, æqualia sint, [e] erunt & quatuor arcus, quos subtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo sunt OHK, HKM, KMO, MOH, [f] ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratum est, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus vtrumque circumscribat. Circulus enim HKMO, descriptus est ad interuallum semidiametri circuli inuento quadrato circumscripti. Quod est propositum.



d 4. pri.

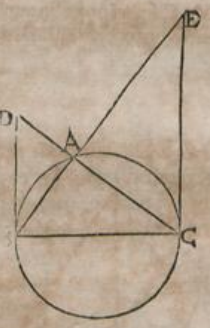
e 28. tertij.

f 31. ter.

XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propositio est Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. sicut & quæ sequitur. Vtramque autem demonstrauit Io. Baptista Benedictus. Sit ergo circulus ABC, cuius diameter BC, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares BD, CE, ac per assumptum quodvis punctum A, in circumferentia ex eisdem punctis B, C, eductæ rectæ BA, CA, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub EB, BA, quam sub DC, CA, quadrato diametri BC, æquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo BCE, ex angulo recto C, demissa est CA, ad basim BE, perpendicularis; [a] quod angulus BAC, in semicirculo rectus sit: erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB, BA. Quare [b] rectangulum sub extremis EB, BA, æquale erit quadrato mediæ BC. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub DC, CA: propterea quod BC, media quoque proportionalis est inter DC, CA, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Constat ergo id, quod proponitur.



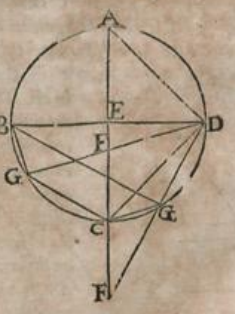
a 31. ter.

b 17. sexti.

XIX.

SI in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam: erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quarum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, secent se ad angulos rectos duæ diametri AC, BD, ducaturque ex puncto D, recta vtcunque DF, secans diametrum AC, in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum sub FD, DG, quadrato intra circulum descripto esse æquale. Ductis enim rectis DC, CG, erunt triangula DCF, DCG, æquiangula inter se. Nam angulus CDF, communis est, & angulus DCF, angulo DGC, æqualis; [a] ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, æqualis. Quod autem anguli DCF, DGC, æquales sint, ita ostendemus, Si punctum quidem F, est intra circulum; [b] erunt anguli DCF, DGC, insistentes quadrantibus æqualibus AD, DC, æquales: Si vero punctum F, est extra circulum, ducta recta AD, [c] erunt anguli DAC, DCA, insistentes quadrantibus æquales: [d] Sed tam DAC, DGC, [e] quam DCA, DCF, æquales sunt duobus rectis, Igitur ablatis æqualibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF, æquales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula DCF, DCG, æquiangula sint; [f] erit vt DF, ad DC, ita DC, ad DG: hoc est, tres lineæ DF, DC, DG, continue proportionales erunt. [g] Igitur rectangulum sub extremis DF, DG, æquale est quadrato mediæ DC, hoc est, quadrato intra circulum descripto, cum DC, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.



a 32. pri.

b 27. ter.

c 27. ter.

d 22. ter.

e 13. pri.

f 4. sexti.

g 17. sexti.

ALITER. Ducta recta BG, [h] erit angulus BGD, in semicirculo rectus; atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem, [i] æquiangula erunt. [k] Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG, [l] Rectangulum ergo sub DF, DG, æquale erit rectangulo sub DB, DE. [m] Sed rectangulo sub DB, DE, æquale

h 31. ter.

i 32. pri.

k 4. sexti.

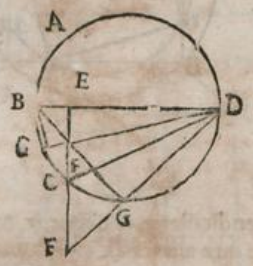
l 16. sex.

m 17. sex.

b 31. ter. æquale est quadratum rectæ AD, hoc est, quadratum circulo inscriptum; propterea quod ex coroll. propos. 8. huius lib. AD, media proportionalis est inter DB, DE, vt patet, si ducatur recta AB. n Fiet enim triangulum rectangulum BAD, & ex angulo recto perpendicularis demissa erit AE. Igitur & rectangulum sub DF, DG, eidem quadrato rectæ AD, æquale erit. Quod est propositum.

VNIVERSALIVS hoc ita proponetur.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur; ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius interfectionem in circumferentia, altera vero vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posterioris lineæ, quorum vnum sit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum verò inter eundem terminū, & circumferentiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem interceptæ.



o 4. sex.
p 16. sex.
q 17. sex.
r 31. tertij.

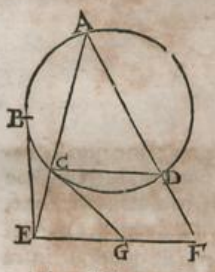
IN circulo enim ABCD, ad diametrum BD, sit perpendicularis EF, secans circumferentiam in C, iungunturque rectæ DC, DF, quarum posterior perpendicularem EF, secet in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum sub DF, DG, æquale esse quadrato DC. Iunctis enim rectis BG, erunt triangula BGD, FDE, æquiangula, propter angulos rectos G, E, & communem angulum FDE. o *Igitur erit, vt FD, ad DE, ita BD, ad DG.* p *Quare rectangulum sub FD, DG, rectangulo sub DE, BD, æquale erit:* q *Sed hoc æquale est quadrato DC; quod ex coroll. propos. 8. huius, DC, sit media proportionalis inter BD, DE: quia ducta recta BC,* r *angulus BCD, foret rectus in semicirculo. Igitur & rectangulum sub FD, DG, quadrato DC, æquale erit. Quod est propositum.*

COROLLARIVM.

HINC fit, priorem lineam DC, esse mediam proportionalem inter posterioris segmenta FD, DG, quorum vnum est inter terminum D, & perpendicularem, alterum verò inter eundem terminum, & circumferentiam.

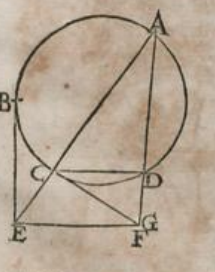
XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit recta data duo puncta connectenti.



a 17. sex.
b 36. ter.

HOC problema non minus acutum quam curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigentes multo clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex EF, ducendæ sint rectæ ad aliquot punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B, & duabus EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando EF, maior est, quam EB. Ducta igitur GC, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturque recta AF, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam CD, ipsi EF, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt, a *erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale:* b *Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub EA, EC, igitur rectangulum sub EF, EG, rectangulo sub EA, EC, æquale erit; ac*
c 22. ter. *proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi poterit.* c *Duo ergo anguli CAF, CGF, oppositi in quadrilatero ACGF, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G,*
d 13. pri. *qui duobus*
e 32. ter. *etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi CGF, erit reliquus CGE, reliquo A, æqualis:* c *Est autem & angulus DCG, angulo A, in alterno segmento æqualis. Igitur anguli DCG, CGE, inter se æquales erunt; atque ideo cum sint al-*
f 27. pri. *terni,* f *rectæ CD, EF, parallelæ erunt. Quod est propositum.*



g 36. ter.
h 5. quar.
i 37. ter.
k 32. ter.
l 32. ter.
m 27. pri.

CADAT deinde punctum G, in punctum F, quod accidit, quando EF, ipsi BE, æqualis, est. Ducta igitur rursus recta GC, circulū tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturque recta AF, secans circumferentiam in D. Dico rursus ductam rectam CD, ipsi EF, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt EB, EF; g *esque rectangulum sub AE, EC, quadrato ex EB, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub EF, æquale. Quare* h *si circa triangulum AGF, circulus describatur, cum eum secet recta EA, recta autem EF, eidem applicetur,* i *tanget recta EF, eum circulum.* k *Angulus ergo EFC, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit:* l *Est autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis, Igitur æquales inter se erunt anguli EFC, FCD: qui cum sint alterni,* m *erunt rectæ CD, EF, parallelæ. Quod est propositum.*

CADAT tertio punctum G, vltra F, quod contingit, quando EF, minor est quam EB.
n 17. sex. *Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt,* n *erit rectangulum sub EF, EG,*
o 36. ter. *quadrato ex EB, æquale:* o *Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub AE, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, hoc est, sub EG, EF, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G,*
p 21. ter. *circulus describi poterit.* p *Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento CAGF, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CF,*

inter

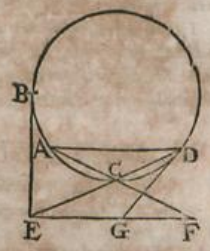
inter se æquales erunt : q Est autem angulus GCD, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur idem angulus GCD, angulo G, æqualis erit : ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni, parallelæ erunt CD, EF. Quod est propositum.



q 32. ter.
r 27. pri.

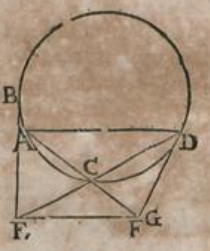
QVOD si à principio ex puncto F, ducta fuisset linea circulum tangens, & reliqua fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctũ A: quia nullum aliud punctum absoluere potest problema. Concipiatur enim mente quodcunque aliud punctum H, prope A, inter A, & D. (si illud punctum H, atramento signaueris, facilior erit demonstratio. quod etiam de alijs punctis H, mente concipiendis intelligatur, nec non de puncto I, in vltima figura.) Igitur recta FH, secabit circulum supra D, at vero recta EH, eundem infra C, secabit, ac propterea recta coniungens puncta sectionum rectam CD, secabit. Producta ergo secabit quoque illius parallelam EF. Non igitur ipsi EF, parallela erit. Contrarium accidet, si punctum H, sumatur inter A, & C. Nam recta FH, cadet infra D, & EH, supra C, &c.

SI vero ex eisdem punctis datis E, F, ducendæ sint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexæ circumferentiæ, quæ productæ secent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea transiens sit parallela rectæ puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta EB, circulum tangente in B, mueniatur duabus rectis EF, EB, tertia proportionalis EG, cadatque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta eiiciatur ex F, secans circumferentiam in A. Dico rectam AD, ductam esse rectæ EF, parallelam: Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continue sunt proportionales, s erit rectangulum sub EF, EG quadrato ex EB, æquale: t Est autem & rectangulum sub ED, EC, eidem quadrato ex EB, æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula sub EF, EG, & sub ED, EC: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi potest. u Duo ergo anguli CDG, & F, in eodem segmento CDFG, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta GC, inter se erunt æquales. x Est autem angulus CDG, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit, y ideoque parallelæ erũt AD, EF. Quod est propositum.



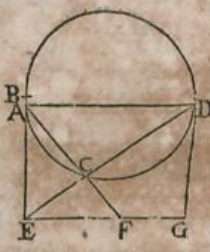
s 27. sexti.
t 36. ter.
u 21. ter.
x 32. ter.
y 27. pri.

CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur recta ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, secet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, rectæ EF, parallelam esse. Cum enim æquales sint EB, EF, (quod sit EF, ad EB, vt EB, ad EF.) erunt earum quadrata æqualia. Est autem rectangulum sub ED, EC, quadrato ex EB, æquale. Igitur & quadrato ex EF. Quia ergo, z si circa triangulum CDF, circulus describatur, recta ED, eum secat, & EF, applicata est, a tanget EF, eum circulum. b Angulus ergo EFC, angulo EDF, in alterno segmento eius circuli æqualis erit: c Est autem angulus FDE, angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit. d Quare parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum.



z 5. quar.
a 37. ter.
b 32. ter.
c 32. ter.
d 27. pri.

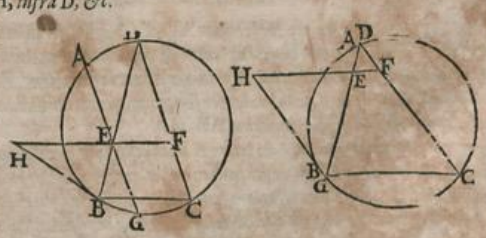
CADAT tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem constructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, sint continue proportionales, e erit rectangulum sub EF, EG, siue sub EG, EF, æquale quadrato ex EB: f Est autem eidem quadrato æquale rectangulum sub ED, EC. Igitur rectangulum sub EG, EF, rectangulo sub ED, EC, æquale erit, propterea quæ ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus potest describi. g Duo ergo anguli EDG, CFG, oppositi in quadrilatero CDGF, intra eum circulum descripto æquales erunt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F, h qui etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi CFG, reliquus CDG, reliquo CFE, æqualis erit: i Est autem angulus GDC, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus CFE, eidem angulo CAD, alterno æqualis erit k: atque idcirco parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum.



e 17. sex.
f 36. ter.
g 22. ter.
h 13. pri.
i 32. ter.
k 27. pri.

QVOD si à principio ex F, duceretur linea circulum tangens, & alia fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum C. eo quod nullum aliud possit problema confícere. Nam sit aliud punctum H, quodcunque iuxta C, mente conceptum inter A, & C. Cadet ergo recta FH, infra A, & recta EH, supra D. Recta igitur connectens puncta sectionum secabit rectam AD; ac proinde, vt supra dictum est, ipsi EF, parallela esse non potest. Si punctum H, sumptum oret inter D, & C, caderet FH, recta supra A, & recta EH, infra D, &c.

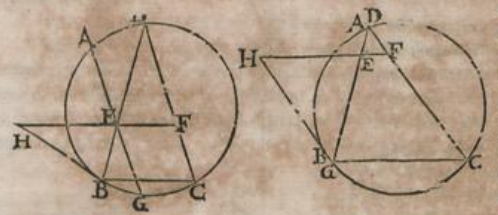
Sed sint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducta recta AG, per E, vtcunq;, mueniatur tribus rectis EF, EA, EG, quarta proportionalis, cui æqualis sit EH, (cadet q, necessario punctum H, extra circulũ. l Quoniam enim rectangulum sub AE, EG, secunda & tertia, æquale est rectãgulo sub EF, EH, prima & quarta: describi poterit circulus circa 4. puncta A, F, G, H, ex scholio propos. 35. lib. 3. secans circulum, ABCD, in A, G. Cum ergo eius arcus per F, transiens sit intra hunc circulum, erit alter arcus per H, transiens, extra: m quandoquidem circulus circulum in duobus tantum punctis secat, ac proinde circulus per A, F, G, descriptus post puncta A, G, extra circulum cadet; ideoque punctum H, in eo circulo existens extra circulum cadet.) ducaturque HB, circulum tangens in B.



l 16. sexti.
m 10. ter.

Ducta enim recta ex B, per E, secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante circumferentiam in C; dico ductam rectam BC, parallelam esse rectæ EF. Quia enim ita est EF, ad EA, vt EG, ad EH, n *erit rectangulum sub EF, EH, æquale rectangulo sub EA, EG:* o *Est autem rectangulum sub EA, EG, æquale rectangulo sub ED, EB. Igitur & rectangulum sub EF, EH, eide rectangulo sub ED, EB, æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi.* p *Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, æquales erunt.* q *Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno.* r *Parallelæ ergo sunt rectæ BC, EF. Quod est propositum.*

n 16. sex. o 35. ter. p 21. tertij. q 32. tertij. r 28. pri.

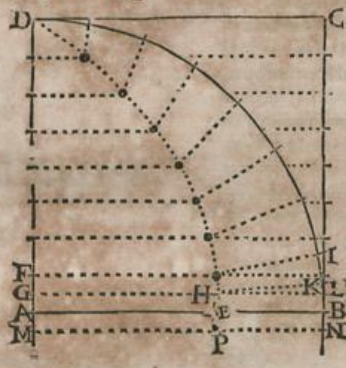


QVOD si contingat, tangentem HB, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.

IAM si solutio problematis inciperet à puncto F, non autem ab E, reperiretur idem omnino punctum D; quod nullo alio problema confici posset. Si enim sumatur quodcunque aliud punctum I, prope D, inter D, & C, cadet recta FI, infra C, & EI, supra B. Recta ergo connectens sectionum puncta rectam BC, secabit. Igitur vt supra dictum est, rectæ EF, parallela non erit, si punctum I, sumeretur inter D, & B, caderet recta FI, supra C, & EI, infra B, &c.

DE MIRABILI NATVRA LINEÆ CVIVSDAM INFLEXÆ, PER QVAM ET IN CIRCVLO FIGVRA QVOTLIBET laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait Diaostratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarum rectarum, qua in re principium petunt, vt propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non posit; nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quod beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periucunda, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus, reiiciendo tamen pleniorem Quadraturæ tractationem in nostram Geometriam Practicam. Sic ergo describio lineæ Quadratricis fiet.



IN quadrato ABCD, describatur quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus supremum CD, deorsum versus æquabiliter quoque, ita vt quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu descendens ad latus AB, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri AB, sit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; secabunt se continuè semidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, merito à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus BD, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, & singula rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuisiones, eo accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum DB, quàm duo latera AD, BC, in 8. partes æquales.

DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter distantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionum puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas inter se secabunt, prima primam, secunda secundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed æquabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa DE, secans semidiametrum AB, in E.

SED quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometricè non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem AF, lateris AD, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continue, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem BI, arcus DB, bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte AF, factæ sunt, vt particula BK, talis pars sit totius arcus DB, qualis pars est AG, totius lateris AD. Particulæ deinde AG, æquales abscindemus BL, BN, AM, ducemusque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ secet GL, in H, puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi GH, æqualem MP. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus æquabili atque vniformi exten-

extensionem vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter parvam rectarum GH, AE, MP, inter se distantiam, efficitur, vt ferme sint æquales, licet Geometrice loquendo, recta AE, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Idquod etiam in circumferentia circuli contingit. Recta namque GL, AB, MN, si parum inter se distent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis vere AB, aliquanto maior sit. Itaque si tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubium non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum AB, secat ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisite, & summa adhibita diligentia inuenta sint.

RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis, & rectam AE, eiusdem, basin, ac denique punctum A, centrum.



VERVM puncta Quadratricis prope basem certius inueniemus, sine intersectionibus linearum hoc modo. Ducta chorda BQ, in quadrante, secetur in D, bifariam. quod fiet si ex A, ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur AC. Hæc enim ex scholio propos. 26. lib. 3. rectam BQ, secabit bifariam. Deinde rectæ AD, sumatur æqualis AE, iunctaque recta DE, secetur bifariam in F, quod etiam fiet, si ex A, ad I, punctum medium arcus BC, ducatur AI. Hæc enim chordam BC, (si duceretur) secaret bifariam, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde & rectam DE, ex scholio propos. 4. huius, [a] cum chordæ BC, sit parallela; propterea quod latera AB, AC, proportionaliter secantur in D, E, quippe cum tam AB, AC, quam AE, AD, æquales sint. Rursus rectæ AF, sumatur æqualis AG; iunctaque FG, secetur bifariam in H. quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atque hoc modo si rectæ AH, æqualis sumatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipsi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas sectiones. [b] Est enim AD, ad QB, perpendicularis; & AF, ad DE; & AH, ad FG &c. Omnia verò hæc puncta inuenta D, F, H, &c. sunt in Quadratrice; quod ita ostendo. Ductis DL, FM, HN, ipsi AB, parallelis secantibus BD, in O, P; [c] erit vt BD, ad DQ, ita AL, ad LQ; ideoque & AQ, secta erit in L, bifariam. Sectus autem est & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt ostensum est, punctum D, est in Quadratrice. Rursus quia DL, secta est bifariam in F; [d] erit quoque DB, secta bifariam in O; [e] ideoque erit vt FG, ad FD, ita BO, ad OD. Sed vt BO, ad OD, ita est AM, ad ML: Et vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC; quod vtrobique proportio sit æqualitatis; erit igitur quoque, vt AM, ad ML, ita BI, ad IC. Ergo, vt ostendimus, secabunt sese AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio est de alijs punctis hac arte inuentis.

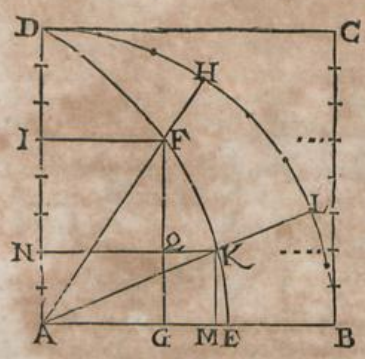
[a] 2. sexti.
[b] 3. ter.
[c] 2. sex.
[d] 2. sex.
[e] 2. sex.

ESSE Autem lineam hanc inflexam DE, à nobis per puncta descriptam Geometrice eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque vniformi; sit vt, quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC; similem partem laterum DA, CB, percurrerit: Alias aut duo illi motus non essent vniformes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quam latus DC, peruenirent. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emissæ, & lineæ parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes, ex constructione, liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometrice inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperiuntur, non differre. Hæc igitur est descriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica quodammodo appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen magis errori sint obnoxiæ, quam nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus persequutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reiicere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa præclare de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis lineæ, esse quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissime inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.

EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturque ad basim AE, perpendiculares FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE, parallelæ. Dico, vt est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA, vt ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, siue ea ratione, quam nos pra-



nos præscripsimus, cum in ea semper arcus DH, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius rectæ DA, recta DI, continet, propterea quod rectæ AH, IF, se intersecant in puncto F, Quadratricis: Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DH, toti arcui DB, quam recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuo Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB, si cogitetur talis pars minor quam DI, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est, ac proinde ea non transibit per F, quod est absurdum & contra hypotesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars est reliqua recta IA, totius lateris DA, Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam

a 34. pri. FG, [a] quæ ipsi IA, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quam conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c.

b 34. pri. EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, [b] quæ ipsi NA, æqualis est: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, siue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, vt LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG, erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG. Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG.

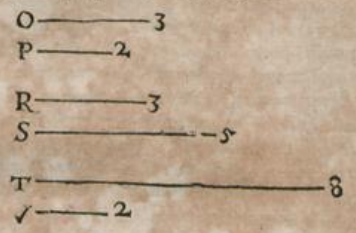
RVRSVS quia est vt DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et vt HB, ad LB, ita IA, ad NA; erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

I I.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.

SIT primum arcus HB, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, secante Quadratricem in F, ducatur FI, basi AE, parallela. Deinde recta IA, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. huius lib. vt sit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P, ductaque NK, basi AE, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico arcum HB, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim, vt propos. 1. ostendimus, vt HL, ad LB, ita est PN, ad NA. Est autem IN, ad NA, ex constructione,

a 11. quin. vt O, ad P; [a] erit quoque HL, ad LB, vt O, ad P.



DEINDE totus Quadrans DB, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro DA, in I, vt sit DI, ad IA, sicuti R, ad S, ducatur IF, ipsi AE, parallela secans Quadratricem in F. Ducta igitur recta AFH, erit ex propos. 1. DH, ad HB, vt DI, ad IA, hoc est, vt R, ad S.

TERTIO sit idem Quadrans DB, secandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abscindatur AN. Ducta autem NK, ipsi AE, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, sectum esse, vt proponitur. Est enim ex propos. 1. DB, ad LB, vt DA, ad NA, hoc est, vt T, ad V.



b 12. quin.

QVARTO semicirculus ABC, diuidendus sit in datam proportionem, videlicet in triplam. Secetur vterque Quadrans AB, BC, secundum datam proportionem triplam in E, F, & arcui AE, vel BF, æqualis abscindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, æqualia demantur, nimirum duo arcus AE, BF, simul, & arcus AG; reliqua æqualia sient, nimirum duo arcus EB, FC, simul, & arcus GC. Et quoniam est, vt AE, ad EB, ita BF, ad FC, [b] erunt AE, BF, simul ad EB, FC, simul, hoc est, arcus AG, ad arcum GC, vt AE, ad EB. Habet autem AE, ad EB, datam proportionem triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit.

QVINTO in eandem proportionē secandus sit arcus ACD, tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionē in E, F, H, sumatur arcus EG, ipsi BF, & arcus GI, ipsi CH, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACD, demantur æqualia, nimirū tres arcus AE, BF, CH, simul, & arcus ABI, reliqua sient æqualia, nimirum tres arcus EB, FC, HD, simul. & arcus ID. Et

c 12. quin. quia tres arcus AE, BF, CH, ad tres arcus EB, FC, HD, eandem habent proportionem; [c] habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus ABI, ad arcum ID, eandem proportionem, quam vnus arcus AE, ad vnum arcum EB, videlicet datam.

POSTREMO sit eodem modo diuidendus arcus ACK. Diuisis rursus tribus quadrantibus, & arcu DK, vt proponitur, in E, F, H, L: sumatur arcus EG, arcui BF, & arcus GI, arcui CH, & arcus IM, arcui DL, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACK, æqualia auferantur, videlicet quatuor arcus AE, BF, CH, DL, simul, & arcus ABM, reliqua æqualia sient, quatuor scilicet arcus, EB, FC, HD, LK, simul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ad quatuor arcus EB, FC, HD, LK,

eandem

eandem proportionem habent: [d] habebunt omnes quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcus ABM, ad arcum MK, eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur. d 12. quin.

COROLLARIVM.

EX his facile quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRIPTO namque arcu ex angulo dato, eoque arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus: [c] cum sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro. c 33. sex.

QVOD si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam a numero, qui vna vnitate minor sit numero partium propositarum. Vt si arcus BC, vel angulus BAC, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus BC, in G, in proportionem quadruplam. Nam GC, arcus erit quinta pars arcus BC, cui si quatuor æquales abscindantur GF, FE, ED, DB, diuisus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ AG, AF, AE, AD, sectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.



III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio rectæ AB, ad rectam BC. Diuisa BC, in D, bifariam, & descripto ex centro E, circulo quantocunque FGH, ductaque in eo diametro FG; secetur ita semicircumferentia FHG, in H, vt eadem sit proportio arcus FH, ad arcum HG, quæ rectæ AB; ad rectam BD, iungantur que rectæ HE, HG, HF. Dico Isosceles trianguli EGH, vtrumque angulorum æqualium ad basin GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datam AB, ad BC. Cum enim sit vt AB, ad BD, ita arcus FH, ad arcum HG; Et vt arcus FH, ad arcum HG, [a] ita angulus FGH, ad angulum GFH; [b] erit vt AB, ad BD, ita angulus FGH, ad angulum GFH: Vt autem BD, ad BC, ipsius BD, duplam, ita est angulus GFH, ad angulum GEH, [c] qui duplus est anguli GEH. Igitur ex æquo erit, vt AB, ad BC, ita angulus EGH, ad angulum GEH. Quod est propositum.



a 33. sex.
b 11. quin.
c 10. tertij.

COROLLARIVM.

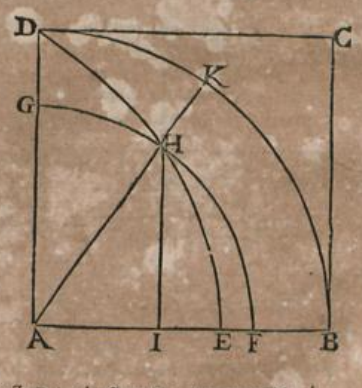
ITAQVE si construantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices sesquialteras, tum multiplices ordine, describentur per priora omnes figuræ æquilateræ parium laterum, per posteriora verò figuræ æquilateræ laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus, quot latera angulosue figura inscribenda habere debet, &c.

IV.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continue proportionales.

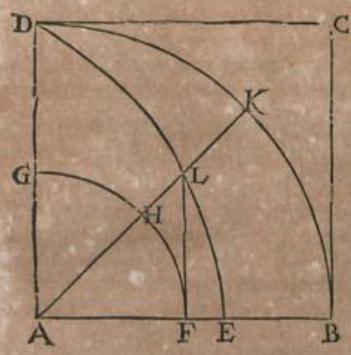
SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcum BD, semidiametrum DA, & Quadratricis basin AE, continue esse proportionales, hoc est, esse BD, ad DA, vt DA, ad AE. Sint enim, sit vt BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorem ipsa AE, minorem ue, sitque primum AF, maior quam AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA, vt DA, hoc est, vt AB, ad AF, est que vt AB: semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG, (Cum enim sit ex Pappi demõstrationibus, vt & nos in libro de mensurationibus ostẽdemus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli ad circumferentiam circuli; [a] erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrũ AF, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam; [b] ac proinde etiam vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est, vt arcus BD, ad arcum FG.) [c] Erit quoque arcus BD, ad rectam DA, vt idem arcus BD, ad arcum FG. [d] ac propterea æquales erunt rectæ DA, & arcus FG. Quia verò ex theor. 1. est, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & vt arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcum FH, quod arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sunt, vt supra in hoc scholio ostensum est: [e] Erit quoque recta DA, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta DA, ostensa sit arcui FG, æqualis; [f] erit quoque recta HI, arcui FH, æqualis. quod est absurdum. Est enim recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: (Nam recta AF, [g] secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcum, ex scholio propos. 27. lib. 3.) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam maiorem basi AE, Quadratricis.



a 15. quin.
b 15. quin.
c 11. quin.
d 9. quin.
e 11. quin.
f 14. quin.
g 3. ter.

SIT

SIT deinde, si fieri potest, AF, minor quàm AE. Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, punctoque per quod semidiameter ducatur AL K, secans arcum FG in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum FG, rectæ D A, æqualem esse: Item ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum FG, ad arcum FH, vt est recta DA, ad rectam LF. Quare cum arcus FG, ostensus sit æqualis rectæ D A, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod est absurdum. Est enim recta LF, maior arcu FH: Nam si ex L, ducerentur versus G, alia recta tangens circulum FG, sicut LF, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex 2. hol. propos. 36. lib. 3. arcusque inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quod ex schol. propos. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur, [h] ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: [i] ideoque & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis LF, maior semisse FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum D A, vt DA, ad rectam minorem



h 4. vel 8. prim.
i 26. ter.

baſe AE, Quadratricis: Sed neq; vt DA, ad maiorem, vt ostensum est. Igitur vt DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.

COROLLARIVM I.

HINC facile reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus BD, ad DA, vt DA ad AE: erit conuertendo quoque AE, ad DA, vt DA, ad arcum Quadrantis BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; [k] erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraque proportio sit eadem, quæ AE, ad AD. [l] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli; si vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcui BK, qui minor est, quadrante, inuenienda sit recta æqualis; fiat vt DA, ad perpendicularem LF, ex L, ad AB, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaq; erit quarta hæc recta æqualis arcui BK. Nam cum sit ex theor. 1. vt DA, ad perpendicularem LF, ita arcus DB, ad arcum BK; [m] erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineã inuentam, vt arcus DB, ad arcum BK: Est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis DB. [n] Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui BK. Si vero arcui, qui maior sit quadrante, inueniendæ sit rectæ æqualis, reperienda primum erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

k 11. quin. l 9. quinti.
m 11. quinti. n 14. quin.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus AD, Quadranti eiusdem circuli esse æquale, & lineam lateris duplam esse æqualem circumferentiæ eiusdem circuli; & lineam quadruplam toti circumferentiæ esse æqualem.

CVM enim vt supra ex Pappo diximus, semidiametri circumferentijs circulorum, atque adeo & quadrantibus sint proportionales; erit vt DA, ad AE, hoc est, vt tertia illa proportionalis ad DA, ita Quadrans BD, ad Quadrantem semidiametri AE. Est autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti BD, vt ostensum est: [o] Igitur & recta D A, Quadranti semidiametri AE, æqualis erit. Dupla linea ergo ipsius D A, semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter AE; & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

o 14. quin.

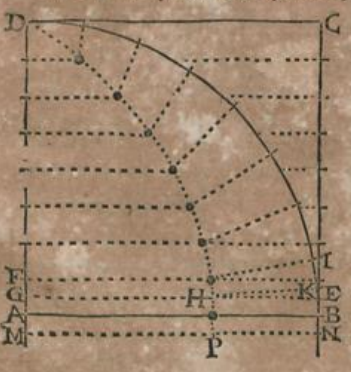
EADEM ratione, si duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam DA, AE, & minor ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior æqualis quadranti illius circuli, &c. Sit enim vt D A, ad AE, ita recta aliqua B, ad rectam C. Eritque permutando, vt DA, ad B, ita AE, ad C. Vt autem AE, ad C, ita est quadrans semidiametri AE, ad quadrantem semidiametri C, vt supra ex Pappo dictum est. Igitur erit quoque vt DA, ad B, ita quadrans semidiametri E, ad quadrantem semidiametri C. Cum ergo DA, æqualis sit, vt ostensum est, quadranti semidiametri AE, [p] erit quoque B, æqualis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.

B ——
C ——

p 14. quin.

SED si libeat per numeros explorare, quam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferentia ad semidiametrum, [q] cum sit vt circumferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in grad. 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem æquales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta ferme æqualis basi AE, ob exiguam distantiam illius parallelæ, & basis AE, cum in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam sextam decimam, quæ $\frac{1}{96}$ multò maior est quam $\frac{1}{5400}$ vix à base AE, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro base accipere possimus. Quia verò vltima illa particula lateris D A, est sinus arcus Min. 1. & parallelæ illa sinus complementi, vnius rum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturque rectæ AH. Nam GH, erit sinus anguli GAH, grad 89 Min. 59. ac proinde AG, sinus anguli AHG, Min 1. posito sinu toto AH, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus AH, statuatur 100000. (Ita enim exquisitus proportio optata inuenietur, quam si sinus totus ponatur tantum 100000. cum in hoc sinus grad. 89. Min.

q 15. quin.



89. a

59;à sinu toto non differat) erit AG,2909 & GH, 9999999 .at totum latus DA,earundem partium erit 15708600.vt constat si 5400.particulæ lateris DA,ducantur in vnam AG,quam diximus esse 2909.Duplum ergo lateris DA, erit 31417200. Et quoniam ex coroll.2.huius propos.4.duplum lateris DA,æquale est semicircumferentiæ,cuius semidiameter AE;erit proportio semicircumferentiæ illius ad semidiametrum AE,eadem fere,quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{14177031}{9999999}$. hoc est,in minimis terminis, à $3\frac{157487}{111111}$. quæ proportio minor est,quam tripla sesquiseptima,siue tripla superdecupartiens septuagesimas,maior autem,quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas;inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.

Itaq; vt recta linea circumferentiæ circuli inueniatur æqualis, satis est punctum E,inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta.Vt autem arcus,vel angulus in datã proportionem secetur, non indigemus puncto E,vt perspicuũ est.

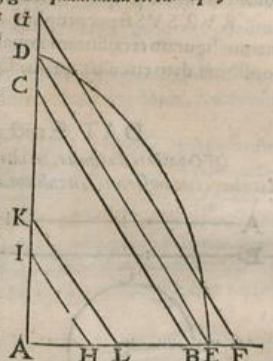
V.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ eiusdem æquale est;atque hinc nos propos. 4.figurarum Isoperimetrarum in commentariis in sphæram ostendimus,eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro,& semicircumferentia,æqualem esse:si ex coroll.præcedentis propos.inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & semidiametro [a] constituatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale. a 14. secun.

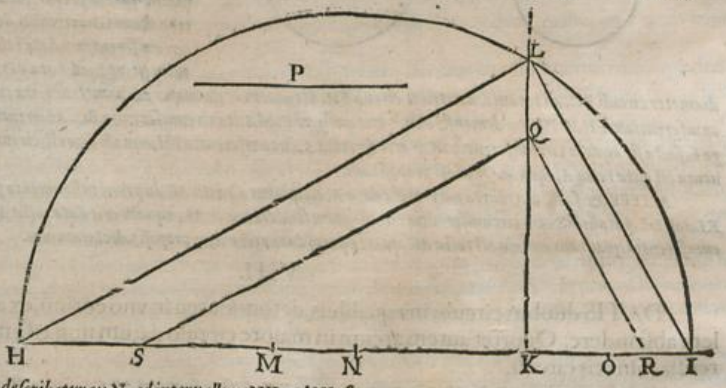
INVENIETVR autem recta æqualis semicircumferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, [b] si fiat vt basis Quadratricis descriptæ ad eiusdem latus,ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propos. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentiæ æqualem, quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit. b 12. sexti.

VERVM vt expeditius quilibet circulus possit quadrari,construendæ erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptissimæ hoc modo. Constituatur angulus rectus DAE. sitq; AD, æqualis semidiametro Quadrantis ex quo Quadratrix descriptæ est, & AE, basi eiusdem Quadratricis æqualis; Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur DE,cuius latus AD,& basis AE. Ducta autem recta DE, constructum erit vnum instrumentum circulis quadrandis aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter æqualis sit rectæ AE, erit recta AD, circumferentiæ Quadrantis eiusdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, quam AE,abscindemus ei æqualem AB,parallelamque ipsi DE,agemus BC.Si denique semidiameter sit maior quam AE,abscindemus ei æqualem AF,ex AE,producta,& per F,ipsi DE,parallelam agemus FG.Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta AC, æqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius semidiameter AB:Recta vero AG, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius semidiameter AF:[c] propterea quod est,vt AE,ad AD,ita tam AB, ad AC,quam AF,ad AG.

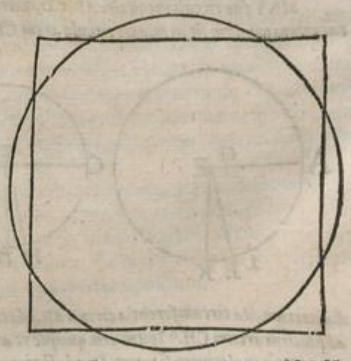


c 2. vel 4. sexti.

DEINDE ducta recta HI,cuiuscunq; longitudinis, excitetur ad eam perpendicularis quantacunq; KL, paratumque erit alterum instrumentum quadrandis circulis accommodatum.



PER duo hæc instrumenta nullo negotio quemcunque circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrãdus circulus,cuius semidiametro in priori instrumẽto æqualis sit recta AB, & per B, ipsi DE, parallela agatur BC. In posteriori vero instrumento sumantur duæ KM, MH, ipsi AC, æquales, & recta KI,semidiametro AB,æqualis. Diuisa autem tota recta HI, bifariam in N, describatur ex N, ad interuallum NH, vel NI, semicirculus secans perpendicularem KL,in L.Dico quadratum ex KL,circulo dato,cuius semidiameter AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori, æquale esse. Quoniam enim KL, media proportionalis est inter KH, KI, ex scholio propos.13.huius lib. [d] erit quadratum ex KL, rectangulo sub KH, KI, æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, vt ad initium huius propos. diximus, quod KH, sit æqualis semicircumferentiæ,& KI,semidiametro;erit quoq; idem quadratum ex KL,dato circulo,cuius semidiameter AB,vel KI,æquale.Si igitur quadratum rectæ KL, describatur, & ex eius centro ad interuallum AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in appositæ figura apparet.



d 17. septimi.

Cæterum diuisio rectæ HI, in posteriori instrumento in duas partes æquales facile sic fiet.Diuisa semidiametro KI, bifariã in O, (hæc enim quia minor est,quam HI,facile bifariam secabitur) accipiatur recta KO,æqualis

MN. Nam N, punctum erit medium rectæ HI. Cum enim æquales sint MN, OI; addita communi NO, erit NI, ipsi MO, æquali: Est autem MO, ipsi HN, æqualis (quia enim æquales sunt HM, MK; additis æqualibus MN, KO, totæ æquales fient HN, MO Igitur & NI, ipsi HN, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari KL, abscindatur æqualis KQ. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter KI, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus KL. Deinde ducta recta LI, agatur ei parallela QR. Dico circulum, cuius semidiameter KR, æqualem esse quadrato, cuius latus KQ, vel P. Inuenta nam, per propos. antecedentem rectæ KH, quæ sem: circumferentiæ circuli, cuius semidiameter KI, sit æqualis, ductaq; recta LH, agatur ei parallela QS. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt HK, ad KL, ita SK, ad KQ: & vt KL, ad KI, ita KQ, ad KR: erit ex æquo, vt HK, ad KI, ita SK, ad KR. Cum ergo HK, æqualis sit semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter KI, erit quoque ex coroll. 2. propos. 4. SK, æqualis semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter KR. Quia vero KQ, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter SK, KR, quod angulus RQS, rectus sit [a] quippe cum eius partes RQK, SQK, partibus ILK, HLK, recti anguli HLI, æquales sint: (Nam [b] angulus HLI, rectus est, cum sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua KL, media proportionalis inter HK, KI, reperitur) [c] erit quadratum ex KQ, æquale rectangulo sub SK, KR, hoc est, circulo, cuius semidiameter KR, hoc est, circulus semidiametri KR, æqualis est quadrato lateris KQ, vel P. Quod est propositum.

a 29. primi. b 31. tertij. c 17. sexti.

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contra cuicunq; circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ *d* describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

d 24. secun.

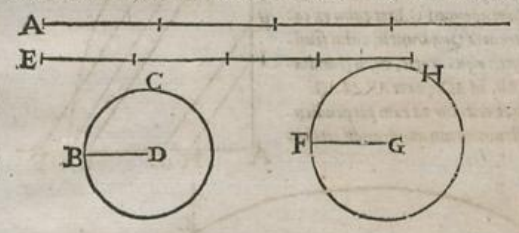
e 25. sexti.

RVRSVS si per propos. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato *e* constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.

VII.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto rectæ linea reperiatur circumferentia dati circuli æqualis, docuimus propos. 5. nunc autem, vt vicissim rectæ datæ lineæ circumferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis inuenienda est. Descripto quouis circulo BC, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E, quod facile ita fiet. In priori instrumento propos. 5. sumatur AH, æqualis semidiametro BD, descripti circuli, & per H, agatur ipsi DE, parallela HI. Nam AI, quadruplicata dabit rectam E, circumferentiæ circuli BC, æqualem, vt propos. 5. diximus. Deinde tribus rectis E, A, BD, inueniatur quarta proportionalis FG, atq; ex G, ad interuallum GF, circulus describatur FH. Dico eius circumferentiam datæ rectæ A, æqualem esse. Cum enim sit, vt E, ad A, ita BD, ad FG; hoc est, [a] ita tota diameter circuli BC, ad totam diametrum circuli FH: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH, vt Pappus demonstrauit: [b] erit quoq; vt E, ad A, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH. Cum ergo E, facta sit æqualis circumferentiæ BC; [c] erit & recta A, circumferentiæ FH, æqualis, hoc est, circumferentia circuli FH, inuenta est datæ rectæ A, æqualis. Quod est propositum.



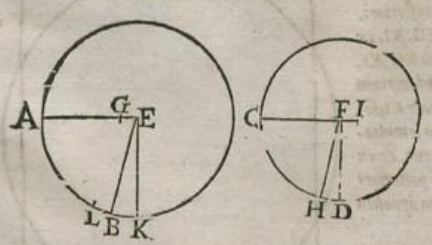
a 15. quint. b 11. quint. c 14. quint.

ALITER, & facilius. Quartæ parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis AK, in priori instrumento propos. 5. & per K, agatur KL, ipsi DE, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius semidiameter AL, æqualis erit datæ rectæ A; propterea quod eius circumferentiæ quadrans æqualis est rectæ AK, quartæ parti datæ rectæ A, vt propos. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.

SINT duo circuli inæquales AB, CD, quorum centra E, F, & semidiametri AE, CF, sitque AB, maior & CD, minor. Datus autem primum sit in minori circulo arcus CD, cui æqualis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus AB, circulo CD, maior est, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Abscindatur ergo AG, ipsi CF, æqualis, secetur q; arcus CD, ita in H, ex propos. 2. vt eadem sit proportio arcus CH, ad arcum HD, quæ rectæ AG, ad rectam GE, arcuiq; CH, similis auferatur arcus AB, quod facile fiet, si ducta recta FH, angulo CFH, æqualis fiat angulus AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, æqualem esse. Quoniam enim est, vt AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et conuertendo, vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoq; AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, æqualem, vt arcus CD, ad arcum CH. Est autem, vt AE, semidiameter ad semidiametrum CF, [a] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, vt Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH. [b] Igitur erit quoque vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcum CH; ac proinde arcus CD, AB, [c] æquales inter se erunt. Quod est propositum.



a 15. quint. b 11. quint. c 9. quinti.

DATVS

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, non maior, quam circumferentia circuli CD, minoris, ex quo arcui AB, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, vt CI, ipsi AE, sit æqualis; secetur per propos. 2. arcus AB, in L, vt eadem sit proportio AB, ad BL, quæ CF, ad FI; arcuique BL, sumatur æqualis arcus BK, ac toti arcui AK, similis auferatur CD, quod facile fiet, si ducta recta EK, angulo AEK, angulus CFD, æqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, æqualem esse. Quoniam enim est, vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, æqualem; erit componendo quoque, vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcū BK: Et per conuersionem rationis, vt CI, ad CF, hoc est, vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB: Est autem, vt semidiameter AE, ad semidiametrum CF, [d] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD. [e] Igitur erit etiam, vt arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, propterea q, arcus AB, CD, [f] æquales erunt inter sese. Quod est propositum.

d 15. quin. c 11. quinti f 9. quinti.

BREVIVS. Arcui CD, reperiatur æqualis recta, per coroll. 1. prop. 4. Quadratricis; & huic rectæ æqualis arcus AB, vt in sequenti coroll. 1. dicetur. Eodem pacto arcui AB, reperiatur recta æqualis, vt huic rectæ æqualis arcus CD: factumque erit quod iubetur.

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonstrata sunt, manifestum est, cuiuis datæ rectæ abscindi posse ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non sit, quam recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum supra ostensum est in coroll. 1. propos. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri posse rectam æqualem, hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulo ante in coroll. 1. propos. 4. ostendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & si quidem hęc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectę lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quam data recta linea; secetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propos. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quā inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum sit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abscissum; sit autem recta inuenta quadranti æqualis, *g* erit quoque data linea recta arcui abscisso æqualis.

g 14. quin.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quam recta linea data; sumatur illius dupla, quæ ni mirum circumferentiæ semicirculi sit æqualis. Nam si hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia semicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quam data linea recta, secetur semicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt semicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quā dupla illa recta linea ad datam rectam. Quod quidem facile fiet, si datæ rectæ ex dupla illa linea recta abscindatur æqualis, & semicircumferentia secetur, per propos. 2. vt secta est recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abscissam, hoc est, ad datam rectam, ita tota semicircumferentia ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim sit, vt dupla illa recta ad rectam datam, ita semicircumferentia ad eum arcum; sit autem recta illa dupla æqualis semicircumferentiæ; *b* erit quoque data recta illi arcui æqualis.

h 14. quin.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quam data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli est æqualis, vt tota recta composita æqualis sit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam si hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quam recta linea data, secetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propos. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam, quod facile etiam fiet, si datæ rectæ ex tripla illa linea recta abscindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum secetur, per propos. 2. vt recta illa tripla secta est. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim est, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum; estque tripla illa recta circumferentiæ trium quadrantum æqualis; *i* erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abscisso.

i 14. quint.

DENIQVE si tripla illa linea recta fuerit minor, quam data recta linea, addatur ei rursus prior linea inuenta quadranti æqualis vt tota recta composita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

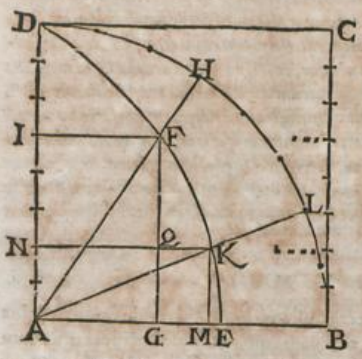
AT vero si illa linea quadrupla maior fuerit, quam data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quam circumferentia dati circuli, quod est contra hypothesin) secetur tota circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnum eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam, quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; sit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; *k* erit quoque data recta linea arcui abscisso æqualis.

k 14. quin.

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propos. 4. Quadratricis, vel ex propos. 5. eiusdem, recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis toti circumferentiæ, *l* erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est propositum.

l 14. quint.

COROLLARIVM. II.



EX iis quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quam angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quam angulum HAB, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice DE, quæ rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eandem proportionem habeat, quam duæ rectæ inuentæ; atque adeo IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta NK, ipsi AE, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB in L. Dico tam arcus HL, LB, quam angulos HAL, LAB, inter se esse incommensurabiles. Quoniam enim per propos. 1. est vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: sunt autem IN, NA, incommensurabiles; erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Dum ergo sit quoque, *d* vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB, erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.

d 33. *sexti.*

FINIS ELEMENTI SEXTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quam vnumquodq; eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus differere, quod ad propietates corporum plurimorum, eorumq; maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atq; vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, vt absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neq; suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vsum, neque exprimi queant, neque intelligi. Nam non raro pleraque laterum sunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι à Latinis Irrationales appellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certe inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atque intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioque constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum eæ rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exæquatur.

INCIPIENS igitur more suo à principiis, definit initio vnitatem, docetque eam esse, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum esse dicitur. Nam secundum vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere solemus. Caterum vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonaria. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunq; sint, inter se commensurabiles esse, cum eos vna eademque mensura, nimirum vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurimæ earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissime lib. 10. ostendetur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hæc definitio illi, quâ Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8, cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IV.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; aptæ tamen congruenterq; partes poterit appellari, quod quinq; contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hac definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quæcunq; nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrumq; eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ, Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. decimus sex decimas eiusdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto, & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neq; enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorẽ non metitur, partes appellauit; sed tantum eam, quæ maiorem metitur partẽ. Respondemus, huius rei causam esse, quod minus numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cum eæ persæpe sint incommensurabiles, vt aperte liber decimus demonstrabit, atq; adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit. si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoq; ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si vero maiorem minor non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam. siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

OMNES hi numeri 3. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atq; adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, sit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CÆTERVM si recte duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit fieri posse, vt vnus idemq; numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtriq; definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par

numerus

numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neq; pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neq; puriter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodāmodo naturā vtriusq;, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri pariis inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui à quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Verum tamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeste omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denig;, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonstratque omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denig;, qui nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, alios; similes, vere esse secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quam impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar, dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem vnitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neq; pariter impar, neque impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola vnitas, communis mensura metitur.

SICVT numerus ille, quem sola vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem vero isti 2. 4. tamen nullus istorum vtrumque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter se dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc num. 5. Denig; vnitas, & quiuis numerus, dici possunt, licet improprie; numeri inter se primi: quia sola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quem numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterq; horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexties fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoq; vicißim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusque eundem numerum 48. Eadem denig; ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaq; numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione num. 7. in num. 9. vel è contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet, ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaq; multiplicatio siue ductus vnius numeri in alium ita quoq; describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hæc alia docens quid sit numerum diuidere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in iis, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoq; vicißim num. 8. diuidere dicetur eundem num. 48. si acceptus fuerit num. 6 qui sex suis vnitatibus indicat diuidentem num. 8. in diuiso 48. contineri sexies.

HINC fit, numerum ex diuisione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quam diuisus numerus ad diuidentem. Itaque Diuisio vnius numeri per alium ita quoq; poterit describi.

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

ITA vides ex diuisione num. 48. per 6. procreari num. 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48. per 8. produci num. 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoq; efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A, per B, procreetur numerus C, Dico numerum A, gigni, ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim

A, 48. B, 8. C, 6. D, 1.

ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad vnitatem D; Ex definitione autem diuisionis, ita quoq; se habet A, ad B, vt C, ad vnitatem D; perspicuum est, numerum ex C, in B, genitum esse numerum A; cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.

HÆC omnia conueniunt quoq; numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integris, siue non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, quæ est 10. Ita quoque vicißim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. se mutuo multiplicare dicentur quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quem dam $\frac{1}{6}$. tertiam partem vnitatis tantū continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet vnitatis. Vtroq; autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{6}$. & semißis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem

dentem $\frac{7}{3}$. Sic quoq; $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$. quando sumptus fuerit num. $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem num. $\frac{1}{2}$. non totum continer i in diuiso $\frac{1}{6}$. sed tertiam eius partem. Nam cum num. $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquido constat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisioneq; fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt num. 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, laterag; eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur eiusque latera 8. & 8.



CÆTERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras. Euclides solum definit planum quadraugularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quod omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ altera parte longiori, similes sint, & æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatemue spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum spectat: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

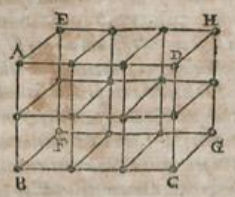
POTEST autem vnus, idemq; numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoq; numerus planus 100. latera habet 5. & 20. 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum: Quod etiam de numero solido, qui iamiam definitur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denig; ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atq; profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt libr. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primus multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas; Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebunt basis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denig; numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit BCGF, octo vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor vnitates, & BF, latitudo duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24 vnitates, eiusq; altitudo BA, vnitates tres. Similiter si basis sit ABFE, sex vnitatum, cuius longitudo AB, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietq; totus solidus numerus rursum 24. altitudinem BC, habens quatuor vnitatum. Si denig; basis sit ABCD, 12. vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis EFGH, constabitque totus numerus solidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de aliis numeris solidis iudicandum erit.



DENI-

DENIQVE & vnitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non proprie, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam; quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XXVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

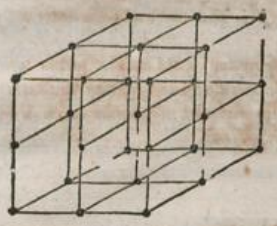


PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogr. rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atq; adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinq; vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis plerisq; appellatur.

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoq; illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntq; tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipse num. 27. est æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisq; autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex, est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiusmodi sunt omnes numeri inæquales inter se collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quã puto esse corruptã, cum manca sit, atq; imperfecta, cõprehẽdit solũ proportionales numeros in proportione multiplici, submultipliciue, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici sunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; in submultiplici vero, cum primus secundi. & tertius quarti, eadem pars est; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere possumus quinam numeri proportionales sint in proportione superparticulari, superpartiente multiplici superparticulari, & multiplici superpartiente. In his enim omnibus, primus numerus secundi, & tertius quarti, neque æque multiplex est, neque eadem pars, neq; eadem partes; sed primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel semel, vel aliquoties, & eandem insuper illius partem, easdemue partes, vt perspicuum est ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiose explicauimus. Itaq; hi num. 12. 4. 9. 3. proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex sit, nimirum triplus. Itẽ hi 4. 12. 3. 9. est enim primus secundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rursus proportionales sunt hi nu. 6. 8. 9. 12. quod primus secundi, & tertius quarti eadem partes sint, videlicet tres partes quartæ. Denig; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. sunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus secundum, & tertius quartum, semel, & insuper eandem partem, videlicet sextam; In secundo autem semel, & easdem partes nimirum tres quartã; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus secundum, & tertius quartum, bis, & præterea easdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti,*

quarti, non sit æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus secundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propositi proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus conferantur, quod primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes colligetur numeros esse proportionales. Quod si minoris ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et è contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam si de proportione æqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto æqualem debere esse, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad æquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales esse. Cum enim æquales numeri sint eiusdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundem æqualiter contineant, eandemque insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium sit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, vel partes: perspicuum est, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eandem habentes eandem proportionem, sunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemque insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandē proportionem, ad aliquos, est illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, vel partes, secundum hanc eandem definitionem, manifestum est numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerum ad illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{1}{4}.\frac{1}{9}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$. quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{9}{36}.\frac{4}{36}$. & posteriores quoque ad eandem denominationem, vt ad $\frac{6}{12}.\frac{4}{12}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica; & ad finem libr. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{1}{8}.4\frac{0}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{10}{8}.\frac{32}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$. atque ita de cæteris.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quælibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, pro vt latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum Latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

HÆC porro similitudo planorum, & solidorum reperitur quoque in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tam duo priores, quam duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunque, quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$. 6. & alia duo $1\frac{1}{2}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero num. 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius lib.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi nu. 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numer 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248.

124. 248. quas omnes in vnum summam collectas componere num. 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim praeter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotae alicuius numeri simul acceptae maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit aequalis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici potest, siue eum metiatur, siue non mediatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungendae mihi videntur ex Campano aliisq; scriptoribus nonnullae aliae, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, praesertim eae, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMRVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademq; ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet. 12. Quia vero, vt propos. 16. huius lib. ostendemus; idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet num. 3.

HAEC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerum $13\frac{1}{3}$. per $5\frac{1}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{1}{4}$. gignit $13\frac{1}{4}$.

XXIV.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesue; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum num. 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur haec comparatio habitudine, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem num. 20. cum num. 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aeque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, aequaliter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiose explicata est defin. 10. libr. 5. Vnde cum omnia, quae ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

QVOD ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illae in quinto libro traditae de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex aequalitate; & de proportione ordinata, ac perturbata, Omnes enim hi modi argumentationum, quae circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTV-

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque multiplex est, vel æque multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM vnitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus seipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

A . . . . B . . .
C . . . . . .

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

Vt quia numerus 6. metitur num. 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem num. 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente num. 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam num. 6. metitur 18. per 3. fiet nu. 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens num. 3. num. 18. metietur per 6.

IX.

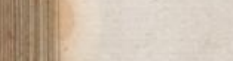
SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.



METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum à B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

X.

NVMERVS quotcunq; numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.



METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipsis compositum BD. Cum enim A, metiatur ipsos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo BC, in partes BE, EG, ipsi A, æquales, & ipso CD, in partes CF, FG, GD, eidem A, æquales; erit numerus BD, compositus ex omnibus partibus BE, EC, CF, FG, GD, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum BD, metitur. Quod est propositum.

XI.

NVMERVS quemcunque numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.



METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum CD. Dico eundem A, metiri quoq; numerum CD, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum CD, erit CD, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo CD, in partes CE, ED, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros CE, ED, quandoquidem numerum B, tam numero CE, quam numero ED, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum CD, ex CE, ED, compositum. Quod est propositum.

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.



METIATVR numerus A, totum BC, & ablatum BD. Dico eundem A, metiri quoque reliquum DC. Cum enim A, metiatur & BC, & BD; erit tam BC, quam BD, ipsius A, multiplex, aut certe ED, ipsi A, æqualis erit. Diuiso ergo tam BC, quam BD, in partes ipsi A, æquales: erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipsi A, æqualis, vel plures, atq; adeo DC, æqualis erit, ipsi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipsum DC. Quod est propositum.

1.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas; qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

SINT duo numeri propositi inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties potest, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, esse inter se primos, hoc est, solum vnitatem communi mensura eos metiri. Si enim non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit H. communi mensura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars sit ipsius AE, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipsum AE: At H, metitur quoq; totum AB. [b] Igitur & reliquum EB, metietur. Metitur autem EB, ipsum CF. [c] Igitur & H, ipsum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur, [d] metietur quoq; reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipsum EG; [e] metietur etiam H, ipsum FG: Metiebatur autem & H, totum EB. [f] Reliquam igitur vnitatem quoq; GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metietur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrē, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandū.



a 11. pron. b 12. pron. c 11. pro. d 12. pron. e 11. pron. f 12. pron.

SCHOLIVM

CONVERTEMVS cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas.

SINT

SINT duo numeri inter se primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties potest detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB, reliquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipsum EG, [g] metietur quoq; GB, ipsum EG. Cum ergo GB, & seipsum metiatur, [h] metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compositum: Metitur autem EB, ipsum CF. [i] igitur GB, eundem CF, metietur: Atq; adeo cum & ipsum FD, positus sit metiri: metietur [k] quoque ipsum CD, ex CF, FD, compositum. At vero CD, metitur ipsum AE. [l] Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipsum EB, metiatur, vt ostensum est; [m] metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.

A ..... E .. G—B
C ..... F .. D

g 11. pron. h 10. pron. i 12. pron. k 10. pro. l 12. pron. m 10. pron

EODEM modo & hoc verum est.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsq; non ad perueniet, sed non numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem vsq; perueniret, essent propositi numeri inter se primi, [n] vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

n 1. septi.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunq; numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, [o] vt Euclides demonstrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumq; numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superioris huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit, eundem reliquum GB, vtrumq; AB, & CD, metiri.

o 1. septi.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ii.

DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties potest, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad vnitatē deueniretur, [a] numeri AB, CD, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentum ergo iam sit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico FD, esse maximam mensuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita ostendemus. Quia FD, metitur ipsum EB, & EB, ipsum CF; [b] metietur quoq; FD, ipsum CF, atque adeo cum & seipsum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compositū. At CD, ipsum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoq; ipsum EB; [e] metietur etiam totū AB, ex vtroq; AE, EB, compositum. Metitur igitur FD, vtrumq; numerum AB, CD.

A ..... E ..... B
C ..... F .. D
G——

a 1. septi. b 11. pro. c 10. pro. d 11. pron. e 10. pron.

QVOD autem FD, sit maxima mensura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumq; AB, CD; Et CD, metitur ipsum AE, [f] metietur quoq; G, ipsum AE. [g] Igitur & residuum EB: At vero EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & residuum FD; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima est mensura numerorum AB, CD.

f 11. pron. g 12. pron. h 11. pron. i 12. pron.

QDOD si minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cum & se ipsum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

A ..... B
C ..... D

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros, metiri quoq; maximam eorundem communem mensuram.

HOC elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoq; numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eademq; ratio est de ceteris.

SCHOLIVM.

EX iis quæ dicta sunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C, Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter se primi: Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.

A .....
B .....
C .....

a 2. septi.

A .....
B .....
C .....
D ...

SI vero A, & B, fuerint inter se compositi, a *sit eorum maxima mensura communis inuenta D; quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeant numerum D, communem mensuram.*

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vel inter se primi, vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita vt habeant numerum communem mensuram; metietur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoq; numerum C. non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. b *Inuenta enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B,* c *metietur quoq; E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.*

A .....
B .....
C .....
D .... E ..

b 2. septi.
c 11. pron.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinq; in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

iii.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C, Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se cõpositi, metietur quæcunq; illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. a Si t eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipsos A, & B, b metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A .....
B ..... D ....
C ..... E .. F——

a 2. septi.
b 11. pro.

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoq; E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atq; adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoq; numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademq; in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinq; quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua vero omnia paragenda, vt de tribus numeris dictum est.

iiii.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

A .....
B .....

SINT duo numeri A, minor & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primum A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

SED

SED iam A, non metiatur ipsum B, [a] inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. [b] Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque AD, pars eiusdem B: similiter & DE, & EF; ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in AF, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

A..D..E..F
B.....
C..

[a] 2. septi. [b] 3. defin.

THEOR. 3. PROPOS. 5. V.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusq; simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri BC, quæ est numerus D, numeri EF. Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusque numeri BC, & EF, simul eandem esse partem, quæ est vel A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC;; EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, propterea quod eadem pars est A, ipsius BC. quæ D, ipsius EF. Quia igitur A, & BG, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & EH; erunt A, & D, simul æquales ipsis BG, & EH, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis GC, & HF, simul æquales. Et sic deinceps, si plures partes fuerint in BC, EF; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum BC, & EF, æquale erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, simul vtriusque BC, & EF, simul, quæ est A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . . | D . . . .
B . . . . . G . . . . . C | E . . . . H . . . . F

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est in numeris fractis, eademq; prorsus demonstratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, & numerus D, numeri EF, eadem pars est; ac proinde vterq; simul A, D, vtriusq; BC, EF, simul eadem pars ostendetur, quæ A, ipsius BC: si nimirum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HF, ipsis A, D, æquales, &c.

A, $\frac{2}{3}$ D, $\frac{4}{7}$
B, $\frac{1}{3}$ G, $\frac{1}{3}$ C E, $\frac{2}{7}$ H, $\frac{2}{7}$ F

QVOD si quando contingat, numerum fractum diuidi non posse in partes æquales propositas, propterea quod numerator in eas partes secari nequeat, multiplicandus erit tã numerator, quã denominator per numerũ partiũ. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propositas partes diuidi poterit. Vt si fractio $\frac{5}{9}$. secanda sit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. secunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adsunt integra, reuocanda prius erunt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt si numerus $4\frac{2}{3}$. secandus sit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{14}{3}$. deinde vtrumq; eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{42}{9}$. cuius tres partes æquales sunt $\frac{14}{9}$. $\frac{14}{9}$. $\frac{14}{9}$. Atq; hæc in sequentibus quoq; propositionibus obseruanda sunt, quando fractionibus accommodantur: Et semper nomine fractionum intelligendi quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alij integri.

EODEM modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars: Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perspicue in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A. | D. | | A. | D...
B. G. C | E. H. F | | B. G. C | E... H... F

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunq; numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars, Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum D E, FG, HI, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorum DE, FG, HI, simul eandem esse partem, quæ est A, ipsius DE. Diuisis enim numeris DE, FG, HI, in partes

A . . . . | B . . . | C . .
D . . . . K . . . . E | F . . . L . . . G | H . . M . . I

ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tam numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM; erunt quoq; A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

IDEM sequitur, si loco vnius numerorum A, B, C, sumatur vnitas, vel loco plurimum, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A.	B..	C...	A.	B.	C.
D.K.E.	F..L..G	H...M...I	D.K.E	F.L.G	H.M.I

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunq; fracti numeri, quotcunq; fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	B, $\frac{1}{2}$	C, $\frac{1}{4}$
D 1 K 1 E	F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G	H $\frac{1}{4}$ M $\frac{1}{4}$ I

THEOREMATI quoq; primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex, A, ipsius D.

A ..... B ..... C ....
D .... E ... F ..

SI numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quia multiplex est vnius vnum, iam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.

QVOD si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium vel omnium, plures vnitates, theoremate eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris appareat.

A .. B .... C	A .. B .. C ..
D . E .. F ...	D . E . F .

vi.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterq; vtriusq; simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE, propterea quod eædem partes est numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars est AG, numeri C, eadem est DH, numeri F; [a] erit vterque AG, DH, simul eadem pars vtriusq; C, F, simul, quæ AG, ipsius C, vel DH, ipsius F. Eadem ratione erit vterq; GB, HE, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ GB, ipsius C, vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt totaggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est AG, ipsius C; quot partes eædem est numerus AB, ipsius C, vel DE, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, simul, vtriusq; numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

a 5. sept.

A ... G ... B
C.....

D .... H .... E
F.....

CHOLIVM.

EADEM hæc propositio locum habet in numeris fractis, vna cum demonstratione: vt hoc exemplum demonstrat.

A, $\frac{1}{4}$ G, $\frac{2}{5}$ B
C, $\frac{3}{5}$

D, $\frac{2}{7}$ H $\frac{5}{7}$ E
F, $\frac{5}{7}$

SED & hanc propositionem ad quotcunq; numeros siue integros, siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunq; numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; et hic perspicuum est.

A .. K .. B	C ... L ... D	E .... M .... F
G	G	I .....

vii.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC: [a] erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD. erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A.... E.. B
G.... C..... F....

[a] 15. sept.

SCHOLIVM.

LOCVM etiam habet hæc propositio, vna cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

A, $\frac{3}{9}$. E, $\frac{2}{5}$. B,
G, $\frac{4}{5}$. C, $\frac{6}{9}$. E, $\frac{4}{5}$. D,

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quam in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB, vel deniq; in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A. E... B G..... C.. F..... D	A... E. B G.. C..... F.. D	A. F. B. G.. C.. F.. D

CÆTERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE; ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cum enim AB, AE, ipsius CF, erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. [b] Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB. Ac proinde è Contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex.

A..... E.... B
C... F.. D

[b] 7. sept.

QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF, vel reliqua sit vnitas FD, vel deniq; in integris & ablata sit vnitas CF, & alia reliqua FD, idem demonstrabitur, vt hæc exempla commonstrant.

A... E..... C. F.. D	A.... E.. B C.. F. D	A.... E.... B C. F. D

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati; Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB, erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF, erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis eademque pars tam GI, quam IH, ipsius CD, quæ tam AK, quam KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE, erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quam MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eædem partes ipsius CD, quæ vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia vero si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt; Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD, Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A..... K..... E.... B
C..... F..... D
G..... L.. I..... M.. H

[a] 7. sept.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis eadem hæc propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

A, $\frac{2}{10}$. K, $\frac{2}{10}$. E, $\frac{6}{10}$. B
C, $\frac{6}{10}$. F, $\frac{6}{10}$. D
F, $\frac{2}{10}$. L, $\frac{3}{10}$. I, $\frac{5}{15}$. M, $\frac{3}{10}$. H

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabat hic reliquum numerum EB, alicuius numeri easdē esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF, ibi vero per-

ſpicuum erat reliquum EB, alicuius numeri eandem eſſe partem, quæ eſt AE, ipſius CF. Licet enim ipſius EB, duplum aſſumere, triplum, quadruplum, &c, donec EB. ſit ita ſubmultiplex numeri aſſumpti GC, vt AE, eſt ſubmultiplex ipſius CF.

ix.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, ſintque A, BC, minores ipſis D, EF, ſinguli ſingulis. De his enim propoſitio intelligenda eſt. Dico & viciſſim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D, qualis eſt, aut quales BC, ipſius EF. Diuiſis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter ſe ſunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipſius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipſius EH, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.... B.... G.... C D..... E..... H..... F

a 5. vel 6. *ſeptimi.* ipſius HF, *a* ac propterea & vterque BG, GC, ſimul, nimirum BC, ſecundus vtriuſq; EH, HF, ſimul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipſius EH, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{12}$. B, $\frac{3}{12}$. G, $\frac{8}{12}$. C D, $\frac{14}{24}$. E, $\frac{14}{24}$. H, $\frac{14}{24}$. F

In numeris fractis propoſitio hæc, vna cum eius demonſtratione locum etiam habet, vt hic perſpicuum eſt.

A. B. G. C D..... E..... H..... F

QVOD ſi loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars ſit, quæ alter numerus alterius: Erit viciſſim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ ſecundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur. ſi loco partium aſſumamus partem in demonſtratione, vt ex hoc exemplo apparet.

x.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, ſintque AB, C, ipſis DE, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum AB, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri DE, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipſius C, quæ tam DH, quam HE, ipſius F. *a* Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes AG, ipſius DH, & GB, ipſius HE, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipſius DH, quæ GB, ipſius HE. *b* Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriuſq; DH, HE, ſimul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipſius DH, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.. G.. B C..... D..... H..... E F.....

a 9. *ſeptim.* b 5. vel 6. *ſeptimi.*

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{12}$. G, $\frac{2}{12}$. B C, $\frac{6}{12}$. D, $\frac{1}{10}$. H, $\frac{1}{10}$. E F, $\frac{6}{10}$.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

xii.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum; Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum, CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB, ad totum CD. Cum enim ſit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; *a* erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, æque multiplex. Quo poſito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipſorum CD, CF. *b* Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipſius CD, & EB, ipſius FD, æque multiplex erit. *c* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A..... E..... B C..... F... D

a 20. *defin.* b 7. *ſeptimi.* c 20. *defi.*

SIT

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito *d* erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; *e* Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . E . . B
C . . . . . F . . . . D
A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

d 7. vel 8. *septimi.*
e 20. *defin.*

CONTINEAT tertio AB ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter eandemq; insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. *f* Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac pro-

f 8. *sept.*

A . . . . . E . . . B
C . . . F . . D
A . . . . . E . . . . . B
C . . . . . F . . . . . D

pterea è contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes vt mox ostendemus. *g* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

g 8. *sept.*

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quo-

A . . . . . E . . . B | C . . . . . F . . . D

que esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaquè si fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

A, 6. E, 1. B
C, 4. F, 2. C

A, 14. E, 28. B
C, 7. F, 16. D

LEMMA.

QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius vel partes, è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eædem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eædem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem, GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partiũ numeri CF, æqualis, quod GB, ipsius CD, sit eadẽ pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG, & AP, P Q, QH, eisdẽ GB, HE, æquales; erit quoq; multitudo partiũ numeri AG, multitudini partiũ numeri AH, æqualis. Cũ n. AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorũ æque multiplices, erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partiũ numeri CD, toties cũtinebitur in AG, quoties numerus partiũ numeri CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partiũ numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.

A . . N . . O . . G . . B
C . . I . . K . . D
A . . . P . . . Q . . . H . . . E
C . . . L . . . M . . . F

CONTINEAT deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterue, &c. eadẽque insuper partes illius, numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus, GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quod quælibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vna quæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, P Q, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices: erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, propterea que multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo

A . . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . O . . . F

titudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis. Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

IAM vero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eædem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, superueritq; eadē pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, superfunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris superfint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem vel partes. Quod secundo est propositum.

xiij. ## THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B, C, D; E, F; hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, *a* eadem pars est, aut partes, A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F, *b* erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul, tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; *c* erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. *d* Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

A.... C.. E...
B..... D.... F.....

a 20. defin. b 5. vel 6. septimi. c 5. septim. d 20. defin.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit è contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo vt prius, *e* erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices *f* Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul quæ est A, ad B. Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, sint numerorum ad vnitatem. Est enim eadem semper demonstratio, vt hic apparet, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A.... C..... E.....
B. D.. F....

A... C... E.....
D. D. F..

A... C... E...
B. D. F.

e 5. septm. f 20. defin.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at nō multiplices. *g* Quia igitur, propter eandem proportionem A, ipsum B, & C, ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eādemque insuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis prop. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius E, eædem partes. Igitur vt prius, *h* erunt omnes B, D, F, simul omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ ipsius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, simul omnes numeros B, D, F, simul & A, ipsum B, æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes *i* Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

A..... C.... E.....
B..... D... F.....

g 20. defi. h 6. septim. i 20. defi.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, simul æquales ipsis B, D, simul: quibus si rursum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobique sit proportio æqualitatis Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

A.... C... E.....
B.... D... E.....

SCHOLIVM.

IN numeris quoq; fractis propositio hæc vera esse eodem modo conuincetur, vt patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

xiv. ## THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt.

SIT enim A, ad, B vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quā B, & D, & A, quoque minor, quā C. Quo posito, erit propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadem pars, vel partes. *a* Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars erit, vel partes: *b* Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.... C.....
B.... D.....

a 9. vel 10. septimi. b 20. defin.

SINT

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, vel partes.[c] Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, vel partes: Atque adeo è contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes.[d] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

B . . . . . D . . . .
A . . . . . C . . .

c 9. vel 10. septimi.

d 20. defin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C, quo posito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo è contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes.[e] Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, vel partes.[f] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . . . . .
B . . . D . . . . . .

e 9. vel 10. septimi.

f 20. defin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo, è contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes.[g] Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes.[h] Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . . C . . . .
B . . . . . D . . .

g 9. vel 10. septimi.

h 20. defin.

SINT quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes sunt,[i] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . C . . . .
B . . . D . . . .

i 20. defin.

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales: at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & E, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter cõtinent, eandemq; insuper partem, vel partes;[k] erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . .
B . . . . D . . .

k 20. defin.

SINT septimo ac xltimo A, & C, inter se æquales, siue ii maiores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales.[l] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & vicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . C . . . . .
B . . . D . . .

l 20. defin.

SCHOLIVM.

QVOD si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI vero fuimus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosq; demonstrationibus certissimis confirmare, vna cum lemmate propos. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicue ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis superuacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. xv.

SI sint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoq; esse vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniam enim est vt, A, ad B, ita D, ad E;[a] erit vicissim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob causam, cum sit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit vicissim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim vtraq; proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni B, ad E, vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt, vt mox ostendetur.)[b] Ac proinde vicissim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A . . . . . D . . . . . .
B . . . . . E . . . . .
C . . . . F . . .
G . . . . . H . . . . . .

a 13. septi.

b 13. septi.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaq; si sint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est, hanc propositionem eodem modo demonstrari posse in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.

A . . D . . .
B . . E . . . . . .
C . . . F . . . . . .
G . G . . .

IDEM verum est, si loco vnius numeri vnitas assumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perspicuum est.

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem sunt inter se quoque sint eædem, quales sunt in demonstratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem ostensæ sunt proportioni B, ad E, siue numeri sint integri siue fracti, ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem,

A . . . . . B . . . . . C . . . .
D . . . . . E . . . . . F . . .

erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quam C, ipsius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes, vel certe B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quam C, ipsum F, continebit æqualiter, eandemque insuper par-
c 20. defin. *tem vel partes.* c *Quari numeri A, D, C, F, proportionales sunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.*

HOC idem demonstratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

xvi. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiso enim numero BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF, in partes EI, IK, KF, ipsi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturque æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipsum EI, atque vnitas GH, ipsum IK, & vnitas HC, ipsum KF; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. ostendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, simul numerorum EI, IK, KF, simul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc est, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compositus numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compositum æque metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A. D . .
B. G. H. C. E . . I . . K . . F

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonstrauit de numeris propos. 13. ostendit hoc loco separatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur, atque numerus D, numerum EF, erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit vicissim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, æque metietur.

HÆC propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æque vnitas tertium numerum,
a 13. septi. *qui fractus ponitur, & secundus integer quartum fractum;* a *sed solum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

xvij. ## PROBL. 14. BROPOS. 16.

SI duo numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate
a 15. def. E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; a erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeo
b 15. septi. vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. b Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rursus eodem
c 15. def. modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D: c erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atq; adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Æque igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt, Si duo igitur numeri mutuo se se multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

E.
A . . . B . . . .
D . . . . . C . . . . . .

SCHO-

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0328-2

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est, D, ad A, quod B multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat demonstrandum,

E.
A, 3/7. B, 4/7.
D, 3/7. C, 3/7.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, [a] etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipsum B.

E.
A . . . B . . . .
C . . . . . a 15. defin.

QVOD si numeri A, & E, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compositus toties quoties vnitas F, est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit, [b] Ac proinde erit, vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

F.
A . . .
B . . C . . . .
D ..... E .....

a 15. defin.
b 20. defin.
c 13. sept.

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, vt A, ad E, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xix.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse, vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [a] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [b] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . .
C . . .
D ..... E .....

a 16. sept.
b 17. sept.

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non, hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eosdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam [illegible] ex A, in BC, vel ex BC, in A, fiant EF, [a] erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E . . . . . F . . . . . G . . . . . .

a 17. vel 18 sept.

xix. ## THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A,B,C,D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E;

A...
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

a 17. sept. [a] erit, vt C, ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt
b 18. sept. G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus. SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo, in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo
c 17. sept. ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F,
d 18. sept. eandem rationem vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, siue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui sit ex A, antecedente in D, consequentem æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facilè ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D; quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, esse maiorem eo, qui sit ex B, in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, vt C, ad D; (sive

A..... E.....
B....
C.....
D.....

E, numerus integer sit, siue fractus; siue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propos. 19. lib. 9. ostendimus, si numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quam E, ad B: ac proinde A, maior erit, quam E. Quare maior numerus
a 19. sept. *fiet ex A, in D, quam ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, æqualis est ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quam numerus ex B, in C, procreatus. Quod est propositum.*

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem esse A, primi ad B, secundum, quam C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (sive E,
b 19. sept. *numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quam ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quam E. Quare maior erit proportio A, ad B, quam E, ad B: [b] At ista est E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.*

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc appositio exemplo apparet. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue ex B, in C, quam ex D, secundo in A, tertium, siue ex A, in D, vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B, in C; hoc est, maior ex B, in C, siue ex C, in B, quam ex A, in D, siue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, vt iam est demonstratum, hoc est, minor proportio erit A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.

xx. ## THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit vt B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita D, ad C, numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur. a 19. sept.

A .....
B ..... D .....
C ....

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in C. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat. b 16. sept.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD si maior fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Etsi maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium. Item si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium;

A	A ....
B ..... D	B ..... D .....
C	C .....

minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se; minor proportio erit primi ad secundum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis propos. liquet, si secundo numero sumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xxj.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem,

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione ead, ęquam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, æquè metiri ipsos EF, maiorem quidem AB, ipsum maiorem E, at minorem CD, ipsum minorem F: hoc est antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit vicissim, vt AB, ad E, ita CD, ad F, Atq; adeo cum AB, CD, minores sint, quam E, F; [b] erit A B, ipsius E, & CD, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F, erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG, ipsius E, & CH, ipsius F, eadem pars. [c] Erit ergo, vt AG, ad E, ita CH, ad F; [d] & vicissim, vt AG, ad CH, ita E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem habebunt proportionem, quam AB: CD. Quod est absurdum; cum AB, CD, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsum E, & CD, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

A ... G .. B
C .. H . D
E .....
F .....

a 13. sept.
b 20. defin.
c 20. def.
b 13. sept.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continue proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito, ostenderetur eodem modo, primum metiri secundum, & secundum, tertium, vt in hoc appositio exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamuis autem dari non possint tres numeri continue proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propositio 12. lib. 9. demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur concedere, tres numeros esse continue proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primum metiri secundum, ex hac propos. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9.

A .. G .. B
C ... H ... D
E .....
F .....

PARI ratione, & hoc verum est, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit proportio AB, ad CD, quæ CD, ad EF, siue non; ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis AB, CD, EF, minores, quorum primus

A ... K ... B C .. L. D E .... M .... F
G ... . H ..... I .....

ad secundum sit, vt AB, ad CD, & secundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirũ proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis AB, CD, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris nõ possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quide 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt AB, ad CD, & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF,

a 13. sept. *ipsum I, metiri æque. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita G, ad H, [a] erit vicissim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum sit*

b 13. sept. c 20. def. *vt CD, ad EF, ita H, ad I, [b] erit quoque vicissim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. [c] Quare AB, ipsius G, & CD, ipsius H, & EF, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eædem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim si fieri potest, AB, CD, EF, in AK, KB; CL,*

d 20. def. e 13. sept. *LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipsius G, & CL, ipsius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt AK, ad G, ad CL, ad H; [e] & vicissim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL, ad FN, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eædem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, æque metietur. Quod est propositum.*

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eosdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æque metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cum sint minimi in proportione A, ad B, æque mecientur ipsos D, E; eademque ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, æque metiatur, ac B, ipsum E, metientur æque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

D .... E..... F.....
A .. B..... C...

CÆTERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibusuis datis, dari possunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus alijs propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Eæ enim omnes de numeris tantum integris sunt intelligendæ. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cum hi non possint inter se esse primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Alia autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æque conueniunt & integris numeris, & fractis, quod satis est, semel hoc loco commonuisse.

xix.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri: & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidē A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico ex æqualitate quoq; esse vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim sit vt A, ad B, ita E,

a 19. sept. b 19. sept. c 19. sept. *ad F; [a] erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D, Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.*

A ..... H...
B... D....
C..... E.....
G..... F..

QVOD si fuerint plures vnmeri, quam tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse, vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres. & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM vero Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum à nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A,

a 13. sept. b 13. sept. *ita D, ad C. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, [a] erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C. [b] erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.*

A ..... C...
B .... D..

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

SIT

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico diuidendo esse, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, [b] ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE. [c] Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod est propositum.

A..... C... B
D.... F.. E

a 13. sept. b 11. sept. c 13. sept.

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad EF; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC: ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF; Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF: [a] erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF; [b] Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF: [c] Et vicissim AB, BC, simul, hoc est totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.

A.....B... C
D.... E.. F

a 13. sept. b 12. sept. c 13. sept.

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IV.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE; [b] Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF. [c] Vicissim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

A..... C... B
D.... F.. E

a 13. sept. b 11. sept. c 13. sept.

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum; Item vt BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, vt est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cum enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F: & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rursus sit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH, & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

A..... B.. G
C....
D..... E... H
F.....

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG ita F, ad DH: erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex æqualitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.

A..... G., B
C....
D..... H... E
F.....

ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

SIT vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cum enim sit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D: & vt A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH: vt vt CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex æqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod erat propositum.

A..... D.....
B.... C.. E..... F.... H

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc est, sit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cum enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum; erit quoque vt AC, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum.

A.... B..... C..... D | F.. G... H.... I
E..... | K.....

Rursus quia est, vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item, vt CD, quintus ad E, secundum, ita HI, sextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, nimirum ad AD, ita K, ad omnes illos simul, vtpote ad FI. Cum enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM vero his demonstratis, ostendentur nouem vltimæ propositiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstratæ fuere: si pro magnitudinibus, intelligantur numeri siue integri, siue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur iidem modi hoc lib. demonstrati: vt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illæ quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eædemque prorsus demonstrationes adhibeantur.

xxj.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri AB, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque idcirco ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; [b] metietur & vicissim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur: [c] metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeo cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

A..... B....
C—— D—
E——

a 21. sept.
b 15. sept.
c 15. sept.

THEOR.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxij.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, praeter vnitatem, communi mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D: At verò ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt vnitates in E, producit ipsum B: [a] sit, vt D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. [b] Quare eadem erit proportio A, & B, quæ D, ad E: Atque adeo, cum D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

A ..... B.....
C——
D—— E——

a 9. pron.
b 28. sept.

SCHOLIVM.

HANC propositionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunque numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, æque per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus: atque adeo secundum vnum eundem numerum, qui sit G: ita vt D, toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties vnitas est in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipsum A, æque metitur: [a] metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, æque atque vnitas ipsos E, F: Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: sed ipsi A, B, C, minimi sunt.

A ..... B ..... C .....
D—— E—— F——
G——

a 15. sept.

IAM verò sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipsum A, quoties vnitas est in D: & ipsum B, toties, quoties vnitas est in E: & ipsum C, toties quoties vnitas est in F. Quoniam igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties vnitas est in D, E, F: sit vt D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus. Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C: non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.

THEOR. 23. PROPOS. 25. xxiv.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B: & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C: metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipsum A: [a] metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A ..... B .....
C . . ; D——

a 11. pron.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxv.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundē primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi: sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties, quot vnitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot vnitates sunt in F; [a] sit vt F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D. [b] & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autem idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium: [c] erit, vt E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri; [d] erit E, ad A, primus; Atque adeo E, ad A, cum

A ..... B...
C .....
D.....
E—— F——

a 9. pron.
b 16. sept.
c 19. sept.
d 23. sept.

e 23. sept. f 21. sep. sint inter se primi, [d] in sua proportione minimi erunt. [e] Æque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipsum B, ad A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

xxvj.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.



a 26. sep.

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, [a] erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

xxvij.

THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.



a 26. sept. b 26. sept.

SIT vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit ad C; [a] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, Ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

xxviij.

THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cum enim A, B, sint inter se primi, [a] erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atq; eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter se erunt.

a 27. sept.

A...	B..
C.....	D....
E.....	F.....
G, 81.	H, 16.
I, 243.	K, 32.

b 27. sept. c 28. sept. d 26. sept. e 28. sept. f 26. sept. g 28. sept.

RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, [b] erit & C, factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterq; igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [c] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cum A, & C, primi sint ad B, [d] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque BF, primus est; [e] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, [f] erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: nec non & H, ad A. [g] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

xxix.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi AB, BC. Dico & vtrumque simul AC, primum esse & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC, & ablatum AB: [a] metietur quoque reliquum BC. Non igitur primi inter se sunt AB, BC, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.



a 12. pro.

SED iam vterque AB, BC, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB, BC, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC; [b] metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compositum; Ac proinde AC, AB, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur AB, BC, inter

b 10. pro.

BC, inter se primi. Eodemque argumento ostendemus AB, BC, inter se primos esse, si AC, ad BC, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim AC, ad AB, primus est, erunt AB, BC, inter se primi, per secundã partem huius propos. Igitur & AC, ad BC, primus erit: per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B. esse inter se primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos præter vnitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A..... B.....
C——

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus. is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnum ipsorum A, & B, si non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur vero ipsum C, toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia verò primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in sua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

A.... B.....
C.....
D... E.....

a 19. sept. b 31. sept. c 23. sept. d 21. sept.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compositus ad eum sit: hoc est, vel D, ad C, compositi sint inter se. Dico D, quoque ad vnum ipsorum AB, compositum esse: id est, vel D, & A; vel D, & B, esse quoque inter se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit vterque A, & B, ad D, primus. [a] Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur vel metiri ipsum G, vel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cum non sit primus ad vtrumque.

A... B....
C.....
D .....

a 26. sept.

PROBL. 31. PROPOS. 33. xxx.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si verò compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; [a] metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus fuerit, metietur cum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum, qui cum metiatur omnes præcedentes, [b] metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

A.....
B..... C...

a 11. pron. b 11. pron.

ALITER. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A, [c] metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus est ergo numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A.....
B... C—

c 11. pron.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxj.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si verò compositus; [a] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

a 33. sept. A .....

xxxiiij. ## PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A,B,C, habentes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A,ad B,quæ B,ad C,siue non, oporteatque totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi, aut compositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si verò non sunt inter se primi, [a] inuenta sit maxima eorum communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorum A, B, C. Quod enim easdem habeant proportiones, quas numeri A,B,C, sic ostendetur. Quoniam [b] D, ipsos A,B,C, metitur per E,F,G, [b] fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicãs faciat A,B,C. Quare per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt EFG, quas numeri, A,B,C.

D..
A..... B.... C.....
E... F.. G....
H— I— K—
L—.

a 3. sept.
b 9. pron.

QVOD verò E,F,G, sunt minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K, qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æquè, vt ad propos. 21. huius lib. ostendimus; [c] metiantur eos per numerum L. Quo posito, [c] fit, vt L, multiplicans numeros H,I,K, producat numeros A,B,C; [d] & vicissim L, ipsos A,B,C, metiatur per H,I,K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [e] erit vt E, primus ad H, secundum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

c 9. pron.
d 8. pron.
e 19. sept.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continuè proportionales. Vt si proponantur continuè proportionales A, 16. B, 24, C, 36. D, 54. E, 81. A,B,C,D,E, siue illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, siue non, reperiemus duos in eadẽ proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

I, 8.
F, 2. G, 3.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum E, F, G, per hanc propos. inuentorum esse vnitatem; quando

A... B.. .... C.....
D...
E. F.. G...

A.... B.. C.....
D..
E.. F. G...

scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A, B, C, æqualis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

xxxvj. ## PROBL. 4. PROPOS. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim cum metiantur, perspicuum est. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [a] metietur A, ipsum C, per B, & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, sic demonstrabimus. Si C, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturque A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, [b] tam ex A, in E, quam ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo, in F, tertium, [c] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita F, tertius, ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se, [d] & ob id, in sua proportione minimi) [e] æque metientur ipsos F, & E;

a 7. pron.
b 9. pron.
c 19. sept.
d 23. sep.
e 21. sept.

A .... B .....
C .....
D———————
E—— F——

& E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & F, facit C, & D; [f] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipsum E, vt ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipso C, atque adeo C, minimus est omnium, quos metiuntur. f 17. sept.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter se. [g] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt sint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. g 35. sept.

Quo posito, [h] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. Factus ergo sit E. Dico E, hac via procreatum esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifestum est. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quã B, multiplicatus à C, ipsum E, producat; [i] metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod vero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito [k] fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium, [l] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, [m] metientur ipsos H, & G, æque nimirum C, ipsum H, & D, ipsum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F, [n] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipsum G, vt ostensum est, metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem, atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

A .... B .....
C .. D ...
E .....
F———.—
G— H—— i 7. prom.

h 19. sept. k 9. prom. l 19. sept. m 21. sept. n 17. sept.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi. Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. XXXVI.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur,

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD. sitque alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur, ablato E, ex CD, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, FD, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF, [a] metietur quoque tam A, quam B, ipsum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [b] metientur & reliquũ FD. Est autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare E, ipsum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

A .. B ...
C..... F—— D
E..... a 11. prom. b 12. prom.

PROBL. 5. PROPOS. 38. XXXVI.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [a] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E, & D, sit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur, [b] metietur quoq; D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum.

A... B.... C.....
D.....
E———— a 36. sept. b 32. sept.

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. [c] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cum A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; [d] metientur quoq; A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; [e] metietur quoq; eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cũ C, & D, metiantur ipsum F; [f] metietur quoq; eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C, & D, maior minorem. Quod est absur-

A.. B... C....
D.....
E.....
F——— c 30. sept. d 11. prom. e 37. sept. f 37. sept.

absurdum. Non ergo A,B,C,alium numerum ipso E,minorem metientur; sed ipse E,erit minimus. Quapropter tribus numeris datis,reperimus,quem illi minimum metiantur,numerum. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his,si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur,eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo,quod A,B,C,ponebantur metiri ipsum F,ostensum est,& E,minimum, quem A,B, C,metiuntur,eundem F,metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo,non secus ac propos.37. huius lib.ostendere poterimus. Metiantur enim A,B,C, quemcunque numerum D E,sitque F,minimus, quem iidem A,B, C, metiantur. Dico & F,ipsum DE,metiri. Si enim non metitur, metiantur eius partem DG,relinquatque numerum GE,se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F,
g 11. pron. metiuntur; & F, ipsum DG, [g] metientur quoque A, B, C, eundem DG; Ac
h 12. pron. proinde, cum & totum DE, ponantur metiri; [h] metientur & reliquum GE, ipso F,minorem. Quare F,non erit minimus,quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum D E.

A . . B . . . C . . . .
D . . . . . ,. . G — E
F . . . . . .

PARI ratione; Pluribus numeris datis,quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

xxxvij.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur partem habebit à metiente denominatam.

METIATVR numerum A,numerus B. Dico A,habere partem aliquam à B,denominatam. Metiatur enim B,ipsum A,toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas
a 15. sept. ipsum C, & B, ipsum A, æquè metitur; [a] atque adeo eadem pars erit vnitas ipsius B,quæ C,ipsius A: Est autem vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin.2. huius lib. docuimus. Igitur & C,pars erit ipsius A,ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . .
B . . . . C . . .

xxxviij.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C,metiri ipsum A.Nam cum B,pars denominetur à C,sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B,
a 15. sept. ipsum A,æquè. [a] Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet,&c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . . C . . . . .

xxxix.

PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B,C. Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus
a 38. sept. A,B,C, numeri denominati, siue qui ipsas denominēt, D, E, F; [a] minimusq;, quem D,E,F,metiuntur, numerus G. Dico G,esse minimum,qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat,ita ostendetur. Cum
b 39. sept. D,E,F, ipsum G; metiantur. [b] habebit G, partes à D,E,F,denominatas, hoc est,partes A,B,C,cum hæ denominentur à D,E,F. Quod verò G,sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdem parrtes A, B,C. Quia igitur H, habet partes
c 40. sept. A, B, C, [c] metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quàm G,non erit G,minimus,quem metiuntur D,E,F. Quod est absurdum,& contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G,datas partes A,B,C, habebit,sed ipse G,minimus erit. Quare numerum reperimus,qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

D . . A, *Secunda*
E . . . B, *Tertia*
F . . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H ———

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I,K,L,per quos numeri D,E,F,ipsum G,metiuntur;erunt numeri I,K,L, datæ partes A,B, C, ipsius G,denominatæ scilicet à D,E,F.Cum enim D,E,F,ipsum G,metiantur per I, K, L; metietur æque vnitas ipsos I,K, L, & numeri D.E,F,ipsum G. [d] *Vicissim ergo metietur quoq; vnitas ipsos D,E,F,& numeri I,K,L,ipsum G, æque, atque adeo vnitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I,K,I, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D,E,F, ab ipsis denominata; erunt & I,K,L,ipsius G,partes denominatæ à D, E, F.*

A, Secunda D.. I.....
B, Tertia E... K.... d 15. septi.
C, Quarta F.... L...
G.....

EX his autem sequitur,minimum numerum,quem quotlibet numeri metiuntur,esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas.Ostensum enim est,numerum G,quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A,B,C,cuiusmodi sunt I,K,L,à metientibus numeris D,E,F,denominatas.

IAM vero,vt Campanus ait,si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur,triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum,tertius,quartus, &c. easdem partes continens.Inuento enim G,minimo, qui habeat partes A,B,C, denominatas à D,E,F,sit illius duplus,numerus H;triplus vero I, &c. Dico H,esse secundum numerũ,qui easdem partes A, B, C, à numeris D,E,F,denominatas habeat,& I,tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H,duplum,& I,triplum,&c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant.Quod enim H,& I,&c. partes A,B,C,habeant, denominatas scilicet à D,E,F,ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per constructionem;& G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; [e] *metientur quoque D,E,F,eosdem H,I, & reliquos multiplices ipsius G.* [f] *Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E,F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.*

A, D..
B, E...
C, F....
G.....
H.....
I.....
K---------- M------ L e 11. pron.
N---------- P------ O f 39. septi.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus.Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius KL, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus,& minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex KL, relinquatur ML, ipso G, minor. Quoniam igitur KL, partes habet A, B, C; [g] *metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem KL: Metitur autem & G, ablatum KM: sibi æqualem.* [h] *Igitur & reliquum ML, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H; cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.* g 40. septi. h 12. pron.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet NO, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex NO, relinquatur PO, minor ipso G. Quia igitur NO, partes habet A, B, C, [i] *metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem NO, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum NP, ablatum ipsi H, duplo æqualem.* [k] *Igitur & reliquum PO, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eademq; ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.* i 40. septi. k 12. pron.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT datæ partes A,B,C; inueniendus sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A,B,C, numeri denominati D,E,F; Fiat q; G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atq; adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G, erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atq; adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [l] *Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E,* [m] *in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I;* [m] *erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L; ita vnitas ad M: Erit per*

A, Secunda B, Tertia C, Quarta.
D.. E... F....
G.....
H.....

.Vnitas

I----------
K----------
L---------
M---

l 15. defi. m 17. septi.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M. Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, sient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam; & hæc aliam à 4. & hæc aliam à 5. & hæc denique partem à 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui eadem partes eodem ordine habeant, duplicatas, tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H.

Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint, ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, *a* erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: *b* Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur. *c* Igitur tam A, ipſum E, quam D ipſum H, æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A..... E---
B..... F-----
C..... G-----
D..... H---------

a *14. ſeptimi.*
b *23. ſeptimi.*
c *21. ſeptimi.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint, ſiue A, B, C, D, ſint continue proportionales, vt vult Euclides, ſiue non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diuerſæ ſunt, quemadmodum in ſuperiori eadem ſemper proportio reperitur.

A.... E---
B..... F-----
C..... G-----
D..... H---------

PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunq; iuſſerit quiſpiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, ſe ipſum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C, D, E, eſſe tres minimos in proportione A, & B. Quod enim proportionales ſint in data proportione A, ad B, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, ſic oſtendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; *a* erit vt A, ad B, ita C, ad

A.. B...
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

a *17. ſeptimi.*

b 17. sept. A.. B... C.... D..... E..... F, 8. G, 12. H, 18. I, 27. K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E: *b* erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in

c 24. sept. se ipsos: *c* sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione; *d* erunt & C, E, extremi, inter

d 29. sept. se primi. *e* Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

c 1. Octa- IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt. *e* ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. os-

f 18. sept. tendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, *f* erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuæ

g 24. sept. proportionales in data proportione A, ad B, Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuũ fiet. *g* Quo-

h 29. sept. niam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in seipsos; Item

i 1. octau. procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E, *h* erunt & F, I, extremi, inter se primi. *i* Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, &

k 18. sept. *ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, k numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A, B, multiplicantes C, ipsos F, G fecerint: item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quod B, multiplicans C, D, E, ipsos GHI fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.*

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque

A.. B... C.... D..... E..... F, 8. G, 12. H, 18. I, 27. K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuctos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum: producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor FGHI, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint cõtinue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos idcoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea vterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub aliis denominationibus, quæ in Algebra solent explicari: Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem esse in tribus, quatuorve numeris minimis continue proportionalibus inuentis arte in hac propos. tradita, non autem in quibusuis tribus, quatuorve numeris minimis cõtinue proportionalibus vtcunq; propositis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continue proportionales æquales prorsus sunt iis, qui per hanc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuentis, nõ essent inuenti, minimi, quod est contra hanc propos. Si vero dati maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi, quod est contra hypothesim. Quod clarissime ita fiet perspicuum. Dati sint tres numeri A, B, C, minimi continue proportionales: sumptisque

A — B ---- C ----- *duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex scholio propos. 35. lib. 7. inueniantur per*

D, 2. E, 3. F, 4. G, 6. H, 9. *hanc propos. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam necessario A, ipsi F, æqualis erit; atque ita, cum ipsi F, erit & B, ipsi G, æqualis: Eademq; ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, æquales erunt. Eademq; ratio est de quatuor, aut pluribus. Quod si A, dicatur minor quam F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt. quod est absurdum, & contra hanc propos. Si vero A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non sunt. quod est contra hypothesim. Cum ergo A, minor non sit, aut maior, quam F; æqualis omnino erit, ideoque vt ostensum est, & B, C, ipsis G, H, æquales erunt. Quod est propositum.*

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROL-

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D; & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medii ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H, vt ex demonstratione Euclidis, & ea quam in scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum vero B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continue proportionalium sint vltimi tot cõtinue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademq; de reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportoine sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, à 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquintæ, sumendi erunt quinq; numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquintæ, vt hic apparet 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri (quod mirũ videri possit) plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neq; enim post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neq; in priori exemplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iij.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometrice demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8, B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 17.

SCHOLIVM.

HÆC propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inueniri non possent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc theorema primi est conuersum, quo ad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et viciſsim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunq; non continue propor-

proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos 1. huius lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunq; minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6.10.13.18.

IV.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres
a 36. *septi.* numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. *a* Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, *b* A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. *c* Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ra-

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I----- K---- L----

b 9. *pron.*
c 18. *septi.*

tione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, mi-
d 21. *septi.* nimi sunt in sua proportione: *d* ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur; *e* metietur eundem K, numerus E, minimus,
e 37. *sept.* quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. *f* Inuento rursum numero G, minimo, quem meti-
f 36. *sept.* antur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primũ; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsũ K. Dico H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cũ n. A, & B, ipsos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodũ A, ad B, ita H, ad G. Eadé ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quã E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; *g* ipsi metiuntur æque L, & M, eandem habentes ratio-

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L---- M------ N---- O----

g 21. *sept.* nem, nimirum B, consequens consequentẽ M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; *h* metietur eundem M, & numerus G,
h 37. *sept.* minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurduum. Non ergo erunt alii numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis G, H, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

SED iam E, non metiatur ipsum I. *i* Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties
i 36. *sept.* I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L, & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æque metiantur; erit vt supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipsos H, G: & C, D, ipsos G, I, metiantur æque. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, de-

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O----- P---- Q---- R----

inceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt, *k* ipsi æque metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens conse-
k 21. *septi.* quentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P: Atque adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, *l* metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P.
l 37. *sept.* Quia vero ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q: erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q. *m* quod E, F, in
m 21. *septi.* sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q: *n* metietur etiam K, quem minimum metiuntur IE, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alii numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N, propterea que ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

n 37. *septi.* QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendũ, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T, inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S. ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur; Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportiona-

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7 S, 3. T, 2.
M, 48. L, 30. K, 30. N, 105. O, 70

tionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipsum N, non metiatur, [c] sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P, & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties c 36. septi.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

vero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinq; vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaq; rationibus datis quotcunq; in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. libr. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunq; numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex iis, quæ ad propos. 18. libr. 7. demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5. v.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D, posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [b] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

a 17. septi.

b 27. defin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent. fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G, [c] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [d] Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

c 17. septi.

d 27. defin.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vi.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neq; alius quispiam vllum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D, & D, ad E: A, vero ipsum B, nō metiatur, neq; B, ipsum C, neq; C, ipsum D, neq; D, ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. [a] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum vnitas omnem numerum metiatur. [b] Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; nō metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium à se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstrabimus, neq; A, quartum D, neq; B, quartum E, metiri. Atq; ita de reliquis. Si itaque sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 16. B, 24. C, 36. D; 54. E, 81.
F, 4. G, 6. G, 9.

a 2. octaui.

b 3. octaui.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neq; alius quisquam vllius multiplex erit.

SINT enim continuæ proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neq; alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quod enim nullus proximè insequentis multiplex sit, constat. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non sit autem A, ipsius B, multiplex; neq; B, ipsius C; neq; C, ipsius D; neq; D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

Quoniam D, ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunq; E; D, C, B, A; (Nam cum sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C, & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; [c] *neq; alius quisquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, si maiores ad minores referantur, neq; quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. lib. 7. scripsimus.*

c 6. oct.

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunq; alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quolibet proximè insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C, C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C: & C, ipsum D: & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, &

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

C, ipsum D, [d] *metietur quoq; B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur,* [e] *metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.*

d 11. pro.
e 11. pro.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemq; illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E, sit autem A, ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C, ipsius D, & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximè insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex, metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea è contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusq; sequentium multiplex erit.

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex; neq; primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum metiri B, secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoq;, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunq; alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neq; alius quisquam vllum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namq; A, primus multiplex esse dicatur B, secundi, multiplex quoq; erit quicunq; alius cuiuslibet sequentium, ex iis, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam vllius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 45. C, 36. D, 24. E, 16.

vii.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremum E, metiatur. Dico & A, primũ metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri: [a] neq; alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundun metietur; Atque idcirço si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 6. oct.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHO-

SCHOLIVM.

VT theorema, quod secundo loco in scholio præcedentis proposit. demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propos. hoc modo:

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cuiuslibet à secundo sit multiplex; primus quoq; secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neq; alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholij præcedentis. Quod est contra hypothesim.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viii.

SI inter duos numeros medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A,B, medii proportionales continue C, D; sitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico vt tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri. A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad

A,	24.	C,	36.	D,	54.	B,	81.
G,	8.	H,	12.	I,	18.	K,	27.
E,	32.	L,	48.	M,	72.	F,	108.
A,	40.	C,	20.	D,	10.	B,	5.
G,	8.	H,	4.	I,	2.	K,	1.
E,	8.	L,	4.	M,	2.	F,	1.
A,	27.	C,	9.	D,	3.	B,	1.
G,	27.	H,	9.	I,	3.	K.	1.
E,	108.	L,	36.	M,	12.	F,	4.

B, atque adeo vt E, ad E, ita G, ad K. [a] Quare cum G, & K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum; [b] ac propterea in sua proportione minimi; [c] æque metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, singuli singulos. [d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerũ, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales sunt; Atq; idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B, tot cadent medii proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medii continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

a 3. oct.
b 23. sept.
c 21. sept.
d 9. hui.

SCHOLIVM.

NON solum ex demonstratione constat totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, I; M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hæc propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit vnitas existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem: Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis vero inter numeros sola vnitate differentes; superbipartientes denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoq; per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem, vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eadem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam neq; inter binarium & vnitatẽ, neq; inter duos numeros sola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes intercipitur solum numerus, qui ab vtroq; vnitate differt: Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri AB, CD. (sive CD, vnitas sit, & AB, ternarius, sive non,) binario, inter quos cadat numerus EF, minor vnitate quam AB, maior vero quã CD, vnitate quoq;. Dico EF, non esse medium proportionalem inter AB, CD. Si enim dicatur esse AB, ad FE, vt FE, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipsi EF, æquali, vt reliqua sit vnitas

A . . G . B | A . . . . . G . B
E . H . F | E . . . . . H . F
C . D | C . . . . . D

GB; &



GB; & ex EF, numero EH, ipsi CD, æquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipsis EF, CD, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoq; reliquus GB, ad reliquum HF, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo EF, medius proportionalis est inter AB, & CD.

ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proxime demonstrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoq;, ex hoc theoremate, medius proprotionalis inter 5, & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primum, si fieri potest, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt sit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipsum AE. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque senarium AE. Igitur D, meti-



a 11. pro. tur totum AE, & ablatum AB: [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem BE. Quod est absurdum.

CADAT deinde, si fieri potest, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum



b 11. pro. AE: [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem EB, metietur. Quod est absurdum.

EX quibus fit, neque illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgo dicitur, octaua; neq; illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuius medi est Tonus, seu vulgo, secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten. & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc vero in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2.3.4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea quæ ad propos. 47. libr. 1. demonstrauimus, quadratum diametri dupl'um sit quadrati ex latere descripti, quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; sit, vt proportio quadrati ex diametro descripti, ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem. seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, qua de re plura ad 9. & vltimam propos. libr. 10. scribemus.

ix.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medii continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medii continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quod inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, [a] sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; [b] erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex con-

a 2. oct.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

b 1. oct.

c 1. pron. d 3. pro. e 20. def. f 7. pron. g 3. pron.

struction, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt singuli singulis, vt K, ipsi A, & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, se ipsum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipsum G, fecit K, [c] metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: [d] Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Æque igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. [e] Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum si ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, se ipsum multiplicans produçat I, multiplicans vero ipsum I, faciat N; [f] metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: [g] Metitur autem & vnitas ipsum F, per F.

Æque

Æque igitur metietur vnitas ipsum F,& F,ipsum I, & I, ipsum N; ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F,ipsius I, & I,ipsius N. [c] Proportionales ergo sunt continue,vnitas,& numeri F,I, N; Ac proinde cum tam multitudo E,G,K,quam F,I, N, vna cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perspicuum est ex propos. 2.huius lib.Nam duo E, F,sunt secundi ab vnitate: & tres G,H,I,tertii; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medii continue proportionales numeri inter vnitatem,& K, numerum,seu A,sibi æqualem,& inter vnitatem,& numerum N, siue B,sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medii,&c. Quod ostendendum erat.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
I.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. M, 27.

[c] 20. defin.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est; numeros,qui in continua proportione cadunt inter numeros A,& B,atq; vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A,ad C; hoc est, quas habent E,& F, numeri ad vnitatem, id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoq; asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum,& sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E,G,K,& F,I,N, qui hac ratione sunt procreati,ex demonstratione propos.2.huius lib. continue esse proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

X.

SI inter duos numeros, & vnitatem continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum,& vnitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medii continue proportionales; inter A, quidem & vnitatem,numeri C,D,E: At vero inter B,& vnitatem,numeri F,G,H illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A,& B,quot inter vtrumq; A,B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuo C, & F, faciat I. Deinde C,multiplicans I,& G, faciant K,& L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, B,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3 F, 6.
I.
vnitas.

& vnitatem. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D. D,ad E; & E, ad A, æque metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D,ipsum E,& E,ipsum A: [a] Metitur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D,ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [b] Quare C. seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E,fecit A. Eadem ratione F,seipsum multiplicans fecit G;& multiplicans G, fecit H, & multiplicans H,fecit B. Itaque cum C,multiplicans C,& F,fecerit D,& I; [c] erit, vt C,ad F,ita D,ad I. Similiter, quia F, multiplicans C,& F, fecit I, & G; [d] erit vt C,ad F,ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C,multiplicans D, I, G,fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus,eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C,ad F. Eodem modo quia C,& F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F,ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H,continue proportionales sunt in ratione C,ad F. Postremo,quia C, multiplicans E,K,L,H fecit A, M, N, O,habebunt,ex iis,quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A,M,N,O, eandem continuam proportionem,quam E,K,L,H,hoc est,quam C,ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [f] erit,vt C,ad F,ita O,ad B. Quinq; igitur numeri A,M, N, O,B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medii proportionales cadunt inter A, & B, quot inter H, vel B, & vnitatem, cum multitudo M,N,O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F,G,H. Quocirca si inter duos numeros,& vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri,&c. Quod erat demonstrandum.

[a] 5. pro. [b] 9. pro. [c] 17. septi. [d] 17. sexti. [e] 18. septi. [f] 18. septi.

SCHOLIVM.

EX his constat,numeros qui medij proportionales cadunt inter A,& B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores,quales sunt C,& F,habent.

PATET etiam ex hac demonstratione,si quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales,secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium,& ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est,ex eo quod C,D,E,A, continue proportionales,sint ab vnitate; D,tertium fieri ex C,secundo in se; & E,ex C, in D; & A,ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea,quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.

I. SI

I.

SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertii ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumq; numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter B, quidem & vnitatem, numerus A: At

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3 E, 4.
1.
vnitas.

a 20. oct. *inter F, & vnitatem numerus E: [a] cadet quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoq; B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.*

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertii ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N, & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propos. 9. huius lib. Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoq; ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F, & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quod tam B, N, quam F, Q, sint ab vnitate continue proportionales ex scholio propos. 9. huius libr. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; quod tam B, N, O, quam A, K, L, sint ab vnitate continue proportionales, ex scholio propos. 9. huius libr. & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemq; modo est A, ad H, vt L, ad R: quod vtraq; proportio triplicata sit proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, propterea quod tam A, K, L, quam F, Q, R, continue proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propos. 9. huius lib. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio, O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. eo quod tam B, N, O, quam F, Q, R, sunt continue proportionales ab vnitate ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

IDEM

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatem, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quot cunq; lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G: erit ex defi.

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6 G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoq; E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H: Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L, [a] *cadet quoq; vnus medius, nimirum N, inter E, & H, quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F. & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinq; numeri minimi.* [a] 8. oct.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, caduntque tot tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

EX his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11. xj.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati: & ipsum D, multiplicans fecit E, ex constructione: [a] erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione: & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum [b] erit quoq;, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

[a] 17. septi.

[b] 17. septi.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A; ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur: metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoq; D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B: habebunt E, & B, communem mensuram D: Ideoq; compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

xj.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medii proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E: & D, seipsum multiplicans faciat F: At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G: Multiplicantes vero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G: [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F: [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, propterea que E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defi. cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A, & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H: [c] erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I: multiplicans vero ipsum F, ex defin. cubi fecerit cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B: [e] Est autem & H, ad I, vt C, ad D: quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D: Atque adeo inter cubos A, & B, duo medii H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H: triplicatam quoq; rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cum sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medii proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

[a] 17. *septi.*
[b] 17. *septi.*
[c] 17. *septi.*
[d] 17. *septi.*
[e] 18. *septi.*

SCHOLIVM.

HIC quoq; manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoq; C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus, C, cubum suum A; immo & ipsum H; quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C, atque adeo inter se compositi sunt. Similiter cum sit A, ad H, vt C; ad D: metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoq; D, ipsum H, consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B: immo & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A, posteriorum vero trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

xij.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes facient D, E, F, multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rursum multiplicantes ipsos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoq; D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue esse proportionales. Multiplicantes. n. A, & B, se mutuo faciant N; & B, C, se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat R, S. Simili modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a Quoniã igitur A, multiplicans seipsum, & B, fecit D, N, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum fecit

[a] 17. *sept.*

fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rursus quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; [b] erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademque [b] 17. septi.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

ratione cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad E; proptereaq; & E, O, F, continue proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione sint continue proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeo D, E, F, continue proportionales sunt.

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G, P, Q, in eadē ratione, in qua D, N, E, hoc est, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; [c] erit quoque vt A, ad B, ita, Qad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc est, B, ad C, seu A, ad B. Et eodem modo cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; [d] erit vt B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H, R, S, I, proportionales sunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue sunt proportionales. [c] 18. sept. [d] 18. sept.

NON dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, esse continue proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonstratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum nuerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.

IAM quoq; numeri secundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati in quadruplicata, & sic deinceps semper vno amplius.

BREVIVS propositionem totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F; & in hos ex eisdem numeri G, H, I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, esse quoque continue proportionales. Nam ex scholio propos. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue, sunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiusdem rationis B, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G, H, I, esse proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atq; ita de cæteris.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. F, 6. F, 64.
G, 8. H, 64. I, 512.
K, 16. L, 256. M, 4096.

EX qua rursum demonstratione apparet, numeros primo loco productos esse in duplicata ratione duorum numerorum; secundo vero loco procreates, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraq; demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciant E, F, G, H; postea vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, [e] ex demonstratis, proportionales sunt. Item F, G, H, cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in se ipsos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoq; in se ipsos. Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt, I, K, L, M, & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2. B, 4. C, 8. D 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

[e] 13. octaui.

THEOR. 12. PROPOS. 14. xiii.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B, [a] metietur quoq; A, primus secundum E. Quare cum sit vt A, ad E, ita C, ad D, & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36. C, 2. D, 6.

[a] 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholii propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numeris quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

xiv.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D;

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36,
C, 2. D, 6.

a 7. oct. Metitur autem A, primus B, extremum, [a] metietur quoq; idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atq; idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaq; si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

xv.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neq; quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, [a] metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum;

a 14. octa. A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D, Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

b 14. octa.

xv.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neq; cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; [a] metietur quoq; A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

a 15. oct. A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; [b] metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. oct.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neq; quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. [c] *Igitur & latus D, latus metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

c 14. & 15. oct.

A, 36. B, 9. C, 6. D, 3.

QVOD si latus C, lateris D, multiplex sit: metietur latus D, latus C. [d] *Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur, Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.*

d 14. & 15. oct.

AT vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex, non metietur B, ipsum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. g *Igitur neq; latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.*

A, 64. B, S.
C, 4. D, 2.

g 16. & 17. oct.

A, 49. B, 9.
C, 7. D, 3.

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex, non metietur D, latus latus C. h *Igitur, nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

A, 125. B, 8.
C, 5. D, 2.

h 16. & 17. oct.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

xvi.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A, & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B, sitq; vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G, a erit A, ad G, vt C, ad E, hoc est, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; b erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

a 17. septi.
b 17. septi.

QVIA vero, cum A, G, B, sint continue proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel DF, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoq; C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare cum & E, F, latera suum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem mensuram tam E, quam F; ideoq; erunt inter se compositi.

EX qua demonstratione etiam manifestum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E, F, latera plani posterioris B.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

xviii.

DVORVM similium solidorum numerorum duo medii proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT solidi numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt sit C, ad D, quemadmodum F, ad G, & D, ad E, sicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, esse triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicantes enim se mutuo C, D, faciant I; & F, G, se mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, se mutuo multiplicantes faciant L. Postremo E, H, ipsum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipsis F, G, H, proportionales sunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L: a erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; b erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, solidus factus est ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus est autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodē modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipsum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M. c erit A, ad M, vt I, ad L, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; d erit N, ad B, vt L, ad K, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. e Est autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atq; idcirco inter A, B, solidos similes duo medii M, N, continue proportionales cadunt.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

a 17. septi.
b 17. septi.
c 17. septi.
d 17. septi.
e 18. septi.

QVONIAM vero. cum A, M, N, B, sunt proportionales continue; proportio A, B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoq; A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medii, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, assumptorum.

EX iis, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera suum solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur: metientur quoque C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem: quod sit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E. ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur: (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L, metietur E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt ipsis I, L, K, metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M: Metiuntur autem &
c 11. pro. *C, D, latera planum suum I. c Igitur & C, D, metientur ipsum M; Atq; adeo C, D, E ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram tam C, quam D, & quam E; Ideoq; compositi inter se sunt. Rursus quia est A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera solidum suum*

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

A, antecedentes antecedentem; metientur quoq; F, G, H, ipsum M, consequentes consequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipsum N; (cum enim N, factus sit ex H; in L, per constructionem; metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K; metientur quoq; F, G, ipsum N; atq; adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Necnon & ipsum B, nimirum latera suum solidum. Igitur M, N, B, communem habent mensuram tam F, quam G, & quam H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A; At vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M, N, B.

QVIA vero solidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione' gignitur, demonstremus hoc loco eundem numerum solidum procreari, siue primum latus ducatur in secundum, & numerus procreatus in tertium: siue primum in tertium, & numerus genitus in secundum; siue denig, secundum in tertium, & productus numerus in primum: Quin etiam, propositis quotuis numeris, eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua quomodocunq; ordinem inter se permutent. Quæquidem res magnum vsum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunq; ordinem inter se permutent.

SINT primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D, ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E, f erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, g ita quoq; est F, ad A; quod

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.

f 15. def. g 15. def. h 15. def. i 19. septi.

A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, h ita est A, ad vnitatem; propterea quod A, multiplicans, B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: i atq; idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.

E, G,
D, B,
A, vnitas.

k 15. def. l 15. def. m 15. def. n 19. sept.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; k erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, l ita etiam est G, ad B, eo quod G, factus est ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, m ita est B, ad vnitatem propterea quod D, factus est ex A, in B. Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: n ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E. gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atq; ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Item ex

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Item ex A, in D, & ex producto in C, ex producto in B: Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita vt præter primam multiplicationem, quæ omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se fiant 11. multiplicationes diuersæ producentes eundem semper numerum. Quoniam enim vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod primo loco proponitur.

DEINDE quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

TERTIO

TERTIO quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille sit æqualis proxime ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidem, quod est tertium.

QVARTO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

Quinto quoniam, vt demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille sit ostensus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, erit & hic eidem æqualis. Quod est quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextum.

SEPTIMO quia, vt in tribus ostendimus, idem numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in A; constat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proxime ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & ille, quod est septimum.

OCTAVO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est octauum.

NONO quia, vt demonstratum est in tribus idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A, producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, æqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod est vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod iam in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinq; numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemq; semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunq; inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C, *a* metientur D, & E, ipsos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G. *b* Itaq; F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: *c* Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B, *d* erit vt C, ad B, ita F: ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E. ita F, ad G, & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus cuius, latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G, erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus &c. Quod demonstrandum erat.

A, 18. C, 24. B, 32. D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

a 21. *septi.*
b 9. *pro.*
c 9. *pro.*
d 17. *septi.*

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

SI inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A,& B,duo medij proportionales C,D. Dico A,& B,esse similes solidos. Sumantur tres
a 20. octa. E,F,G,minimi in ratione A,B,C,D. Quoniam igitur inter E,& G, medius cadit proportionalis F; [a] erunt E,& G,plani similes: sint ipsius E,latera H,I,ipsius vero G,latera illis proportionalia K,L. Et quia E,F,G,cum mini-
b 21. septi. mi sint in ratione A,C,D,[b] æque metiuntur ipsos A,C,D,eiusdem rationis cum illis metiantur per M. Eodem-
c 21. septi. que modo,[c] quia E,F,G,minimi æque metiuntur C,D,B,eandem habentes rationem cum illis; metiantur per
d 9. pron. N,[d] ita vt M,multiplicans E,F,G,faciat A,C, D; & N, multiplicans

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

eosdem E,F,G,faciat C,D,B. Factus est autem E,ex multiplicatione mutua suorum laterum H,& I; nec non G,ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A,producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K,L,N; atque adeo A,

A, 8. D, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 3. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

solidus est numerus, ex defin. latera habens H,I,M; & B, solidus etiam latera habens K, I, N, Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt
e 18. septi. C,& D, vt ostendimus; [e] erit C, ad D, vt M, ad N: [f] Sunt autem C,&
f 17. septi. D, in eadem ratione, in qua E, & F; quod N, multiplicans E,& F, fecerit ipsos C,& D; Nec non & E,F, eandem habent rationem, quam HK, vel I, L. Etenim inter planos similes E,G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H,K, vel I,L. Igitur erit quoque H, ad K,& I, ad L, vt M, ad N,& permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera, H,I,M, lateribus K,L,N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rem si inter duos numeros duos medii proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H,I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solides similes. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A,B, in eodem priori exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generaliter proponat, eamque sine vlla exceptione demonstret.

xx. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A,B,C, continue proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium
a 20. octa. C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; [a] erunt A,
A, 9. B, 54. C, 324. & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c, Quod demonstrandum erat.

xxi. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A,B,C,D, proportionales continue, & A; primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medii proportionales B, C;
a 21. oct. A, 27. B, 45. C, 75. D, 125. [a] erunt A,& D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HÆC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet sane mancam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quædam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, at omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, vt duobus lateribus prioris qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoque æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se æqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramq; propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A,B,C, continue proportionales, & primus A, quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D. latere quadrati A, cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue

propor-

proportionales, erit q3 conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; at q3 adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nimirum vnus; cadent quoq3 totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter vnitatem, at q3 C, numerum, nimirum, vnus qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri sunt continue proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit ex defin. cuius latus E.

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
vni-tas.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, æque, ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; [b] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C; ad F; [c] cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; [d] metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. [e] Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quod conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

A, 36. B, 48. C, 64.
G, 18. H, 32.
D, 9. E, 12. F, 16
L, 64. K, 8. I, 4

b 11. oct.
c 8. oct.
d 7. oct.
e 11. oct.
f 20. oct.

ALITER. [f] Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G, assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, [g] erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadat q3 inter D, & E, medius proportionalis H, [h] cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; [i] idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in seipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 3. E, 12. F, 4. G, 16.
A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.

g 20. sept.
h 8. oct.
i 20. sept.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A, fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoq3 erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum tam inter numerum D, quam vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. à nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 20. H, 100.
E, 4. G, 10.
vni-tas.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, æque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem A, cubus, ex hypothesi; [k] cadent inter E, & A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A: ad E; ita D, ad H; [l] cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, [m] metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoq3 P, cubus ipsius O. [n] Itaq3 cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus sit, ex constructione, cubus quoq3 erit D.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16 L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P, 1000. O, 10. N, 5.

k 12. oct.
l 8. oct.
m 7. oct.
n 11. oct.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxij.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D, sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; [a] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; [b] cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit & B, tertius quadratus. [c] Quare si duo numeri rationem habeat inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

a 11. oct.
b 8. oct.
c 22. oct.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, [d] essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionē non ha-

d 24. oct.

non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4.8.16.32.64.128.
f 24. oct a. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, *f* esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & 0. quod est absurdum.
g 11. oct. *g* Nam inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cum tamen in scholio prop. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, *h* caderet inter eos medius proportionalis. *i* Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri non posse, demonstratum à nobis est in scholio propos. 8. huius lib.
h 11. oct au.
i 8. oct.

xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum, sitque A cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D: *a* cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F: *b* cadent quoque inter A, & B, duo medii, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus: *c* erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. oct a.
b 8. oct. A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216
c 23. oct.

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, *d* essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.
d 25. oct.

xxiv.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B. sint plani similes; *a* cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod erat ostendendum.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.
a 18. oct.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. [b] *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis: Et est,* [c] *vt C, ad D, ita A, ad B;* [c] *cadet quoque medius proportionalis inter A, & B,* [d] *Quare A, & B, plani similes sunt.*

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36.
b 11. oct a.
c 8. oct.
d 20. oct.

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum, ponuntur enim non similes.

xxv.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, sunt solidi similes; *a* cadent inter eos duo medij proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. 1. prop. 2. huius libri. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat demonstrandum.

a 19. oct.

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

SCHO-

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus: scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A,B, proportionem habeant inter se, quam cubi C,D. Dico A,B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D; [b] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [c] cadent quoq; inter A,B, duo medij. [d] Sunt ergo A, & B, solidi similes.

A, 16. B, 54. C, 64. D, 216.

b 12. octa. c 8. oct. d 21. oct.

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, [e] caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales. Nam alias [f] caderent quoque duo medij inter minimos eorũdem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, vt in scholio prædicto traditum est; inter quos certum est, non posse intercipi duos numeros, ne dum duos medios poportionales.

e 18. oct. f 8. oct.

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus latera habet solummodo vnitatem, & seipsum quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quiuis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantum habet duas vnitates, & seipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1.1.29. & 1.1.47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neq; duo quicunq; numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; [g] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter se primi erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continue proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod absurdum est. Ponuntur enim neq; quadrati, neq; cubi.

g 18. & 19. oct.

EX his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; [h] essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proxime ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes, quod absurdum est, & contra hypothesim. Verum hoc ostensiue quoque ita demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A B, sit q; A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas, & numerus D, ipsi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, laterib. C, D, proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F. [i] Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium: Fit autem ex C, vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. [k] Quare D, ipsum F, metietur. [l] Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F. [m] Igitur & D, id est, A, illi æqualu, eundem B, metietur, quod est propositum.

A, 3. B, 48. C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

h 31. sept. i 19. septi. k 4. pro. l 4. pron. m 11. pron.

HINC perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proxime ostendimus. Cum ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi, quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A,B, sit q; A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. [n] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. [o] Quare D, ipsum G, metietur. [p] Metitur autem G, ipsum B, quod G, latus sit ipsius B. [q] Igitur & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. Quod est propositum.

A, 3. B, 24. B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2. G. 6.

n 19. septi. o 4. pro. p 4. pron. q 11. pron.

ATQVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nã si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proxime ostendimus. Cum ergo & se ipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi, quod est contra hypothesim.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularem, vel superbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erunt illi ipsi per ea, quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter vero non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, [r] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato, [s] esset & 20. quadratus, quod est absurdum, ponitur enim non quadratus.

r 28. oct. s 24. oct.

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes, [t] haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit, [u] esset & 40. cubus, quod est absurdum, ponitur enim non cubus.

t 27. octa. u 25. oct.

FINIS ELEMENTI OCTAVI

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

i. SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, [b] vnus medius cadit proportionalis [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; [d] erit quoque C, tertius; quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 6. B, 54. D, 36. E, 108. C, 324.

a 17. septi. b 18. octa. c 8. oct. d 22. oct.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ii. SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; [d] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 6. B, 54. D, 36. C, 324.

a 17. sept. b 11. octau. c 8. oct. d 20. octa.

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

A, 4. B, 25. C, 100.

DVO quadrati A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; [a] erit C, ex eis productus, quadratus.

a 1. noni.

II.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

A, 9. D, 12. B, 16. C, 144.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitq; A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum: [a] erunt A, & B, similes plani: [b] atque adeo inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D. [c] Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

a 2 noni. b 18. oct. c 22. oct.

III.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit,

A, 4. B, 20. C, 80.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum: sitq; A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, ditatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

IV.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus, esset & B, ex theor. 1. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: [a] metietur C, ipsum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata à C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars, est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; [e] ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A, seipsum multiplicans fecerit B; [g] metitur vero & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cũ inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales, & A, primus sit cubus, [k] erit quoque E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8. E, 16. D, 4. F, 32. C, 2. B, 64. Vnitas.

a 7. pron. b 5. pron. c 20. def. d 7. pron. e 20. def. f 7. pron. g 5. pron. h 10. def. i 8. octa. k 23. oct.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D. [a] eritque D, cubus. Quoniam vero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [b] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent. [e] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

a 3. noni. b 17. sept. c 11. oct. d 8. oct. e 23. oct.

THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit,

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; [a] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [b] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [c] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [d] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [e] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

a 3. noni. b 17. sept. c 12. oct. d 8. oct. e 22. oct.

SCHOLIVM.

EX his & hæc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I.

SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; [a] & multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.

A, 8. B, 20. C, 160.

a 3. noni.

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, [a] & factus C, cubus erit. Quod est contra hypothesim.

A, 8, B, 17. C, 136.

a 4. noni.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; [a] erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8. B, 64. C, 512.

a 5. noni.

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C. factum ex A, in B, esse cubum, inferunt; [b] *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* [c] *Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C. fecit;* [d] *cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales.* [c] *Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio breuior est, & planior, vt perspicuum est.*

b 12. oct. c 17. sept. d 8. oct. c 23. oct.

A, 8, B, 64. C, 512.

vij.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit compositus, [a] metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [b] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

a 13. def. b 9. pron.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, H, K, M:

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum vero F, cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: [a] Metitur autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; [b] Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sunt B, C, D, & est B, quadratus; erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, sit quadratus, [d] & F, quadratus erit, Nec non & omnes vnum intermittentes.

a 5. pron. b 9. pron. c 82. oct. d 22. oct.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C, æque metietur vnitas numerum A, & numerus B, numerum C. [e] Metitur autem vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur, [f] atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt est ostensum, erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, [g] erit & F, cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cum F, sit cubus, [h] & I, cubus erit, atque omnes semper duos intermittentes.

e 5. pron. 19. pron. g 23. oct. h 23. oct.

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HOC theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, vndecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proxime numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes vero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimooctauo, vigesimooctauo, vigesimoquarto & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigesimusquintus, &c. sunt cubi simul & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate: Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A,B,C,D,E,F, sitque primum A, proximus vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, [a] iam demonstratum est. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cum tres continue proportionales sint A, B, C; sitque A, quadratus; [b] erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C,D,E, cum C, sit quadratus; [c] & E, quadratus erit. Omnes igitur A,B,C,D,E,F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, [d] iam est demonstratum. Quod autem & reliqui

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

B,D,E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B. [e] Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur, & A, ipsum B, per seipsum metietur; [f] Atq; adeo cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus est. Quoniam vero quatuor continue proportionales sunt A,B,C,D, estque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eademque ratione assumptis quatuor deinceps proportionalibus B,C,D,E, cum B, cubus sit: [i] & E, cubus erit: Omnes igitur A,B,C,D, E,F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. noni.
b 22. oct.
c 22. oct.
d 8. noni.
e 5. pron.
f 9. pron.
g 3. noni.
h 23. oct.
i 23. oct.

SCHOLIVM.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntque A, B, quadrati; erit & C, quadratus ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntque A, C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

multiplicans facit B; [k] erit & B, cubus. Item, quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntque A, B, cubi; [l] erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio, A, multiplicans C, facit D, suntque A, C, cubi; [m] erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.

k 3. noni.
l 4. noni.
m 4. noni.

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I, &c. & primum A, proximus vnitati non sit quadratus. Dico nec alium vllum esse quadratum, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, hoc est, præter B, D, F, H, &c. Si enim præter hos alius est quadratus, sit quadratus

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256.
I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

E. [a] Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A, habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: [b] sed B, tertius est ab vnitate quadratus. [c] Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse.

a 8. noni.
b 8. noni.
c 24. oct.

SED iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus,

d 8. noni. sit D, cubus. [d] Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam
e 8. noni. cubus F, ad cubum D: [e] Sed C, est cubus, cum sit quartus ab vnitate. [f] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit.
f 23. oct. Quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; [g] cum & C, cubus sit,
g 8. noni. sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; exi-
h 25. oct. stente C, cubo, [h] erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus positus esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post vnitatem, cubus quidem, non autem simul &

i 9. noni. Vnitas. B, 8. B, 64. *quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem, [i] quod*
k 8. noni. *primo existente cubo, omnes cubi sint, [k] quadratum vero, quod tertius sit ab vnitate.*

SIT deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus.

l 8. noni. Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. *Dico quartum C, esse cubum simul & quadratum; [l] Cubum quidem, quod quartus*
m 9. noni. *sit ab vnitate; quadratum vero, [m] quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.*

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum,
n 10. noni. *præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non existente quadrato, [n] nullus alius quadratus*

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

sit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem
o 10. noni. *non existente cubo, [o] nullus alius sit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimusexitus, decinonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hæc loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui rectè propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.*

xj. ## THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729, G, 2187.

æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam
a 20. def. quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) [a] æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C numerum
b 5. pron. G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit, vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cum sit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest maior numerus à maiore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad maiorem, quæ v-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

nitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonstratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per seipsum, &c. quia tam inter B, & F, quam inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quam inter vnitatem & C, duo interiecti sunt numeri.

HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui seipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à maiore distat, quantum minor ab vnitate, propterea quod si numerus numerum metiens multiplicet
c 9. pron. *eum, per quem metitur, [c] producitur ille, quem metitur. Ergo C, seipsum multiplicans gignet F, cum F, tantum absit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.*

xj. ## THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

SINT,

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B, C,D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoq; A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namque non metitur ipſum A: [a] erit E, cum primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, [b] atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præcedentis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, ſint inter ſe primi; [d] ac proinde in ſua proportione minimi; [e] metietur æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, [f] atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B, [g] atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, ſecundum,

a 31. ſept. b 9. pron. c 19. ſept. d 23. ſept. e 21. ſept. f 9. pron. g 9. pron. h 19. ſept.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000.
E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cum A, & E, ſint inter ſe primi; [i] ac propterea in ſua proportione minimi; [k] metietur æque A, ipſum G, & E, ipſum B. Metiatur E, ipſum B, per H: [l] ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A, atque idcirco A, ſe ipſum multiplicans facit B, vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in ſeipſum. [m] Quare erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter ſe primi ſint; [n] ac proinde in ſua proportione minimi; [o] æque metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſim, ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo, quod E, non dicatur metiri ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum. Metietur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus quoſcunque alios numeros primos ipſum D, metientes metiri quoque ipſum A; Eademque erit ratio ſi C, vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

i 23. ſept. k 21. ſept. l 6. pron. m 20. def. n 23. ſept. o 21. ſept. p 31. ſept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur; [p] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicans facit B, vt ex ſcholio prropoſitionis præcedentis conſtat. [q] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi ſunt; ſit autem C, ex A, in B, per idem ſcholium præcedentis propoſ. [r] erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi ſunt, & ſit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. [s] erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſim. Metitur ergo E, ipſum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296.
E, 3.

p 31. ſept. q 27. ſept. r 26. ſept. s 26. ſept.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens metiri poteſt vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonſtratum eſt. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis primâ huius propoſitionis demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demonſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod videtur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, quod non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propoſitionibus, quæ ſequuntur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturque ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum non dicturum fuiſſe, ſi diligentius vim huius demonſtrationis expendiſſet, vel certe, ſi expendit, eam in memoriam reuocaſſet, quandoquidem ipſo longe prior Euclides vſus eſt hoc etiam demonſtrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demonſtrandi vſus eſt Theodoſius lib. 1. ſphæricorum propoſ. 12. vt ibidem monuimus.

CÆTERVM ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipſum. [t] Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes ſubſequentes; [u] quod ſemper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris; [x] manifeſtum eſt, quod & ille omnes metiatur.

t 12. no. u 13. noni. x 11. pron.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiij.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcunque numeri A,B,C,D, quorum A, proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum antem eſt E, non eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, & metiatur extremũ D; [a] metietur quoque ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt, ſed compoſitus; [b] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium eſſe, non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 624.
E.— H.— G.— F.—

a 12. no. b 33. ſept.

c 11. pron. quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; c metietur quoq; ille alius primus eundē D; d atq; adeo
d 12. no. & ipsum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum
E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis
e 8. pron. ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; e & vici-
f 11. noni. ssim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per E. f Cum ergo qui-
libet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod
est contra hypothesim, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui ali-
g 8. pron. quis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniam vero E, metitur D, per F, g metietur vicissim F, ipsum D, per E.
h 12. non. Non erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vltimum; h metietur & A, proximum vnitati, qui
i 33. sept. primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; i atque adeo cum aliquis nume-
rus primus metietur. quem rursus dico nullum a-
lium esse posse præter primum A. Si namque alius
primus quàm A, metiatur F, cum F, metiatur D,
extremum; k metietur quoque ille alius primus
k 11. pron.
l 12. noni. eundem D, l atque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius pri-
m 9. pron. mus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniam E, metitur D, per F; m fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex
A, in C, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex
n 19. sept. E, secundo in F, tertium; n Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur
autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus
ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum
esse ab A, B, & non primum, sed compositum, quem solus A, primus metiatur; quemadmodum id ostensum est
de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturque F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum
o 8. pron. C, per aliquem ipsorum A, B; o & vicissim aliquis ipsorū A, B, (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) me-
tietur C, per F, K. Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui ali-
p 11. noni. quis ipsorum A, B, quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B.
q 8. pron. Non ergo G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; q metietur
r 12. noni. vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C, r metietur
quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus,
s 33. sept. t 11. pron. s ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius pri-
u 12. noni. mus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, vltimum, t metietur quoque ille alius primus eundem C, u atque
adeo & ipsum A, vnitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum
x 9. pron. G, metietur. x Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt do-
cuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G,
y 19. sept. tertium. y Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt
demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, vlti-
mum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H, ostendemus similiter H, diuersum esse ab A, quemad-
modum id ostensum est de numeris F, & G.

z 9. pron. NAM si H, idem sit qui A, metiaturque G, ipsum B, per H; metietur vtique G, ipsum B, per A; z Et vi-
cissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11.
huius lib. erit G, idem qui A, quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem, quem A. Non ergo
a 9. pron. H, idem est, qui A, sed diuersus. a Iam vero quia B, fit ex G, in H. quod G. ipsum B, metiatur per H: Fit autem
& idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, ter-
b 20. sept. tium, & ex A, medio in seipsum. b Quare erit vt H, primus ad A, secundū, ita A, secundus ad G, tertium: At A,
metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absur-
dum. Quare si A, primus est, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab
vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

xiv. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter
ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim si fieri potest, primus
A.....
numerus E, diuersus à B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igi-
a 9. pron. B.. C... D.....
tur E, metitur A, per F, a multiplicans E, ipsum F, faciet A. b Quare
b 31. sept. E— F——
singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur: non quidem
ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor
est quam A: Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum
numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoq; alterū duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compositus.

SINT

SINT quotcunq; numeri continue proportionales A,B,C,D,E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiã duo minimi F,G; Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compositum esse. Sit enim H, non primus, sed compositus: [c] Et sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I,K,L, & quatuor M,N,O,P, & sic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot sunt ipsi A,B,C,D,E. Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2 propos. lib. 8. numerus A, sit ex F, in M, metitur autem H, ipsum A, erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum, si vero ad M, qui quidem sit ex F, in I, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib 8. erit ex scholio eiusdem propos. 32. lib. 7. rursus H, compositus vel ad F, vel ad I, Si ad F, habetur propositum: si vero ad I, cum I. gignatur ex F, in seipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

c 2. oct.

A, 16. B. 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H— F, 2. G, 3.

DEINDE metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, sit ex F, in N, erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum, si vero ad N, qui quidem sit ex F, in K, erit H, eodem modo compositus vel ad F, vel ad K, Si ad F, habetur propositum, si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si vero ad O, qui quidem sit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum, si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se compositus quoque erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

PRÆTEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P, Si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem sit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si vero ad L, cum producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; Si vero H, primus sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si vero H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS EORVM, QVÆ IN LIneis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare, Quod idem & Barlaam monachum feciſſe à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes; Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris, æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri AB, & C, quorum AB, diuidatur in AD, DE, EB; Fiatque F, ex C, in AB; Item GH, ex C, in AD; & HI, ex C, in DE; & IK, ex C, in EB. Dico F, æqualem esse numeris GH, HI, IK, hoc est, toti numero GK, ex GH, HI, IK, composito. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; [a] metietur AB, ipsum F, per C, hoc est, AB, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione AD, ipsius GH; & DE, ipsius HI; & EB, ipsius IK, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ AB, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus AB, totius GK, eadem pars est, quæ AD, ipsius GH; erit quoque AB, totus totius GK, pars eadem, quæ AB, ipsius F: [b] Ac proinde inter se æquales erunt F, & GK. Quod est propositum.

A ... D .. E. B C..
F .....
G ..... H .... I .. K

a 2. prom.

b 4. prom.

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

NVMERVS enim AB, diuidatur in AC, CB. Dico numeros, qui fiunt ex AB, toto in partes AC, CB, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto AB, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi AB; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex AB, in AC, & in CB. Quod est propositum.

D .....
A ... C .. B

IDEM demonstrabitur, si AB, in plures partes, quam in duas secetur, vt ex appositæ secundæ figuræ apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex AB, in singulas partes AC, CD, DB.

E .....
A ... C .. D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, numero & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem esse ei, qui sub partibus AC, BC, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dicta parti AC, æqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex AC, in AB; vel (quod idem est) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex AC, in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

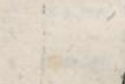
IV.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui sit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

V.

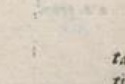
SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.



NVMERVS enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius CB, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium CD, DB, vna cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB; numero vero comprehenso semel sub CD, DB, vna cum quadrato ipsius DB, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, vt si hic numerus factus ex CB, in DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, vna cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipsius CB, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, vna cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB, hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, æqualis erit quadrato ipsius CD, vna cum numero qui fit ex AD, in DB; hoc est, numerus factus ex AD, in DB, vna cum quadrato ipsius CD, æqualis erit quadrato ipsius CB. Quod est propositum.

VI.

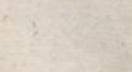
SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.



NVMERVS enim AB, secetur in partes æquales AC, CB, eique adiiciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vna cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno, hoc est, quadrato ipsius CD, cum enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium CB, BD, vna cum numero bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratis partium CB, BD, vna cum numeris sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis; numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, & sub BD, BD, hoc est, quadrato ipsius BD, æqualis sit ex 1. theorem. numerus factus ex AD, in BD; fit, vt si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato partis BD, vna cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, vna cum numero facto ex AD, in BD; hoc est, numerus factus ex AD, in BD, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis sit quadrato ipsius CD. Quod est propositum.

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.



DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis, erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB;

Ac proin-

Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compositi ex AB, & BD, siue dicta parte CB, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum AB, BD, vna cum numero qui fit bis ex AB, in BD, hoc est, quadratis numerorum AB, CB, vna cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; Sint autem ex 7. theorem. quadrati numerorum AB, CB, simul æquales numero bis comprehenso sub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC; fit, vt si pro quadratis numerorum AB, CB, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, vna cum quadrato ipsius AC, quadratus factus ex AD, æqualis sit numero, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

A .... C ... B ... D

IX.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS sit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, DB, duplos esse quadratorum, qui ex AC, dimidio, & ex CD, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipsius DB, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex AC, & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius DB, vna cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

A ..... C ... D .. B

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero composito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, DB, eique adiiciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, vtrosque simul, duplos esse quadratorum, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, composito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipsius AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD; si communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, vna cum numero bis, qui fit bis ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius BD, vna cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales sunt quadrati numerorum CB, CD; & quadrato ipsius CB, æqualis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, vna cum numero, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc est, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadrati numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod est propositum.

A .... C .... B .. D

IAM vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, æqualis est quadrato numeri medij AC; [a] erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit æqualis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractum; [b] erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, æqualis, ad AD, ex AC, residuum. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit æqualis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum; [c] erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, æqualis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, æqualis; & sic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis.

A D EC B

[a] 20. sept.

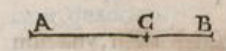
[b] 11. sept.

[c] 11. sept.

Quod

Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis, Quod est propositum.

ALITER Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato ipsius AC, quintuplus erit quadrati partis AC. Est autem numerus contentus quater sub AB, CB, vna cum quadrato ipsius AC, quadratus; quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex AB, & CB, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is qui quater continetur sub AB, CB, vna cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5 Quod est absurdum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus AB, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex AB, in CB, æqualis sit quadrato ipsius AC. Quod est propositum.



VERVM hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. huius lib.

xvj. ## THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, seipsum multiplicantem facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; [b] erit & vterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; [c] erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam vno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B. facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; [d] Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se primi sunt A, B, simul compositi.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

a 24. sept. b 30. sept. c 26. sept. d 27. sept.

DEINDE quia, vt prius, [e] vterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E, efficitur, (cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) [f] numerum factum ex D, E, tanquam vno in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno in E, æqualis est per 3. theorema scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi sunt, [g] atque adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

e 30. sept. f 26. sept. g 27. sept.

POSTREMO quia, vt prius, [h] vterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est: atque adeo è contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E, [i] erit quoque qui fit ex D, in E, ad compositum ex D, E, primus; [k] Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E, tanquam vno, in se primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem. antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in seipsos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, vt ostensum est, [l] Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atq; is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, atq; is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostensum est, [m] erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cũ igitur ex D, & E, in seipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

h 30. sept. i 20. sept. k 27. sept. l 20. sept. m 30. sept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi, omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumanturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipsorum FG, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum FG, aliquis numerus metietur

A, 8, B, 12. C, 18. D, 27. E— F, 2. G, 3. H—

Metia

Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; [n] *metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib 8.* [o] *metietur quoque H, medios B, C: Pac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, vt demonstrauimus:* [q] *metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi.* [r] *Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest, Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.*

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E — F, 2. G, 3. H, —

n 11. pron. o 11. pron. p 10. pron. q 12. pron. r 3. oct.

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, vt prius aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterũ ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D: [s] *metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C,* [t] *metietur quoq; H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totũ compositum ex A, B, D, & detractum B,* [u] *metietur quoq; H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8.* [x] *metietur etiam H, alterum ipsorum A, D.* [y] *Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi.* [z] *Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.*

s 11. pron. t 11. pron. u 12. pron. x 11. pron. y 12. pron. z 3. oct.

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B, primos: nec non, & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continue proportionalibus.

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvij.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, [a] atque adeo in sua proportione minimi: [b] ipsi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A .....
B .....
C ———

a 23. sept. b 21. sept.

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi, [a] minimi in sua proportione. [b] Igitur æque metientur ipsos B, & E; nimirum A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; [c] atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, [d] metietur quoque ipsum D. Metitur vero & se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E.—

a 23. sept. b 21. sept. c 11. pron. d 11. pron.

PROBL. 1. PROPOS. 18. xix.

DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt inter se primi, [a] perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C, per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, immo ipsum D, esse tertium proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D, [b] fiet C, ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in seipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis est ei, qui [c] ex medio B, describitur: Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B.

A, 4. B, 7.
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.

a 16. nonã. b 9. pron. c 20. sept.

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita B, ad D; [d] erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in seipsum, hoc est, ipsi C. Quare cũ C, fiat ex A, in D; [e] metietur A, ipsum C, per D: sed & nõ metiri ponitur. Quod est absurdũ. Non igitur inueni-

A, 6. B, 4. D— C, 16.

d 20. sept. e 7. prop. 7.

inueniri potest ipsis A,B,tertius proportionalis, quando A,primus non metitur C, productum ex B,secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus,an ipsis B,& A,inueniri possit alius tertius numerus,ad quem ita sit A,vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

XX. PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A,B,C,siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare,an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B, Multiplicans B,ipsum C,faciat D. Aut igitur A,ipsum D, metitur,aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A,B,C, inueniri posse quartum proportionalem, immo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E, [a] fiet D,ex A,in E: Fit autem idem D,ex B,in C,per constructionem.Igitur qui sub extremis A,E,continetur,æqualis est ei,qui sub B,C secundo, & tertio continetur; [b] Ac propterea erit vt A,ad B,ita C,ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B,C, quartus proportionalis.

A,	8.	B,	12,	C,	18.	E,	27. D, 216.
A,	4.	B,	8.	C,	9.	E,	18. D, 72.

a 9. pron.
b 19. sept.

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C,ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt, [c] erit numerus contentus sub extremis A,E, æqualis ei, qui ex B,secundo fit in C,tertium,hoc est,ipsi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; [d] metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D,productū ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus,an ipsis C,B,A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A,vt C,ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

A,	4.	B,	6.	C,	9.	E----	D, 54.
A,	3.	B,	4.	C,	10.	E—	D, 40.

c 19. sept.
d 7. pron.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propositionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur,potest quibuslibet duobus,vel tribus, adiungi alius proportionalis,quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8 nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis 21 $\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. Quia enim diuisis 64. per 3. fit numerus 21 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 $\frac{1}{3}$. per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se, [e] erunt 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. continue proportionales.

e 20. sept.

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum,procreabitur quartus proportionalis.Vt datis tribus numeris 9.6.20. si numerus 120. ex secundo in tertium genitus diuidatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. Cum enim diuisis 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione Quotientis 13 $\frac{1}{3}$. per diuisorem 9. ex ijs, quæ in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. [f] Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. proportionales sunt.

f 19. sept.

EX his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus Commādinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi, Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quonam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui oblíti, ac de diligentia remittentes,in errorem,eumque non leuem,incurrerint. Dicunt enim,si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur,vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18 cum vtrobiq; proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est,illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio,qua hoc probare contendunt,perspicuum fiet,si demonstrationem ipsam in mediam proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A,C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D,ita vt quemadmodum A,ad B,ita C,ad D, & vt B,ad C,ita fiat D, ad E.

A,	3.	B,	6.	C,	8.	D,	16. E----

Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A,C, inter se primi,[g] & ob id minimi. [h] Igitur metientur æque ipsos C,E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At vero & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A,C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

g 23. sept.
h 21. sept.

HÆC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse,vt B,ad C, ita D, ad alium quendā numerum, videlicet ad E.quod quidem fieri posse,nusquā demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate Non enim minus inquirunt, an tri-

in tribus numeris B,C,D, quartus proportionalis posit inueniri, quam tribus A,B,C, cum non magis hoc constet in illis, quam in his; Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunq; quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus & tertius, primi inter se sint, quales ponuntur esse A,B,C,D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probatum assumunt quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A,B,C,D, proportionales, non tamen deinceps, sintque A, & C, primus, & tertius inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C.

Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E---- ad E; Atque adeo vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

PRIMVM vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi [d] *manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus.* d *17. noni.*

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxi.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

SINT propositi primi numeri quotcunque A,B,C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. *a* Sumpto enim numero DE, minimo, quem A,B,C, metiuntur; apponatur ei vnitas EF. Aut ergo totus DF, primus est, aut non primus, sit primũ primus. Sunt ergo primi numeri A,B,C,& D,F, plures proposita multitudine A,B,C.

A, 2. B, 3. C, 5.
30.
D——— E. F

a *38. septi.*

SED iam non sit primus DF. *b* Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui vnus ipsorum A, B, C; metiantur autem A,B,C, ipsum DE, & G, eundem DE, metietur. Quare G, metiens totum DF, & detractum DE, *c* metietur quoque EF, reliquum, numerus vnitatem. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademque via plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 3. B, 5. C, 7.
105.
D---------- E. F
53.
G——

b *33. septi.*

c *11. prop.*

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunq; propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet DF, si primus est, vel certe G, qui ipsum DF, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus, & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xxii.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri AB,BC, CD. Dico & totum compositum AD, parem esse. Cum enim AB, BC, CD, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius AB, & F, ipsius BC; & G, ipsius CD. Quoniam igitur est vt AB, ad E, ita BC, ad F; & CD, ad G; (quod semper sit proportio dupla) *a* erit quoque vt AB, ad E, ita AD, ad E, F, G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus. Igitur & totus AD, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea AD, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . B . . . . C . . . . . D
E . . . F . . G . . . .

a *11. septi.*

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxiij.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par. Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB,BC,CD,DE. Dico & totum compositum AE, parem esse. Cum enim AB, BC, CD, DE, sint impares; differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. *a* Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. *b* Igitur & totus AE, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . . C . . . . . D . . . . . E

a *21. noni.*

b *21. noni.*

XXIV. ## THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, AB, BC, CD, componantur. Dico & totum AD, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate ED, ab impari CD; erit reliquus CE, par. [a] Est autem & AC, compositus ex imparibus AB, BC, multitudine paribus, par [b] Igitur & AE, compositus ex paribus AC, CE, par erit. Quare addita vnitate ED, totus AD, impar erit. cum impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . B . . . C . . . . . E . D

a 12. noni.

b 21. noni.

SCHOLIVM.

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate. [c] *Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.*

c 21. noni.

XXV. ## THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero AB, detrahatur par CB. Dico & reliquum AC, parem esse. Aut enim CB, par detractus dimidia pars est ipsius AB, aut maior quam dimidia pars, vel minor. Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipsi CB, pari æqualis sit AC, reliqua pars dimidia, erit & AC, numerus par.

A . . . . . C . . . . . B

SED iam CB, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius AB. Quoniam igitur AB, CB, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione, sit DB, dimidia pars ipsius AB, & EB, dimidia ipsius CB. Itaque

A . . . . . C . . D . . . E . . . . . B A . . . . . D . . . C . . E . . B

cum sit vt AB, ad DB, dimidium, ita CB, ad EB, dimidium; erit permutando vt AB, ad CB, ita DB, ad EB; & diuidendo vt AC, ad CB, ita DE, ad EB; Rursusque permutando, vt AC, ad DE, ita CB, ad EB. Atqui CB, ipsius EB, duplus est. Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit; Ac propterea AC, cum bifariam diuidatur, (quod DE, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILIVS demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile, hoc modo. Si AC, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate AD, erit reliquus DC, par. [a] *Igitur compositus DB, par quoq; erit: ac proinde, addita vnitate AD, totus AB, impar fiet, quod est absurdum, cum par ponatur.*

a 21. noni.

A . D . . . . C . . . . . B

XXVJ. ## THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus sit numerus DB, par. Quia igitur & totus AB, ponitur par; [a] erit & reliquus AD, par. Dempta ergo vnitate CD, reliquus AC, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni. A . . . . . C . D . . . . B

XXVIJ. ## THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquum AC, parem esse. Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; [a] erit & reliquus AC, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 24. noni. A . . . . C . . . . . D . B

XXVIIJ. ## THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur. Reliquus impar erit.

EX impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cum detrahatur CB, par; [a] reliquus DC, par quoque erit; Ac proinde addita vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni. A . D . . . . C . . . . . B

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit:

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cum B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; *a* Atque a- deo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . B . . . .
C . . . . . a 21. noni.

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsi B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. *a* Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . .
C . . . . . a 23. noni.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

A . . . B . . .
C . . . . . .

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur. b 29. noni.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [b] *erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.*

A . . . C . . . .
B . . . . . .

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] *erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.*

A . . . C . . . . .
B . . . . . b 28. noni.

SCHOLIVM

EX his clarissime quoque demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimusque nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus AB, in partes AC, CB, ita vt numerus ex AB, in CB, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur vtraq; pars AC, CB, impar est; aut maior AC, impar, & minor CB, par; aut contra, maior AC, par, & minor CB, impar; aut denique vtraq; pars AC, CB, par. Sit primum vtraq; pars AC, CB, impar, [d] *ideoq; totus numerus AB, par.* [e] *Igitur qui sit ex AB, in CB, par est: qui vero ex AC, in se sit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui sit ex AC, in se; erit par numerus impari æqualis, quod fieri non potest.*

A ——— C ——— B
D.— E—
d 22. noni.
e 28. noni.

DEINDE sit AC, impar, & CB, par; ideoq; ex scholio propos. 32. huius lib. totus AB, impar. [f] *Quia ergo numerus ex AB, impare in parem CB, factus, par est, & numerus ex impare AC, in C, genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis, quod est absurdum.*

f 28. noni.

TERTIO sit AC, par, & CB, impar; ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB, impar. [g] *Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar est, & numerus ex pare AC, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis, quod absurdum est.*

g 29. noni.

QVARTO sit vtraq; pars AC, CB, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione AC, ad CB, [h] *erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt. sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt AC, ad CB, ita D, ad E; erit conuertendo, vt CB, ad AC, ita E, ad D: Et componendo, vt AB, ad AC, ita totus DE, ad D.* [i] *Est autem, vt AB, ad AC, ita AC: ad CB; quod numerus factus ex AB, in CB, æqualis ponatur quadrato medij AC. Igitur erit quoq; vt totus DE, ad D, ita D, ad E,* [k] *ac proinde numerus, qui fit ex toto DE, in E, æqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D, E, factus est in partes D, E, quarum vel vtroq; impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto DE, in partem E, æqualis sit quadrato alterius partis D, quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero AB, quando vtraq; pars AC, CB, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.*

h 24. septi.
i 20. septim.
k 20. septi.

xxxiii.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex iis, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par. Atque adeo dimi-
a 8. pro. diam partem habebit. Itaq; cum A, metiatur B, per C, a metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam vero est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidii ipsius B, pars ab eo-
b 40. septi. dem A, denominata. b Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . C . . . .
B . . . . . .

xxxiv.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoque primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D, qui necessario impar erit. Nam si sit
a 28. noni. par, cum metiatur imparem A; a erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum, ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiens, (est enim C, par, cum
b 30. noni. dimidium habeat B) b metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . . B . . . . . .
C . . . . . D—

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic
c 31. noni. deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, c primus quoq; erit ad quadruplum, qui dupli duplus est. Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantum.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli;
a 11. noni. erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. a Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, vtpote dupli à binario: metietur quemlibet ipsorum B, B, C, D, E, par numerus per numerum parem: Ac propterea quilibet pariter par erit ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E,
b 13. noni. sint ab vnitate continue proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; b nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum; Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM

HINC cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint enim A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo si ordo numerorum à binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantū inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par. (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum) Atq; ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo tam ipsius I, dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli: Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, præter eos, qui à binario sunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I---- H---- G---

xxxvj.

THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E, *a* Igitur sit A, ex D, in E: sed idem A, sit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, *b* Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....
B..... C..
D---- E---

a 9. pro.
b 19. sept.

SCHOLIVM.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantum, constat ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium præter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparem.

Impares 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantum. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

THEOR. 32 PROPOS. 34. xxxvij

SI par numerus neque à binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neq; sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

A .....

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, *a* cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum, ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque A binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

a 29. noni.

SCHOLIVM I.

FACILE ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. xxxviij.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F; & ex B, C, secundo, & E, F, vltimo detrahantur CG, FH, primo A, æquales. Dico esse vt BG, ad A, ita EH, ad A, B, C, & D, simul. Detrahatur FI, ipsi BC, & FK, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur FI, æqualis est ipsi BC, & ablatus FH, ablato CG; erit & reliquus

A .....
B .... G C
D .....
E ..... K ..... I .... H ..... F

IH, reliquo BG, æqualis. Quia vero est vt A, ad BC, ita BC, ad D, & D, ad EF; conuertendoque vt EF, ad D, ita D, ad BC, & BC, ad A; Atque est KF, ipsi D, & IF, ipsi BC, & HF, ipsi A, æqualis: Erit quoq; vt EF, ad KF, ita KF, ad IF, & IF, ad HF. Diuidendo igitur vt EK, ad KF, ita KI, ad IF, & IH, ad HF; *a* Ac proinde ita etiam erunt o-

a 12. septi.

A.
B . . G . C
D .....
E ..... K ..... I . . H . F

mnes EK, KI, IH, ad omnes KF, IF, HF, hoc est, totus EH, ad D, BC, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales KF, IF, HF,) vt IH, ad HF, hoc est, vt BG, ad A; sunt enim BG, & A, ipsis IH, & HF, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum continue proportionalium, si modo primus secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus à secundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium: Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedũt. Si igitur adiiciatur vltimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio prop. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo appositio, si primus numerus nimirum vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium excepto vltimo. si secundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1003. procreabitur summa omnium 3280. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

xxxix. ## THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æ-
a 19. sept. quo, vt A, ad D, ita E, ad I; *a* Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, se-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G——62. H, 124. I, 248. F——496
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O—— P——

b 7. pron. cundo in E, tertium: Factus est autem F; ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; *b* ideoque I, ipsum F, metietur per A; binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, se-
c 35. noni. cundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N, *c* Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus eidem E, per constructionem, est
d 7. pro. æqualis) erit compositus ex L N, nimirum ipse F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare
e 11. pron. cum vnitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (Cum enim F, factus sit ex E, in D; *d* me-
f 11. pron. tietur D, ipsum F; *e* atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C. *f* qui ipsum D, metiuntur. Rursus
g 11. pron. cum I, ipsum F, metiatur vt ostensum est, *g* metientur, quoque eundem F, numeri E, G, H, *h* qui ipsum I, pro-
h 12. noni. pter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, vt mox ostendemus; Erunt vnitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus.
i 9. pron. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F, per P; atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F,
k 19. sept. factus est ex E, in D. Idem ergo numerus sit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium: *k* ac propterea est vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cum A, B, C, D, ab vnitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, *l* vltimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum
l 13. oct. A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P, neque igitur E, ipsum P, metietur. Cum er-
m 31. sept. go E, primus sit, *m* erunt E, & P, inter se primi; *n* ideoque in sua proportione minimi. *o* Ac proinde æque metie-
n 23. sept. tur E, ipsum O, & P, ipsum D. *p* Nullus vero alius præter A, B, C, ipsum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui ali-
o 21. sexti. quis ipsorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex
p 23. octau. æquo, vt B, ad D, ita E, ad H. *q* Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E,
q 18. sept. tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, *r* atq; adeo
r 29. sept. erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum, ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli pla proportione, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuẽtus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demõstratione theorematis, & facile ex subiectis exem-

exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est, erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis, illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus, hinc exordientes.

I.

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat Quotientes D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium [a] *erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.*

A, 48.
B, 8. C, 3.
D, 6. E, 16.

a 19. septi.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse, vt B, ad C, ita G, ad F. Et vt C, ad D, ita H, ad G. Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proxime demonstrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H: erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

A, 48.
B, 3. C, 4. D, 8. E, 6.
F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continue proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continue proportionales, sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continue proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

A, 15.
B, 1. C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15. G $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{1}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

IV.

SI sint quotuis numeri quicunq;, & totidem alii in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum summa D: Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A, B, C, sigillatim ita H, ad E, F, G, sigillatim. Cum enim sit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, simul ad B, ita E, F, simul ad F: Vt autem B, ad C, ita est F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, simul, ad C, ita erit E, F, simul, ad G: Et componendo, vt A, B, C, simul, hoc est, vt D, ad C, ita E, F, G, & simul. hoc est, H, ad G.

A, 3. B, 6. C, 20. D, 29.
E, 6. F, 12. G, 40. H, 58.

QVIA igitur est, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad E.

DENIQVE quia est, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod est propositum. Eademq; ratio est de pluribus.

V.

SI sint quotuis numeri quicunq;,& totidem alii in eisdem proportionibus; summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.

NAM, vt in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summæ priorum ad primum, quæ summæ posteriorum ad primum: ac proinde vtriusque proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuisione antecedentis termini per consequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, si vtraque summa seorsum per primos numeros, quæq; per suum, diuidatur. Eademq; ratio est, si per secundos, tertios, quartos, &c. diuisio fiat. Constat ergo propositum.

VI.

SI summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur, Et Quotientum summa per ipsos Quotientes; Et horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes; & sic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis semper iidem primi Quotientes ordine conuerso.

SINT continue proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorum summa E, per ipsos diuisa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum summa K, per eos diuisa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos esse eosdem alternis, ordine conuerso, hoc est, F, & O, eosdem esse: Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 15.
F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$. K, $28\frac{1}{8}$.
L, $1\frac{7}{8}$. M, $3\frac{3}{4}$. N, $7\frac{1}{2}$. O, 15.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandem continuam porportionem habent conuerso ordine, quam numeri A, B, C, D. Et quotientes L, M, N, O, conuerso ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc est, eandem eodem ordine, quam numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cum ex diuisione antecedentis termini per consequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuisione E, per A, qui ex diuisione K, per I. Cum ergo Quotientes sint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod est propositum.

VII.

SI summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur: erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, vel denique (si Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medii Quotientis in se.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D, E, F, quorum summa G, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum summa O. Dico summæ O, æqualem esse numerum, qui fit, ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, sunt continue proportionales

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32. G, 63.
H, 63. I, $31\frac{1}{2}$. K, $15\frac{3}{4}$. L, $7\frac{7}{8}$. M, $3\frac{15}{16}$. N, $1\frac{31}{32}$. O, $124\frac{1}{2}$.

a 19. septi. *conuerso ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, vt I, ad H.* a *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor. summa O, diuisa per H, I, K, L, M, N, producit eosdem Quotientes conuerso ordine, hoc est summa O, diuisa per H, facit Quotientem N, producetur summa O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continue proportionales A, B, C, D, E, quorum summa F, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum summa M, Dico summæ M, æqualem esse numerum genitum ex G, in

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 31.
G, 31. H, $15\frac{1}{2}$. I, $7\frac{3}{4}$. K, $3\frac{7}{8}$. L, $1\frac{15}{16}$. M, $60\frac{1}{16}$.

b 20. septi. *L, & ex H, in K, & ex I, in seipsum. Quod enim æqualis sit ei, qui fit ex G, in I, & ex H, in K, demonstrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, continue proportionales sunt.* b *erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum.*

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri continue proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quotcunq; continue proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0384-3

rim diuidatur; erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continue proportionales, eorumq; summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sane est, posse reperiri quotcunq; numeros continue proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunq;, eorumque summam per vtrumque diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq; summa 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. sunt numeri quæsiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quam numerus ex multiplicatione eorum productus est $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVMERORVM FRACTORVM

DEMONSTRATIONES.

I.

DVÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ AB, CB, eundem habentes denominatorem, & numerator C, sit vnitas. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam CB, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutias C B, in A B, includitur; propterea quod minutia A B, diuiditur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot vnitates sunt in A, ita vt quælibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. [a] Igitur eadem pars est vnitas C, numeri A, quæ minutia CB, minutiæ AB; ac proinde est, vt vnitas C, ad A, ita minutia CB, ad minutiam AB: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutiam AB, ad minutiam CB. quod est propositum.

A, 6. / B, 11. — C, 1. / B, 11.

a 29. defin.

QVONIAM vero minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neq; enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quod falso putant, earum demonstrationes nõ posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusuis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas asserimus.

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. est 4. & $\frac{6}{11}$. sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. in numeratorem 6. Vel ita 24 ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porro propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq; duabus minutiis eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quæcunq; AB. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia AB, ad suum integrum. Sumatur minutia CB, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquiualet: quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat. [b] Quoniam igitur est, vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et vt C, ad D, ita minutia CB, ad minutiam DB; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia AB, ad minutiam DB, hoc est, ad integrum. quod est propositum.

A, 3. / B, 5. — C, 1. / B, 5. — D, 5. / B, 5.

b 1. huius.

ALITER. Sit primum datæ minutiæ AB, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, sit pars numeri, B, ab ipso B,

A, 1. / B, 5. — C, 1. / C, 30.

denomi-

c 20. def. denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vnitas A, numeri B, quæ minutia AB, integri C. c Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C, quod est propositum.

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia DB, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ AB. d Et quia est vt A, ad D; numerator ad numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam DB: Et vt D, ad B, ita minutia DB, ad integrum C, vt proxime demonstrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C. Quod est propositum.

d 1. huius.

A, 3. D, 1. C, 1.
B, 5. B, 5. C, 30.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

c 2. huius. SIT quælibet minutia AB. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. c Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad suum integrum C, erit permutando, vt A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et conuertendo, vt minutia AB, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrum C, sit pars denominatoris B. (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cum enim æque metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoq; minutia AB, numeratoris A, hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata. quod est propositum.

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. sunt 18. & quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinq;.) liquido constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium vnitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. significat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IV.

DATÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonstratur hic de quibusuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ AB, CB, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CB, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. f Quia enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB; (Nam g cum sit, vt C, ad B, ita minutia C, B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB,) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam CB, quod est propositum.

f 2. huius.

A, 6. C, 3.
B, 7. B, 7.

g 2. huius.

DATÆ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 24. & $\frac{3}{4}$. sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CD, vt est F, ad H. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, h erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, i ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; k erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam CD. Nam l cum sit, vt C, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, vt minutia AB, ad minutiam CD. quod est propositum.

h 18. septi.
i 2. huius.
k 18. sept.
l 2. huius.

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B, 3. D, 5.
H, 15.

SI duæ

F, AB.
H, Integrum.
G, CD.

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.$ sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoq; minutia AB, minutiæ CD, æqualis, si minor minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter vero ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum AB, CD, vt est H, ad summam numerorum F, G. [m] *Quoniam enim est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita est G, ad H, (nam* [n] *vt minutia CD, ad integrum, ita est C, ad D.* [o] *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quod G, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad summam minutiarum AB, CD, ita H, ad summam numerorum F, G, quod est propositum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B, 3. D, 5.
H, 15.

m 5. huius.
n 2. huius.
o 18. septi.

AB, CD, F, G.
CD, G.
Integrum. H.

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.$ particulæ numeri 30 cuius $\frac{2}{3}$. sunt 20. & $\frac{4}{5}$ eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 12. summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [p] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E,* [q] *ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoq; minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod est propositum.*

D, 105. E, 35.
A, 5. A, 5.
B, 7. C, 21.

p 17. sept.
q 5. huius.

DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}.\frac{5}{21}.$ sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$ sunt 30. & $\frac{5}{21}$ eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIÆ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est; Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [r] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ AB, CD. quod est propositum.*

A, 3. C, 9
B, 4. D, 12.

r 2. huius.

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [s] *Est autem, Et minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

s 2. huius.

DEIN-

a 2. huius. DEINDE *sit maior proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico maiorem esse minutiam AB, quam CD.* a *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AC, ad integrum, quam minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quam minutia CD, quod est propositum.*

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

b 2. huius. *VERVM sit iam minutia AB, maior, quam minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quam C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, minoris ad integrum, quam minutiæ CD, minoris ad idem integrum.* b *Cum ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoq; maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod est propositum.*

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. integer numerus sit 24. cuius tam $\frac{3}{4}$. quam $\frac{9}{12}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIÆ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator, maiorem proportionem habet, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quam denominator.

c 8. huius. *SINT duæ minutiæ AB, CD, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D:* c *ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.*

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

d 8. huius. *SED sint iam minutiæ æquales AB, & CD. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D.* d *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.*

c 8. huius. *DEINDE sit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem esse minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D,* c *ac propterea maior erit minutia AB, quam CD. quod est propositum.*

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5.

f 8. huius. *VERVM sit iam minutia AB, maior quam CD. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quam B, ad D.* f *Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum.*

SINT duæ minutiæ $\frac{5}{6}$. $\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{5}{6}$. hoc est 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$ id est, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{9}{10}$. id est, 60. maiorem esse minutia $\frac{3}{5}$. hoc est numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 5.
G, 15.

g 18. sept. h 8. huius. i 18. sept. k 9. huius. *DVÆ minutiæ AB, CD, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G;* g *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* h *Quare minutiæ AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C. D, multiplicantes B. faciunt F, G,* i *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* k *Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod est propositum.*

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

l 2. huius. *SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam BC, vnitati A, æqualem esse.* l *Quia enim est, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id est, vnitati, erit æqualis. quod est propositum.*

A, 1. B, 6.
C, 6.

DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius dominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam BC, integro A, æqualem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitatibus æqualis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex def. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnit. &c.

A, 7. C, 42.
D, 1. C, 6.

m 8. huius. *Cum ergo minutiarum AD, BC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant,* m *ipsæ inter se æquales erunt. Quare cum minutia AD, sit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoq; minutia BC, eidem integro A, æqualis. quod est propositum.*

XII. DA-

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore 8: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramq; minutiam CB, AD, duplam esse minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, CB, eundem habeant denominatorem; [a] *erit vt C, ad A, numerator, ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus, ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.*

A, 3. C, 6. A, 3.
B, 8. B, 8. D, 4.

a 4. huius.

RVRSVS quia minutiæ AB, AD, eundem habent numeratorem; [b] *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.*

b 7. hui.

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramque minutiam AC, DB, dimidium esse minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, AC, eundem habeant numeratorem; [c] *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita AC, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium, erit & minutia AC, minutiæ AB, dimidium. quod est propositum.*

A, 6. A, 6. D, 3.
B, 11. C, 22. B, 11.

c 7. huius.

RVRSVS cum minutiæ AB, DB, habeant eundem denominatorem; [d] *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita DB, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia DB, minutiæ AB, dimidium. quod est propositum.*

d 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim AB, minutia minutiæ CD, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ FG, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B. [e] *Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum, nimirum ad minutiam CD, cuius integrum est E:* [f] *Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quod A, B, ipsum C, multiplicantes faciant F, H: Erit quoque, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad H. Rursus* [g] *quia est, vt C, ad D, ita minutia CD, ad suum integrum E:* [h] *Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicans fecerit H, G: Erit quoque vt CD, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad H: Et vt minutia CD, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt AB, minutia minutiæ CD, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem AB, minutia minutiæ CD, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ AB, minutiæ CD; cum eius valorem respectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E.* [i] *Cum ergo quoque sit, vt F, ad G, ita minutia FG, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplices K, & FG: ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutia, erit quoq; simplex minutia FG, æqualis datæ minutiæ, AB, respectu minutiæ CD, cuius integrum E. quod est propositum.*

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, 1/2.

c 2. huius.
f 18. septi.
g 2. huius.
h 17. sept.

A B. F.
C D. H.
E. G.

i 2. huius.

SIT 2/3. minutia minutiæ 3/4. respectu integri 24. Huius numeri 3/4. sunt 18. & huius numeri 2/3. sunt 12. qui numerus est 1/2. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam 6/12. quæ huic 1/2. æquivalet, qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

SIT primum AB, minutia minutiæ CD. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D, fiat F. [k] *Et quoniam minutia EF, exprimit*

k 13. huius.

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

valorem minutiæ AB, respectu minutiæ CD; reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam EF. quod est propositum.

DEINDE sit AB, minutia minutiarum CD, EF, ita vt CD, sit minutia minutiæ EF, & AB, minutia minutiæ CD. Fiat G, ex A, in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam IK, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse. [a] Nam minutia GH, æqualis est, minutiæ AB, minutiæ CD, respectu minutiæ EF, tanquam integri cuiusdam. [b] Item minutia IK, æqualis est minutiæ GH, (hoc est, minutiæ AB, minutiæ CD.) minutiæ EF, respectu integri, cuius EF, est minutia; & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia IK, ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum. quod est propositum.

a 13. huius.
b 13. huius.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

SIT minutia $\frac{2}{3}$. minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ AB, CD, quarum AB, ad aliam æqualem reducenda sit cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam GH, minutiæ AB, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans AB, facit G, H, [c] erit vt A, ad B, ita G, ad H, [d] ac proinde minutiæ AB, GH, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F, [e] metitur C, ipsum F, per D: [f] Metietur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunt que numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; [g] constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K.) constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus K, æqualis est minutiæ M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ CD, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quo circa numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.

c 17. sept.
d 7. huius.
e 9. prom.
f 5. pro.
g 13. huius.

G, 24. K, 8.
A, 2. F, 12. C, 3.
B, 3. D, 4.
H, 36. L, 9.
C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$. M, $\frac{1}{8}$.

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est. Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ AB, CD: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias AB, CD, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æquatur numero F, facto ex C, secundo in B, tertium, [h] erit vt A, primus ad C, secundum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem. [i] Quare minutiæ AB, CD, æquales sunt. VEL sic. [k] Quoniam est vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoq; minutia AB, minutiæ CD, æqualis. quod est propositum.

h 19. septi.
i 9. huius.
k 5. huius.

E, 24. F, 24.
A, 2. C, 8.
B, 3. D, 12.

SED

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerum E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [a] erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem. [b] Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic. [c] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F, ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoq; numeri E, F, æquales, quod est propositum.

a 9. huius. b 19. septi. c 5. huius.

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoq; AB, maiorem esse minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quam F; gignetur F, ex minore numero quam A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium, [d] erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autem maior proportio A, ad C, quam G, ad C; quod A, maior sit, quam G, Igitur maior quoque; [e] erit proportio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia AB, maior erit, quam minutia CD. VEL sic. [f] Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, maior quam F; erit quoq; minutia AB, maior quam minutia CD. Quod est propositum.

E, 24. F, 21.
G 1 1/4 A, 2. C, 7.
B, 3. D, 12.

d 19. septi. e 9. huius. f 5. huius.

VERVM sit iam minutia AB, maior quam minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB, quam minutia CD, [g] erit maior proportio A, ad C, quam B, ad D Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G. [h] Idem ergo numerus fiet ex G, primo, in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quam ex G, in D; propterea quod A, maior est quam G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quam F, ex C, in B, genitus. VEL sic. [i] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: Est autem AB, minutia maior quam minutia CD, erit quoq; E, maior quam F. Quod est propositum.

g 9. huius. h 19. septi. i 5. huius.

ATQVE hac est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, sit æqualis. [k] Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; suntque C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione [l] sunt autem & minimi, cum primi inter se sint quod est absurdum.

A, 11. C, ∽
B, 12. D, ∽

k 8. hui. l 23. septi.

SI vero A, B, non sint inter se primi; [m] sit eorum maxima mensura C, quæ metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ AB, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; [n] producentur A, B, ex C, in D, E. [o] Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, [p] ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. libr. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.

A, 36. D, 3.
B, 48. E, 4.
C, 12.

m 2. septi. n 9. pro. o 17. sept. p 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datam C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ AB, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [q] fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. [r] Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; [s] ideoque minutiæ AB, EC, æquales erunt. quod est propositum.

A, 3. E, 9.
B, 4. C, 12.
D, 36.

q 9. pron. r 19. septi. s 8. huius.

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia AB, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam EC. Quia ergo minutiæ AB, EC, æquales sunt; [t] erit vt A, ad B, ita E, ad C. [u] Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. [x] Igitur B, metietur D, per E. Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.

A, 3. E, ∽
B, 4. C, 10.
D, 30.

t 8. huius. u 19. septi. x 7. pron.

a 8. huius.

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam AB, cuius numerator A, & denominator B. [a] *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia AB, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.*

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator vero, numerus diuidiuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est. Verbi gratia. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per b 19. huius. 4. [b] *Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.*

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primum addendæ duæ minutiæ AB, CB, eiusdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, esse summam ex additione minutiarum AB, CB, collectam. Quoniam a 4. huius. *enim minutiæ eundem habent denominatorem;* [c] *erit vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita*

d 4. huius. A, 3. C, 4. D, 7.
B, 10. B, 10. B, 10.

minutiæ AB, CB, simul ad minutiam CB. [d] *Vt autem C, ad D, ita quoque est minutia CB, ad minutiam DB. Igitur ex æquo erit, vt A, C, simul ad D, ita minutiæ AB, CB, simul ad minutiam DB. Cum ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoq; minutiæ AB, CB, simul æquales minutiæ DB. quod est propositum.*

DEINDE sint addendæ duæ minutiæ AB, CD, diuersarũ denominationũ. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorẽ posterioris; & C, numerator posterioris, in B, denominatorẽ prioris collectaq; fiat summa E, ex duob. illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorũ B, D, procreatus. Dico minutiã EF, esse summam ex datis duab. minutiis AB, CD, collectam. c 6. huius. [c] *Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam*

A, 2. C, 3. E, 17.
B, 3. D, 4. F, 12.

productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit conuertendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita E, ad F: f 2. huius. [f] *Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia EF, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minutia EF, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum AB, CD, æqualis erit minutiæ EF, ac proinde minutia EF, summa erit ex minutiis AB, CD, collecta. quod est propositum.*

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores, vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutiis AB, CD, æquales, vt ex demonstr. propos. 10. constat: si summæ E. productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF, summa minutiarum AB, CD, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas AB, CD, reductæ sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

IAM vero datis pluribus minutiis, addenda primum erunt duæ primæ: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutiis, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia. $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{25}{60}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{5}$. est $\frac{3}{15}$ $\frac{12}{15}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{15}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{5}$. eiusdem 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia AB, detrahenda sit minor CB, sintque primum hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, reliquam esse post detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur A, ex

A, 7. C, 3. D, 4.
B, 10. B, 10. B, 10.

C, & D, Minutia ergo AB, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est, duarum minutiarum CB, DB, vt in prima parte antecedentis proposit. ostensum est. Quare detracta minutia CB, ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB. quod est propositum.

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor CD, ex maiore AB. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris fiat E, & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH, esse reliquã post detractio-

F, 15. E, 8.
A, 3. C, 2. G, 7.
B, 4. D, 5. H, 20.

g 17. sept. i 2. huius. i 17. sept. k 2. hui. *nem minutiæ CD, ex minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit FH, & erit vt A, ad B, ita F, ad H:* [h] *vt autem A, ad B, ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque vt F, ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multiplicans C, D, facit E, H,* [i] *erit vt C, ad D, ita E, ad H:* [k] *Vt autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit*

quoque

quoq; vt E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur est vt E, primus ad H, secundum, ita minutia CD, tertius numerus ad integrum, quartum numerum: [a] Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia GH, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutiæ CD, GH, tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul, ad H; ita est F, ipsis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutiæ CD, GH, simul ad integrum. Cum ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam AB, ad integrum; erit quoq; vt minutia AB, ad integrum, ita minutiæ CD, GH, simul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutia AB, & minutiæ CD, GH, simul. Detracta igitur minutia CD, ex minutia AB, reliqua erit minutia GH. quod est propositum. [a] 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duæ minutiæ eiusdem denominationis minutiis datis æquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G. supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia GH, reliqua post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propos. ostensum est.

IAM vero si dentur integra vna cum minutiis, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. [b] Quod si minutia detrahenda, maior sit quam ea à qua fieri debet subtractio, [b] reducenda prius erit vnitæ vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{7}$. ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. super sunt 4. & subductis $\frac{2}{7}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{28}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{28}$. At si subtrahendæ sint $4\frac{2}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt q; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{2}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{2}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{2}{28}$. [b] 11. huius.

SINT verbi gratia $\frac{1}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{1}{4}$. hoc est, ex 30. superfunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia AB, per minutiam CD, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum AC, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum AB, CD, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, [c] Eritque vt minutia EF, ad minutiam CD, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicãs A, F. facit E, H; [d] erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutãdo, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicãs E, & B, facit G, & F; [e] erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E, F, ad minutiam CD: [f] Et vt A, ad B, ita est minutia AB, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia EF, ad minutiam CD, ita minutia AB, ad 1. Quapropter ex Multiplicationis, minutia EF, defin. producitur ex multiplicatione minutiæ AB, in minutiam CD. Quod est propositum.

	H, 60.		G, 40.		
A,	2.	C,	4.	E,	8.
B,	3.	D,	5.	F,	15.

A,	G.
E,	F.
B,	H.

[c] 5. huius. [d] 17. septi. [e] 17. septi. [f] 2. huius.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quasi minutiæ, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiæ propositæ denominator; propterea quod vnitas integro numero suppositæ in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

SI vero integris minutiæ adhæreant, [g] reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, atq; ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator constitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$. [g] 11. huius.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factum est. sed cum quadrato numeri integri assumpti: quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaq; sint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdem faciant numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam $\frac{2}{3}$. num. 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit num. 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. num. 3600. hoc est quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia AB, per minutiam CD, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita vt diuiso A, per C. Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam EF. esse Quotientem diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [h] gignetur A, ex C in E, & B, ex D, in F. [i] Igitur minutia AB, producta est ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam C D; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad 1. Quocirca cum sit, vt AB, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex def. Diuisionis minutia EF, Quotiens diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD. quod est propositum.

A,	12.	C,	3.	E,	4.
B,	16.	D,	8.	F,	2.
A,	6.	C,	3.	E,	2.
B,	8.	D,	8.	F,	1.
A,	3.	C,	3.	E,	1.
B,	8.	D,	4.	F,	2.

[h] 9. prom. [i] 22. huius.

k 15. huius. DEINDE numeri C,D, minutiæ CD, non metiantur numeros A,B, minutiæ AB. [k] Reducatur minutia AF, ad aliam æqualem EF, cuius numeros EF, numeri C,D, minutiæ CD, metiantur per numeros G,H, ex A, in D, & ex C, in B, produ-

E, 24. A, 2. C, 3. G, 8.
F, 36. B, 3. K, 12. D, 4. H, 9.

E, 90. A, 6. C, 3. G, 30.
F, 135. B, 9. K, 15. D, 5. H, 27.

cos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A,B, vt gignantur E,F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C,D, metiuntur F, F, per G,H, erit minutia G,H, Quotiens diuisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.

QVIA vero G,H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiusuis minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atq; hoc verum est in omnibus minutiis, siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda secun-

E, 48. A, 8. C, 2. G, 4. L, 24.
F, 54. B, 9. K, 6. D, 3. H, 3. M, 18.

dum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet, atque in hoc appositio exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B, metiuntur per G,H, & numeros E, F, procreatos ex A,B, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiuntur per L, M: atque adeo tam minutia G H, quam L M, Quotiens est minutiæ A B, per minutiam G, D, diuisæ.

IAM vero si numerus integer diuidendus sit per minutiam vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appositio priori exemplo perspicuum est. Si autem minutiæ $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

8/1. 1/2. 16/1.

2/1. 8/1. 1/16.

QVOD si minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{7}{2}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde quotiens erit $2\frac{1}{8}$. Vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

3/4. 7/2. 21/8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{1}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{5}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$ id est, minutiam $2\frac{1}{8}$. quæ proxime inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inserenda, sitque primum sensus, addendã esse minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiã CD: hoc est, addendas esse $\frac{1}{4}$. vnius septimæ ad $\frac{2}{3}$. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatore prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & composito numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam GH, æqualem esse minutiæ A B, respectu vnius particulæ minutiæ

F, 24.
A, 3. C, 6. G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

l 14. huius. CD, additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ CD, [l] reducitur ad simplicem minutiam AH, cuius numerator idem est, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appositio hoc exemplo apparet. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat F, H; [m] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [n] ac propterea minutiæ CD. FH, æquales erunt) efficitur, minutiam GH, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum FH, AH, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,)

A, 3. D, 1. A, 3.
B, 4. 7. H, 28.

m 17. septi.
n 8. huius.

ex A.) denominator autem H, idem qui earundem minutiarum FH, AH: efficiatur, inquam, minutiam GH, summæ esse minutiarum FH, AH, vt initio propos. 20. ostensum est; hoc est summam ex minutia AB, respectu vnius particulæ minutiæ CD, quæ minutiæ AH, ostensa est æqualis, & ex minutia CD, quæ ostensa est æqualis minutiæ FH, collectam. Minutia igitur GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD; id est, æqualis est minutiæ AB, vnius particulæ minutiæ CD, & minutiæ CD, simul. Quod est propositum.

IAM vero si plures minutiæ AB, CD, EF, GH, sint inserendæ, hoc est, si minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH: & minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH: & minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, addi debeant ad minutiam GH, ita agendum erit: Ex G, numeratore postremæ minutiæ GH, in F, denominatorem penultimæ minutiæ EF, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdem penultimæ minutiæ EF, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatore antepenultimæ minutiæ CD, addatur C, numerator eiusdem minutiæ CD, vt fiat M, producto quoq; ex M, in B, denominatorem proximæ antecedentis minutiæ AB, adiiciatur A, numerator eiusdem minutiæ AB, vt fiat P: Atq; ita deinceps ducatur semper vltimus numerus cõflatus in denominatorem proximæ antecedentis minutiæ; producto numerator eiusdem proximæ antecedentis minutiæ adiiciatur, donec nulla minutia supersit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, posit hac N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam PQ, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam vt in duabus minutijs ostensum est, minutia KL, producitur ex insitione minutiæ EF, in minutiã GH, hoc est, æqualis est summæ ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia GH, collectæ. Deinde minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, [d] facit minutiam simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis positam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, E, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [e] æqualis est minutiæ KL; [f] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrauimus, minutia MN, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui sit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutiæ MN, summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, atque ex minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH. Rursus minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, [g] facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorũ H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus [h] æqualis est minutiæ MN, [i] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur PQ, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propos. 20. monstratum est; æqualis quoq; erit eadem minutia PQ, summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

P, 119. M, 59. K, 14.
A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4 F, 5. H, 5
Q, 120. N, 60. L, 15.

d 14. huius
e 8. huius.
f 17. septi.
g 14. hui.
h 8. huius.
i 17. septi.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam GH, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD, [k] reducitur ab minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appositum demonstrat: [l] Minutia quoque FH, æqualis est minutiæ CD; [m] quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (quæ ex iis, quæ ad initium propos. 20. ostendimus, æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD; (hoc est, ex minutia FH,) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH.) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc posteriori sensu. Quod est propositum.

E, 18. F, 24.
A, 3. C, 6. G, 42.
B, 4. D, 7. H, 28.

k 14. hui.
l 8. huius.
m 17. septi.

A, 3. C, 6. E, 18.
B, 4. D, 7. H, 28.

QVOD si plures sint minutiæ inserendæ AB, CD, EF, GH, hoc est, minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia EF, minutiæ GH, addendæ sint ad minutiã GH, ita agendũ erit. Ducatur G, in F, producto q, numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numero q, producto adiiciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoq, numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vsque locum assumptarum productus, donec nulla supersit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus est, supponatur numerus Q, ex omnib. denominatorib. productus, vt in priori sensu. Dico minutiã PQ, produci ex insitione dictarũ minutiarũ. si insitio intelligatur, vt dictũ est. Nã, vt in duabus minutijs demonstratũ est, minutia KL, producitur ex insitione minutiarum EF, GH, id est, æqualis est summæ collectæ ex minutia EF, totius minutiæ GH, &

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

m 14. hui. *ex minutia, GH. Deinde minutia CD, totius minutiæ EF, totius minutiæ GH,* [m] *facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D, procreatus;*

n 8. huius. o 17. sept.

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4 F, 3. H, 5.

Q. 130. N, 60. L, 15.

[n] *æqualis est minutiæ KL;* [o] *quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandē quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia MN, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quē D, in K, procreat, æqualis sit per ea, quæ initio propos. 20. ostensa sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque exē minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator vero est idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH. Rursus minutia AB, minutiæ CD,*

p 14. huius q 8. huius. r 17. sept.

minutiæ EF, minutiæ GH, [p] *facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus. siue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem est idem Q, ex B, in N, procreatus,* [q] *æqualis est minutiæ MN;* [r] *quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis sit, ex iis, quæ initio propos. 20. demonstrata sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem est Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est idem Q; æqualis quoq; erit summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH, & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH. Quod est propositum. Eademque de pluribus est ratio.*

DE PROPORTIONVM *compositione.*

EXPEDITIS *ijs, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propos. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionū, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in ijs propositionib. vbi duplicatam, triplicatā aut compositam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, non esse vero additionem proportionum ita vt duplicata, vel triplicata proportio sit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatave: Item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit vere totum quippiam, cuius partes sint proportiones ex quibus componi dicitur, vt plerunq; interpretes Euclid. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest; quod pars esset vel æqualis, vel maior toto. Nam cum hæc compositio intelligenda sit, siue maior quantitas cum minore, siue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. ostendimus, si positis tribus terminis continue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. sed vere esset duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Euclid. interpretes putant, quis non videt partem esse maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars est, maiorem esse proportione 1. ad 100. Hic autem 4. 4. 4, partem æqualem esse toti? Sic etiam, si, positis his tribus terminis non continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coaceruaretur ex proportionib. 4. ad 2. & 2. ad 8. tamquam ex partibus, vt idem auctores contendunt, esset quoq; pars maior quam totum, quod proportio dupla 4, ad 2. maior sit proportione subdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posterioris vero 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportionem 24. ad 48. compositam esse ex proportionibus laterum, hoc est, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (si hæc compositio est vera additio) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subdupla 24. ad 48. Pari ratione. si proportio subdupla 24. ad 48. vere totum est, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harum ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subtrahi potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione suboctupla 2. ad 16. ex proportione subdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior*

24. 48.
12. 2. 3. 16.

quā ea, a qua facta est subtractio. Quod si posterioris numeri plani 48. latera sumātur 12. & 4. erit vna partiū cō-

12. 2. 12. 4.

ponentiū nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et subtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. supereesset adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior est quā totū, hoc est, quā proportio 24. ad 48. Rursus sequeretur, totum non augeri, etiamsi ei infinitæ partes adderentur. Positis n. his quatuor terminis 12. 4. 2. 1. si proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones simul sumptæ proportioni 12. ad 1. sint æquales: si cum illis terminis continentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex sex proportionibus, quarum priores tres sunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia absurda sunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod secundum communem hominum sensum duæ proportiones triplæ constituant proportionem sextuplam, non autem noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quamquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hisce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, si agens aliquod sit, vt 3. illud idem duplo potentius factum esse vt 6. non autem vt 9. Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5, moueant simul sumpta, vt 8. non autem ex illis constitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem com-

tem compositæ esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non posse dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis, ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non posset habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non statim intelligat: agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quam agens vt 6.

LIQVET ergo huiusmodi compositionem proportionum non esse additionem, sed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonstrauimus, vbi etiam exposuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus composita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defi. 10. lib. 5. explicauimus, cur positis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continue proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata) quarum quælibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, siue per proportionum denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregie Cardanus præcepit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligendæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis, quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, suppositis prius vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summam

3	×	5	12	×	40	18	×	3	54	×	6
1		1	4		8	7		2	21		4
8			256			57			342		
1			32			14			84		

colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraq; octupla est. Sic etiam ex proportione dupla superquadrupartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecima quarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quam 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligendum est.

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est,

8	×	3	256	×	12	57	×	3	342	×	6
1		1	32		4	14		2	84		4
5			640			72			864		
1.			128.			28			336.		

TERTIO si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est per proportionem duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur q; ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3	—	2	6	12	—	10	120	3	—	8	24	9	—	16	144
1	—	1	1	4	—	5.	20.	2	—	5.	10	6	—	10	60

QVARTO & vltimo si proportio sextupla diuidenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

6	—	1	6	120	—	4	480	24	—	2	48	144	—	6	864
1	—	3.	3.	20	—	12.	240.	10.	—	3.	30.	16	—	9.	540.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutiis.

IAM vero multiplicationem proportionū à nobis præscriptam, quā auctores additionem falso nuncupant, cū proportionū compositione, de qua Eulides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, cōuenire, atq; adeo compositionē illā Euclidis vere esse multipicationem, non autem additionem, vt diximus hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducatur q; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex consequente vero B, in consequētem D, fiat F.

Dico

Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult

A,	6.	C,	12.	B,	2.	D,	4.	A,	3.	C,	6.	B,	2.	D,	5.
E,	72.	F,	8.	G,	24.			E,	18.	F,	10.	G,	12.		

defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia
a 18. septi. *ex A, B, in C, fiunt E, & G,* [a] *erit vt A, ad E, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F,* [b] *erit vt C, ad D, ita G, ad F.*
b 17. septi. *Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.*

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam iidem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F, quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C,

A,	9.	C,	3.	B,	1.	D,	1.	A,	4.	C,	6.	B,	2.	D,	3.
E,	9.	F,	3.	G,	27.			E,	8.	F,	12.	G,	24.		

ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, [c] *erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E;* [d] *erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo*
c 1. septim. *proportio G, ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoq; proportio A, ad B, (quæ eadem*
d 17. septi. *est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atque hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptum.*

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

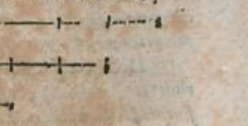
DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solidæ, tum planæ, neq; perfecte intelligi possunt, neq; cum res tulerit, in opus atque vsum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus differit, obscuritatem, omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neq; enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quam irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsui pasti, vt eares & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ solæ necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit: declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles: Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas linea tamvnius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus seu solidum.



II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, vt propositione vltima huius lib. demonstrabitur, ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quonam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III. RECTA

III.

RECTÆ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas; in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, vt earum quadrata sint commensurabilia; aliæ vero ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusq; lineæ quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsæ secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

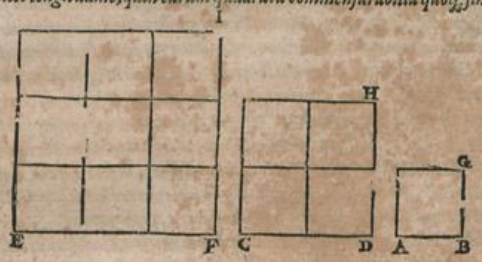
QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cum huiusmodi lineas vna communis mensura metiatur, vt dictum est: At vero quoniam lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt eæ propria definitione explicarentur.

IV.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nullæ lineæ dari possint commensurabiles longitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoq; sint, quoniam quadratum ex communi earum mensura descriptum metitur tanquã mensura communis earum quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoque quadratum AG, quadrata CH, EI metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commẽsurabilia, quæ tamẽ longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles; sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9. huius libri.



V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis, erunt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incommensurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamquam eius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcè ῥητή; Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certa quoque, ac notæ; cum quælibet in quotcunq; partes æquales possit diuidi.

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas aliàs illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoq; Rationales, non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, lineæ rectæ, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, (est enim tam numerus 20, quam 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato. vt 16. 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.

VII.

HVIC vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido constat, cum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, vt illud. sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies planæ quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si vero non fuerint quadrata, sed alia quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. colligimus, lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabiturque in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin, lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles ac incommensurabiles: Vix autè, & rarissime his: Rationales & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine, & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt varie & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti,

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur,

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ

in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONVNCIATA.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit a numero, quem Theon in proposit. omnibus Euclidis sequitur, vt ad propos. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelliges, quod ad numerum propositionum attinet.

j. ## THEOR. 1. PROPOS. 1.

DVABVS magnitudinibus æqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITÆ sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quàm C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior sit quam AB, ita vt DE, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidium HI; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quã AB; At ex DE, ablatũ est DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cum enim DE, maior sit quam AB; si ex DE, dimidium auferetur, nec non & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, maius quàm dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quam HB, auferturq; ex FE, dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE, maior sit quam duplex ipsius C; at ex HB, maius quam dimidium HI, erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hic est GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cum ex maiori DE, ablatum sit DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.



ALITER. Facta constructione vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam vero AH, maior est quam HB, vel certe illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex AB, & HB, maior est quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, quam KM. Rursus quia HI, maior est quam IB, vel certe illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam MN, vel illi æqualis; atque adeo tota AI, maior quam

quam tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quam AB. Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cum sit vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quam multiplex est DE, ipsius C,) [a] erit quoque C, maior quam IB. Ac proinde relicta est IB, minor quam C. Quod erat demonstrandum.



14. quin.

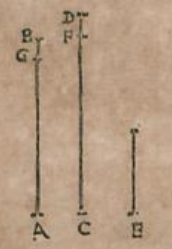
SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarũ minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB, & sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas, si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta autem AB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem, ita vt AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita vt FD, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. [a] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipsius CD; aliâs si esset dimidia, vel minor quam dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipsius AB; Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius, quam dimidium, [b] relinquetur tandem magnitudo quædam minor quam E.) Sit ergo iam relicta GB, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB, & AB, metitur CF; [c] metietur quoque E, ipsam CF: Metitur autem E, & totam CD. [d] Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG; [e] quare & E, ipsam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB. [f] ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.



21. decì.

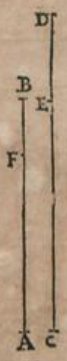
b 1. deci.
c 2. pron.
d 3. pron.
e 2. pron.
f 3. pron.

SCHOLIVM.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturque minor AB, ex CD, & reliqua sit ED, Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest, metiatur FB, præcedentem ED. Quoniam igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [g] metietur quoque FB, ipsam AF; Metitur autem & seipsam. [h] Igitur FB, & totam AB, metietur. Metitur autem AB, ipsam CE. [i] Igitur & FB, ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED; [k] Igitur & FB, totam CD, metietur. Ostensa est autẽ & FB, ipsam AB, metiri. Quare FB, vtramque AB, ED, metitur, quod est absurdum, ponuntur enim AB, CD, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.



g 2. pron.
h 1. pron.
i 2. pron.
k 1. pron.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

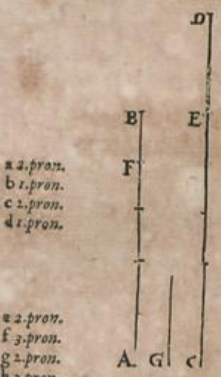
NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum, ponuntur enim commensurabiles.

ITA QVE facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propositam, vt constat ex demonstratione primi theorematis huius scholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, ostensum est, eandem reliquam FB, metiri vtramque magnitudinem AB, CD. Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonstrauit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

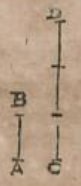
DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD, quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam AB, CD, commensurabiles sunt, fit vt si minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties potest, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties potest, relinquat FB, & hoc semper fiat alterna quadam detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholij. Metiatur iam FB, reliqua præcedentem ED. Dico FB, esse maximam mensuram communem magnitudinum AB, CD. Quod enim vtramque metiatur, ita ostendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [a] metietur quoque FB, ipsam AF: At metitur FB, & seipsam. [b] Igitur FB, totam AB, metietur; [c] atque adeo & ipsam CE, quam AB, metitur. Cum ergo & ipsam ED, metiatur; [d] metietur quoque FB, totam CD, metitur ergo FB, vtramque AB, CD. Quare vtriusque AB, CD, communis mensura est FB.



a 2. pron.
b 1. pron.
c 2. pron.
d 1. pron.
e 2. pron.
f 3. pron.
g 2. pron.
h 3. pron.

QVOD autem FB, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earū mensura maior, quā FB. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem & AB, ipsam CE, [e] metietur quoque G ipsam CE: At metitur quoque totam CD, [f] Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipsam AF. [g] Ergo & G, ipsam AF, metietur. Quare cum G, totam etiam AB, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam FB, maior minorem. [h] Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis mensura est ipsarum AB, CD. Quare FB, maxima earum communis mensura est.



QVOD si minor magnitudo AB, metiatur maiorem CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipsa AB, ambarum maxima mensura communis; cum & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

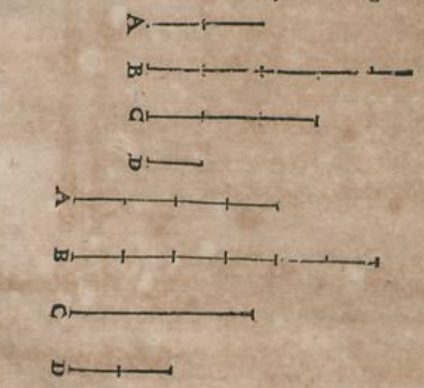
EX hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est FB, esse maximam mensuram communem ipsarum AB, CD. Demonstratum enim est ibi magnitudinem G, si metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoque maximam mensuram FB. Eademque est ratio de cæteris.

SCHOLIVM.



EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.



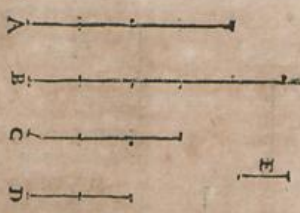
SI vero A, & B, fuerint commensurabiles, si earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.

QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metitur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensurā magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.

SI verō

SI vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, commensurabiles. [i] *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* [k] *metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem persiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

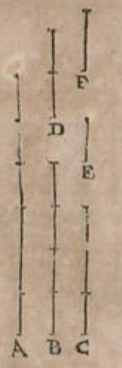


i 3. decimi.
k 2. pron.

PROBL. 2. PROPOS. 4. iv.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est, D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C, metietur eadem per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem, quod fieri non potest. Si vero D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. [b] Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.



a 3. decimi.
b 3. decimi.
c 2. pron.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quam E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximã mensuram D, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

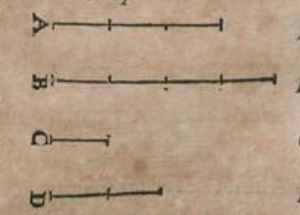
INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

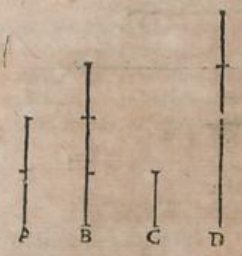
LEMMA.

SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex ijs, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.



E, 3.
F, 4.
G, 1.
H, 2.



IDEM sequitur, si magnitudinum & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.

E, 3.

F, 12.

G, 4.

H, 6.

SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

v.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.



a 3. decimi.

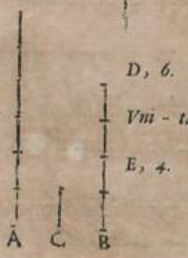
SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum.[a] Sit enim earũ maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerũ E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinẽ A, & vnitas numerũ D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atque vnitas numerum E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedẽs, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuũ est lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, vt rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Hæ enim solæ communem recipiunt mensuram, atque adeo in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsisque demonstratio huius theorematis conuenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cum sint, communis mensuræ sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

EX demonstratione porro eiusdem huius theorematis liquido constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.



VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metietur. Nam vt demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quamcunque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex apposita figura apparet. Quoniam vero in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortasis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

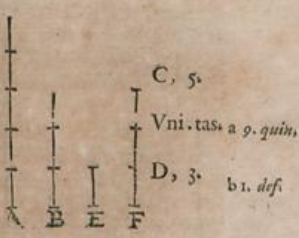
vj.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D,

tum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, [a] ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsum F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramq; A, & B, metitur: [b] Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.



a 9. quin.

b 1. def.

ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum D, æque metiantur; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem E, metitur: Metitur autem E, ipsam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, [c] commensurabiles sunt. Quod est propositum.



c 1. defi.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerū. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C, & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D: [d] Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum sit vt A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterq; descripta.



d 13. sex.

SCHOLIVM.

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vii. o.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum: [a] erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.



a 6. decimi.

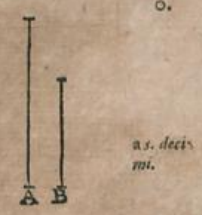
SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam aliàs vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viii. o.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles; [a] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum, ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.



a 5. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportionales; sitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; sive priores in eodem genere sint, in quo posteriores, sive non: sitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales sunt.

A —————— D, 49.
B —————— E, 42.
C —————— F, 36.

IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quam tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

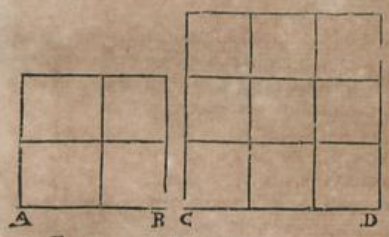
vij.

THEOR. 1. PROPOS. 9.

QVÆ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine sunt commensurabiles; [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H, quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.

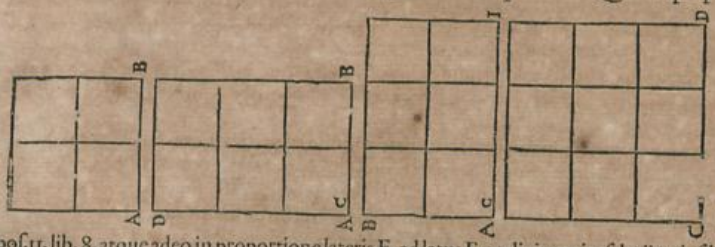
a 5. decimi.
b 20. sex.
c 11. oct.



E, 2. F, 3.
G, 4. H, 9.

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, ad F: [d] Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad F, [e] Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB,

d 1. sexti.
e 1. sexti.



si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB, rectangulum B D, & quadratum ex C D, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

SIT secundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, esse longitudine commensurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex B D, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: [f] Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus C D. [g] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ AB, CD, proportionem habeant, quam numeri E, F, ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

f 20. sex.
g 11. oct.

ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris. [h] Quia igitur est vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rursum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt supra diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continue proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam C D. Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt supra ostendimus; ponitur quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, vt G, ad I, hoc est, vt E, ad F; [k] ideoque AB, CD, rectæ proportionem habentes, quam numeri E, F, commensurabiles sunt longitudine. Quod est propositum.

h 6. dec.
i 1. sexti.
k 6. dec.

SINT tertio rectæ A B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.



QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ. vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum: [l] ipsa commensurabilia erunt; [m] Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

l 6. dec.
m 3. defin.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, [n] potentia quidem commensurabiles sunt, [o] cum earum quadrata commensurabilia sint: ac longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, qualem numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.

n 3. defi.
o 6. dec.

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, ac potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse, solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [p] potentia quoque incommensurabiles sunt, [q] cum earum quadrata incommensurabilia sint.

p 4. defi.
q 8. dec.

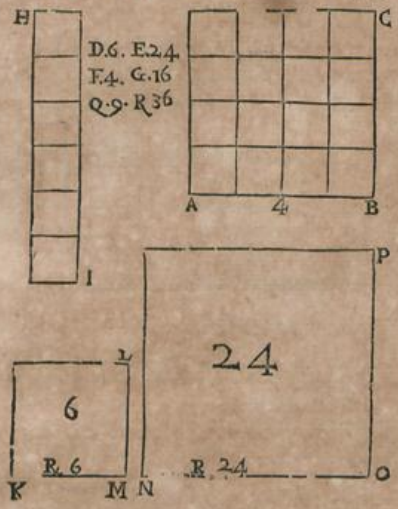
POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter considerandæ sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nõ solum esse eas quæ numeris exprimi possunt, si cum li-

cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ (est enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde è contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta; (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continet, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16 Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, [t] vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum HI, constans ex sex quadratis mensuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [s] atque ipsi HI, quadratum æqualem constituatur KL, cuius latus KM. Postremo per ea, quæ in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratum NP, ita se habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerũ E, vel vt quadratus F, ad quadratũ G. Quoniã igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6 ad 24. ita quadratum KL, ad quadratum NP, per constructionem; continet autem quadratum KL, 6. mensuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale AC: (constructum enim est quadratum KL, æquale rectangulo HI, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratum NP, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erunt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, erunt que lineæ Rationali AB, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla, videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. [t] Quare longitudine commensurabiles sunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commensurabiles, quæ numeris non possint exprimi, si cum linea Rationali comparẽtur. Quod si considerentur eædem lineæ KM, NO, simpliciter & absolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant subduplam, si KM, dimidiatur in duas partes æquales, dimidiatur NO, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.



RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, resoluitur, quam vnitates sunt in ductis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale est sex huiusmodi mensuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata KL, NP, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus constituatur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadem quadrata KL, NP, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, & Q, R, continentur. Nam si recta KM, dimidiatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum KL, quatuor mensuras quadratas, & quadratum NP, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eædem lineæ secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, resoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, vt sit sensus. Quadrata quæ describuntur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionẽ habentia, quã quadratus numerus ad quadra-

s 14. sec.

t 26. decim.

quadratum numerum, siue hæc quadratæ numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis; vt in scholio propos 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos 7 lib 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

xj
xi

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.



SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, sitq; A, prima secundæ B, commẽsurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se commensurabiles sunt, [a] habebit A, ad B. proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. [b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt. a 5. decì. b 6. dec.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, [c] non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [d] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. c 7. dec. d 8. decì.

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare vt in scholio propositi. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

Si autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis est potentia ipsi B, [e] erunt earum quadrata commensurabilia, [f] ac propterea proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerũ [g] Est autem vt quadratũ ex A, ad quadratum ex B, ita quadratũ ex C, ad quadratũ ex D, (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadratæ figuræ similes, similiterq; descriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportione habebunt, quã numerus ad numerum. [h] Quare commensurabilia erunt; [i] Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum. e 3. defin. f 5. deci. g 22. sex. h 6. decì. i 3. def.

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles; erunt ipsarum potentiæ tantum commensurabiles; ac propterea ipsæ potentiæ tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVM si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex iis, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [k] atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. [l] Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum. k 6. decì. l 8. dec.

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duæ lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia; lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensurabilia sunt, [m] habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. m 5. dec.

LEMMA.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorũ acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus.

A, 2. B, 6. C, 3. D, 16. E, 12. F, 48.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpenumero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunque duobus lateribus alterius. qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

x. xj.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet.



a 9. dec.

b 8. dec. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, [b] ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

c 13. sex. SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. [c] Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum:

b 10. dec. [d] erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles: ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensuræ cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CÆTERVM ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia

potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atq; adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodemque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, rectæ A, incommensurabilis longitudine. [c] *Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare rectæ, D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia, atq; adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*



c 10. dec.

IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti, quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

xij.
viij.

QVÆ eidem magnitudini sunt commensurabiles; & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] sumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, [c] inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.



a 5. dec.

b 4. octa.

c 6 dec.

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, [d] *erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G,* [e] *Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps, proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K.* [f] *Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt, atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.*

d 5 dec.

c 4. oct.

f 6. dec.

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

A------ ---

C--------

B----------

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis sive longitudine, & potentia sive potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

xij. o.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis, Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi A, cum eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles, quod est absurdum, ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. dec.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [b] ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles (cum hoc posito, vtraq; B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, sive tantum sive etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis: erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles (cum hoc posito, vtraque B, & C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

b 12. dec.

QVONIAM vero hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

xiij. viij.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles: altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.



SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [a] erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. dec.

SCHOLIVM.

HIC quoque, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, sive longitudine tantū, sive longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidē C, longitudine incommensurabilis. Si enim C, & B, essent

essent longitudine commensurabiles, [b] *essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine (cum hoc posito, vtraq; A, & C,* b 12. dec.
ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum: ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si
A, & B, commensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, c 12. dec.
potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles [c] *& A, C, potentia commensurabiles essent*
(cum hoc posito, vtraq; A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

COLLIGVNT *porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.*

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt,

SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabilis; [d] *erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensæ ipsi C, incommensurabilis;* [e] *erit & reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.*

d 14. dec.

e 14. dec.

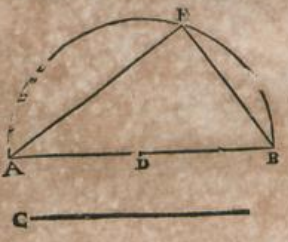


SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantum commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior oporteat que inuenire, quo AB, plus possit quam C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, [f] *in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ EB.* [g] *Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit;* [h] *erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum. Similiter.*



f 1. quarti.

g 31. tertij.

h 47. prim.

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ si coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, [i] *quippe cum quadratum ex AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.*

i 47. prim.

THEOR. 12. PROPOS. 15.

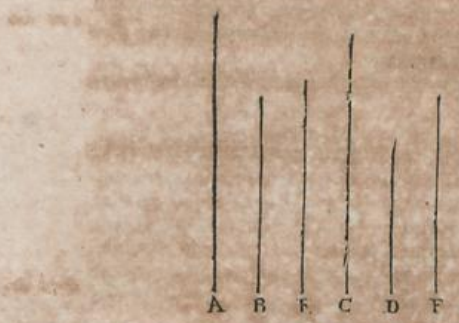
xiv. xii.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quam B, secunda, quadrato rectæ E; & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Si vero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex BE, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D. Et diuidendo, vt quadratū ex E, ad quadratum ex

a 22. sexti.

a 22. sexti.



tum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratũ ex D;[b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoq; ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantum commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex iis, quæ in scholio propos. 10. huius lib. scripsimus.

xv. ix.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.



a 13 dec.
b 1. pron.

COMPONANTVR duę magnitudines commẽsurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtriq; ipsarum AB, BC, cõmensurabilem esse.[a] Sit enim ipsarum AB, BC, communis mensura D. Quoniam igitur D, ipsas AB, BC, metitur, [b] metietur quoq; D, totam AC, ex ipsis compositam. Cum ergo D, metiatur AC. & A; erũt AC, AB, commensurabiles: Similiter cũ D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commensurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis erit.

c 3. dec. d 9. pro.

SED iam tota AC, ex AB, BC, composita commensurabilis sit alteri ipsarum AB, BC, nempe ipsi AB. Dico & AB, BC, inter se commensurabiles esse.[c] Sit enim D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; [d] metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commensurabiles erunt AB, BC, inter se. Eodem argumento ostendemus AB, BC, esse commensurabiles, si AC, ipsi BC, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D. communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cum metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt AC, BC. Quod est propositum.

xvj. ix.

THEOR. 14. PROPOS. 17.



SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt,

a 3. dec. b 3. pron.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtrique ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi AB, [a] sitque D; communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; [b] metietur quoque D. reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum, ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB: Eademque ratione neque ipsi BC, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

SED

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit vni ipsarum, vni componentium nempe ipsi AC. Dico quoq; AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles [c] erit quoque tota AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum. [c] 16. dec.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoque AC, ex corol. præcedentis propos. reliquæ AB, commensurabilis. Quod est absurdum, ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC, ipsi BC, commensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollariis, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent; vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

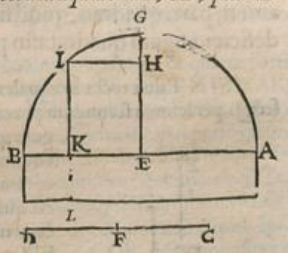
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficiente-que figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptū, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficitque figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior sit, oporteat q; ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta CD, descripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, semicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipsius AB, hoc est EG, ipsi AE, æqualis, maior quam CF, dimidia ipsius CD. Posita igitur EH, æquali ipsi CF, agatur per H, ipsi AB, parallela HI, demittatur q; IKL, ad AB, perpendicularis, & sit KL, ipsi KB, æqualis. Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratū BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam enim KI, media proportionalis & inter AK, KB, vt in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus, [d] erit rectangulum sub AK, KB, hoc est, rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc est, quadrato ex EH; [e] (est enim KI, ipsi EH, æqualis, ob parallelogrammum EI,) hoc est, quadrato ex CF: Est autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD, quod quadratum ex CD, per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensq; quadrato BL, æquale est quartæ parti quadrati ex CD, descripti. Quod est propositum.



[d] 17. sexti. [e] 34. primi.

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

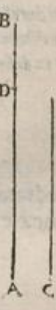
DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum à dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius sit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus AK, KB, æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atq; adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoq; recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abscindi nõ posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt DB, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta AD, DB, inæqualia esse. Si enim AD, DB, segmenta dicantur esse æqualia, cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB, deficiensque figura quadrata ex DB, descripta, æquale sit rectangulo sub AD, DB; sit autem quod sub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipsius AB, descriptum, atque adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C, per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia sunt, atque rectæ AB, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD, DB. Quod est propositum.



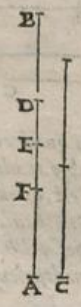
HOC facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi CF, ducta que HI, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendicularis IK, vt partes factæ ex applicatione sint AK, KB; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cum AB, in E, secta sit bifariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvij. xiij.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad AB, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub AD, DB, faciatque segmenta AD, DB, longitudine commensurabilia. Dico AB, plus posse quam C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniam enim per 3. lemma præcedentis propos. AD, maior est quam DB; diuidatur AB, bifariam in E, & ipsi ED, æqualis sumatur EF. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales sint, & ablatæ quoque EF, ED, erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D, [a] erit rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli sub AD, DB, & quadrati ex ED, æquale erit quadruplo quadrati ex EB. Est autem quadruplo rectanguli sub AD, DB, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex ED, æquale est quadratum ex FD, (quadratum enim ex FD, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum FD, dupla sit ipsius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale est quadratum ex AB, (quod quadratum ex AB, quadruplum fit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipsius AB.) Igitur & quadrata ex C, & FD, æqualia sunt quadrato ex AB: Ac proinde recta AB, plus potest quam recta C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB. Quoniam rectæ AD, DB, longitudine ponuntur commensurabiles: [b] erit quoque tota AB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis; (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius DB,) Igitur cum vtraque AB, & composita ex DB, AF, longitudine sit commensurabilis ipsi DB, [c] erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cum AB, composita ex AF, DB, tan-



a 3. sec.

b 16. dec.

c 12. dec.

DB, tanquam vna, & ex FD, commensurabilis sit longitudine compositæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus potest quam C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi commensurabilis.

SED iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum vtraque AB, DB, longitudine sit commensurabilis compositæ ex AF, DB; [d] erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles; Atq; adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; [e] erunt ipsæ AD, DB, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

d 12. dec.

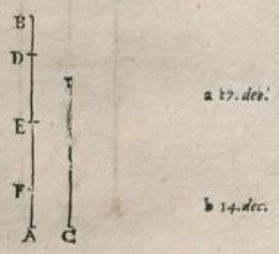
c 16. dec.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

xviii. xiiij.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incõmensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB; quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad AB, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incommensurabiles. Dico AB, plus posse quam C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ AD, DB, ponuntur longitudine incommensurabiles; [a] erit quoque tota AB, parti DB, longitudine incommensurabilis. Sed DB, longitudine commensurabilis est compositæ ex DB, AF, cum hæc illius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipsa DB, longitudine sit incommensurabilis rectæ AB: [b] erit quoque reliqua composita ex DB, AF, eidem AB, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cum AB, composita ex AF, DB, tanquam vna, & ex FD, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex AF, DB, erit eadem AB, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ FD, longitudine incommensurabilis. Ergo AB, plus potest quam C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi commensurabilis.



a 17. dec.

b 14. dec.

IAM vero AB, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque in recta AB, partes AD, DB. Dico & rectas AD, DB, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: erit AB, ipsi FD, incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, longitudine incommensurabilis sit ipsi FD; erit eadem AB, per coroll. propos. 17. huius libr. & reliquæ compositæ ex AF, DB, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex AF, DB, componitur, & DB, ipsa composita ex AF, DB, longitudine incommensurabilis sit rectæ AB, [c] erit & reliqua DB, eidem AB, longitudine incommensurabilis: Ac proinde cum tota AB, composita ex AD, DB, incommensurabilis sit ipsi DB, longitudine; [d] erunt & ipsæ AD, DB, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

c 14. dec.

d 17. dec.

SCHOLIVM

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Mediæ transit in sequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles omnino & potentia commensurabiles esse, potentia vero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitu-

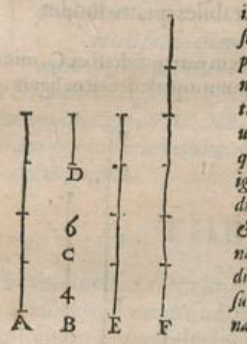
dine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

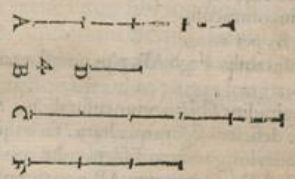
LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si vero potentia inter se solum sunt commensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali; ac proinde vtraq; Rationali commensurabilis quoq; longitudine; Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamen ei vtraq; est commensurabilis: Aut denig; vtraq; expositæ Rationali commensurabilis est solum potentia. Hæc autem tria genera inuenietmus hoc modo. Sit expositæ Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi D, ipsæ æquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensæ longitudine inter se commensurabiles, cum habeant D, communem mensuram. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarum vna nempe E, æqualis est Rationali expositæ A.





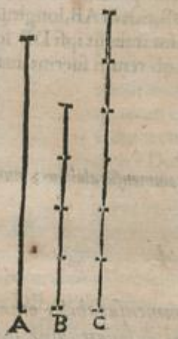
IAM vero D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ A.

a 11. dec.

POSTREMO expositæ Rationali A, [a] inueniatur recta B, longitudine tantum incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque partes æquales, & sumatur C, composita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdem expositæ Rationali A, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeo & potentia; [b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solum potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.

b 12. dec.

c 14. dec.



QVOD

QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quauis A, componantur quot libet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.

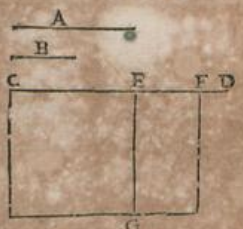


CÆTERVM & omnes lineæ Rationales, non solum expositæ Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles. facile hoc modo demonstrabimus. [d] Quoniam Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [e] quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunq; inter se commensurabiles esse.

d 6. def.
e 12. sexti.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur; Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.



SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A & B, comprehensum. Ex quantacunque enim linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF, hoc est, sub A, & B. [i] Quoniam igitur est vt CE, ad EF, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

i 1 sexti.

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.



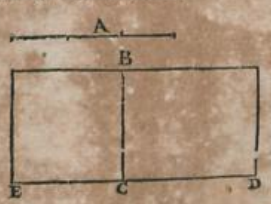
SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio B. Dico & A, Rationale esse. Sit namque C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimirum ab expositâ Rationali describitur. Quoniam igitur B, Rationale est, [g] erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cum commensurabilia sint ipsi B, [h] inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expositâ descripto commensurabile, [i] Rationale est. Quod erat demonstrandum.

g 9. def.
h 12. dec.
i 6. def.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

xix.
xv.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.



SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum BD, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus BC, CD, secundum aliquem prædictorum modorum, (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propos. explicuimus; ita vt vel altera ipsarum BC, CD. Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraq; commensurabilis sit aut longitudine aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum: [a] erit quoq; quadratũ BE, ex BC, descriptũ quadrato ex A, cõmensurabile:

a 3. defin.

b 8. def. c 9. def. bile: [b] Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. [c] Igitur & BE, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero BC, hoc est, EC, & CD, longitudine commensurabiles sunt, (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) [d] & est vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; [e] erunt quoque EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. BD, Rationali BE, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

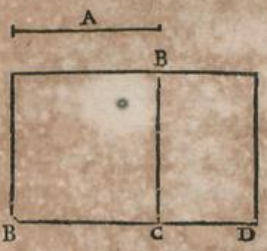
d 1. sexti. e 10. dec.

xx. xvi.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationale applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, siue BC, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BC, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex BC, quadratum BE; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, [a] ipsa cõmensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; [b] Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: [c] Est autem vt BE, ad BD, ita EC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, commensurabilis longitudine: [d] sed & Rationalis, quippe cui Rationali BC, atqui deirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis est: & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.



a 9. defin. b 12. dec. c 1. sexti. d 6. def.

LEMMA I.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.



POSSIT recta A, spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A, æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonstratione propos. 20. huius libr. ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis est. Igitur Irrationalis.

HOC idem constat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia solum commensurabiles inuenire.

DVO genera sunt linearum Rationalium potentia tantum inter se commensurabilium. Aut enim altera earum est æqualis expositæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit exposita Rationalis A, cui æqualis sumatur B. Deinde ipsi B, [c] inueniatur C, longitudine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est) potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt, (B, quidem, quod ei sit æqualis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum incommensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.



c 11. dec.

POSTE-

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantum incommensurabilis [f] *inueniatur B; & huic rursum longitudine tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles, erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio proposit. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum vtraq; B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis;* [g] *erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.*



f 11. dec.

g 6. defin.

SCHOLIVM

QVOD si inuenienda sint quotcunq; lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 26. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (Nempe quadratũ ex E, ad quadratũ ex F, vt numerus A, ad numerũ B, ex constructione; similiterq; quadratũ ex F, ad quadratũ ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratũ ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratũ ex E, ad quadratũ ex G, vt A, ad C; similiterq; quadratũ ex E, ad quadratũ ex H, vt A, ad D; & denicq; quadratũ ex F, ad quadratũ ex H, vt B, ad D.) [h] *erunt ipsa inter se cõmensurabilia; ac propterea & rectæ ipsæ potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* [i] *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sint autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod erat propositum.*



h 6. dec.

i 9. dec.

QVOD si propositis quotcunq; Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum si, et id hoc modo. Sint propositæ duæ Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C, D, primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur,) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, [k] *commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. ostendimus; (quod D, & E, qui ambo non sunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoq; plani non similes, ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* [l] *erunt rectæ B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendemus perinde, vt idem demonstrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.*



k 8. dec.

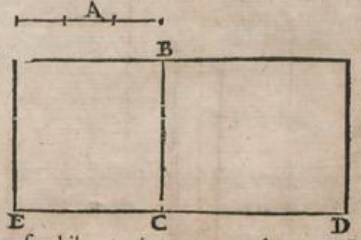
l 9. dec.

THEOR. 19. PROPOS. 22. xxi. xix.

QVOD sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum BD, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus.



a 1. ſexti. [a] Et quoniam eſt vt EC, hoc eſt, BC, ad CD, vt BE, ad BD: Eſt autem BC; ipſi CD, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipſi BD, incommenſurabile. b Quare cum BE, commenſurabile ſit quadrato ex rationali expoſita A, ſit autem BE, ipſi BD, incommenſurabile; c erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A, eidem BD, incommenſurabile: Ac propterea BD, quadrato Rationalis expoſitæ incommenſurabile exiſtens, d Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum BD, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.

b 9. def. n.

c 14. dec. d 10. def.

e 17. ſexti. VOCETVR autem hæc linea potens ipſum BD, Media, e propterea quod media proportionalis eſt inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratum æquale ſit rectangulo BD, ſub ipſis BC, CD, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

f 17. ſexti. *ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur.* f *Cum enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur.*

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non ſolum recta potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continue proportionales, quales ſunt, BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. l. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum medium proportionale eſt inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari poteſt.

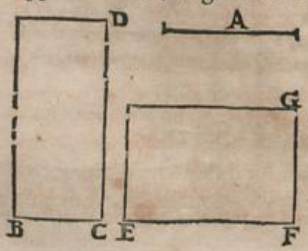
HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quale eſt Medium BD. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Medii longitudine, vel potentia tantum inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum, ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alia, recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilib. comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

xxii. xx.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

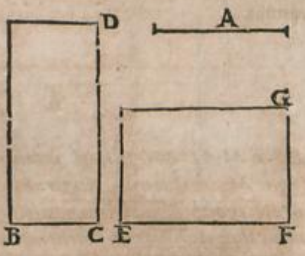
QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.



a 45. primi. SIT linea Media A, & Rationalis BC, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, tantum [a] applicetur que ad BC, rectangulum B D, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi BC, longitudine incommenſurabilem. Quoniam enim A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duas rectis Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, ſub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commenſurabilibus contentum

Et quia

Et quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum BD, æqualia erunt BD, & EG, [b] lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos nempe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD [c]; Ac propterea quoq; vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratum ex BC, commensurabile est quadrato ex EF. (quod rectæ BC, EF, ponâtur Rationales: atq; adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur [d] & quadratum ex FG, commensurabile erit quadrato ex CD: propterea q; & rectæ FG, CD, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque CD, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi BC. Quoniam enim EF, FG, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt EF, ad FG, ita quadratum ex EF, ad rectangulum EG, sub EF, FG, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. [e] erit quadratum ex EF, incommensurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex EF, commensurabile est quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cum quadrato ex CD, commensurabile sit quadrato ex EF, at rectangulum BD, eidem quadrato ex EF, incommensurabile; [f] incommensurabilia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulum BD, vt recta CD, ad rectam BC. [g] Incommensurabiles ergo sunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo est CD, & Rationali BC, longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit ad rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.



b 14. sext.
c 22. sexti.
d 10. dec.
e 10. dec.
f 13. dec.
g 16. dec.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis BC, & A, [h] sumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; [i] erit rectangulum BD, sub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

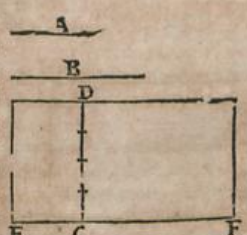
PORRO ex hoc theoremate manifestum, est omne Medium, hoc est spatium, quod lineæ Mediæ potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunq; Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

h 11. sexti.
i 17. sexti.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, mediam esse. Exposita enim sit Rationalis CD, [a] ad quam applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex A Media. Quoniam igitur DE, Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit CE, latitudinem; [b] erit CE, Rationalis ipsi CD, longitudine incommensurabilis. Rursus ad CD, Rationalem [c] applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, DE, DF, commensurabilia. [d] Est autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. [e] Igitur EC, CF, longitudine sunt commensurabiles: Sed EC, ostensa est Rationalis; & longitudine ipsi CD, incommensurabilis. [f] Igitur & CF, longitudine eidem CD, incommensurabilis est. Cum ergo Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ CD, sit commensurabilis; (Nam cum EC, CF, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & EC, ipsi CD, commensurabilis saltem potentia, quod Rationalis sit; erit & CF, eidem CD, commensurabilis potentia ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus.) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commensurabiles, [g] Ac proinde recta B, potens rectangulum DF, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D CF, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.



a 45. primi.
b 23. dec.
c 45. prim.
d 1. sexti.
e 10. dec.
f 14. dec.
g 22. dec.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est DF, commensurabile esse Medio DE, ostensum ex eo mox fuit DF, esse quoque, Medium nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus CD, CF, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium DF, spatio Medio DE, commensurabile. Dico & DF, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum DE, Medium. (Nam cum DE, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum DF. Quoniã igitur DE, DF, commensurabilia sunt, erunt quoq; quadrata

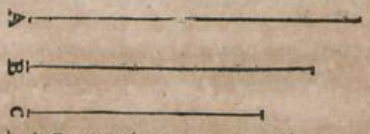
drata ex A,B,ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A,B,rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A, Media,erit & B,illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & DF, Medium erit.Omne enim spatium,quod potest Media,Medium appellatur,vt in scholio propos. 22.huius lib. docuimus.

I.
LEMMA.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

II.
LEMMA.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.



a 34. dec

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; [a] *erit vtraq; B, C, Mediæ A, commensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erunt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.*

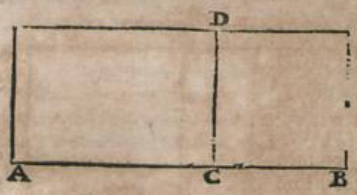
SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ sint duæ Mediæ longitudine & potentia incommensurabiles.

xxiiii. xxiii.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.



a 1. sexti.

CONTINEATVR rectangulum AD, sub Mediis AC, CD longitudine commensurabilibus. Dico AD, Medium esse. Describatur ex CD, Media quadratum BD, quod erit Medium. [a] Et quoniam est vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autem AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine commensurabiles; erunt AD, DB, commensurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

xxv. xxiii.

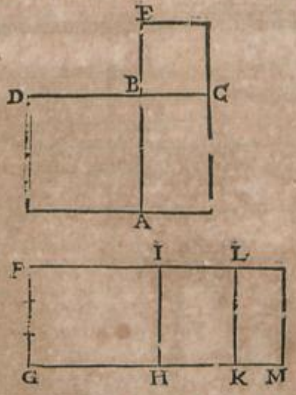
THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Mediis AB, BC, potentia tantum commensurabilibus. Dico AC, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib. ducimus, cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, descripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, descripto; eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum proposit 45. libr. 1. est ostensum. Quia verò AD, CE, Media sunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL,

a 45 primi.

FG,KL, (b est enim & KL. Rationali FG,æqualis,ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH,KM, c erunt rectæ GH,KM,Rationales, ipsi FG,seu KL,longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata AD, CE,atque adeo & ipsis æqualia rectangula FH,LM,commensurabilia: d Vt autem FH, ad LM,ita est recta GH, ad KM. e Igitur GH, KM, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH,KM,Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali vero FG, solum commensurabiles potentia,cum ei ostensæ sunt longitudine incommensurabiles; f Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Rationale est. Et quoniam est,vt DB,ad BC, ita AB, ad BE, (quod DB, BC, ipsis AB,BE,sint æquales,vtraq; vtriq;) g & vt DB,ad BC, ita AD,ad AC; & vt AB,ad BE,ita AC,ad CE; erit quoque vt AD,ad AC,ita AC,ad CE,atque adeo AD,AC,CE,proportionalia sunt.Igitur & illis æqualia FH,HL,LM,proportionalia erunt: h Habent autem rectæ GH, HK,KM, easdem proportiones,quas rectangula FH,HL,LM. Igitur & rectæ GH,HK, KM, proportionales sunt; i propterea que rectangulum sub GH,KM,quadrato ex HK,æquale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex HK. Rationale est, ideoq; & recta HK, Rationalis erit: k & ob hoc ipsi FG,Rationali expositæ,hoc est,ipsi HI,commensurabilis vel longitudine,& potentia,vel solum potentia. Et si quidem HK, ipsi HI. longitudine sit cõmensurabilis, l rectangulum HL,sub Rationalibus HI,HK,longitudine commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK,ipsi HI, potentia solum commensurabilis sit, m erit rectangulum HL,sub Rationalibus HI, HK,potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, Medium. Est ergo AC, rectangulum sub Mediis AB, BC, potentia tantum commensurabilibus contentum,vel Rationale,vel Medium. Quocirca quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus,&c. Quod erat ostendendum.



b 34. prim.
c 23. dec.
d 1. sexti.
e 10. dec.
f 20. dec.
g 1. sexti.
h 1. sexti.
i 17. sexti.
k 6. def.
l 20. dec.
m 22. dec.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipsi AC, æquale, n *si tribus rectis HI, AB, BC,* o *quarta proportionalis sumatur pro latere HK.* o *Nam rectangulum sub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo sub mediis AB, BC.*

n 12. sexti.
o 16. sexti.

HAC eadem arte vtemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alter rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Mediis potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale,vel Medium, docebit Euclides propos.28. quanam ratione inueniendæ sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles,quæ Rationale comprehendant: Propos. vero 29. duas Medias potentia solum incommensurabiles inquiret,quæ spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, p *rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationales* q *Sub duabus vero rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale,* r *appellarique Medium, & rectam, quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis constat,* s *rectangulum comprehensum sub duabus Mediis longitudine commensurabilibus esse medium;* t *rectangulum autem sub duabus Mediis potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale,vel Medium.*

p 20. dec.
q 22. dec.
r 23. dec.
s 26. dec.

QVOD si quis roget,qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus continetur,Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium,sed tertium quoddam genus constituere,nempe æquale esse rectangulo,quod continetur sub linea Rationali,& Irrationali,quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulum AC, comprehensum sub duabus Mediis AB, BC,longitudine,& potentia incommensurabilibus. Dico AC,neq; Rationale esse,neq; Medium,& c. Constructis enim eisdem,vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB,BC,ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo ipsis æqualia rectangula FH, LM: incommensurabilia, t *Vt autem FH, ad LM,ita est recta GH,ad rectam KM.* u *Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH,KM,ostensæ Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles* x *Ac propterea rectangulum sub ipsis GH,KM,Irrationale est,quod Medium appellatur,& recta ipsum potens,Irrationalis,quæ dicitur Media.* y *Potest autem rectangulum sub ipsis GH,KM,recta HK; (Nam vt prius ostendemus,tres GH,HK,KM,esse proportionales.) Igitur HK, Irrationalis est,& Media. Quare IK,Rationale non est: si enim Rationale esset,* z *faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK,Rationalem,& ipsi HI,longitudine commensurabilem. Quod est absurdum,ostensa enim est HK,Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK,Medium est; si enim esset Medium,* a *faceret ipsum applicatum ad Rationalem HI, latitudinem HK, Rationalem,& ipsi HI,longitudine incommensurabilem,quod est absurdum,ostensa est enim HK.Irrationalis,& Media. Ita q; cum IK,neque Rationale sit,neq; Medium; necessario neq; AC,illi æquale,Rationale erit,neq; Medium,sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi IK, quod sub Rationali,& Media continetur, cum HI, Rationalis sit,& HK,ostensa Media. Ex quibus efficitur,rectam, quæ potest spatium sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus,quales ponuntur AB,BC, comprehensum,posse quoque rectangulum sub Rationali,& Irrationali, quæ Media vocatur,contentum. Quod est propositum.*

t 1. sexti.
u 10. dec.
x 22. dec.
y 17. sexti.
z 21. dec.
a 23. dec.

xxvi. xxii.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

a 44. prim. SVPERAT Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF, [a] ad ipsam applicetur rectangulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH,

b 23. dec. ad Rationalem EF, sunt applicata, [b] erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK,



c 34. pri. d 21. dec. ([c] est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) [d] erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum [e] erit & HG, eidē FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. [f] Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratum ex HG, (quod sint ambo

e 14. dec. f 10. dec. g 16. dec. ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) [g] atque adeo & duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est

h 17. dec. id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis. [h] Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile

i 4. sec. est composito ex quadratis rectarum FH, HG. [i] At quadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum

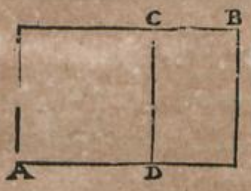
k 10. dec. l 11. dec. sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cum huic composito, quod rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, [k] erit quadratum ex FG, Irrationale [l] ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum, ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat rationale Rationali.

m 9. def. n 12. dec.



RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoque esse Rationale. Quoniam enim AB, AC, Rationalia sunt; [m] *erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ;* [n] *atq; adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB, compositum ex AC, DB, commensurabile, sit ipsi AC, erit quoq; idem AB, reliquo DB, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.*

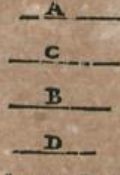
xxvii. o.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commen-

a 13. sexti. b 12. sexti. surabiles, [a] inter quas media proportionalis sumatur C, [b] fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Me-



c 22. dec. d 17. sexti. dias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; [c] erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo [d] cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D, suntque A, B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoq; C, D, solum commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib.

e 24. dec. ostendimus [e] Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D, idcoque

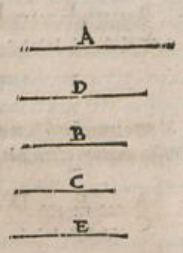
f 17. sexti. media proportionalis inter C, & D, [f] poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 29. xxviii. o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

EXPONANTVR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, [a] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [b] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim AB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles: erit rectangulum sub A, B, atq; adeo & quadratum ex D, [c] quod illi æquale est, [d] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E, sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, [e] erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [f] Rectangulum igitur sub DE, æquale est ei quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus [g] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.



a 13. sexti. b 12. sexti. c 17. sexti. d 22. dec. e 24. dec. f 16. sext. g 22. dec.

SCHOLIVM. I.

IN iis quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunq; numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem sunt mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6. C, 12.
B, 4. D, 8.
E, 24. F, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. [h] *ostensum est, si impar numerus, vel par parē multiplicet, procreari numerū parem: Imparem vero, si impar multiplicet imparem, perficuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorum vterque par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.*

h 28. & 29. noni.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. [i] *Et quoniam, siue à pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto BD, ex AB, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bifariam in E; Dico numerum factum ex AB, in BD,* [k] *qui quidem quadratus est, compositū cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod est propositum.*

A . . . . E . . . . . D . . . . . B
C . . . . . .

i 24. & 26. noni. k 1. noni.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumantur AB, & C, non similes, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum BE, ED, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, BD, non est quadratus. Si enim quadratus esset, [l] numeri AB, BD, hoc est, AB, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

l 2. noni.

SCHOLIVM. II.

ITAQVE *si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus vt prius, duos planos similes, quorum vterque par, vel impar sit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex BE, E D, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex BE, quadratum ex ED, numero, qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus est.*

A ..... E ..... D ..... B
C . . . . . .

SI vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non similes, quorum vterq; par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam similiter ostendemus quadratum ex BE, æqualem esse quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare excessus quadratorum ex BE, ED, est numerus factus ex AB, in BD, qui cum non sit quadratus; (Si enim esset quadratus, essent AB, BD, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

A ... E ... D ..... B
C . . . . . .

HOC posterius facilius absoluemus, si quemcunq; quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes A B, & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatque eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum AB, DB, inter se, vna cum quadrato ex DE, æqualis sit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE,

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . . B
C . . . . . .

vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex B F, vel æqualis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex B F; ac propterea latus ipsius maius latere B F, Erit ergo latus ipsius vel æquale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur; Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam B F, minus vero quam B E.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex B E, æqualis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex AB, in B D, & ex quadrato numeri D F; cum eidem quadrato ex B E, sit ostensus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in BD, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E, Ablato ergo communi, eo scilicet, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri D E, æquale pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in se sit, æquale est numero B E. Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius æquale numero B I, qui maior sit, quam B E, ita vt quadrato ex B I, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex, B I, latere maiore, maior est quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in se sit, (cum hic compositus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Est autem quadrato ex B E, ostensus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . . B
C . . . . . .

D F, latere D E, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter sit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in se, maius est latere B E. Sed neq; æquale, neq; minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex B F.

SIT

SIT iam, si fieri potest, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus vnitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus est (diuisus enim est AD, in E, bifariam) & ablatus AH, ablatæ vnitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis est ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cum HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros, & habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipsi AB, æqualis pars, toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. sept.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod sit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vna cũ quadrato ex DF, æqualis sit quadrato ex BG. Sumatur autem ipsius EG, *duplus* AI. *Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus est, & ablatus AI, ablati EG; erit rursus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum; quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, vna cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis, qui fit ex* AB, *in* BD; *vna cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex*

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . . B
C . . . . . .

IB, *in* BD, *vna cum quadrato ex DG, æqualis est ei, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor est, remanebit qui ex* IB, *in* BD, *maior eo, qui ex* AB, *in* BD, *pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex* BF. *Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex DF. Quod est propositum.*

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

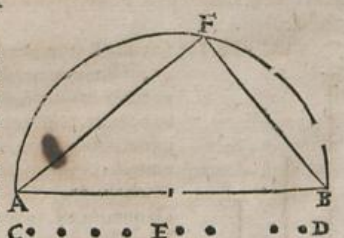
IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

xxix. xvij.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodeturque AF, in semicirculo ABF, circa diametrum AB, descripto: ac denique connectatur recta FB. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; [b] erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB, hoc est, recta AB, plus poterit quam AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE, [c] erũt quadrata ex AB, AF; commensurabilia; atq; adeo cum quadratum ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB; descriptum; erit & quadratum ex AF, Rationale, propterea que & recta AF, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF, atque adeo commensurabiles saltem potentia. Quia vero quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; alias & DE, quadratus esset, [d] vt in Arithmeticis est demonstratum, quod non ponitur) [e] erunt rectæ AB, AF, longitudine incommensurabiles. Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur AB, AF, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.



a 31. tertij. b 47. prim. c 6. dec. d 74. oct. e 9. dec.

IAM vero, quoniam est vt CD; ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, (sicut enim CD, superat DE, quadrato CE, ita etiam quadratum ex AB, superat quadratum ex AF, quadrato ex FB, [f] Quare rectæ AB, FB, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

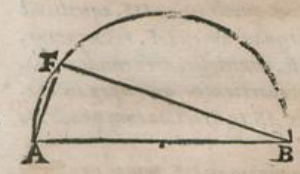
f 9. dec.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

xxx. xviij. INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compositus CD, non sit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros non quadratos CE, ED: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD, ad neutrum ipsorum CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, alias secundum priorem modum, esset totus CD, etiam quadratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, [a] vt in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturque AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quam AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam vero rursus, vt prius, est per cõuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB; Non habet autem CD, ad CE, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. [b] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

a 24. oct.

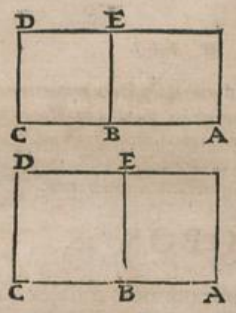


C 144. E 16. D. C, 160. D
C . . . . . E . . . D

b 9. dec.

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.



c 1. sexti.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarum AB, maior sit. Dico esse, vt AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturque rectangulum AD; eritque rectangulum AE, sub AB, BC, contentum, quod EB, ipsi BC, sit æqualis: c perspicuum autem est, esse vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.

EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quam BC,

xxxj. xxiv. xxv.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

a 30. dec. [a] REPERTÆ sint duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles: ita vt A, maior plus possit quam B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitque C, media proportionalis inter A, & B, & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, sunt Rationales potentia solum commensurabiles; [b] erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media: Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D, sunt autem A, & B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. [c] Quare D, Mediæ C, commensurabilis. Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas rationale comprehendere. Cum enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B, erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; [d] Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit, erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quoniam vero est vt A, ad B, ita C, ad D: Potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; [e] poterit quoque C, plus quam D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

b 22. dec.

c 24. dec.

d 17. sexti.

c 15. dec.



QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuen-

inuentas esse duas Medias C,D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

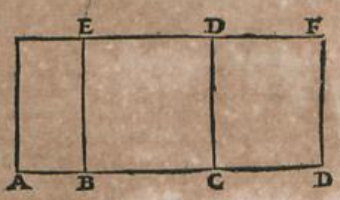
SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens : Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28 huius lib.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratum BCDE, perficiaturque rectangulum AF; Eritque AE, contentum sub AB, BC; & CF, sub BC, CD; quod BE, CD, ipsi BC, æquales sint. a *Perspicuum autem est esse AB, ad CD, vt AE, ad CF. Quod est propositum.*



a 1. sexti.

PROBL. 9. PROPOS. 32.

xxxii. xxvj.

INVENIRE duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A,B,C, potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum.[a] Repertis duabus Rationalibus A,C, potentia tantum commensurabilibus, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A,& C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus.) [b] Et ipsarum AB, sumatur media proportionalis D;[c] fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: [d] Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D, [e] & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [f] Quia vero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; [g] erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, [h] quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulum sub DE, Medium. Deniq; quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; [i] poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum commensurabiles, quæ medium continent, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.



e 30. dec.
b 13. sexti.
c 12. sexti.
d 17. sexti.
e 16. sex.
f 22. dec.
g 24. dec.
h 22. dec.
i 13. dec.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

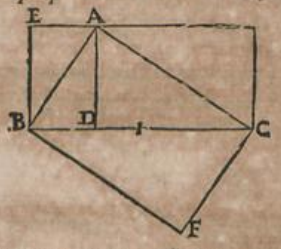
SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, à quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum sub CB, BD, æquale esse quadrato ex AB: contentum autem sub BC, CD, æquale quadrato ex AC: & contentum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum deniq; sub BC, AD, æquale contento sub AB, AC.

QVONIAM ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis est inter CD, BD; [k] *erit rectangulum sub CB, BD, quadrato ex AB, æquale.*

k 17. sexti.

EADEM

EADBM ratione erit rectangulum sub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniam per idem coroll. AC, media proportionalis est inter BC, CD.



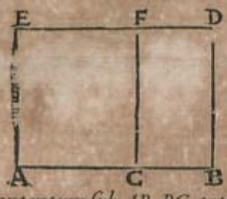
l 18. sexti.
m 16. sexti.
n 41. prim.

RVRSVS quia ex eodem coroll. AD, inter ED, BD, DC, media proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

POSTREMO, l quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD. m *Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum sub BC, AD: Item rectãgulum AF, sub AB, AC, contentum.* n *Quoniam igitur rectangulum CE, duplum est trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula CE, AF. Quod est propositum.*

LEMMA II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.



o 1. sexti.

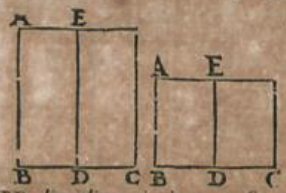
SECETVR recta AB, non bifariam in C, sitque maior pars AC. Dico esse vt AC, ad CB, ita rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum ABDE, ducaturque CF, ipsi AE, parallela; eritque AF, contentum sub AB, AC, & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. o *Quoniam igitur est vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositum.*

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota & maiore parte.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum constituentes ABC, secetur que minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum sub AB, BC, duplum esse rectanguli sub AB, BD. Compleatur enim rectangulum AC, sub AB, BC, ducaturque DE, ipsi AB, parallela, eritque BE, contentum sub AB, & BD, dimidia minoris. p *Quoniam igitur AC, ipsius BE, duplum est, quod & basis BC, dupla sit basis BD, constat propositum.*



p 1. sexti.

EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub AB, BC, continetur duplum eius, quod continetur sub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

xxxiii.
xxvii.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis. Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

a 31. dec. a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quam minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; secetur que CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturque rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quam CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum vero sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale. per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; c quod angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea cũ AF, FB, lõgitudine sint incõmensurabiles; d erunt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. e Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, f æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, g æquale est quadrato ex FG, (propterea quod angulus AGB, rectus est & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde &



b 19. dec.
c 31. tertij.
d 10. dec.
e 4. def.
f 47. prim.
g 17. sexti.

rectæ

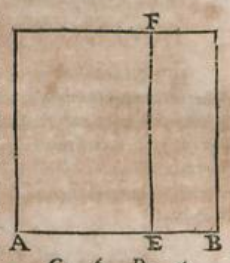
rectæ FG,CE,æquales. Quare CD,dupla existens ipsius CE,dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis,rectangulum sub AB,CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG, (cum FG,dimidia sit minoris CD,) [h] Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, contentum,Medium est. Igitur & rectangulum sub AB,FG,illi commensurabile,cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis,æquale est rectangulum sub AG,GB. Contentum igitur sub AG,GB,Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis,Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

h 22. dec.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C,D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatque vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; [i] *erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib.* [k] *Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cum AB, AE, incommensurabiles sint longitudine,* [l] *erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia: Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale, eodemq; argumento ostendemus BF. Irrationale esse. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB, perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.*



i 9. dec.

k 1. sexti.

l 10. dec.

AT vero si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim vtrumque [m] *AF, FB, Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia.* [m] *Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtriq; Rationali AF, FB,* [n] *Rationale quoque est. Quod est propositum.*

m 16. dec.

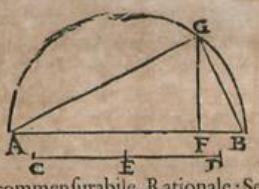
n 9. defin.

PROBL. II. PROPOS. 35. xxxiv. xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB,CD, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quam minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Medium est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33 huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ ostensæ sunt potentia incommensurabiles, faciunt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

a 32. dec.



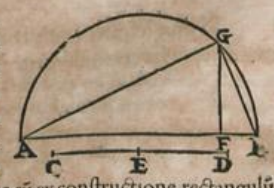
b 47. prim.

PROBL. 12. PROPOS. 36. xxxv. xxix.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

[a] REPERIANTVR duæ mediæ AB,CD, potentia tantum commensurabiles, quæ medium continent, ita vt maior AB, plus possit quam minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantq; reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas AG, GB, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media AB, Medium est, [a] & quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Mediũ. Rursus, vt in 34. demonstrabimus, rectangulũ sub AB, CD, duplũ esse rectanguli sub AB, FG; atq; adeo illud esse huic cõmensurabile. Quare cũ ex constructione, rectangulũ sub AB,

a 33. dec.



b 47. prim.

sub AB,CD,Medium sit:erit quoq; rectangulum sub AB,FG,hoc est sub AG,GB, quod illi per 1.lemma propos.33.huius lib.æquale est,Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero AB,longitudine incommensurabilis ponitur ipsi CD:Est autem eidem CD,ipsa CE,longitudine commensurabilis; quod illa huius sit
c 13. dec. dupla; [c] erunt AB,CE,longitudine incommensurabiles.Sed vt AB,ad CE, ita est per lemma 3. propos.19. huius lib.quadratum ex AB,ad rectangulum sub AB,CE,hoc est, ad rectangulum sub AB, FG; hoc est, sub AG, GB.
d 10. dec. (sunt enim rectangulum sub AB,FG,& sub AG,GB, per 1.lemma propos. 33. huius lib.æqualia.)[d] Igitur quadratum ex AB, incommensurabile est rectangulo sub AG, GB. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium,incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos.24. huius lib.nos demonstraturos recepimus, nimirum

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, quam rectangulum sub ipsis, esse Medium & hoc illi composito incommensurabile;erunt quoq; lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ,incommensurabiles tam longitudine,quem potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata,hoc est,compositum ex quadratis rectarum AG,GB, & rectangulum sub AG,GB,commensurabilia,quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB,potens compositum ex quadratis rectarum AG,GB, & alia recta potens rectangulum sub AG,GB, id est media proportionalis inter AG, GB, inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

xxxvi. xxx.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ rationales AB, BC potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lemma propos.21.huius lib. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim AB,longitudine incommensurabilis est ipsi BC, & vt AB, ad BC, ita est rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, per lemma propos.31.huius
a 10. dec. lib.[a] erit rectangulum sub AB,BC,quadrato exBC, incommensurabile.Sed



rectangulo sub AB,BC, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis
b 16. dec. sub AB,BC,continetur;& quadrato ex BC,commensurabile est quadratum rectæ AB; (omnia enim sunt Rationalia) [b] atque adeo & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, eidem quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea,quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB,BC.Quamobrem & compositum ex eo,quod bis sub AB,BC,& ex composito quadratorum re-
c 4. secun. ctarum AB,BC,hoc est, quadratum ex tota AC. ([c] Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB,
d 17. dec. BC,vna cum rectangulo sub AB,BC,bis)composito ex quadratis rectarum AB, BC, [d] incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale, quod commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC, Rationali.Igitur quadratum ex AC, quadrato Rationali ex BC, incommensurabile,
e 10. defin. [e] Irrationale est;atque adeo & recta ipsa AC,Irrationalis erit.Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alii loquuntur,Binomium,quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia solum commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commensurabiles componantur,tota Irrationalis erit,&c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

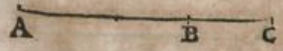
f 22. dec. g 37. dec. *ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, [f] Irrationalis est,quæ Media vocatur.At vero composita ex ipsis,[g] Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.*

THEOR. 26. PROPOS. 38.

xxxvij. xxxj.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ rationale contineant:tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

t 23. dec. COMPONANTVR duæ Mediæ [a] superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles,quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irra-



tionalem esse.Quia enim AB, est ad BC,vt rectangulum sub AB,BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate prop 31.huius lib.est ostensum;sunt autem AB, BC,lon-

BC, longitudine incommensurabiles; [b] erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, [c] atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, [d] quod huic composito æquale est, [e] incommensurabile quoque est rectangulo sub AB, BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, commensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cum hoc sit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub AB, BC: Ponitur autem rectangulum sub AB, BC, Rationale. [g] Irrationale ergo est quadratum ex AC, [h] & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles ponantur, &c. Quod erat ostendendum.

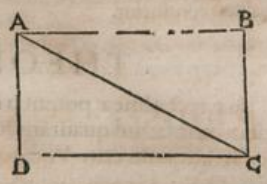


b 10. dec. c 16. dec. d 4. sec. e 7. dec. f 13. dec. g 10. def. h 11. def.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR rectangulum AB, CD, sub Rationali AB, & Irrationali BC. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, i faciet ipsum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim BC, Irrationalis. Non ergo AC, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.

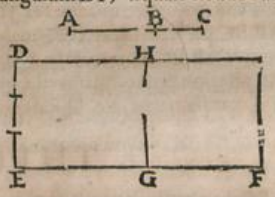


i 21. dec.

THEOR. 27, PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, [b] ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & compositio ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, [c] æquale est duobus quadratis ex AB, BC, vna cũ rectangulo bis sub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur. Quoniam vero ex hypothesi, rectangulum sub AB, BC, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est, HF, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commẽsurabilium, commensurabilia sunt; [d] erit & compositũ ex ipsis, nimirum rectangulum DG, vtriuis ipsorum commensurabile: Sed vtrumque quadratorum ex Medijs AB, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; ([e] est enim GH, Rationali DE, æqualis) [f] erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia *AB, BC*, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt *AB*, ad *CE*, ita quadratum ex *AB*, ad rectangulum sub *AB, BC*, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex *AB*, incommensurabile rectangulo sub *AB, BC*, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est; Atqui quadrato ex *AB*, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum *AB, BC*, commensurabile est, quod continetur bis sub *AB, BC*, cum hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositum ex quadratis rectarum *AB, BC*, hoc est, rectangulum DG, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, rectangulo HF. [g] Cum ergo sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [h] erit EG, ipsi GF, longitudine incommẽsurabilis. Ostensum autem iam fuit EG, GF, esse Rationales. Rationales igitur sunt EG, GF, potentia tantum commensurabiles, [i] ac propterea & tota EF, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex AC, ipsi DF, æquale, Irrationale est. Quare & recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Medijs secunda, seu vt alijs placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.



a 29. dec. b 45. pri. c 4. secun. d 16. dec. e 34. pri. f 23. dec. g 1. sexti. h 10. dec. i 37. dec.

SCHOLIVM.

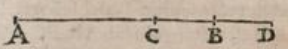
VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta AD in B, non bifariam, sitque maior pars AB; in qua sumatur BC, minori BD, æqualis, vt sit AC, excessus, quo AB superat BD, hoc est, BC, ipsi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, simul maiora esse rectangulo bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC. Quoniam enim quadrata ex AB, BC, k *æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC, estque BC, ipsi BD, æqualis: erunt quoque quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo, bis sub AB, BD, vna cum quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora sunt, quam rectangulum bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC,. Quod est propositum.*

k 7. secun.



COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

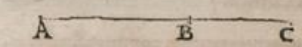
xxxix. xxxiij.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quę faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; Quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

a 34 dec. COMPONANTVR duæ rectæ [a] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Dico totam AC, esse Irrationalem. Quoniam enim rectangulum sub AB, BC, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub AB, BC, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale. [b] Incommensurabile ergo est rectangulum bis sub AB, BC, composito ex quadratis rectarum AB, BC. [c] Igitur & rectangulum bis sub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compositū ponatur Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommensurabilis, Irrationale. [e] Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia cum possit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulum bis sub AB, BC; compositum ex quadratis rectarum AB, BC, per lemma antecedēs maius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cum compositum ex quadratis rectarum ex AB, BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub AB, BC, Medium, recte vocabitur AC. Maior, siquidem à Rationali quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 10. def. c 17. dec.



d 10. def. e 11. def. f 4. sec.

xl. xxxiv.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

a 35. dec. COMPONANTVR duæ rectæ [a] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium est; quod vero continetur bis sub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC, semel continetur, Rationale ponatur; [b] erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC. [c] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; [e] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarū AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

b 10. def. c 17. doc. d 10. def. e 11. def.



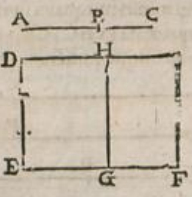
xlj. xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPO-

COMPONANTVR duæ rectæ [a] superius inuentæ AB,BC, potentia incommensurabiles,facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium,& rectangulum sub eisdem Medium,incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum.Dico totam AC,Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, [b] ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et composito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC,hoc est,rectangulum DF, [c] æquale est composito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis sub AB, BC. Quoniam vero tam compositum ex quadratis rectarum AB, BC,hoc est,rectangulum DG,quam rectangulum sub AB,BC, atque adeo ex coroll.24.huius libri,quod bis sub AB,BC,nempe ipsum HF, (cum illi sit commensurabile) Medium ponitur, [d] facient DH, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GE Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB,BC,id est,rectangulum DG,incommensurabile ponitur rectangulo sub AB,BC: Eidem autem rectangulo sub AB,BC,commensurabile est ipsius duplum, nempe quod bis continetur sub AB, BC, hoc est,ipsum HF; [e] erunt & DG,HF,incommensurabilia. Quare [f] cum sit vt DG,ad HF,ita EG,ad GF; [g] erunt EG,GE,longitudine incommensurabiles: Atqui EG, GF, ostensæ sunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, [h] Ac propterea tota EF,ex ipsis composita Irrationalis est. Quare DF,contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propos.38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est; [i] ideoque & recta ipsa AC,Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum AB,BC, & rectangulum bis sub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

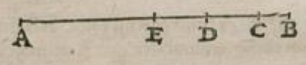


a 36. dec.
b 45 pri.
c 4. sec.
d 23. dec.
e 13. dec.
f 1. sexti.
g 10. dec.
h 37. dec.
i 11. def.

LEMMA.

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiores esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC; k *æquale est quadato ex EB:*

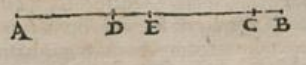


k 4. sec.

Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB. minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniam vero quadratum ex AB, l *æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, quam rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

l 4. sec.

SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB, erit AD, (quæ minor est posteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cum AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaque quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, m *æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cũ quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur, vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

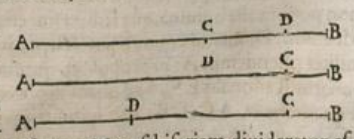


m 5. sec.

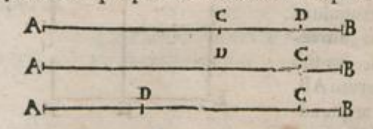
THEOR. 31. PROPOS. 43. xl.ij. xxxvj.

QVÆ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, esponuntur enim Rationales potentia tan-



tum commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam secantur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantum commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter, ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt, quam partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora sunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neque enim partes AD, DB, vbicunque punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur AB, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronunciato 16. libro 1. docuimus:



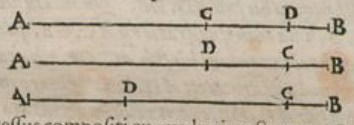
Sunt autem quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis
a 4 sec. sub AC. CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cũ rectangulo bis sub AD, DB,[a] quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex AB; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. spatium Rationale est. (Cum enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostẽdimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propsitionis 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium esse rationale.)
b 22. dec. Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spacium Rationale est.[b] Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, Medium est, erit & quod bis sub AC, CB, illi commensurabile, ex coroll. prop.
c 27. dec. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub AD, DB, Medium erit.[c] Quare cum Medium non superet Medium Rationali non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spacium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

XLiij. XXXVij.

THEOR. 32. PROPOS. 44

QVÆ ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38 huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet etiam sint Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim si fieri potest, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, existat, similiter probabimus, vt in præcedẽti propositione, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub AC, CB, ei, quod continetur semel sub



AC, CB, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub AD, DB. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius lib. ostẽdimus: perspicuum est excessũ rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spaciũ esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spacium Rationale est. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commẽsurabiles, erunt earum quadrata Media quoq;
a 16. dec. & commensurabilia.[a] Quare & compositum ex ipsis vtriq; ipsorum commensurabile erit. Igitur, cum vtrumque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per cõroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medi-
b 27. dec. um ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, DB.[b] Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spacium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quamobrem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

XLiv. XXXViij.

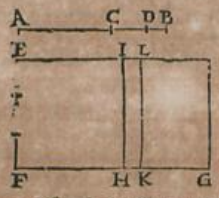
THEOR. 33. PROPOS. 45.

QVÆ ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs secunda AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, Mediæ sint potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, vt vult prop. 39. huius lib. Dico AB, ad aliud punct. diuidi non posse in alia nomina, quę scilicet sint etiam lineæ Medię potentia tantum commensurabiles, continentesq; Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, existat, similiter ostendemus, vt in propos. 43. quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Ex-
a 45. pri. ponatur Rationalis EF,[a] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB, item EH, æqua-
b 4. sec. le quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei quod continetur bis sub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB,[b] æquale est quadratis ex AC, CB, & rectang. bis sub ACCB. Eodem modo si ad BF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehenso.

Et quia

Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipsius FH. Eadem ratione ostendemus FK, maiorem esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. [c] Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo vtrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK, [d] Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK. Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodē modo cum rectangulū sub AC, CB, ponatur Medium, erit & quod bis sub AC, CB, hoc est, IG, illi commensurabile, Mediū, ex coroll. prop. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, erit HG, Rationalis ipsi HI, [e] longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus EG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL; longitudine incommensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine sunt incommensurabiles, & est, vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, [f] erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB. (Cum enim AC, CB, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; [g] erit & compositum ex ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato ex AC, commensurabile.) Rectangulo vero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholium propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi IG. Quocirca [h] cum sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, [i] erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. [k] Igitur FG, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum G. Eodem modo ostendemus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, [l] vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur AB, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.



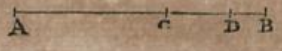
c 16. dec.
d 23. dec.
e 25. dec.
f 10. dec.
g 10. dec.
h 1. sext.
i 10. dec.
k 37. dec.
l 43. dec.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

XLV. XXXIX.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis Medium, vt vult propos. 40. huius lib. Dico AB, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoque sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Mediū. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctū D, extiterit, demōstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, eū esse, qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectāguli bis sub AD, DB. Sed excessus cōpositi ex quadratis rectarū AC, CB, & compositi ex quadratis rectarū AD, DB, spatium est Rationale: (quia cum vtrumque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoq; eorum excessus spatium Rationale, vt in scholio propos. 27. huius lib. ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, ponitur medium, erit & rectangulum bis sub AC, CB, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atq; eodem modo Medium erit rectangulum bis sub AD, DB. [a] Igitur cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.



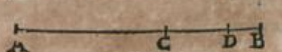
a 27. dec.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

XLVJ. XL.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Mediū potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico AB, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, BD, spatium Rationale est;

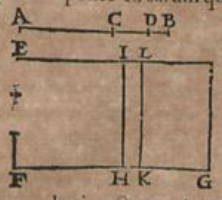


quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Me-
a 27. dec. dia: [a] Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

XLVIJ.
XLJ.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri. Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunque hoc punctum D, existat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub AC, CB, ponitur etiam Medium. Item quia rectangulum sub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurabile est.


a 23. dec. Igitur Media EH, IH, applicata ad Rationalem EF, (est enim IH, ipsi EF, æqualis) [a] faciũt latitudines FH, HG, Rationales longitudine ipsi EF, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas FK, KG. Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi EF. Quia vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, descriptis, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub AC, CB,
b 1. sex. nempe rectangulo IG; [b] estque vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. Sed ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina
c 43. dec. ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, [c] iam ante demonstratum est. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in sua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine. Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen, Vocetur quinta.

VI. QVOD

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit vtrumque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine; (alias enim nomina ipsa essent quoque lineæ longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (alias enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles, quod non ponitur) poterit maius nomen plus quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vna cum eisdem tribus generibus aliæ tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

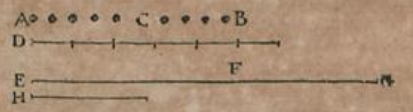
RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen incommensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam ducti secundi ordinis quartam appellans secundam, quintam; & tertiam, sextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

xl.viij.
xl.ij.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratū ad AB, AC, proportionem nō habeant quā quadratus ad quadratū. Exponatur Rationalis quæpiā D, cui longitudine cōmensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commēsurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, AC, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles; [c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, sit autem AB, maior, quam AC, erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] ac proinde rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima, inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.



a 6. dec.
b 9. dec.
c 37. dec.
d 9. dec.

xl.ix.
xl.iij.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propositione, expositaque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectæ FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis est. Quia

a 6. dec.

vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem
b 9. dec. habebunt, quam numeri quadrati. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur
b 37. dec. EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in præcedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque minus nomen FG, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

L. XLIV.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AC, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel sola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidem, quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt si AC, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I, ad AC, medius proportionalis. Igitur non e-
a 6. dec. runt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationa-
b 9. dec. lis. Quia vero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [b] erunt D, & EF, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rur-
c 6. dec. sus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. [c] Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Idcoque & lineæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad
d 9. dec. numerum quadratum; [d] erunt EF, FG, longitudine incommensurabiles. Sunt ergo EF, FG, Rationales poten-
c 37. dec. tia tantum commensurabiles; [c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita quadratũ ex D, ad quadratum ex EF, & vt AB, ad AC, ita qua-
f 9. dec. dratum ex EF, ad quadratum ex FG, erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autem I, ad AC, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [f] ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Est autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum EF, FG, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

L. XLIV.

PROBL. 16. PROPOS. 52.

INVENIRE ex binis nominibus quartam,

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cum Rationali D, commensurabilis sit. Quod si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostendemus similiter, vt ibi, totam EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49 propos. per conuersionem rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neque quadratum ex EF,
a 9. dec. ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ EF, & H. Itaque cum maius nomen EF, plus possit quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationa-

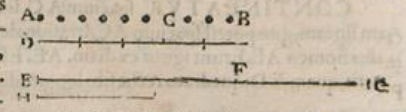
tionali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

xliij. xlvj.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duobus numeris AC, CB, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.



PROBL. 18. PROPOS. 54.

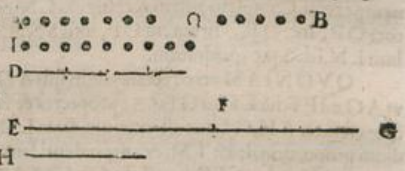
xliij. xlvij.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoque quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos.) [a] Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius lib. & reliqua fiant, vt in propos. 51. ostendemusque vt ibi, rectas D, & EF, esse longitudine incommensurabiles; atque totam EG, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, vt in 51. propos. D, & FG, longitudine esse incommensurabiles, esseque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius quadrato rectæ H. Ostendemus quoque vt in propos. 49. per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; [b] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum EF, FG, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D, erit EG, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.

a 30. sept.

b 9. dec.



LEMMA.

SI recta linea secta sit vtcunque: erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

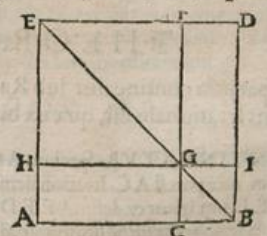
SECTA sit recta AB, vtcunque in C. Describatur ex AB, quadratum A, B, D, E, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipsi BD, parallela, quæ diametrum secet in G, agatur per G, ipsi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; vtrumque autem rectangulorum DG, GA, comprehensum eisdem partibus: Et vero rectangula CD, AI, sub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, medium proportionale esse inter quadrata FH, CI: At CD, medium esse proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim c *vt HG, ad GI, ita est tam FH, ad DG, quam AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* d *Est autem AG, ipsi DG, æquale. Igitur erit quoque vt FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atque adeo DG, medium proportionale est inter quadrata FH, CI.*

c 1. sexti.

d 43. pri.

RVRSVS quia est, e *vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quam AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem AI, ipsi CD, æquale. Igitur erit vt AD, ad CD, ita quoque CD, ad CI. Quare CD, me-*

e 1. sexti.



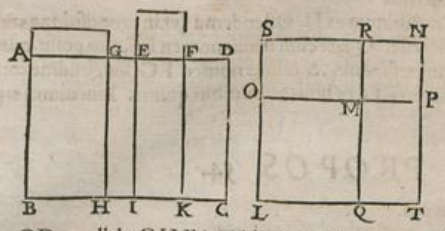
CD, medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF medium proportionale inter quadrata AD, FH.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

LIV. LVIIJ.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spacium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spacium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD maius nomen AE, Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum sub AG, GE contentum, per 2. lemma propos. 17. huius lib. applicetur deficiēs figura quadrata [a] in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis



a 18. dec.

AB, CD, parallelæ GH, EI, FK. [b] Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, coniunganturque quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnam rectam lineam constituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnam rectam QR, vt demonstratum est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quod anguli OMQ, PMR, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint; ideoque & tota OP, toti QR, [c] sit autem OP, ipsis SN, LT, & QR, ipsis LS, TN, æqualis æquilaterum erit rectangulum LN, ideoque quadratum.

b 14. sec.

c 34. pri.

QVONIAM vero rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrata ex EF, [d] erit vt AG, ad EF (ita EF, ad GE, [e] Ac propterea & vt AH, ad EK, ita EK ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur est TM, ipsi EK. [f] Cum ergo ipsi TM, æquale sit MS, [g] & ipsi EK, æquale sit FC, erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale; atque adeo recta OP, potest spacium AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

d 17. sexti. e 1. sextii f 43. pri. g 36. pri.

QVONIAM enim AG, GE, ostensæ sunt longitudine commensurabiles, [h] erit & tota AE, vtrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem AE, cum sit maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt: Atque adeo cum AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. [i] Quare rectangula AH, GI, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta, Rationalia sunt: Ideoque & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erunt.

h 16. dec. i 20. dec.

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis AG: & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, [k] eandem proportionem habentia, quam AG, EF, [l] incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. [m] Igitur rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, [n] cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. [o] Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spacium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

k 1. sexti. l 10. dec. m 10. dec. n 1. sexti. o 37. sex.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

LIX. XLIX.

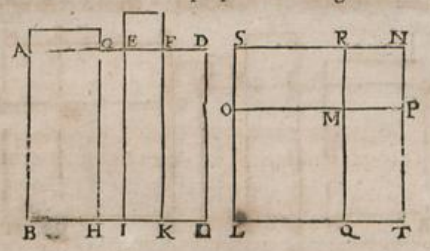
Si spacium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spacium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR spacium AC. sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quā ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commēsurabilis; Et deniq; ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis. Secetur ED, bifariam in F, & reliqua construantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spacium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; [a] erunt AE, AB, longitudi-

a 13. dec.

gitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles; [b] erit quoque tota AE, vtrique ipsarum commensurabilis. Quare cum AE, maius nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cum ergo vtraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at vero AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit vtraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur rectangula AH, GI, Media sunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.



b 16. dec.
c 14. dec.
d 22. dec.

QVIA vero AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; [e] erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi vero AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommensurabiles: Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, [f] incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt; [g] Ideoque & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, [h] cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT. Cum ergo ostensum sit OM, MP, Medias esse, & commensurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi AB, hoc est, ipsi EI: Est autem EF, ipsi ED, quoque longitudine commensurabilis; [i] erunt etiam EI, EF, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis sit, erit & EF, Rationalis. [k] Quare EK, rectangulum, Rationale est; Est autem MT, sub OM, MP, contentum ipsi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale est. Quapropter OM, MP, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationaleque continentes; [l] atque adeo OP, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur, Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

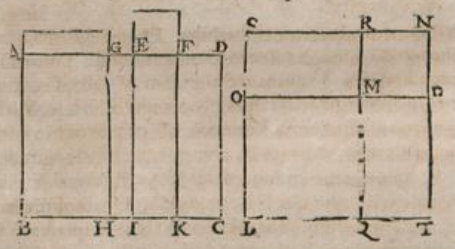
e 10. dec.
f 10. dec.
g 10. dec.
h 1. sex.
i 12. dec.
k 20. dec.
l 38. dec.

THEOR. 39. PROPOS. 57.

LVj. L.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex definitione Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum AE, ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam OP, posse spatium AC: Et vt in antecedenti propos. 56. rectas OM, MP, esse Medias potentia tantum commensurabiles; propterea quod AE, Rationali AB, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi cadē AE, ipsi AB, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam vero ED, EF, sunt commensurabiles longitudine; estq; ED, ipsi AB, Rationali, hoc est, ipsi EI, longitudine incommensurabilis: [a] erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommensurabilis: Sunt autem EF, EI, Rationales, quod EF, dimidia sit ipsius ED, Rationalis: & EI, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [b] Ac propterea EK, Medium est: ideoque & MT, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Medijs OM, MP, continetur. Itaque cum OM, MP, Mediæ sint potentia solum commensurabiles, contineantque spatium Medium; [c] erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.



a 14. dec.
b 22. dec.
c 22. dec.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

LVij. Lj.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

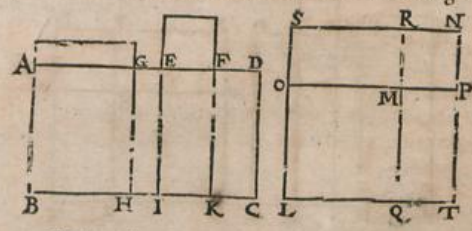
CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipsius AD, maius nomen. Erunt igitur ex definit. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propos. 55. [a] Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi

a 19. dec.

vt ibi, OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommensurabiles sunt; [b] erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeo & quadrata LM, MN, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; [c] & rectangulum AI, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Compositum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale est.

b 10. dec.

c 20. dec.



ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, longitudine incommensurabilis; Et est EF, Rationalis, cum sit Rationali ED, commensurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. [d] Quare EK, medium est, sub ipsis contentum; ideoque & MT, illi æquale, contentumque sub OM, MP, Medium est. Quocirca cum OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis MT, Medium; [e] Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

d 22. dec.

e 40. dec.

Lviij.
Lij.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

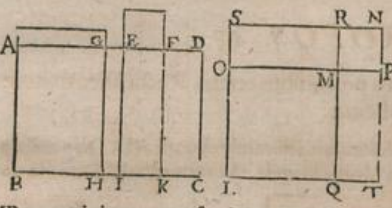
CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ dicitur potēs Rationale & Medium. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus potest, quam ED, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: & denique ED, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propos. 55. [a] Erunt igitur rursus AG, GE, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, vt in propos. 55. constabit rectam OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles. Et quia AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantum commensurabiles. [b] Quare rectangulum AI, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali AB, cum sit minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, erit & EF, ipsius dimidia, eidem AB, commensurabilis longitudine, & Rationalis. [c] Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, longitudine commensurabilibus, Rationale est, atque idcirco & MT, sub OM, MP, contentum Rationale erit, cum ipsi EK, sit æquale. Quamobrē cum rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, sub ipsis contentum, Rationale; [d] Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

a 19. dec.

b 22. dec.

c 20. dec.

d 41. dec.



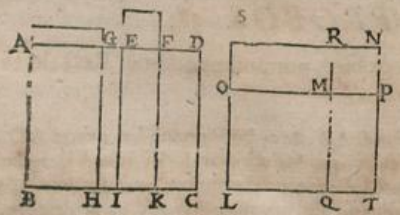
Lix.
Liij.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

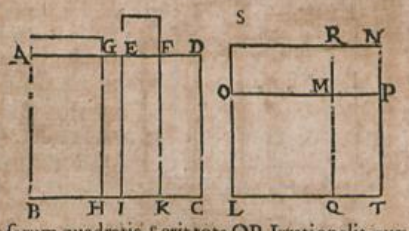
SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commensurabiles, & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & denique neutra ipsarum AE, ED, longitudine erit commensurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in superioribus, [a] eruntque AG, GE, longitudine incommensurabiles. Iam vero ostendemus similiter, vt in propos. 55. rectam OP, posse spatium

a 19. dec.



tium AC. Item vt in propos. 58. rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, vt in antecedenti propos. erit compositum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propos. 58. erit quoque MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudine ipsi ED, hæc vero eidem commensurabilis, [b] erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles. [c] Igitur & AI, EK, incommensurabilia sunt [d] cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis contentum, Medium incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis, [e] erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, &c. Quod ostendendum erat.

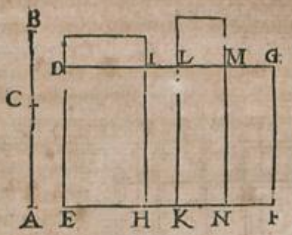


b 13. dec.
c 10. dec.
d 1. sexti.
e 42. dec.

THEOR. 43. PROPOS. 61. lx. liv.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB, [b] æqualia sint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex AB, æquale est, per constructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipsis LK, GF, parallela agatur MN: eritque vtrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur. [c] Et quoniam AC, CB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota AB, sit ex binis nominibus, erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; [d] quorum vtrique cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum DK. Igitur & DK, Rationale erit: quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipsi DE, longitudine commensurabilem.



a 45. prim.
b 4. sec.
c 37. dec.
d 26. dec.

RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, [e] erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem, [f] facit LG, latitudinem Rationalem, & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. [g] Igitur DL, LG, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [h] Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

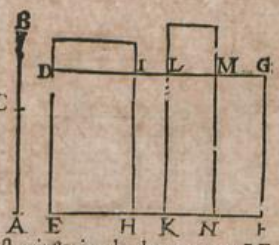
QVONIAM enim ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, CB, medium proportionale est inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo [i] cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeant, quam DH, LN, IK; erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL. [k] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commensurabilia sunt, quod AC, CB, ponantur potentia commensurabiles; erunt & DH, IK, ipsis æqualia commensurabilia. [l] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK, maius est, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora sint, per lemma propos. 39. huius libri, quam rectangulum bis sub AC, CB; erit & recta DL, maior quam LG, [m] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK, LF. Itaque quoniam DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatur rectangulum sub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG, descripti; (ostensum enim est rectangulum sub DI, IL, æquale quadrato ex LM.) diuiditurque DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commensurabiles, vt est demonstratum; [n] poterit DL, maior plus quam LG, minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum DG, ostensa sit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus posse, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

e 22. dec.
f 23. dec.
g 13. dec.
h 37. dec.
i 1. sexti.
k 17. sexti.
l 10. dec.
m 1. sexti.
n 18. dec.

THEOR. 44. PROPOS. 62. lxj. lv.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

a 45. prim. SIT ex binis Mediis prima AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundam. Constituantur enim eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Mediis primam AB, componentes [b] Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Medium, quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub AC, CB, Rationale est, erit & eius duplum, nempe LF, Rationale, quod cum applicatum sit ad Rationalem LK, [e] erit eius latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, ipsa LG, sit ipsi DE, commensurabilis longitudine, at DL, longitudine incommensurabilis, [f] erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quod cum DL, LG, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; [g] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, maius nomen esse, & posse plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius DG, maius nomen DL, plus possit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen LG, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.



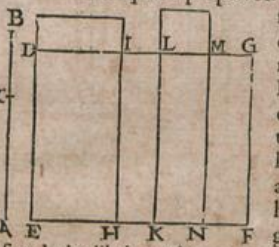
b 38. dec.
c 16. dec.
d 23. dec.
e 21. dec.
f 13. dec.
g 37. dec.

lxii. lvj.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

a 45. prim. SIT ex binis Mediis secunda AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam AC, CB, ex binis Mediis secundam AB, componentes, [b] Mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ Mediũ continent; Erunt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurablia, & Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit & ex corol. propos. 24. huius libri DK, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, CB, Medium est; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; [e] erit latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, ipsi CB, longitudine est incommensurabilis; estque vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, [f] erit quoque quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. [g] Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB, commensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponãtur commensurabiles; & rectangulo sub AC, CB, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub AC, CB. Igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulũ DK, incõmensurabile est rectangulo bis sub AC, CB, hoc est rectangulo LF, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri conscripsimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes, [h] longitudine sunt incommensurabiles: [i] Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; [i] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero, vt in propos. 61. ostendemus DL, esse maius nomen, posseque plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cum DL, maius nomen plus possit, quam LG, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, LG, Rationali expositæ DE, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam, &c. Quod erat demonstrandum.



c 16. dec.
d 23. dec.
e 23. dec.
f 10. dec.
g 16. dec.
h 10. dec.
i 37. deci.

lxiij. lvij.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

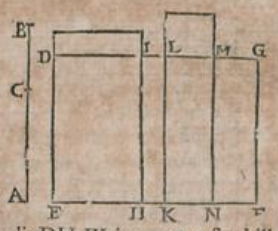
a 45. prim. SIT Maior AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse quartam. Constituantur enim eadem prorsus, quæ in propositione 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB, componentes, [b] potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit quoque DK, composito ex quadratis rectarum AC, CB, æquale existens, Rationale; At vero LF, duplum eius quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur

b 45. dec.

Ratio-

Rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum; [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item cum LF, Medium sit applicatum ad Rationalem LK, [d] erit LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, DE, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine; hæc vero eidem DE, longitudine incommensurabilis; [e] incommensurabiles erunt longitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationales potentia tantum commensurabiles; [f] ideoque DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia autē quadrata ex AC, CB, incommensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB, potentia incommensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommensurabilia, [g] atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incōmensurabiles. Quoniam vero, vt in propos. 61. ostendimus, DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam DL, ad I, in partes longitudine incommensurabiles, [h] poterit DL, plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum ipsa DL, (maius nomen ipsius DG, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DB; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

c 21. dec.
d 23. dec.
e 13. dec.
f 37. dec.
g 10. dec.
h 19. dec.



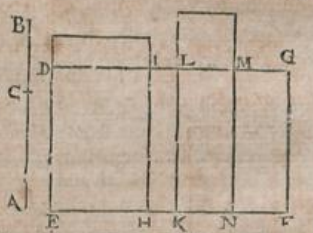
THEOR. 47. PROPOS. 65.

lxiv. lviij.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam esse. Fiant enim eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, [b] potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, [c] facit latitudinem DL, Rationalem; & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At vero Rationale, LF, ad Rationalem LK, applicatum, [d] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine cōmensurabilis est Rationali DE, illa vero longitudine incommensurabilis, [e] erunt DL, MG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, [f] Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM, & vt in antecedenti propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

a 45. pri.
b 41. dec.
c 23. dec.
d 21. dec.
e 13. dec.
f 37. dec.



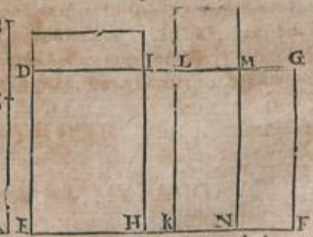
THEOR. 48. PROPOS. 66.

lxv. lix.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG, Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media [b] potentia incommensurabiles sunt, faciuntque & compositū ex ipsarū quadratis Mediū, & quod sub ipsis cōtinetur Mediū, & incōmensurabile cōposito ex quadratis iplarū; erit tam DK, illi composito æquale, quā LF, rectāgulo bis sub AC, CB, æquale Mediū. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalē DE, [c] erunt corū latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incōmensurabiles. [d] Quoniā vero cōpositū ex quadratis rectarum AC, CB, incōmensurabile est rectangulo sub AC, CB, eidem vero rectangulo sub AC, CB, cōmensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplū; [e] Erit compositū ex dictis quadratis, hoc est, DK, incōmensurabile rectangulo bis sub AC, EC, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [f] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; [g] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen, posseque plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.

a 45. prim.
b 42. dec.
c 23. dec.
d 42. dec.
e 13. dec.
f 10. dec.
g 37. dec.

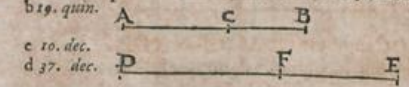


lxvj. lx.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitque recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB.[a] Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. [b] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, longitudine commensurabilis ponitur DE; [c] erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis:[d] Sunt autem AC, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles;[e] erunt & DF, FE, potentia solum commensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles;[f] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Siquidem AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis;[g] poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si AC, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus prima;[h] erit & DF, eidem Rationali longitudine commensurabilis; cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit commensurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero CB, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum AC, CB, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex binis nominibus tertia;[i] erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus tertia.



a 72. sexti. b 19. quin. c 10. dec. d 37. dec. e 10. dec. f 37. dec. g 15. dec. h 12. dec. i 72. dec.

AT si AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [k] poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & AB. fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

k 15. dec.

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantum commensurabilis sit ipsi AB, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantum:) & DE, esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si AC, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & DF, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expositæ Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At vero DF, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt DE, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C, sit q3 ei commensurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamq3 esse in sua nomina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, vt DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nam si potest fieri, sit vtraq3 ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine.[l] Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita AB, ad DE,[m] erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraq3 AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq3 vtraq3 ex binis nominibus quarta erit. Sed neq3 secunda vel quinta. Esset enim vtrumq3 nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atq3 adeo & inter se. Igitur & totæ AB, DE, longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.

l 12. dec. m 10. dec.

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilem, esse quoq3 vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE,[n] poterit quoq3 DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defi. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis;[o] poterit quoq3 DF, plus quam FE. quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabili, cum sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB.

n 15. dec. o 15. dec.

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

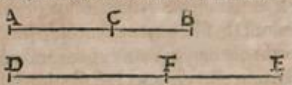
lxvij. lxi.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atq; ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunq; diuisa in sua nomina, quorum AC, maius & CB, minus, sitque ei recta DE, lon-

DE, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque ex binis Mediis esse, & ipsi AB, ordine eandem, [a] Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. [b] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, ponitur longitudine commensurabilis DE; [c] erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. [d] Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. [e] Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; [f] erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commensurabiles; [g] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, & rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. [h] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cum illi sit commensurabile; [i] atque adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FE, ei commensurabile, Medium, ex corollario propos. 24. huius lib. [k] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine commensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.



a 12. sext.
b 19. quin.
c 10. dec.
d 24. dec.
e 38. dec.
f 10. dec.
g 38. vel 39. decim.
h 10. dec.
i 18. dec.
k 39. dec.

SCHOLIVM.

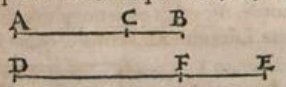
EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atq; ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, si modo loco commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

lxviij. lxij.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, [b] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. [c] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis rectarum DF, FE. [d] Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. [e] Igitur & hoc Rationale est.



a 10. dec.
b 22. sexti.
c 10. dec.
d 40. dec.
e 9. def.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB; ad rectangulum sub DF, FE: Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. [f] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [g] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, [h] sunt que AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componant Maiorem AB, [i] Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles Itaq; cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [k] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis & ipsa maior est. Quod demonstrandum erat.

f 10. dec.
g 40. dec.
h 40. dec.
i 10. dec.
k 40. dec.

lxix. lxiij.

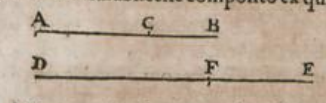
THEOR. 52. PROPOS. 70.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim iisdem quæ supra, ostendemus, vt in præcedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, CB,

commensurabile esse composito ex quadratis rectarũ DF, FE:[a] Est autem illud compositũ Medium, cum rectæ AC, CB. cõponant ipsam AB, potentem Rationale ac Mediũ. Igitur per coroll. prop. 24. huius lib. & hoc compositũ illi commensurabile, Mediũ est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub AC, CB,[b] quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE, atque adeo & rectangulum sub DF, FE, Rationale est, ex 9. defin. Denique vt in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demonstratum est;[c] erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 41. dec.



b 42. dec.

c 41. dec.

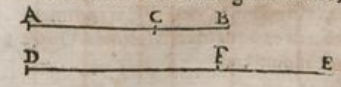
lxx. lxiv.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis DE, siue longitudine & potentia siue potentia tantũ Dico & DE, esse bina Media potentẽ. Constructis n. iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in prop. 69. compositũ ex quadratis rectarũ AB, CB, composito ex quadratis rectarum DF, FE, cõmensurabile esse: Nec non & rectangulũ sub AC, CB, esse commensurabile rectangulo sub DF, FE.[a] Cũ ergo tam compositũ ex quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulũ sub AC, CB, Mediũ sit; erit etiã ex coroll. prop. 24. huius lib. tã compositũ ex quadratis rectarũ DF, FE, quam rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incõmensurabiles sunt, vt prius. Postremo[b] quia compositum ex quadratis rectarũ AC, CB, & rectangulum sub AC, CB, incommensurabilia sunt, ex hypothesi propterea quod AB, bina Media potest; Est autem composito ex quadratis rectarũ AC, CB, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum sub AC, CB, probauimus cõmensurabile rectangulũ sub DF, FE; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositũ ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incommensurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incõmensurabileque composito ex quadratis ipsarum;[c] erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.

a 42. dec.



b 42. dec.

c 42. dec.

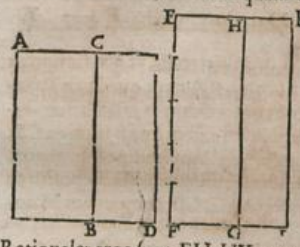
lxxi. lxv.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale spatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum spatium AD, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias cum AB, sit Rationale, esset & illi æquale CD, Rationale, quod non ponitur. Sit primo maius,[a] & exposita Rationali EF, applicetur ad eam rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad HG, aliud HI, æquale ipsi CD, vt totum EI, toti AD, sit æquale. Et quoniam AB, Rationale est, & CD, Medium, erit quoq; EG, Rationale, & HI, Medium; quæ cum applicentur ad Rationalem EF,[b] erit EH, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis;[c] At vero HK, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia EG, HI, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus; quod EG, Rationale sit, ad HI, Irrationale, nempe Medium;[d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoq; EH, maior quam HK,[f] cum EH, HK, eandem rationem habeant, quam EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD,[g] Irrationalis est quæ ex binis nominibus appellatur.

a 43. primi.



b 21. dec.

c 23. dec.

d 10. dec.

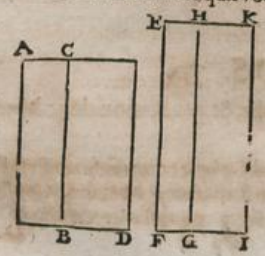
e 37. dec.

f 1. sexti.

g 32. dec.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & spatium AD,[h] Irrationalis est quæ vocatur Maior.

h 38. dec.



SIT deinde AB, minus quam CD, & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quam EH, mins nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis no-

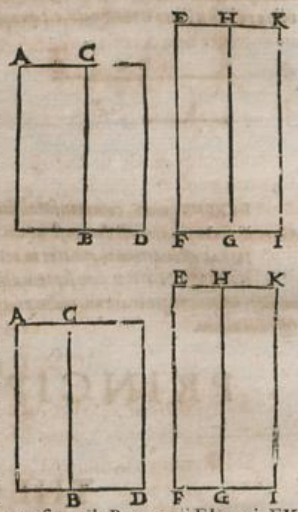
nis nominibus secunda, cum EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus secunda EK, atq; adeo & spatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compositum, [i] Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima. i 56. dec.

SI vero HK, plus possit quam EH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EK, ex binis nominibs quinta, cum EH, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & spatium AD, [k] Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat. k 59. dec.

THEOR. 55. PROPOS. 73. Lxxii. Lxvi.

SI duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommensurabilia AB, CD. Dico rectam quæ potest totum spatium AD, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias essent AB, CD, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cum illis sint æqualia. [a] Igitur rectæ EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cum EG, HI, Media sint applicenturque ad Rationalem EF.) [b] Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis, Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; [c] ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD, erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum vtrumq; nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atq; adeo & spatium AD, [d] Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.



a 20. dec.
b 23. dec.
c 37. dec.
d 57. dec.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumq; nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, [e] Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. e 60. dec.

QVOD si AB, minus sit, quam CD, non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se commensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neq; Mediæ neque inter se easdem esse.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [f] latitudinem efficit Rationalem ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. f 23. dec.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem efficit ex binis nominibus primam. g 61. dec.

ET quadratum eius, quæ est ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, [h] latitudinem facit ex binis nominibus secundam. h 62. dec.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, [i] latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. i 63. dec.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [k] latitudinem facit ex binis nominibus quartam. k 64. dec.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, [l] si latitudinem facit ex binis nominibus quintam. l 65. dec.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, [m] latitudinem facit ex binis nominibus sextam. m 66. dec.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales: Inter se autem, quod ordine non sint eædem ex binis nominibus perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senariis.

IN primo, qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denig, eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docent singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse in sua nomina.

IN tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextæ.

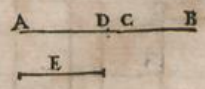
IN quarto, quem absoluunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quænam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinq; propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absoluitur, demonstrauit lineam quamcunq; commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. E recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.



SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidiæ AD, vel DB, æqualis sumatur E. Dico E, mediam esse secundum Analogiam Arithmeticam, inter AC, CB: & esse quoque ex binis nominibus. Quoniam enim AC, superat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, superat ipsam CB, eadem recta DC; perspicuum est dimidiam ipsius AB, nempe E, esse mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commensurabilis est longitudine toti AB, cum hæc illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi AB, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentib. septem senariis de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, cum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM. per detractionem.

Lxxiii. Lxviii.

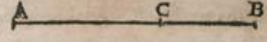
THEOR. 56. PROPOS. 74.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC; Et sunt AB, AC; longitudine incommensurabiles; [a] erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. [b] Igitur & conpositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB.) rectangulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulũ sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub, AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius lib. demonstrauimus. [c] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. dec.

b 16. dec.



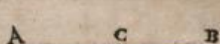
c 7. sec.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

d 37. dec.



NAM cum AB, AC, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; [d] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

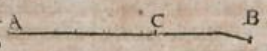
THEO-

THEOR. 57. PROPOS. 75.

Lxxiiii. Lxix.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia, [a] atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. [b] Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoq; rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.



a 16. dec.

b 7. dec.

c 17. dec.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc proposito proponi hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

Cum enim AB, AC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineant q; Rationale; [d] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome prima.*

d 38. dec.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

Lxxv. Lxx.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat, Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; [a] erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumque ipsorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtriq; cõmensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulũ sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. [b] Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. [c] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 16. dec.

b 7. sec.

c 67. dec.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

SI à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QVONIAM enim AB, AC, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, continent q; Medium; [d] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome secunda.*

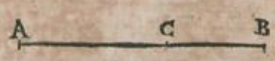
d 39. dec.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

Lxxvi. Lxxi.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRA-



DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC. [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositū ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. [c] Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, puoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à minori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à rectæ linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 10. dec. b 7. sec. c 10. def.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrarionalis est. Vocetur autem Minor.

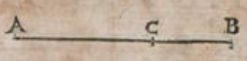
NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: [d] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.*

d 40. dec.

Lxxvii. Lxxii.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI à recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.



DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB, AC, Rationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, AC. [c] Sunt ergo rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB, AC, Rationale sit; [d] erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur à rectæ recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. defin. b 7 sec. c 17. decim. d 10. defin.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur, Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

Cum enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; [c] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autem AC. Aufertur igitur minus nomen AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

c 41. defin.

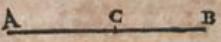
Lxxviii. Lxxiii.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium: & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRA-

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitq; tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. [a] Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur; rectangulum bis sub AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC [b] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo sub AB, AC, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 7 sec.

[b] 27. dec.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum, erit composita, ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magitudines AB, CD, EF, GH, sitque IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniam enim IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autem totorum AB, EF, ex pronuntiato 16. libr. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. Quod est propositum.



COROLLARIVM.

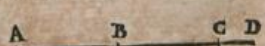
EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant,

THEOR. 62. PROPOS. 80.

Lxxix. Lxxiv.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia solum toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam Rationalem non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipsi AD, sit potentia solum commensurabilis. Et quia BC, Rationalis est; erit AC, illi solum potentia commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter cōpositū ex quadratis rectarū AD, BD, & rectangulū bis sub AD, BD; (superat enim compositum ex quadratis rectarum AC, BC, rectangulum bis sub AC, BC, quadrato ex AB; [a] quod compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compositum ex quadratis rectarum AD, BD, superat rectangulum bis sub AD, BD, quadrato eodem ex AB; [b] cum & compositū ex quadratis rectarū AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vna cū quadrato ex AB.) erit quoq; permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulū bis sub AC, BC, & rectangulum



[a] 7. sec.

[b] 7. secun.

gulum bis sub AD,DB. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrumq; Rationale sit. (Nam cum AC,BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; c-
c 16. dec. runt earum quadrata Rationalia, & commensurabilia c Igitur & compositum ex ipsis vtriq; illorum commensurabile est, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & excessus, inter rectangulum bis sub



d 22. dec. AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium Rationale est. d Et quia rectangulum sub AC, BC, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub
e 27. deci. AD,BD, e Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

Lxxx.
Lxxv.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat BC, Media toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti
a 24. dec. AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia BC, Media est potentia solum ipsi AC, commensurabilis; a erit & AC, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrumq; sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC, BC, illi commensurabile Rationale; Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub. AD, BD. (Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt



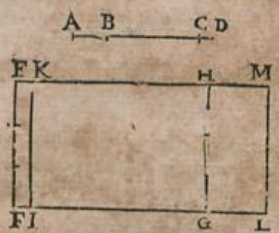
b 16. deci. & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. b Igitur & compositum ex
c 27. dec. ipsis vtriq; ipsorum commensurabile est, atq; adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarum AD, BD. c Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

Lxxxi.
Lxxvi.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIÆ Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit medium. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potentia, congruat ipsi alia BD. Media



a 45. pri. toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, a ad quam applicetur rectangulum EG, æquale composito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem
b 7. sec. EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et denique aliud EL, æquale composito ex quadratis rectarum AD, BD. b Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemq; modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum
c 24. dec. enim BC, Media ponatur, c erit & AC, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. d Ergo &
d 16. dec. compositum ex ipsis commensurabile est vtrique eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cum applicetur ad Rationalem EF, e
e 23. sex. erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium
f 23. dec. est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG, Medium: quod cum applicetur ad Rationalem KI, f erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC,
g 10. dec. longitudine incommensurabiles sunt, estque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, vt ostendimus lemmate 3. ad propos 19. huius lib. g erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata cõ-

mensura-

mensurabilia. [h] Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo sub AC,BC, commensurabile est eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est, ex iis quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. [i] Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis ipsi EH, [k] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi, congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantum congruit recta linea Rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere, [l] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

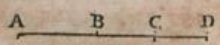
h 16. dec.
i 10. dec.
k 74. dec.
l 80. dec.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

Lxxxii. Lxxviii.

MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC,BC, Rationale; at rectangulum sub AC,BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD,BD, Rationale, ad rectangulum sub AD,BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC,BC, & compositum ex quadratis rectarum AD,BD, qui inter rectangulum bis sub AC,BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC,BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium est Rationale: sed & non Rationale est. (Cum enim rectangulum sub AC,BC, ponatur Medium, erit quoq; ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC,BC, Medium. Similiterq; Mediumerit rectangulum bis sub AD, BD, [a] Quare vnum non superabit alterum Rationali. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



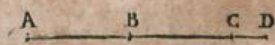
a 27. dec.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

Lxxxiii. Lxxviii.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum vero sub AC,BC, Rationale. Dico ipsi AB, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat, ipsi alia recta BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD,BD, Medium, rectangulum vero sub AD,BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD,BD: Est autem excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est; cum vtrumq; sit Medium. [a] Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



a 27. dec.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

Lxxxiv. Lxxix.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipsi vero congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque & compositum ex quadratis rectarum AC,BC, Medium, & rectangulum sub AC,BC, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis rectarum AC,BC. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi recta alia BD, toti AD, potentia incommensurabilis, ita vt & compositum ex quadratis rectarum AD,BD, Medium sit, & rectangulum sub AD,BD, Medium quoque, ac incommensurabile composito ex quadratis rectarum AD,BD. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum AC,BC, Medium est; erit etiam EG, illi æquale Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum

a 23. dec.

b 23. deci.

c 14. dec.

d 10. dec.

c 74. deci.

f 80. dec.



ſub AC, BC, Medium eſt; erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH, Rationalis eſt, longitudine ipſi EF, incommenſurabilis. Et quoniam KG, commenſurabile eſt rectangulo ſub AC, BC, cum illud huius ſit duplum; at rectangulum ſub AC, BC, incommenſurabile ponitur compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; [c] erit quoque KG, eidem compoſito, hoc eſt, ipſi EG, incommenſurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, [d] longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commenſurabilis ipſi EH; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter oſtendemus EK, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit; &c. Quod eſt abſurdum. [f] Vnam enim tantum congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IV.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neq; congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

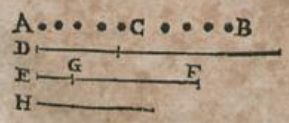
SCHOLIVM.

NON alitur colligitur numerus harum ſex Apotomarum, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

Lxxxv.
Lxxx.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

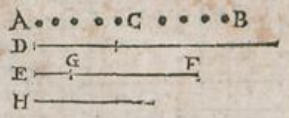
INVENIRE primam Apotomen.



REPERTIS duobus numeris quadratis, AB, CB, vt in ſcholio 2. propoſ. 29. huius lib. docuimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF. Eritque EF, cum commenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numer° AB, ad numerũ AC, ita per

coroll.

coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habent quam quadrati numeri; neque quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, GF. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tantum commensurabiles [c] atq; idcirco reliqua EG, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta EF, plus quam recta GF, quadrato ex H. Et quia est vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionē rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Habent autem AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [d] Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.



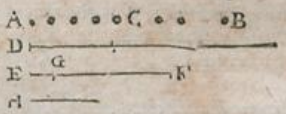
a 6. dec.
b 9. dec.
c 74. dec.
d 9. dec.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

Lxxxvi. Lxxxi.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. præcedenti; expositaq; Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF, eritq; GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoq;. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius lib. Dico EG, esse secundam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoq; EF, Rationalis. Quia vero numeri AC, AB, atque adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati [b] erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solum commensurabiles, [c] Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratū ex EF; & conuertendo, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF: Ostendemus iam vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.



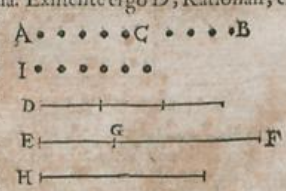
a 6. dec.
b 9. dec.
c 71. dec.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

Lxxxvii. Lxxxii.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum, AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius lib. [a] Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem coroll. propos. 6. huius lib. Dico EG, esse tertiam Apotomen. [c] Quoniam enim quadrata ex EF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc sit commensurabilis, vt demonstrauimus. Et quia AB, AC, atque adeo & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [d] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solum commensurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi solum commensurabilis; [e] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neq; igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati, [f] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H; Ostendemus; vt in propos. 86. rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cum tota EF, plus possit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.



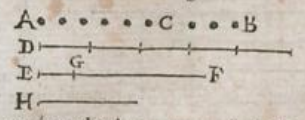
a 6. dec.
b 9. dec.
c 6. dec.
d 9. dec.
e 74. dec.
f 9. dec.

Lxxxviii
Lxxxiii.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionẽ habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. proposit. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam nu-



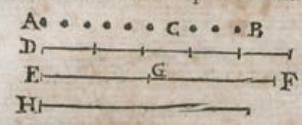
a 9. dec. meri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estq; eadem tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

Lxxxix.
Lxxxiv.

PROBL. 23. PROPOS. 90.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propos. præcedenti. fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis esse vt AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incõmensurabiles; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis, longitudine; erit ex defin. EG, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

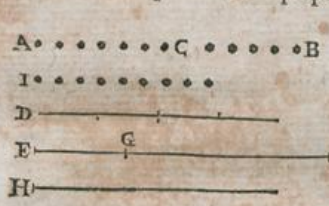


Lxxxx.
Lxxxv.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, vt in propos. 54. ita vt AB, ad neutrum ipsorum AC, CB, & I; ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in proposit. 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & EF, longitudine incommensurabiles esse. Dico & sextam esse. Nam vt in proposit. 88. erunt D, & GF, longitudine quoque incommensurabiles; Atq; ad eo neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incõmensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.



SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

a 49. dec. *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.* [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, BC, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erunt etiam AC, DC, Rationales potentia tantum commensurabiles.* [b] *Est ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus potest, quam CB, hoc est, quam DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex defin. Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomæ inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.*

b 74. dec.



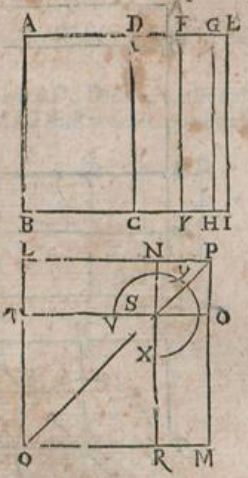
Lxxxxi.
Lxxxvi.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CON-

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Apotomen eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; & tota AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & deniq; eadem AE, tota plus poterit, quam congruens DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale ſub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. Et quia AE, plus poteſt, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: [a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commenſurabiles [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis erit: Eſt autem AE Rationali AB, longitudine commenſurabilis. [c] Igitur & vtraque AG, GE, ipſi AB, longitudine eſt commenſurabilis; atque ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi AB, parallelis, quæ ipſi BC, productæ occurrant in HI, [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum ſub duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraq; DF, FE, longitudine commenſurabilis eſt ipſi DE; & DE, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB; (Nam ſi commenſurabilis eſſet longitudine, cum & AE, ſit eidem AB, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent AE, DE, longitudine quoq; commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolum potentia commenſurabiles:) [f] erit etiam vtraque ipſarum DE, FE, ipſi AB, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraque DF, FE, Rationali DE, commenſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, [g] erit vtrumq; rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium.



a 18. dec.
b 16. dec.
c 12. dec.
d 20. dec.
e 12. dec.
f 14. dec.
g 22. dec.

IAM vero ipſi AH, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipſi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, angulum LPM. [i] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex FE: [k] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [l] Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant rationem; erit FI, mediũ proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autẽ inter eadẽ LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. mediũ quoq; proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: [m] Sed ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totũ DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum AI, per conſtructionẽ, æquale quadratis LM, NO. Igit & reliquũ AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac propterea recta TS, poteſt ſpatiũ AC, Dico TS, Apotomẽ eſſe.

h 14. ſec.
i 26. ſexti.
k 17. ſexti.
l 1. ſexti.
m 36. dec.

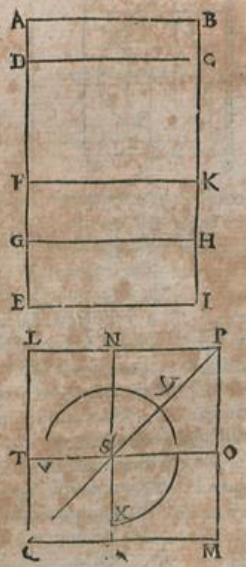
QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Rationalia, & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia, atq; adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommenſurabilia ergo ſunt LO, & NO, cum vnum ſit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [n] eandem rationem habentes cum LO, NO, [o] longitudine incommenſurabiles ſunt; [p] Atque idcirco reliqua TS, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

n 1. ſexti.
o 10. dec.
p 74. dec.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

Lxxxxii.
Lxxxvii.

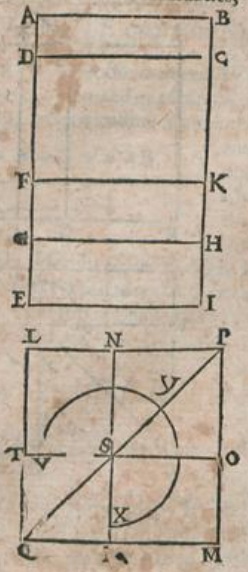
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum cõmenſurabiles; & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & deniq; AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. [a] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commenſurabilis; [c] eſſent AE, DE, inter ſe quoq; commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) [d] Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidem AB. Eſt

a 18. dec.
b 16 dec.
c 12. dec.
d 14. dec.

autem vtraq; AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam AB, AG, q̃ AB,
c 22. dec. GE, potentia solum commensurabiles; c Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis est; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commensurabilis; erit quoque, vt in scholio propos. 12. huius lib. ostendimus, eidem AB, Rationali longitudine commensurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. f Vtrumque ergo rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen esse primam.



f 20. dec.

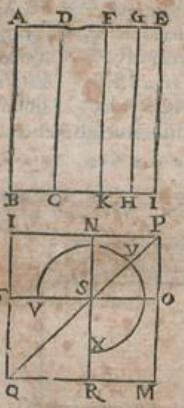
g 10. dec.

QVONIAM enim AG, GE, longitudine sunt commensurabiles, g erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, saltem potentia erunt cõmensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (ostensa enim sunt AH, GI, Media esse) Media sint. Et quoniam FI, atque adeo sibi æquale LO, Rationale est, propterea quæ Medio NO, incommensurabile; erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale est ostensum;
h 75. dec. h erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

Lxxxxiii. Lxxxviii.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.



a 16. dec.

b 14. dec.

c 22. dec.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; a Ac propterea & vtraq; toti AE, longitudine commensurabilis erit. Est autem AE, posita incommensurabilis longitudine Rationali AB. b Igitur & vtraq; AG, GE, eidem AB, longitudine erit incõmensurabilis. Cum ergo vtraq; AG, GE, Rationali AE, cõmensurabilis Rationalis sit; erunt tam AB, AG, quam AE, GE, Rationales potentia solum commensurabiles; c Ac propterea vtrumq; rectangulum AH, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali AB; erit quoque vtraq; DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis existens, d eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cum ergo vtraq; DF, FE, Rationali DE, commẽ-

d 14. dec.

e 22. dec.

surabilis, sit Rationalis; erunt tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles; e atque propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.

QVONIAM enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas ostendimus commensurabiles esse, f commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, cõmensurabiles sunt saltẽ potentia. At vero quia AE, DE, potẽtia solum sunt cõmensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero DE, commensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incommensurabiles; g ac propterea GI, FI, eandem rationẽ habentia, quam GE, FE, hoc est, illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & LO, Medium.) h erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

f 10. dec.

g 10. dec.

h 76. dec.

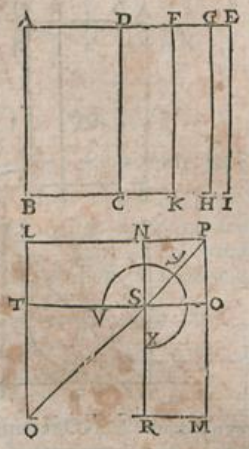
THEOR.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

xciv. lxxxix.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Minorem eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariã in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. [a] Erũt ergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus poteſt, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulum ſub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficienſque figura quadrata. Et quia AE Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis, [c] erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles; [d] incommenſurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe minorem.



a 19. dec.
b 20. dec.
c 22. dec.
d 10. dec.

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia F, Medium eſt oſtenſum, erit & LO, contentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atque adeo rectæ TO, SO, potentia incommenſurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

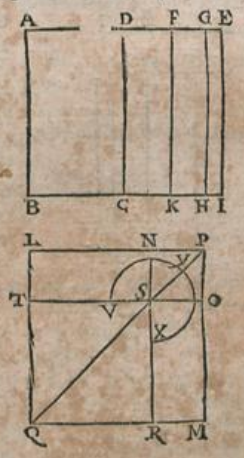
c 77. dec.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

lxxxv. lxxxx.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proxime antecedentis propoſitionis) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB, vt in propoſ. 93. diximus; [a] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rurſus erunt, vt in præcedenti propoſ. AH, GI, incommenſurabilia; poteritque, vt oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS, ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.



a 22. dec.
b 20. dec.

QVONIAM enim oſtenſum eſt AI, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonſtrauimus FI, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulum ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommenſurabiles, vt in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cũ TO, SO, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; [c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 78. dec.

lxxxvi. lxxxxj.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali,& Apotoma ſexta;Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC.ſub Rationali AB,& Apotoma ſexta AD.Dico rectam,quæ poteſt ſpatium AC,eſſe eam,quæ cum Medio Medium totum efficit.Sit enim ipſi AD,congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis.Secetur DE,bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE,longitudine incommenſurabiles.Et quia tam AE,quam DE,Rationalis eſt,& Rationali AB,longitudine incommenſurabilis; [a] erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia.Et quoniam AE, DE,potentia ſolum ſunt commenſurabiles; [b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem,incommenſurabilia; Atque adeo cum DI, FI,commenſurabilia ſint,[c] erit FI,ipſi AI,incommenſurabile.Iam vero demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS,eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.



a 22. dec.

b 10. dec.

c 14. dec.

QVONIAM enim AI,Medium oſtendimus;erit & comprit & LO,illi æquale,contentumque ſub TO,SO,Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile,vt oſtendimus;erit quoque LO,ſub TO,SO,contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum TO,SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Denique TO,SO, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt demonſtratum. Quamobrem cum TO,SO,ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarum incommenſurabile; [d] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum.

d 79. dec.

xcvij. xcij.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB,& ipſi congruens BC,ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles; [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF,æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG.Dico DG,eſſe Apotomen primam.Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK,æquale quadrato ex BC; ita vt totum DK,æquale ſit compoſito ex quadratis rectarum AC,CB. [b] Et quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB;ſi auferantur quadratum ex AB,& rectangulum DF; relinquetur GK,rectangulo bis ſub AC,BC,æquale;atque adeo diuiſa GL,bifariam in M,ductaq; MN,ipſi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo ſub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales ſunt;[c] erunt quoque quadrata ex AC,BC,Rationalia;ideoque commenſurabilia. [c] Cum ergo & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipſorum ſit commenſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale DK,Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE,[d] erit DL,Rationalis ipſi DE,longitudine commenſurabilis.Rurſus quia AC, BC, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF; [e] erit GL, Rationalis ipſi GF,hoc eſt,ipſi DE,longitudine incommenſurabilis.Et quoniam DK, Rationale & GK,Medium, hoc eſt,Irrationale, incommenſurabilia ſunt; [f] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint demonſtratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commenſurabiles;[g] Ac propterea reliqua DG,Apotome erit. Dico & primam eſſe.

a 45. primi.

b 7. ſexti.

c 16. dec.

d 21. dec.

e 23. dec.

f 10. decim.

g 74. dec.

QVONIAM enim per Lemma propoſ. 54. huius lib.rectangulum ſub AC,BC, hoc eſt, MK,medium eſt proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc eſt, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK,continue proportionalia;atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales ſunt. [h] Quare rectangulum ſub DI,IL,æquale eſt quadrato ex ML,hoc eſt,quartæ parti quadrati ex GL.Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc eſt, illis æqualia DH, IK, commenſurabilia ſunt, [i] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commenſurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales ſint,

h 17. ſexti.

i 10. dec.

sint,& ad maiorem DL,applicatum rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensque figura quadrata;atq; sit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis; [k] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum DG, esse Apotomen, & totam DL, plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atq; eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali DE ; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.



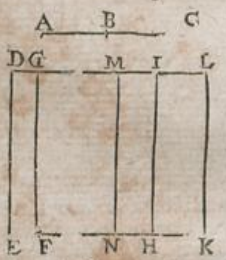
k 18. dec.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

xcviij. lxxxxiij.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, continentque Rationale: [a] Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen secundam esse construuntur enim eadem, quæ in antecedenti propos. ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, BC, & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & commensurabilia; [b] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius libri. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, [d] erit GL, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale incommensurabilia sunt; [e] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; [f] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.



a 45. prim.
b 16. dec.
c 23. dec.
d 21. dec.
e 10. dec.
f 74. dec.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

LXXXXix. xciv.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantum cõmensurabiles, continentque Medium: [a] Et ad Rationalem DE, Applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra ostendemus iam, vt in propos. præcedenti, DK, Medium esse, [b] atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id & eius duplum GK, [c] erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratũ ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, [d] erit quadratum ex AC incommensurabile rectangulo sub AC, BC, [e] Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub AC, BC. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, BC, hoc est, ipsi GK, [f] Atque adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles sunt, Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; [g] Ac proinde reliqua DG, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in prop. 98. demonstrabimus DL, totam plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum DL, GL, Rationali DE, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.



a 45. prim.
b 23. dec.
c 25. dec.
d 10. dec.
e 16. dec.
f 10. decim.
g 74. dec.

THEOR.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0469-9

C.
LXXXV.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, faciantesque com-
a 45. prim. positum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub AC, BC, Medium; a & ad



Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi
b 21. deci. æquale DK, Rationale est; b erit DL, Rationalis ipsi DE, longi-
c 23. dec. tudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GL, Medium est; c erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quo-
d 10. dec. niam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium incommensurabilia sunt; d erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ
e 74. dec. sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantum commensurabiles; e Ac propterea re-
f 10. dec. liqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; f E-
g 19. dec. runt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; g Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; poterit DL, plus, quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrãdum.

ci.
LXXXVI.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum
a 45. primi. vero sub iisdem AC, BC, Rationale: a Et ad Rationalem DE, ap-



plicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem, quæ
b 23. dec. supra. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeo & illi æquale DK, Medium est; b erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangu-
c 21. dec. lum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale est;
d 10. dec. c erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; d erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales
e 74. dec. ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; e Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

cij.
lxxxvij.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint in-
a 45. prim. commensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum sub iisdem AC, BC, Medium, incommensurabileque compositum ex quadratis ipsarum. a Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex A



B, spacium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, illi æquale DK, quam rectangulum sub AC,
b 23. dec. BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium est; b Erit tam DL, quam GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC BC, incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, BC; Et sunt,
c 24. dec. rectangulum sub AC, BC, & eius duplum GK, commensurabilia; c Erit & GK, eidem

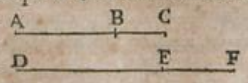
eidem compoſito, hoc eſt, ipſi DK, incommenſurabiles;[d] propterea quæ rectæ DL, GL, eandem habentes ratio- d 10. dec.
nem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt
DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles;[e] Atque ideirco reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & ſextam. O- e 74. dec.
ſtendemus enim ſimiliter, vt propoſ. 101. totam DL, plus poſſe, quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi
longitudine incommenſurabilis. Cum igitur neutra ipſarum DL, GL, commenſurabilis ſit longitudine Ratio-
nali DE; erit ex defin. DG, Apotome ſexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c.
Quod erat oſtendendum.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

ciij.
xcviij.

RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis; & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi AB, longitudine commenſurabilis DE. Dico & DE, Apotomen eſſe, atque ordine eandem ipſi
AB;[a] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF.[b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. a 12. ſexti.
Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commenſurabiles;[c] Erunt quoque AC, DF, nec non & BC, b 12. quint.
EF, commenſurabiles longitudine. Et quia AC, BC, ſunt Rationales, erunt et- c 10. dec.



iam illis commenſurabiles DF, EF, Rationales. Rurſus quia eſt, vt AC, ad DF,
ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & ſunt AC, BC, po-
tentia ſolum commenſurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propoſ. 10. huius li-
bri demonſtrauimus, DF, EF, potentia tantum commenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint oſtenſæ,[d] reli- d 74. dec.
qua DE, Apotome eſt. Dico & ipſi AB, ordine eandem eſſe. Poſſit enim primum AC, plus quam BC, quadrato
rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quo poſito,[e] poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longi- e 15. dec.
tudine commenſurabilis. Si igitur AC, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſitæ, vt AB, ſit Apoto-
me prima;[f] erit quoque DF, longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, cum tam Rationalis expoſita, f 12. dec.
quam DF, eidem AC, ſit longitudine commenſurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nem-
pe ordine eadem ipſi AB. Si vero BC, ſit longitudine commenſurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Ratio-
nali longitudine commenſurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome ſecunda. Si denique
neutra ipſarum AC, BC, commenſurabilis ſit longitudine expoſitæ Rationali;[g] erit quoq; neutra ipſarum DF, g 14. dec.
EF, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quo poſito,[h] po- h 15. dec.
terit & DF, plus EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſtendemus DE, eſſe
Apotomen quartam, quintam, vel ſextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commenſurabilis, &c.
Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propoſ. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus ſcripſimus. Nimirum, ſi recta DE, commenſurabilis ſit ipſi AB, potentia tantum, eodem modo demonſtrari poſſe, (ſi loco vocis: longitudine commenſurabilis vtamur voce: potentia tantum commenſurabilis:) & DE, Apotome eſſe: At non poſſe inferri, illam eſſe ordine eandem ipſi AB. Non enim ſequitur, ſi tota AC, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſitæ, & DF, eidem eſſe commenſurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis expoſita, & DF, eidem AC, longitudine commenſurabilis eſt; ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt DE, illi potentia tantum commenſurabilis, ſit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome. ſecunda, quarta, vel quinta, eiq; congruens BC, & ſit DE, ipſi AB, potentia tantum commenſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtendemus Apotomen eſſe, eiq; congruentem EF, & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen eſſe ordine eandem ipſi AB. Nam ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex defin. Apotomæ prima, Rationali i 12. dec.
expoſitæ commenſurabilis longitudine:[i] atque adeo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt AC, & DF. Quare cum k 10. dec.
ſit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE;[k] erunt quoque AB, & DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis, Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda vel quinta. Eſſet enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, atque adeo & ipſæ inter ſe. Quocirca & AB, DE, inter ſe longitudine forent commenſurabiles, quod non ponitur.

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipſi AB, potentia ſolum eſt commenſurabilis, eſſe quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF,[l] poterit quoque DF, plus quam EF, l 15. decim.
quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſſit, quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit quoque DE, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi AB, quia rurſus, cum ſit vt
AC, ad BC, ita DE, ad EF,[m] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex m 15. dec.
defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.

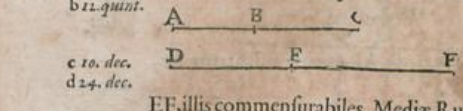
THEOR.

civ. lxxxix.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apotomen esse, & ipsi AB, ordine eandem. [a] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad FE, [b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [c] erũt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commensurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ sunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; Sunt autem AC, BC, potentia solum cõmensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ, [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniam enim est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoq; vt quadratũ ex AC, ad rectangulũ sub AC, BC, ita quadratũ ex DF, EF; Et permutando vt quadratũ ex AC, ad quadratũ ex DF, ita rectangulũ sub AC, BC, ad rectangulũ sub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, cõmensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, [f] ostensæ sint commensurabiles; [f] erit & rectangulũ sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, cõmensurabile. Quare si rectangulum sub A C, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; [g] atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda: erit quoq; rectangulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.



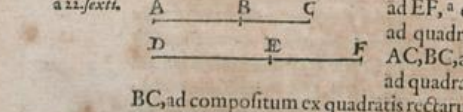
a 12. sexti. b 12. quint. c 10. dec. d 24. dec. e 75. vel 76. decim. f 10. dec. g 75. dec. h 76. dec.

cv. cxvi. c.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, facientesq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Minorem esse. Fiant enim eadem quæ supra, ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quã AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, [a] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF, & permutãdo vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratum ex BC, commensurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. [b] Igitur & composito ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium: Erit quoq; rectangulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium, Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, sunt q; AC, BC, potentia incommensurabiles, [c] erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub iisdem DF, EF, Medium; [d] erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.



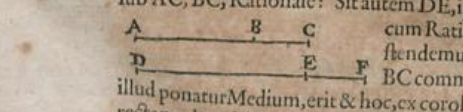
a 22. sexti. b 10. dec. c 10. dec. d 77. dec.

cvi. cxvii. ci.

PROBL. 83. PROPOS. 107.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium: at rectangulum sub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipsi AB, incommensurabilis quocunque modo. Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem; quæ supra ostendemus, vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex corol. propos. 24. huius lib. Mediũ. Rursus vt in prop. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cũ ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt deniq; eodẽ modo, vt in præcedenti prop. est probatũ, rectæ DF, EF, potẽtia incom

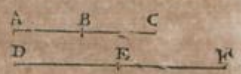


incommensurabiles. Igitur cum DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis Rationale; [a] erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 78. dec.

THEOR. 84. PROPOS. 108. cvij. cij.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

SIT recta AB, cum Medio Medium totũ efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesq; compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DE, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit.

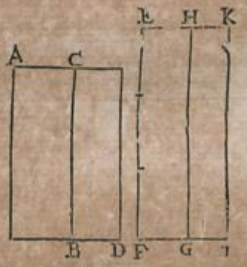


Constructis enim iisdem, quæ supra probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulum sub DF, EF; Sunt autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC. per hypothesim, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum sub DF, EF, incommensurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; [a] erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum. [a] 79. dec.

THEOR. 85. PROPOS. 109. cviij. ciij.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor,

DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, [a] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi CD, ita vt totum EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale est; [b] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est, [c] erit HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque cum EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF, at HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis, [d] erunt EK, HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles: [e] propterea quæ reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine, cum tota EK, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc est, spatium AB, sibi æquale, [f] Apotome est. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota EK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF, erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, [g] Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat.

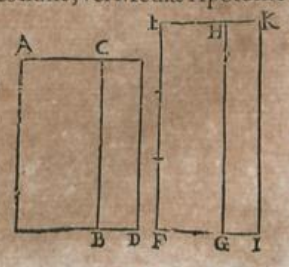


[a] 45. pri.
[b] 21. dec.
[c] 23. dec.
[d] 13. dec.
[e] 74. dec.
[f] 92. dec.
[g] 93. dec.

THEOR. 86. PROPOS. 110. cix. civ.

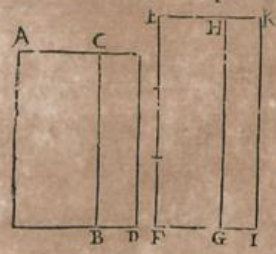
RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest esse, vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadẽ enim construantur, quæ supra. Et quia EI, Medio AD, æquale Medium est, [a] erit EK, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itẽ quia HI, æquale Rationali CD, Rationale est; [b] erit HK, Rationalis ipsi EF, longitudine commensurabilis. Itaque cum HK, quidem ipsi EF, sit commensurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommensurabilis; [c] erunt HK, EK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum com-



[a] 23. dec.
[b] 21. dec.
[c] 13. dec.

d 74. dec. commensurabiles; d Ac proinde reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK, plus potest quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens HK, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma secunda EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, e Mediæ est Apotome prima. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens HK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc est, spatium illi æquale AB, f est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quam ob rem Rationali à Medio detracto, &c. Quod ostendendum erat.



e 93. dec.

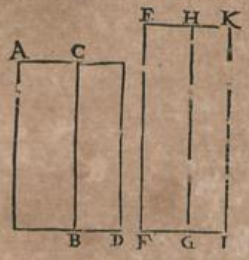
f 96. dec.

cx. cv.

THEOR. 87. PROPOS. III.

MEDIO à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR à Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem quæ supra; quoniam EI, HI, Medijs AD, CD, æqualia Media sunt, a erunt EK, HK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur incommensurabilia; b erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; c Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est spatium AB, illi æquale; d Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus; erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, e est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.



a 23. dec.

b 10. dec.

c 74. dec.

d 94. dec.

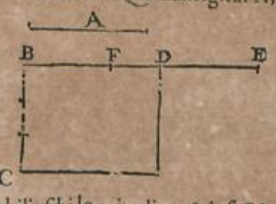
e 97. dec.

cxj. cvj.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Exposita autem Rationali BC, a applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est; b erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE. Rationales potentia tantum commensurabiles, poteritque BE, plus quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; c erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen BF. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima est, BF, FD, Rationales potentia solum commensurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa BF, Rationali BC, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine sit commensurabilis eidem BC; d erunt quoque BE, BF, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota BE, sit longitudine commensurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquæ parti FE, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis sit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum BE, FE, longitudine commensurabilium, ipsa BE, longitudine incommensurabilis est ipsi DE; (quod BE, DE, Rationales sint potentia solum commensurabiles) e erit quoque altera FE, eidem DE, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, DE, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt FE, DE, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua FD, f Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.



a 45. pri.

b 98. dec.

c 61. dec.

d 11. dec.

e 14. dec.

f 74. dec.

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit. Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

QVA-

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, [g] latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. g 23. dec.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, [h] latitudinem efficit Apotomen primam. h 98. dec.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum, [i] latitudinem efficit Apotomen secundam. i 99. deci.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, [k] latitudinem efficit Apotomen tertiam. k 110. decī.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, [l] latitudinem efficit Apotomen quartam. l 101. dec.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [m] latitudinem efficit Apotomen quintam. m 102. decimi.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [n] latitudinem efficit Apotomen sextam. n 103. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ; Manifestum est Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se differre.

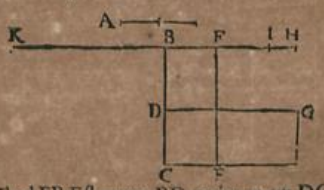
QVONIAM vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentiam, ad Rationalem applicata latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarū quinq; Irrationalium quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiūt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem & tam illæ, quam hæ à Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter sese differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens;
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113. cxij.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; [a] & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, esse ordine eandem ipsi B C, ex binis nominibus. [b] Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A, atque adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniam æqualia sunt B E, C G; [c] erit vt B C, ad D C, ita D G, hoc est, ipsi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D ad D C, ita H F, ad F B: Est autem B D maior quam D C. Igitur & H F, maior est, quam F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; [d] & fiat vt H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F, ad I F, hoc est, ad ipsi æqualem B F, ita F K, ad B K. Ostensum est autem esse vt H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ab B K. At B D, D C, (cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus. Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. [e] Igitur & F K, B K, potentia solum commensurabiles sunt.



a 45. pri.

b 45. pri.

c 14. vel 16. sex.

d 12. sex.

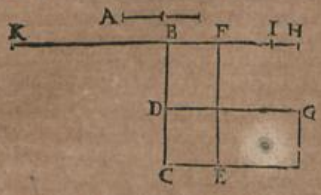
e 10. dec.

RVRSVS quia est vt H F, ad B F, ita F K, ad B K, [f] erunt quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, vt F K, ab B K. Ac propterea F K, media proportio-

f 12. quin.

nalis est inter HK,BK. Quare vt HK, prima ad BK,tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex HK,prima ad quadratum ex FK,secunda. Quia vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis
g 21. dec. A,æquale) ad Rationalem DC,applicatum g facit DG, latitudinem Rationalem ipsi DC, longitudine commensurabilem; Erit quoque HB, ipsi DG, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi DC. Et quoniam ostensum est, esse vt BD,ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK,ad BK,ita HK,ad FK; erit quoque vt
h 22. sex. BD,ad DC, ita HK, ad FK. h Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commensurabile est quadrato ex DC. (quod rectæ BD, DC, sint
i 10. dec. Rationales potentia commensurabiles, cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus.) i Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratum ex FK;
k 10. dec. ita recta HK, ad BK. k Igitur longitudine commensurabilis est HK, ipsi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propositionis 16. huius lib. Ostensa est autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & BK, ipsi HK, commensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa sit FK, ipsi BK, potentia solum commensurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales sint,
l 74. dec. & potentia tantum ostensæ commensurabiles, l erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod est primum.

QVONIAM vero ostensum est esse rectam HK, totam parti BK, longitudine commensurabilem,
m 16. dec. m erunt propterea & BK, BH, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo BH, ostensa sit longitudine



n 20. dec. commensurabilis ipsi DC, erit quoque BK, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, ostensæ longitudine commensurabiles; n Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.

ITEM quia demonstrauimus esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erunt idcirco Apotomæ nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipsius BC, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO vel BD, plus potest, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest BD, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit
o 15. dec. vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; o poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si BD, plus potest quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem BD, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & FK, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi BD, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si vero DC, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine com-
p 14. dec. mensurabilis. Si denique neutra ipsarum BD, DC, sit Rationali longitudine commensurabilis; p erit quoque neutra ipsarum FK, BK, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome BF, ipsi BC, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertijs. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

cxiij. o.

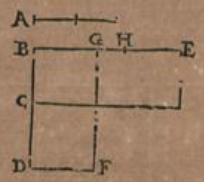
THEOR. 90. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus sit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

a 45. pri. SIT rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD, a & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi
b 45. pri. BC, Apotomæ ordine eandem. b Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; c erit vt BE, ad BG, ita BD, ad
c 14. vel 16. sexti. BC; & per conuersionem rationis, vt BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est vt BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam, erit quoque BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, vt tota BE, ad totam GE: Erat autem vt BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoq; vt BH, ad HE, ita EH, ad GH; atq; adeo HE, media proportionalis est inter BG, GH. Quare erit vt BH, prima ad GH, tertiã, ita quadratum ex BH, prima ad quadratũ ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, eũ sint nomina Apotomę BC. Rationales potentia tantũ commen-
d 10. dec. surabiles, d Erunt quoq; BH, HE, potentia tantũ commẽsurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commẽ-
e 10. dec. surabilia. Igitur rectę BH, GH, eandẽ habentes rationẽ cũ quadratis ex BH, HE, vt demonstrauimus, e lõgitudine sunt commẽsurabiles; Ac propterea tota BH, lõgitudine commẽsurabilis existẽs parti GH, cõmẽsurabilis quoq; longitudine erit parti reliquæ BG, ex coroll. propos. 16. huius lib. At vero cũ BD, Rationalis sit, nẽpe maius nomẽ
f 22. dec. Apotomæ BC; & rectangulũ BE, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; f erit latitudo BG, Rationalis commen-

mensurabilis longitudine ipsi BD. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & BH, eidem BD, Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeo Rationalis existit; quandoquidem BH, BG, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia vero BH, HE, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, & BH, Rationalis; erit quodue HE, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt BH, HE, potentia solum commensurabiles: [h] Ac propterea BE, ex binis nominibus est. Quod est primum. h 37. dec.

QVONIAM vero ostendimus esse BH, ad HE, vt BD, ad CD, atque adeo permutando BH, ad BD, vt HE, ad CD; Ostensa est autem BH, ipsi BD, longitudine commensurabilis; [i] erit quoque HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod est secundum. i 10. dec.



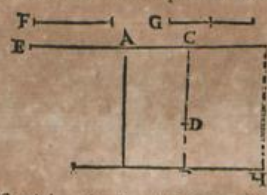
IMMO & in eadem proportione, cum demonstratum sit esse BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod est tertium.

POSTREMO vel BD, plus potest quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, [k] poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. Si vero CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si vero neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; [l] erit quoque neutra ipsarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertijs definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum. k 15. dec. l 14. dec.

THEOR. 91. PROPOS. 115. cxiv.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. o.

CONTINEATVR spatium AB, sub Apotama AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Possit autem recta F, spatium AB. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, [a] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [b] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commensurabilia sunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB, atque adeo vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. [c] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE; [d] Commensurabilis autem est longitudine HI, ipsi CE, quod vtraque HI, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD. [e] Igitur & BH, ipsi AC, longitudine est commensurabilis; [f] Atque idcirco & HC, ipsi BA, commensurabile erit, [g] cum sit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale Rationale est. Igitur & BA, illi commensurabile, Rationale erit, propterea que & recta F, ipsum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.



a 45 pri.
b 113. dec.
c 10. quin.
d 12. dec.
e 10. dec.
f 10. dec.
g 1. sexti.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CE, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

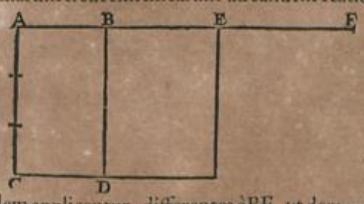
THEOR. 92. PROPOS. 116. cxv. cvij.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicubi antecedentium est eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, contineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum. Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE,

non esse eandem alicui tredecim illarum quas in coroll. propos. 112. huius libri collegimus. Nam cum qnadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum [a] latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 101. 102. 103. huius libri. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum faciat AB, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam adplicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

a 23. dec.



Quod si compleatur rectangulũ DE; erit & hoc contentum sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus EF, non esse eandẽ alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cum quadratũ EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciãt, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

Cxviij. vij.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G, sintq; numeri EF, & G, minimi omnium eandẽ proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G. Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratũ numerum ex G. ([b] Cum n. quadrata habeãt suorũ laterum proportionem duplicatã; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cũ sint æqualiũ duplicatæ.) Sed quadratũ ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. libri 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus ex EF, cum dimidiũ habeat, atq; adeo bifariam possit diuidi, par erit ex definitione. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cum se ipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; [c] eo quod impar imparẽ multiplicans, imparem procreat. Quod est absurdum. Ostensus enim par.) Quia vero EF, & G, in sua proportione minimi, [d] inter se primi sunt; & EF, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH, [e] & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cũ quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH, æqualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt supra de numero EF, diximus, erit quadratum ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. Quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.

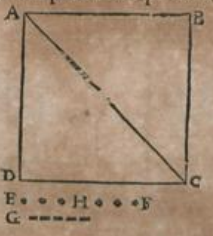
a 25. decim.

b 20 sexti. & 21. octaui

c 29. noni.

d 24. sept.

e 11. octa.



ALITER. Sit, si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum sit quadrati ex AB; sit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeo & quadratus ex ea vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadratus ex EF, duplus est quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex EF, [f] ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cum ergo & G, seipsum metiatur, erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter AC, longitudine lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

f 14. octa.

SCHOLIVM.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti, habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunq; numeris

ab vni-

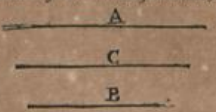
ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. [g] solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum bi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum ([h] alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [i] Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

g 10. noni.
h 24. octa.
i 9. dec.

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CÆTERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, vt merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A C, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad C; ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque positam super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; [k] erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & B, incommensurabiles.



k 10. dec.

RVRSVS [l] quoniam circuli, quorum diametri A, B, proportionem habent quam quadrata ex A, & B, descripta: Quadrata autem hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterque positæ, proportionem habent, quam rectæ A, & C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. [m] Habebunt quoque circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam rectæ A, C. Sed rectæ A, C, incommensurabiles sunt longitudine [n] Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt.

l 2. duode.
m 11 quin.
n 10. dec.

IAM vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ super A, B, [o] habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommensurabiles sint, vt modo est demonstratum: [p] incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

o 5. 6. vel 7. duodec.
p 10. dec.

QVOD si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, [q] habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, [r] Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solum lineæ, & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

q 11. duodecimi.
r 10. dec.

EADEM autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, [s] ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos commensurabiles esse, [t] atq; adeo & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.

s 10. dec.
t 5. 6. 7. & 11. duodec.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM,

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibique nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem perquam necessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemue, appellari solidum, siue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudinem latitudinem adiecit, superficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hæc enim describit vestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hæc enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam, consulit, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum vero seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum, siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta discincta a linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, vt perspicue in commentarijs, quos in sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, a nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

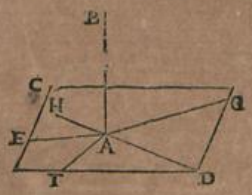
QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei, perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

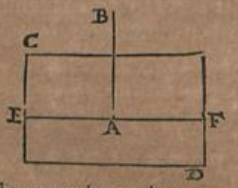
LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

VT li-

VT linea recta AB, plano CD insistens, ita vt B punctum sit in sublimi extra planum CD, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter insistat plano CD, & non magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque deinceps BAH, rectus, ideoque illi æqualis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD, facient AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insisset. Quod si fieri posset, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, ducta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non duceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, vt recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.



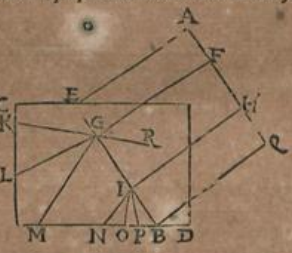
VT autem recta quæpiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia si duæ lineæ componant vnam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineam componant. Dico AE, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos constituere; atque idcirco non esse rectam ad planum CD. Hoc autem perspicuum est, cum AB, circa EF, veluti axem, circamuerti queat, ita vt punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum EF, semper cosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. huius lib.



IV.

PLANVM ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

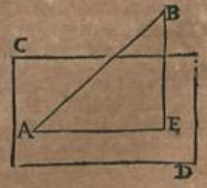
INSISTAT planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, sit in sublimi, hoc est, extra planum subiectum CD, at EB, in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio EB, quæ, vt demonstrabitur propos. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem sumpta punctis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos efficerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum alijs omnibus in plano CD, a punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus, erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, sient vtrobique à lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, insistet. Quotiescunque igitur planum alteri rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoq; esse ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.



V.

RECTÆ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra planum in sublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B termino sublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque necessario angulus BAE, acutus, [a] cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus sint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus linea insistente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; ita vt tanta dicatur esse inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus BAE.



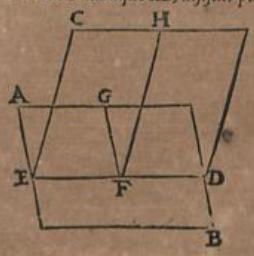
a 17. pri.

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroq; planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cũ sectione angulos efficiunt.

PLANO

PLANO namque AB, insistat planum CD, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Sigitur ad DE, communem sectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometræ angulum GFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtususue: quamquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorū commonstrat situm, seu elevationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consuevit à plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

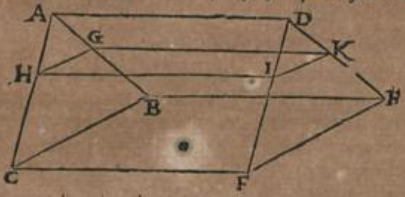
PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON obscura est hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur: hoc est, siue ad dexteram, siue ad sinistram: & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscisum, remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.



SIT enim tectum quodpiam ABCDEF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius basis BCFE, auferaturque fastigium AGHDKI. Quo facto perspicuum est, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter se, si ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GH, KI, conueniant in fastigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem lineæ in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atque deorsum. Itaque duo plana quæcunque, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel sunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallelæ, neque vnquam conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & intransuersum positæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit, vt breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cum illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

ÆQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

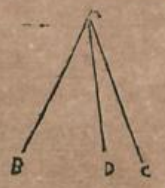
Quod si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figuræ solidæ non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione diximus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existent æqualia.

XI. SO-

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVÆ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniã videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.



ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

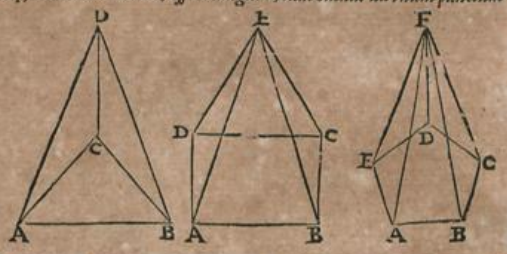
HÆC definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano est, in quo rectæ AB, AD, & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB, atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perspicuum cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si sese penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, qui non plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.

VIDELICET figuræ solidæ à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constitutæ appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant, excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basim, triangulæ sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangulæ vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagonæ denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

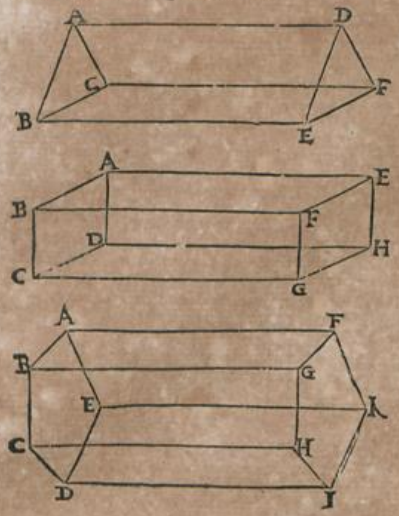


XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ scilicet solidæ, quarum plana aduersa & æqualia, & similia, & parallelæ sunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quam columna quædam laterata æqua-

æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vnoquoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.



EX his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figurã solidam dunt axat, cuius duo plana aduersa parallela æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quod plurimæ demonstrationes in hoc lib. & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propos. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quod tali prismati solum demonstratio illa conuenit. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, altitudinem finitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

SPHÆRA est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHÆRA est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO in libro de Vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

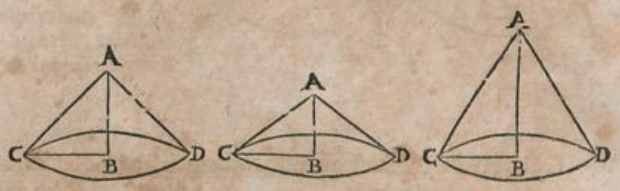
CONVS

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum ABC, circa latus quiescens AB, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, describetur solida quædam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit: & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cum enim latera AB, BC, ponuntur æqualia; [a] *erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus est, erit angulus BAC, semirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius;* [b] *erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circumducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum enim latus AB, maius sit latere BC,* [c] *erit angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.*

[a] 3. pri.
[b] 18. pri.
[c] 18. pri.

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huiusmodi circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin. Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis, quarum vtraq; in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

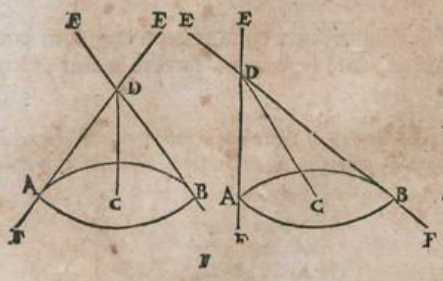
AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium scripsit.
SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur eousque in circuli AB, circumferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum restituatur, à quo cœpit moueri: describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum sese tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea superficie, quam DB, sola describit. Coni verticem punctum D. Axem DC. Basim AB, circulum. Quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.



XXI.

CYLINDRVS est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde cœperat moueri, circumassumpta figura.



VELVTI si rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quiescens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, describunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli à lateribus AD, BC, oppositis descripti.
EVCLIDES porro solum cylindrum rectum hoc loco desinit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsę in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

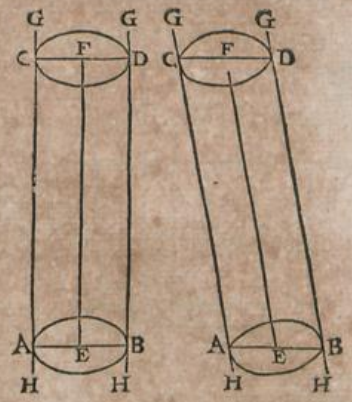
LATVS autem cylindri linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

SINT

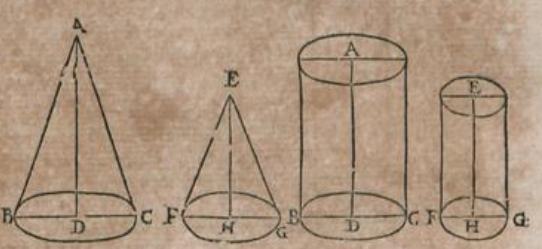
SINT duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque AB, CD: iunctaque rectæ AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra EF, in planis circulorum semper æquidistantes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cœperunt; describetur à linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum, producitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos ABCD. Axem, rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.



XXIV.

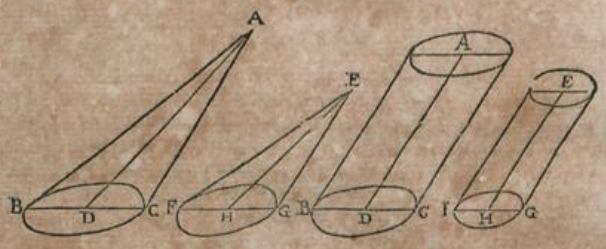
SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit, Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis autem axes AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter basis ad FG, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triãgula ADB, EHF, ex quorum reuolutione descripti sunt coni, necnon rectangula AB, EF, quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem vt BC, ad FG, [a] ita dimidia BD, ad dimidiam FH: erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erunt: Triangula quidem, [b] propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula sunt, [c] ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero, [d] eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, sunt æqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



a 15. quin.
b 6. sexti.
c 3. sexti.
d 24. pri.

QVOD si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintque anguli inclinationum ADB, EHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicentur & coni inter se, & cylindri quoque inter sese similes; quoniam nimirum hac ratione & eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.



XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

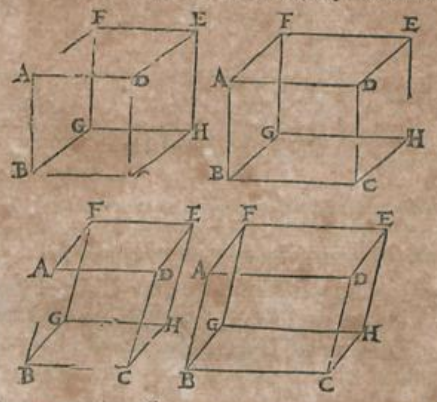
HÆC sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Timæo quinque mundi corpora, quæ simplicia a Philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis a Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autem propos. 17. Icosaedri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen propriis in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib 13.

QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptione, corporum regularium; necessariũ esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt contenta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma quæ ex aduerso æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæteram quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

NON est necesse, vt anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: sed satis est, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.

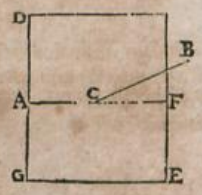
VERVM

VERVM duæ hæ postremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusq; mutuis corporum regularium copiose agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

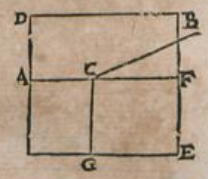
RECTÆ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars vero CB, in sublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, supra planum DE, existant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipsi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC. Quod est absurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

HÆC est communis demonstratio interpretum, Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur, rectæ AC, esse aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB partem quidem AC, esse in plano DE, partem vero CB, in sublimi vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Verumtamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, quæ recte & æqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometrice, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat, AB, esse quoque rectam, eiusque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in sublimi esse positam. [a] *Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG; & in eodem plano ipsi CG perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione;* [b] *erunt AC, & FC, in directum & continuum positæ. Quamobrem etiamsi quis contendat, AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.*



a 11. pri.

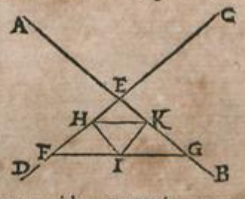
b 14. pri.

HINC sit omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

RECTÆ lineæ AB, CD, se mutuo secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra, Existent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra quod fieri non posse, iam supra [a] demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem EHK, in vno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, [b] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.



a 1. vndecimi.

b 1. vndecimi.

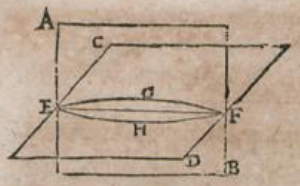
QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG: [c] in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

c 1. vndecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14.

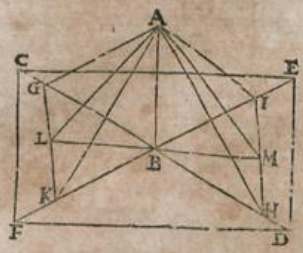


pronunciato 1.lib.ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

iv. ## THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat. Illa ducta etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.



a 2. vndecimi.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B; [a] erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; item rectæ BI, BK; ducanturque rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli EGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum

b 15. pri.
c 4. pri.

sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.

d 15. pri.
e 26. pri.

RVRSVS [d] cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL; trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent æqualia, ex constructione. [e] Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

f 4. pri.

PRÆTEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, [f] erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

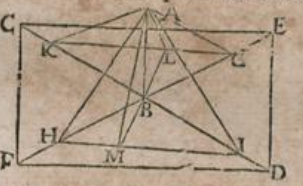
g 8. pri.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; [g] erunt etiã anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

h 4. pri.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, triãguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; [h] erunt quoque bases AL, AM, æquales.

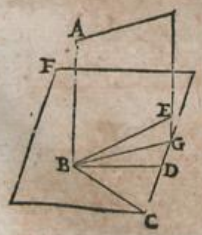
i 8. pri.



QVONIAM denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; [i] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B, Eademque ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangẽt in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta GI, & KH, ductæ sint, dummodo rectæ GI, KH, iungãtur; vel certe literæ disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dexteram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erit.

v. ## THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.



a 2. vndecimi.
b 2. vndecimi.
c 3. vndecimi.
d 4. vndecimi.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [a] Cum enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B, sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. [c] Sit ergo corum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit

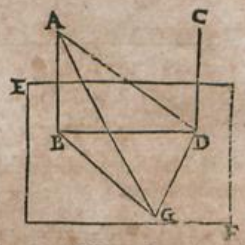
rectæ

rectæ BG, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano E F, ducatur D G, ad BD, perpendicularis, ponanturq; æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera A B, BD, trianguli B A D, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli G D B, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti A B D, G D B, æquales, nempe recti; [a] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus G D, D A, trianguli G D A. Est autem & basis communis AG, [b] erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. [c] Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erit plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: [d] Est autem A B, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; [e] erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

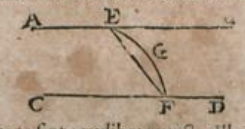


a 4. pri.
b 8. pri.
c 5. undecimi.
d 2. undecimi.
e 28. pri.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis *AB*, CD, sumantur vtcunq; duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectã EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ *AB*, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra; secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, [a] quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eosdẽ terminos E, & F, superficiem claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum *AB*, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraq; sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



a 3. undecimi.

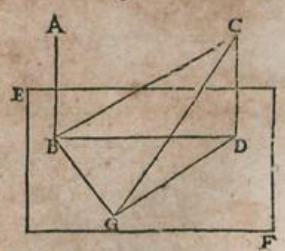
SCHOLIVM.

HÆC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallela non sint, dummodo in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ *AB*, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & *AB*, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta B D, in plano E F, erit per defin. 3. huius lib. angulus C D B, rectus: [a] Sunt autem duo CDB, *ABD*, duobus rectis æquales. Igitur & *ABD*, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Coniungantur deinde rectæ DG, GC, *CB*. Quoniam igitur latera CD, *DB*, trianguli *CDB*, æqualia sunt lateribus *GB*, *BD*, trianguli *GBD*, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti *CDB*, *GBD*, æquales, nimirum recti: [b] Erunt bases *CB*, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli *CDG*, æqualia sunt lateribus *GB*, *BC*, trianguli *GBC*, & basis est communis CH; [c] Erunt anguli CDG, *GBC*, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex definitione 3. huius lib. Igitur & *GBC*, rectus erit. Quare recta *GB*, duabus rectis *BD*, *BC*, se mutuo secantibus in *B*. (Si namque producerentur *DB*, *CB*, secarent sese in *B*, ob angulum *CBD*.) ad rectos angulos existent; [d] ac proinde ad rectos angulos erit [e] plano per *BD*, *BC*, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta *AB*; [e] propterea quod rectæ *BD*, *BC*, in eodem sunt plano, in quo parallelæ *AB*, CD; cum puncta *B*, C, D, existant in parallelis *AB*, CD. Igitur & *GB*, recta rectæ *BA*, ad rectos erit angulos ex definitione 3. huius lib. Quare cum *AB*, recta sit ad rectas *BG*, *BD*; [f] erit quoque *AB*, recta ad planum per *BG*, *BD*, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ



a 29. pri.
b 4. pri.
c 8. pri.
d 4. undecimi.
e 7. undecimi.
f 4. undecimi.

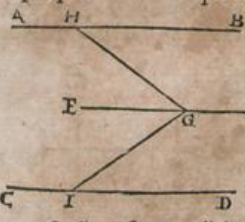
rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

ix.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoq; sunt inter se parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eodem cum EF, plano, Dico AB, CD, parallelas quoque esse. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF. Quoniam igitur EG, recta est ad duas rectas GH, GI, se tangentes mutuo in G; [a] erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ AB, EF, & EF sit recta ad planum per GH, GI, ductum; [b] erit quoq; AB, ad idem planum rectæ similiter cũ sint parallelæ CD, EF, sit autem EF, recta ad planũ per GH, GI, ductum; [c] erit etiam CD, recta ad idem planum; [d] Atque proinde rectæ AB, CD, cũ rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.



a 4. vndecimi.
b 8. vndecimi.
c 8. vndecimi.
d 8. vndecimi.

SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF, essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propositi. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

x.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

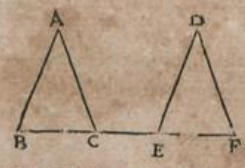
SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, EF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; [a] erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD, [b] erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ & æquales; [c] Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modo demonstrauimus; [d] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.



a 33. pri.
b 9. vndecimi.
c 33. pri.
d 8. pri.

SCHOLIVM.

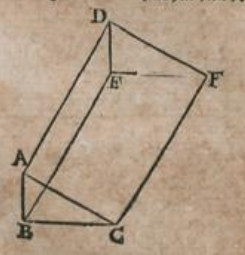
CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ rectæ in eodem sunt plano cum duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodem plano sitque AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturq; rectæ EC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniam igitur parallelæ sunt AB, DE, [c] æquales erunt anguli ABC, DEF, inuernus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, æquales sunt duobus an-



c 29. pri.

gulis DEF, DFE, trianguli DEF. [f] Igitur anguli quoq; reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod est propositum.

NON sint iam BC, EF, in vna recta linea constitutæ. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallelæ & æquales; [g] erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem AD, parallelæ existentes & æquales, [h] inter se parallelæ erunt & æquales; [i] Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaque cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, & basis BC, basi EF, [k] erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.

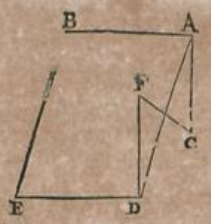


f 32. pri.
g 33. pri.
h 30. pri.
i 33. pri.
k 8. pri.

CÆTERVM vt conclusio huius theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (siue omnes sint in eodem plano, siue non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione se mutuo secent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.

SVNT

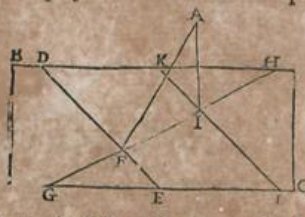
SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non sunt æquales, cũ ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, se mutuo secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.



PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT à puncto A, in sublimi ad subiectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunque DE, [a] ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH, [b] ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. [c] Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL, [d] cũ DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, [e] ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, [f] erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. [g] Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA: rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. [h] Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.



a 12. pri.
b 11. pri.
c 12. pri.
d 31. pri.
e 4. vndecimi.
f 1. vndecimi.
g 12. vndecimi.
h 4. vndecimi.

SCHOLIVM.

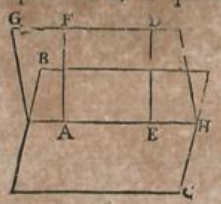
QVOD si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis, [i] erit ipsa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis, ad subiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH.

i 4. vndecimi.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

DATO plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT à dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC, [a] Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, [b] ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectã esse ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planum BC, ex constructione: [c] erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

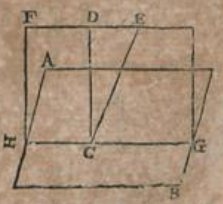


a 11. vndecimi.
b 31. pri.
c 8. vndecimi.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiij.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

SIT datum planum AB. Dico à dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, [a] quæ in vno eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales pars, & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.



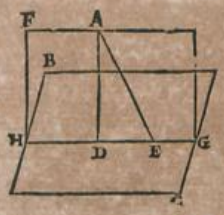
a 2. vndecimi.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; [b] erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

b 6. vndecimi.

SCHOLIVM.

EODEM modo à puncto in sublimi ad subiectũ planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim



c 2. vndecimi.

d 17. pri.

c 6. vndecimi.

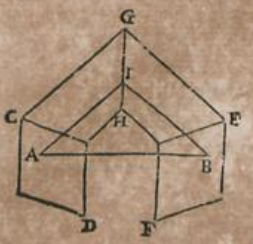
enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, [c] *quæ in vno plano sunt, planum FG, secans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ sint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod est absurdum:* [d] *cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.*

ALITER. Si AD, AE, rectæ sunt ad planum BC, [e] *ipsæ erunt inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.*

xiv.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.



a 3. vndecimi.

b 17. pri.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E, [a] & faciant communē sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto vtcunque I. ducātur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. [b] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, Videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo planæ parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoque esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatque communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK. eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; [c] *cum tota recta HGL, sit in vno plano, nempe in AB, producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaq; cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta;* [d] *quo q; erit EF, ad planum CD, per ipsas ductum. Quod est propositum*



c 1. vndecimi.

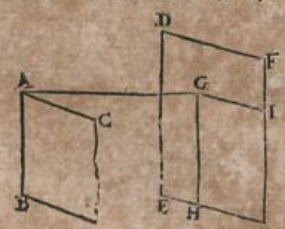
d 4. vndecimi.

xv.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, per quæ illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex [a] A, enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. [b] Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; [c] erunt & AB, GH, inter se parallelæ; [d] Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC, [e] recta quoq; erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. [f] Igitur parallela sunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.



a 11. vndecimi.

b 31. pri.

c 9. vndecimi.

d 29. pri.

c 4. vndecimi.

f 14. vndecimi.

SCHOLIVM.

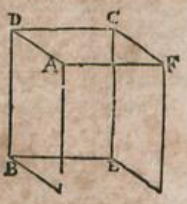
QVOD si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod

quod in plano EF, non sunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt si lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC; ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

DATVM planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunque duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, [f] agatur CE, ipsi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallelæ sint, [g] parallela erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.



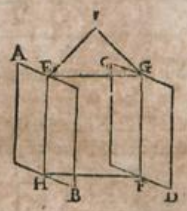
f 31. pri.

g 15. undecimi.

THEOR. 14. PROPOS. 16. xvj.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF, secante. Conueniant igitur in puncto I. [a] Quia ergo tota recta HEI, in vno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vnoquoque est plano, videlicet in CD, producto; conueniens etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plana quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 17. undecimi.

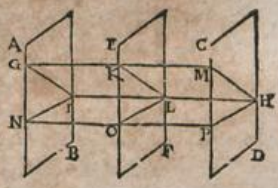
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano secante sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallela, alia vero in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

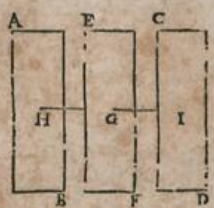
QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorum sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana tuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Eodem AB, EF, secantur plano GH, [b] erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL, [c] atque adeo parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano; [d] erunt plana AB, CD, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.



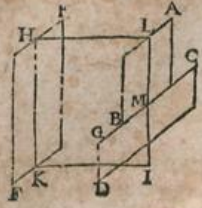
b 16. undecimi.
c 9. undecimi.
d 5. undecimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad planum EF, recta quoque erit ad planum AB sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana AB, CD; [e] parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.



e 14. undecimi.

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantque producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF, [f] erunt & communes sectiones LM, HK parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cum rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantque in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30 propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient; [g] propterea quod recta LI, in vno iaceat plano. Quod est propositum.



f 18. undecimi.

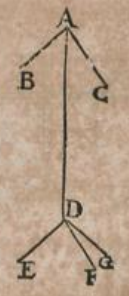
g 1 undecimi.

ITAQVE

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRO conuersum quoque propos. 10. facile demonstrabimus hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.



h 16. vndecimi.

i 16. vndecimi.

k 10. vndecimi.

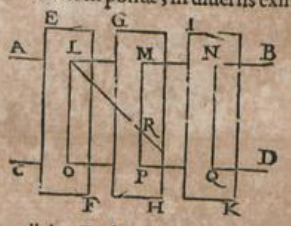
IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitque AB, ipsi DE, parallela; & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum transire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, sint communes sectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. [h] *Hinc enim efficitur, sectiones AC, DF, parallelas esse. Quod est propositum. Si namque planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, faciat sectiones AC, DG,* [i] *quæ parallelæ erunt.* [k] *Igitur angulus EDG, angulo BAC, hoc est, angulo EDF, æqualis erit. Quod est absurdum, cum vnus sit totum, & alter pars.*

xvij.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH. [a] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano triangli LNQ, [b] erunt communes sectiones corũ MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [c] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. vndecimi.

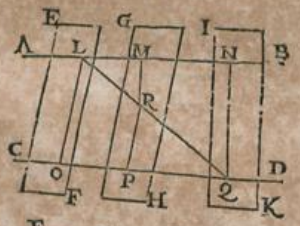
b 16. vndecimi.

c 2. sexti.

SCHOLIVM.

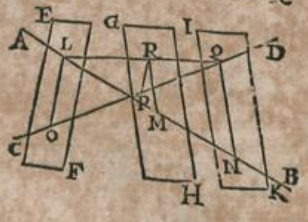
QVOD, si datæ rectæ AB, CD, sint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tum planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [d] *quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propositionis 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LO, QN, GH.*

d 16. vndecimi.



SI vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [e] *cum triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo plano diuersum est, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorum; ac proinde vnam rectam non constituent;* [f] *alias in vno essent plano. Quod est absurdum.*

e 12. vndecimi.



f 1. vndecimi.

EADEM hæc propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectio-

sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

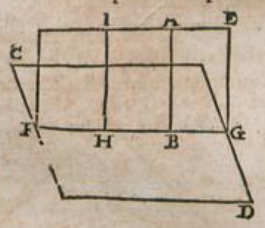
EX demonstratione porro perspicuum est, si quotlibet lineæ in vno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum linearum inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in postrema figura quomodocunq; in vno plano dispositæ, quæ secentur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad intersectionem rectarum CD, RM, pertineat) QN. Dico segmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam segmenta OP, PQ. Iuncta enim recta LQ, [a] *erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum LOQ. quam LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademq; ratio est de pluribus. Vt autem recte demonstratio procedat in quibuslibet duabus rectis, ducenda est recta* [g] *a primo puncto sectionis vnius rectæ ad vltimum sectionis punctum alterius. Ita vides in duabus AB, CD, ductam esse rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, vltimum punctum rectæ CD. Idemq; seruatum est in figuris huius propos. 17.*

a 2. sext.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xviii.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt; & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defi. 3. huius lib. ad cõmunem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum



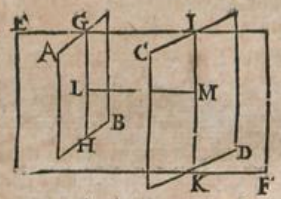
a 31. prim.
b 8. vndec.

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, rectæ erit: [c] *eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoq; CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumq; planum AB, CD, recta est,* [d] *ipsa parallela erunt.*



c 29. prim.
d 14. vnde.

SED iam parallela sint plana AB, CD; sitq; AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; [e] *quæ parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoq; erit:* [f] *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoq; rectum. Quod est propositum.*

e 16. vnde.
f 18. vnde.

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.

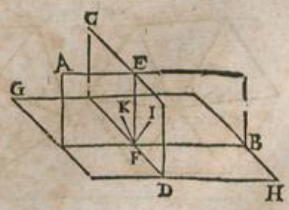
SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, [g] *erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF,* [h] *quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.*

g 12. vnde.
h 18. vnde.

THEOR. 17. PROPOS. 19. xix.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

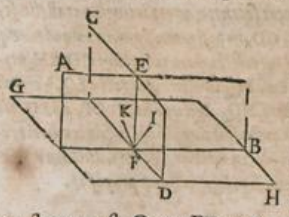
SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, [a] recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defi. huius



a 4. vndec.

lib. Idem concludes si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cũ plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra [c] demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

b 11. prim.



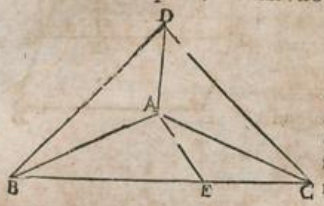
c 13. vnde.

XX. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si vero duo tantum sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto [a] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ, AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturq; rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionẽ, æquales; [b] erũt bases BD, BE, æquales. [c] Quia vero latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demãtur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quã CE. Cũ igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior base CE; [d] erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. prim.



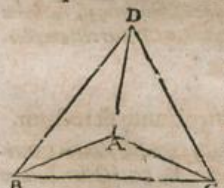
b 4. prim.
c 20. prim.
d 25. prim.

XXJ. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

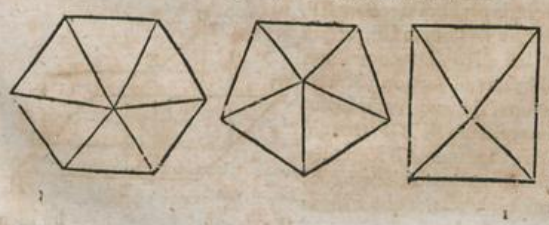
SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. [a] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD, & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [b] Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi, vna cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, ([c] sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. vnde.
b 32. primi
c 32. prim.



SCHOLIVM.

QVONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.



SIT angulus solidus quicunq; contẽtus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumue, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangu-

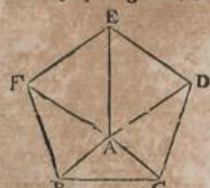
triangulorum, (d cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoq; bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea, quod prope basin constituantur anguli solidi, quorũ quilibet tribus planis angulis continetur, e & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cũ ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

d 32. prim.



e 20. vnde.

VERVM vt res melius percipiatur; sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinq; angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno, eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum solidum A.



f 32. primi.

f Quia vero omnes anguli quinq; triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinq; basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; g erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinq; angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis.

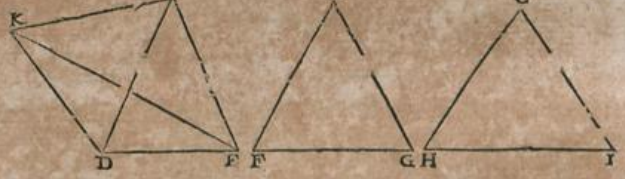
g 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

SINA tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, a ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores sint, quã HI, ita ostendetur. b Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus; quod quidem continget, quãdo duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE.

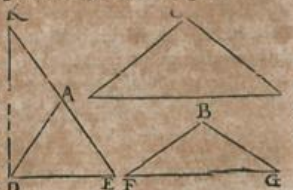
a 22. prim.
b 23. primi.



Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales, c erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI, & angulus EAK, maior angulo C, propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; d erit & basis EK, maior base HI: e sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis rectę FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.

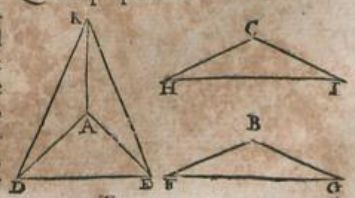
c 4. primi.
d 24. prim.
e 20. primi.

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipsi AD, æqualis rursum, & connectatur recta KD. f Erit, igitur vt prius KD, ipsi FG, æqualis. g Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores sunt recta KE, & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoq; ED, DK, maiores duabus CH, CI: h Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoq; DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



f 4. primi.
g 20. primi.
h 20. prim.

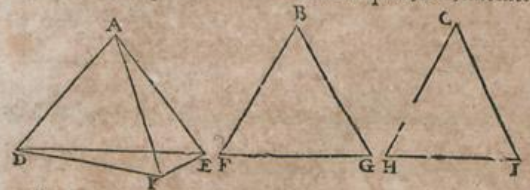
CADAT postremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponaturq; rursum AK, ipsi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. i Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. k Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & constructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: l Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur



i 4. primi.
k 21. primi.
l 20 primi.

multo erunt maiores DE, DK, quã HI. Cũ ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoq; DE, FG, maiores quã HI, quod est propositũ. Eodẽ modo concludemus DE, HI, maiores esse, quã FG, si angulus DAK, angulo
m 22. prim. C, fiat æqualis: Itẽ FG, HI, maiores, quã DE, si angulo C, ad FB, constituatur angulus æqualis, &c. m Quare ex trib. rectis DE, FG, HI, triangulũ cõstitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonstrãdũ erat.

n 4. primi. ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; n erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde
o 4. primi. quælibet duæ reliquæ maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; o erunt quoque duæ il-
p 24. prim. lorum bases æquales, p & basis tertii vtraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod si
q 24. prim. vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; q erit quoque basis

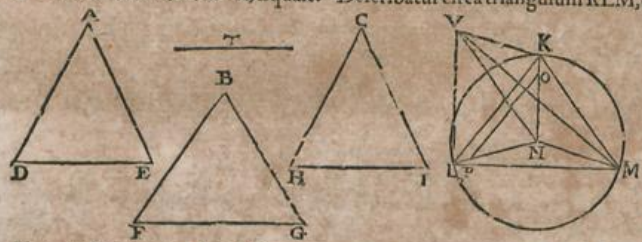


r 23. primi. DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI maiores quã FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE, r Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturq; AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo pũctum K, infra DE: propterea quod qualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponũtur angulo DAE, & B, æqualis est angulo DAK, per constructionẽ; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, triãguli AK, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contẽ-
s 4. primi. ti DAK, & B, æquales; s erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt
t 24. primi. lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; t erit & basis HI, maior basi KE.
u 20. prim. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE. u Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

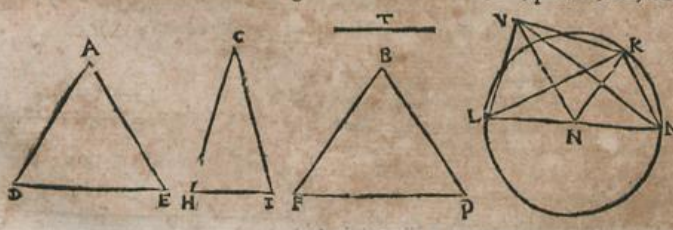
xxiij. ## PROBL. 3. PROPOS. 23.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunq; assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD,
a 22. vnde. AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque bases DE, FG, HI. a Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, tri-
b 5. quarti. ctæ FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. b Describatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrum N, à quo



ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidẽ fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos.
5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL;
c 8. prim. & basis DE, basi KL, æqualis: c erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex corol. propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neq; minores. Si enim minores sint AD, AE, quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quo-
d 12. sexti. niam igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia;
e 20. prim. erunt latera NK, NL, trianguli NKL, secta proportionaliter, d ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. e Quare an-
f 4. sexti. guli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulum. f Igi-
g 14. quin. tur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autem NK, maior quam NO. g Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP,
h 25. primi. trianguli NOP, & basis DE, maior basi OP, h erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex corol. prop. 15 lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponũtur n. quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quã NK, NL; sed neq; æquales. Igitur maiores

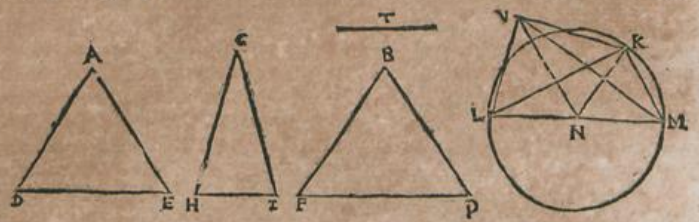


CADAT deinde centrum N, in latus LM, quod tũ continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestũ est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL; erũt quoque BF, BG, æquales

esdem

eisdem NK,NL. Cum ergo NK,æqualis sit ipsi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Posita autem fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF,BG,æquales quoque sunt rectæ FG. [i] Sút autem & maiores BF, BG, quã FG. Quod ſt absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK,NL; erunt quoque BF, BG, minores quã NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quã recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, [k] cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

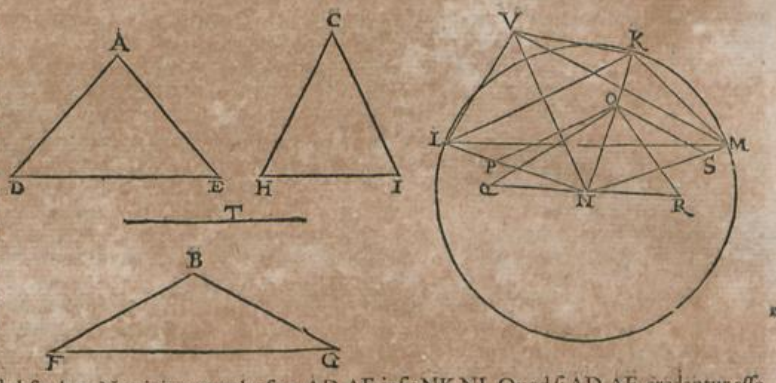
i 20. prim.



k 20. prim.

CADAT postremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; [l] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, triãguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; [m] erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem ostẽdimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsis AD. AE, æquales, & ducatur recta OP, demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP, & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. [n] Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR, cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. [o] Quare cum angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; [p] erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR, & angulus LKM, maior angulo QOR, vt ostendimus: [q] erit basis LM, hoc est, FG, maior basi QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & basis FG, maior basi QR; [r] erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia anguli as ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cum B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

l 8. primi.



m 8. prim.

n 23. prim.

o 29. primi

p 4. prim.

q 24. prim.

r 25. prim.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, existat; possit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. [s] Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoq, eadem erit, ex defi. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM, [t] ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; [u] erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & obid, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem, cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; [x] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C. esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

s 12. vndec.

t 47. primi.

u 4. prim.

x 8. prim.

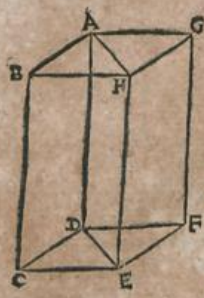
xxiv.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC;

a 16. vnde.



[a] Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Nō aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis;

b 10. vnde.

[b] erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF.

c 34. primi.

[c] Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c, eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris AH, DE, [d] cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE;

d 34. prim.

e 10. vnd.

[e] & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est, [f] erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. [g] Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF,

f 4. prim.

g 34. prim.

inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

xxv.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

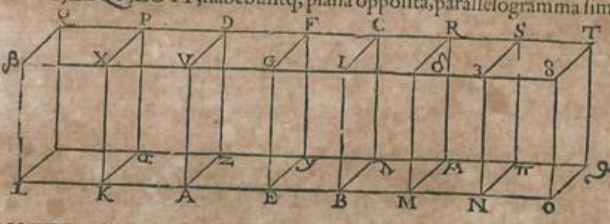
SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productū in vtramq, partem quantumlibet, sumanturq: in AB, protracta quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, contine-

a 24. vnd.

tur planis parallelis ex hypothesi; ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, [a] habebitque plana opposita parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erūt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR,

b 36. primi

NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. [b] Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AE, AK, KL, æqualia sunt; & similia quoq;



c 29. prim.

[c] cū anguli vnius sint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia sunt parallelogramma AY, KZ, Lα. Cum igitur æqualia quoque sint, & similia parallelogrāma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY,

d 24. vnde.

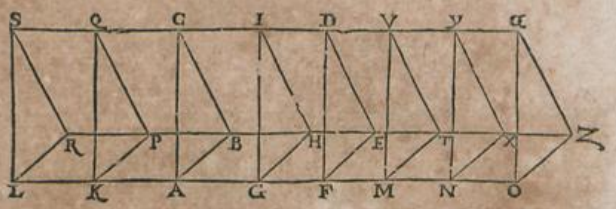
KLQP: [d] Sunt autem tria in vnoquoque solido æqualia, & similia trib. reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EF, &c. Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD; Et quam multiplex est basis OG, basis BG, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG, (multiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BC, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoque sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis maior est base, solidum quoque solido maius est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt basis AG; prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinē, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidū BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, vt est basis DY, ad basin CY, & vt basis AY, ad basin BY, & vt basis DG, ad basin, CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

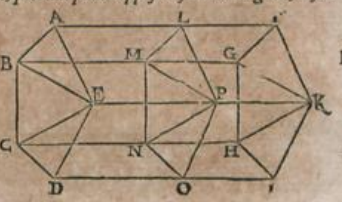
HÆC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunq; plano secetur aduersis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma ABCDEF, cuius plana aduersa sint triangula ABC, DEF, secanturque plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur enim prisma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum

& ex AF,

& ex AF, protracta vtrinque capiantur quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipsi FG, æquales
Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXT, OZæ; parallela planis ABC, GHI, FED,
per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AI, [c] erunt communes sectio- [c] 16. vnde.
nes AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypothesi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum
est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH; [f] erunt communes sectiones AB, GH, parallelæ: Sunt [f] 16. vnde.
autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum est AH. Eodem modo parallelogrammum [g] 34. prim.
ostendetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus GI, GH, trianguli GHI; [g] cum AC, ipsi [h] 10. vnd.
GI, & AB, ipsi GH sit æquale: [h] & anguli CAB, IGH, sunt quoque æquales, eo quod rectæ CA, AB, parallelæ sint rectis [i] 4. primi.
IG, GH, & non in eodem plano; [i] Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter se, & æquiangula. [k] Quare latera circa æ- [k] 4. sexti.
quales angulos proportionalia habebunt: Atque idcirco similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentũ duobus planis oppositis ABC, CHI, æqualibus & similibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadem arte prismata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVTXN, NXTæZO, LRSIHG, OZæIHG. Quoniam vero parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia sunt, & similia; necnon AH, LB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana prismatis ABCIHG, æqualia & similia omnibus planis prismatum ABCQPK, KPQSRL. Quare per def. 10. huius lib. æqualia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVTXN, NXTæZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG, & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZæIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, primæ magnitudinis) æqualis est basi OI, (multiplici basis FI, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) prismati OZæIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea q, basibus LI, OI, existentib. æqualibus æqualia quoq; sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnib. planis prismatis OZæIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prima quoque prismate maius est, & si minor, minus, in quacunq; multiplicatione hoc fiat: Erit, per def. 6. lib. 5. vt basis AI, prisma magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH, & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.



SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sit polygona, nempe pentagona, secetur que plano LMNOP. Dico rursus vt est, basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, & prisma CDEPNO. ad prisma NOPKHI. [l] Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est, recta EP, ad rectam PK, hoc est, vt CN, ad NH: & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandẽ habent proportionẽ ei, quam habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter se. [m] Vt autem vnum ad vnum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, vt basis CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP: ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunq; alio prismate.



[l] 11. sexti

[m] 12. quin.

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramq; partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia, [n] propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum, [o] ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde, vt prius, ostendetur prismata ex vna parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

[n] 16. vnd. [o] 10. vnd.

COROLLARIVM.

EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulam GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dicęs de parallelepipedo.

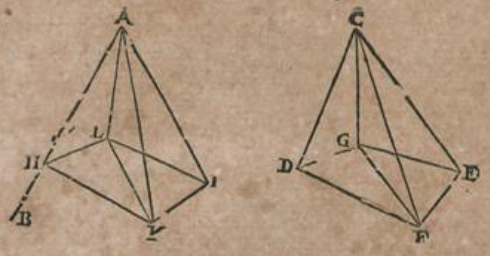
PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvi.

AD datam rectam lineã, eiusq; punctũ angulum solidũ constituere solido angulo dato æqualẽ.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodẽ plano existentibus. [a] Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductũ perpendicularis FG, connectanturq; rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, [b] fiatq; angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductũ constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. [c] Ex L, vero ad planũ, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigat perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulũ solidũ A, contentũ tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualẽ esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per cõstructionẽ; [d] Erũt bases HL, DG æquales. Rursus ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cũ igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem;

[a] 11. prim. [b] 23. vnde. [c] 12. vnd. [d] 4. primi.

c 4. primi. nem; c æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & angu-
f 4. prim. li, HLK, DGF, recti ex defin. 3. huius lib. f erunt & bases HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex constructione, (cum enim AL, LK, latera la-



g 4. pri.
h 8. prim.

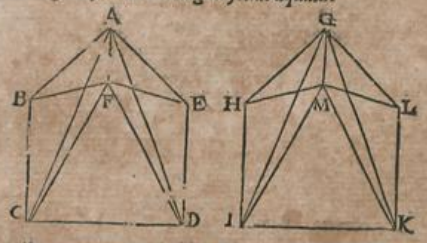
teribus CG, GF, æqualia sint ex constructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos, ex defi. 3. huius lib. g erunt bases AK, CF, æquales.) h Erunt quoq; anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti ex def. 3. huius lib. i Erunt bases IK,

i 4. primi.

EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, sint æqualia ex con-
k 4. prim. structione; k erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum solidum C, componentibus; Atq; proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaq; rectam lineam, eiusq; punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemq; existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygonam constituant, pyramisque quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

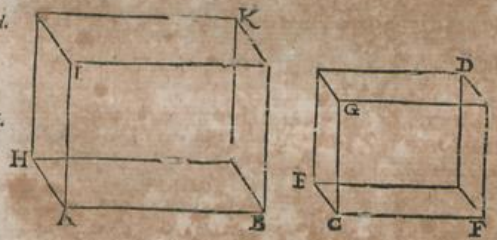


VT si angulo solido A, contento quinq; angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ EC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et deniq; angulo solido A contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGI, LGM, MGK; ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atq; in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.

xxvii.

PROBL. 5. PROPOS. 27.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.



a 26. vnd.
b 12. sexti.

SIT à data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. a Fiat ad rectam AB, eiusq; punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis, ECG, GCF, FCE. Deinde vt est CF, ad CG, b sic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritq; ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH, Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterq; positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similterq; posita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, solidi AK, simi-
c 24. vnd. lia sunt, similiterq; posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. c Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD; Ac proinde ex def. 9. huius lib. similia sunt, similiterq; posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum describimus. Quod erat faciendum.

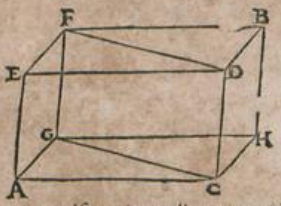
xxviii.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT

SIT parallelepipedum AB, in quo plana oppoſita ſint AH, EB, quorum diagonii, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela eſt, [a] & æqualis ipſi AE, cum ſint parallelogramma CE, GE; [b] erunt & inter ſe parallelæ, & æquales CD, GF, [c] Ac proinde, quæ ipſas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, ſecare bifariam parallelepipedum AB. [d] Cum enim plana AH, EB, ſint parallelogramma æqualia, & ſimilia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter ſe: ſunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG, FED, DBF, proportionalia. [e] Igitur ſimilia quoque erunt dicta triangula. [f] Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale ſit & ſimile parallelogrammo CB; & AD, ipſi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, priſmatis ACGFED, æqualia & ſimilia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, priſmatis HGCDBF; propterea q; priſmata æqualia erunt, ex defi. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, ſectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

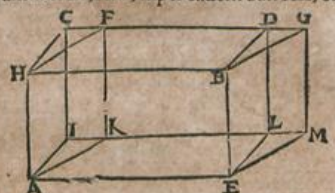


a 34. prim.
b 9. vnde.
c 33. prim.
d 24. vnde.
e 6. sexti.
f 24. vnd.

THEOR. 24. PROPOS. 29. xxix.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

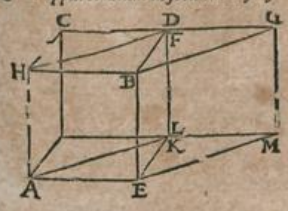
SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in iiſdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, eſſe inter ſe æqualia. [a] Cum enim æqualia ſint parallelogramma AL, AM, ſuper eadem baſi AE, & in eiſdem parallelis conſtituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoq; triangula AIK, ELM. [b] Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus; [c] Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoq; inter ſe erunt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & ſimile. [d] Rurſus parallelogrammum AC, æquale eſt & ſimile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: [e] Sed & IF, ipſi LG, cum baſes IK, LM, ſint æquales. ([f] Nã cum rectæ IL, KM, æquales ſint ipſi AE, erunt quoque inter ſe æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

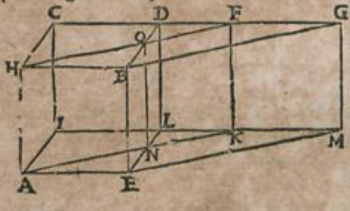


a 35. prim.
b 34. pri.
c 4. sexti.
d 24. vnd.
e 10. primi.
f 34. primi.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere mediis, dummodo loco triangulorum aſſumantur priſmata, vt ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit; vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in hiſce ſuperius apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK, ELM, æqualia. Vnde vt prius, æqualia erũt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.





IN tertio vero caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulũ commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB, à quibus ſi auferatur priſma commune KLNODF, (Nam communis ſectio planorum AF, DE, eſt recta NO.) remanebit ſolidum comprehenſum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale ſolido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur Addatur vtrig; priſma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter ſe æqualia.

THEOR. 25. PROPOS. 30. xxx.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

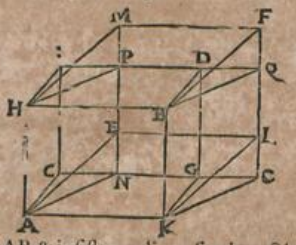
SVPER baſin AB, in eadẽ altitudine, hoc eſt, inter eadẽ plana parallela, ſint cõſtituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorũ inſiſtẽtes lineę ex quatuor angulis baſis exeũtes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, nõ ſint in eiſdẽ rectis, hoc eſt, neq; CI, GD, ptractę träſeãt p pũcta M, E, F, L, neq; CG, ID, pductę; &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, eſſe æqualia. Cũ enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodẽ plano, ob eandẽ altitudinẽ parallelepipedorũ; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarũ CG, ſecet EM, LF, protractæ in punctis N, O; Et ID, eaſdem

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0505-5

a 34. pri. eadem in punctis P, Q; adiunganturque rectæ AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem

b 31. prim. & parallelæ, propter parallelogrammum HDB. [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQR. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK,

c 29. prim. æquale est parallelepipedo APQK, cum vtriusq; eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, quum vtriusq; eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basim, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

d 29. vel 30. vndec. *NAM si vnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, & reliquum.* [d] *Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

xxxi.
xxxii.

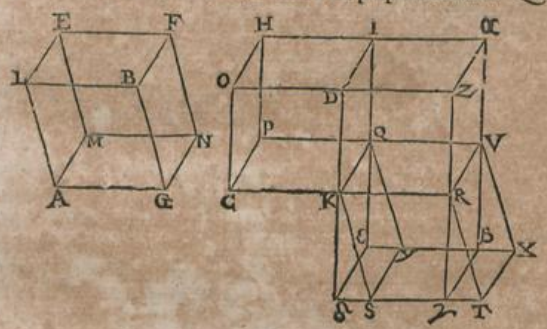
THEOR. 26. PROPOS. 31.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super quod ad altitudinem perpendicularis KQ, construatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & similia; Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad planaKT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defi. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æqualia & similia. [a] Quare cum tria plana, KT,

a 24. vnde. QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia sint & similia; à tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, [b]

b 24. vnde. tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per def. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia.



CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ, & IQ, XY, in ε, compleatur q; parallelepipedum QδγV. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, QδγV, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ, QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eisdem

c 29. vnde. rectis δTεX, [c] ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum QδγV.

d 31. prim. [d] QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kγ,

e 7. quinti. ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales. [e] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad

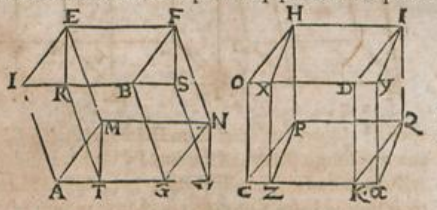
f 25. vnde. DR: [f] Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIαR; cum parallelepipedũ CHαR, secetur plano IK, planis oppositis CH, αR, parallelo. Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidum QδγV, ad

g 9. quinti. solidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, secetur plano KV, oppositis planis Dαδβ, parallelo. [g] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, QδγV, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, Kγ, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum QδγV, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG; æqualia quoq; erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum.

SINT

SINT iam neque insistentes lineæ AM,GN,LE,BF, ad basin AB, neque CP,KQ,OH,DI, ad basin CD, perpendiculares: [h] Et à punctis E,F,M,N, demittantur ER,FS,MT,NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares; Item à punctis,H,I,P,Q, ad planum, in quo basis, CD, perpendiculares HX,IY,PZ,Qα. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectę RS,SV,VT,TR: Item rectę XY,Yα,αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. [i] Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemq; altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

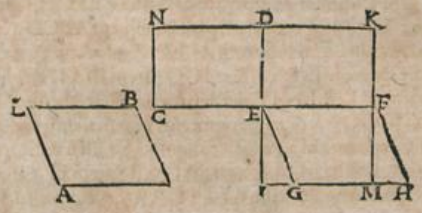
h 11. vnde.



i 29. vel 30. vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorũ insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine cõstructione parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB,CD. Dico parallelepipeda super ipsa constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CF, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & rectæ EF, rectæ LB, & rectæ EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturq; parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur super bases EH, IF, EK, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super AC, CD, constructis; sintq; insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super EH, æquale esse ac simile solido super AB, ex defi. 10. huius lib. cum plana illius æqualia sint & similia planis huius, per constructionem: [k] *Sunt autem & æqualia parallelepipeda super EH,IF, cum habeant basin eandem, cuius infimum latus EF, erectam super planum IK; Item plana basi opposita, quorum latera infima GH,IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH, atq; insistentes lineas EG,FH,EI,FM, &c. in eisdem rectis linèis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super IF, parallelepipedo super AB.* [l] *Quoniam vero parallelogramma EH,IF, æqualia sunt; & EH, æquale est ipsi CD: æqualia erunt IF, CD.* [m] *Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK;* [n] *Est autem vt IF, ad EK, ita solidum super IF, ad solidum super EK, quod solidum super IK, secetur plano super EF, erecto parallelo planis super DK,IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita solidũ super CD, ad solidum super FK, cum solidum super CK, secetur plano super DE, erecto parallelo planis super CN,FK, erectis. Quare erit vt solidum super IF, ad solidum super EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK,* [o] *Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super IF, & CD. Ostensum est autem parallelepipedum super IF, æquale parallelepipedo super AB. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda super AB, CD. Quod est propositum.*



k 29. vnd.
l 35. prim.
m 7. quint.
n 25. vnde.
o 9. quinti.

CONVERTETVR quoq; hæc propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine [p] *sient æqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

p 31. vnd.

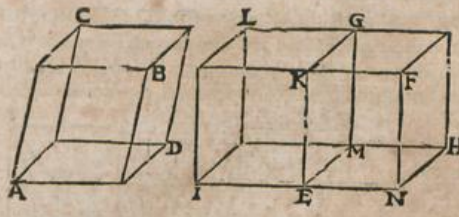
QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32. lxxxiii.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD,EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, vt est basis ad basin. [a] super rectam enim EK, construatur parallelogrammum IK, æquale parallelogram-

a 45. prim.



lelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit æqualis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propos. libr. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum vnum parallelepipedum IFLH; [a] erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex hypothesi. [b] Quare erit vt solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad idem solidum EFGH: [c] Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, vt basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, vt basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

a 31. vnde.
b 7. quinti.
c 25. vnde.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori æqualis, & ducatur planum basi parallelum, [d] erit q; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: [e] sed sic quoque erat ad totum. Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.

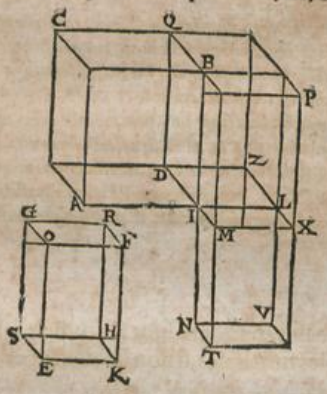
d 32. vndec.
e 9. quinti.

xxxvi.

THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda ABCD, EFGH, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL æqualis ipsi EK, vel GR; Item DI, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & sit IN æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM æqualia sunt lateribus GR, GO; [a] & anguli contenti æquales, cum angulus LIM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt, & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: [b] Sunt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defi. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, est vt AI, ad EK, hoc est, ad IL, ita DI, ad HK hoc est, ad IM; & BI, ad FK, hoc est, ad IN. [c] Vt autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogr. BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. [d] Sed vt AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & vt basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, vt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP LNTX, ideoque proportio primæ ADCB, ad quaram LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad secundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. [e] Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; [f] Et vt AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum. Quod erat demonstrandum.



c 1. sexti.
c 32. vnde.
c 32. vnd.
f 1. sexti.

COROLLARIVM.

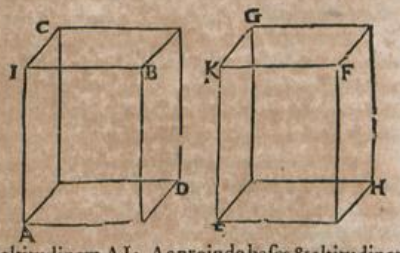
EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundum. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex defin. 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THE-

THEOR. 29. PROPOS. 34.

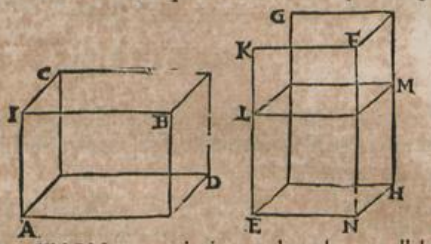
xxxiv. xxxv.

ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases,& altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases,& altitudines reciproçantur; illa sunt æqualia.



SINT æqualia parallelepipeda ADCB,EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB,EHGF,esse reciprocas,hoc est,esse AD,vt ad EH,ita altitudinẽ solidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum insistentes lineæ AI,EK,perpendiculares ad bases AD; EH,ita vt AI,EK, sint per defin. 4.lib. 6.altitudines parallelepipedorum.Si igitur altitudines AI,EK,sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD,EH,æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31. huius libr. ostendimus. Quare erit,vt basis AD,ad basin EH,ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.

QVOD si altitudines AI, EK,inæquales fuerint; sit EK,maior, ex qua abscindatur EL, ipsi AI,æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH,per scholium propos. 15. huius lib.Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB,EHGF; [a] erit vt ADCB,ad solidum EHML,ita EHGF, ad idem solidum EHML: [b] Vt autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI,EL,vt solidum EHGF,ad solidum EHML, ita est eadem ratione basis KM, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem,si nimirum bases ponantur KN,LN;erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt basis AD,ad basin EH,ita basis KN,ad basin LN: [c] Sed vt KN,ad LN,ita est recta EK,ad rectam EL,hoc est,ad AI,ipsi EL,æqualem. Quare erit vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK,ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ sunt bases,& altitudines.



a 7. quint.
b 32. vndec.
c 1. sexti.

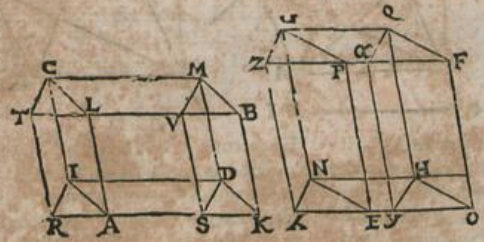
SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH,æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB,EHGF,cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem,inter se æqualia erunt.

d 31. vnde.

QVOD si altitudo EK,maior fuerit, abscindatur EL ipsi AI,æqualis,& per L ducatur planũ LM,parallelũ basi EH. Quia igitur ex hypothesi est,vt basis AD,ad basin EH,ita altitudo EK,ad altitudinẽ AI,hoc est,ad EL, ipsi AI,æqualem; [e] Vt autem basis AD,ad basin EH,ita est solidũ ADCB,ad solidũ EHML,cum altitudines AI, EL,æquales ponantur, [f] Et vt EK,ad EL,ita est,KN,ad LN; [g] Vt autem basis KN,ad basin LN,ita est solidum EHGF,ad solidum EHML, cum solida EHGF. EHML,eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN,GH; Erit vt solidum ADCB,ad solidum EHML,ita solidum EHGF,ad idem solidum EHML; [h] ideoque æqualia erunt solida ADCB,EHGF.

e 32. vnde.
f 1. sexti.
g 32. vnde.
h 9. quin.

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH,æqualia, quorum insistentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN,OH,FQ,PG,non sint perpendiculares ad bases AB,EF. Demittantur autem à punctis I,D,M,C,ad planũ basis AB,perpendiculares IR, DS,MV,CT; Itẽ punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX,HY,Qα,GZ: connectanturque rectæ RS,TV,AT,SV;XY,Zα,XZ,Yα: Eruntque perpendiculares RI,XN, parallelepipedorũ altitudines,ex defin. 4.lib.6. Dico rursus,vt basis AB,ad basin EF,ita esse altitudinem XN, ad altitudinem RI. [i] Cum enim æqualia sint solida ABCD, EFGH,ex hypothesi, [k] sit autem ABCD,æquale solido RVCD, quod habeant eandem basin CD, eandemque altitudinẽ RI; & EFGH,eadem ratione,æquale solido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD,XαGH,æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD,GH;erit,vt iam demonstratum est,vt basis CD,ad basin GH, hoc est, vt basis AB,ad basin EF,ita altitudo XN,ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.



i 29. vel 30. vndec.
k 24. vnd.

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura,vt prius; Cum sit vt basis AB,ad basin EF,ita altitudo XN,ad altitudinem RI; [l] Sit autem AB,ipsi CD,& EF,ipsi GH,æqualis; erit quoque vt basis CD,solidi RVCD ad basin GH,solidi XαGH,ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cum XN, RI, sint insistentes lineæ perpendiculares ad bases CD, GH; erunt,vt iam ostensum est,æqualia parallelepipeda RVCD,XαGH. [m] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur quoq; æqualia erunt parallelepipeda ABCD,EFGH: Idemque ostendetur, si insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quam ob rem,Æqualium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur,&c. Quod erat ostendendum.

l 24. vnd.
m 29. vel 30. vnd.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirũ 29.30.31.32.33.& 34. conueniunt quoq; prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia. [m] Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.

m 29.30. vel 31. vndec.

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adiiciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. [n] Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin; [o] Atq; adeo prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.

n 32. vnd. o 15. quint.

PRÆTEREA, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, [p] quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, [q] cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundum laterum homologorum, quæ quoq; sunt latera homologa prismatum.

p 33. vnde. q 15. quint.

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum prismatis. [r] Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eædem sint, vel certe triangula earum dimidia [s] eandem habentia proportionem; Erunt quoq; bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.

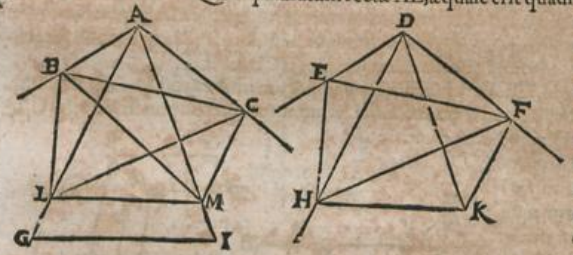
r 34. vnd. s 15. quinti.

xxxvii.

THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumq; vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendunt.

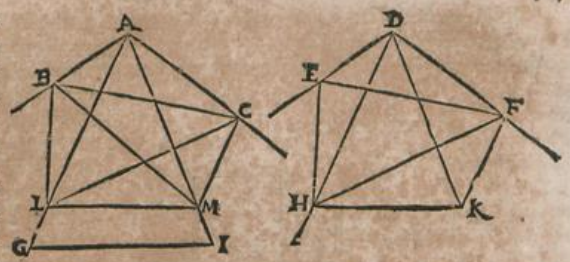
SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D. insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ, AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: à sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se. Nam si AG, DH, sunt inæquales auferatur à maiori AG, ipsi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipsi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ sunt GI, LM, & est GI, ad planum anguli BAC, recta; [a] erit quoque LM, ad idem planum recta: ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, penpendiculares MB, MC, KE, KE, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; [c] Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CL; [e] Ac proinde angulus ACL, rectus erit. [f] Rursus quia quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AM, ML: [g] Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarũ AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML: [h] At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; [i] propterea q; angulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; suntq; latera AL, DH, æqualia; [k] Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypothesi; [l] erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales; cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, sint ostensa æqualia; [m] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, sunt recti; [n] erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autẽ æquales sint ostensæ rectæ BL, EH, erũt etiã earũ quadrata æqualia. [o] Quia vero quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML, & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti sint, ex def. 3. huius libr. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia



a 8. vnde.
b 47. pri.
c 47. prim.
d 47. prim.
e 48. prim.
f 47. prim.
g 47. prim.
h 47. prim.
i 48. prim.
k 26. prim.
l 4. primi.
m 26. prim.
n 4. prim.
o 47. prim.

quadra-

quadratis rectarum EK,KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM,EK, quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqualis; [p] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.



p 8. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quę cum lineis primo positis angulos contineant ęquales, vtrumq; vtriq;. Erunt à punctis extremis linearum sublimium ad planam angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & sublimes æquales AL, DH, constituunt angulos æquales DAB, HDE. Item LAC, HDF: demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK, esse æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. xxxviii.

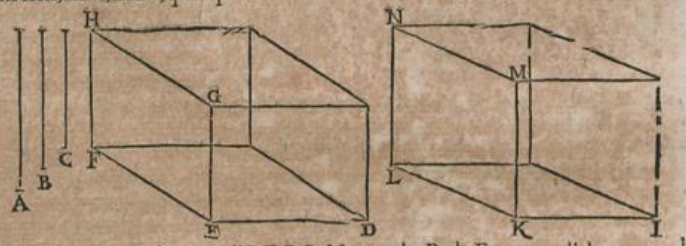
SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A, B, C. Constituaturque angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunq; DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipsi A; & EF, ipsi B; & EG, ipsi C, sit æqualis. Cõpletis autẽ parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. [a] Deinde ad rectam IK, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales sint tribus DEF, DEG, FEG, ita vt rectæ IK, KL, KM, æquales sint mediæ lineæ B. Cõpletis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedũ IN, quod contineri dicitur sub linea B, se ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse solido IN. Cum enim sit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales B: [b] Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F L, ad plana basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. [c] Quare parallelepipeda DH, IN, Cum habeant bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

a 26. vnde.

b 14. sexti

c 31. vnd.



SCHOLIVM.

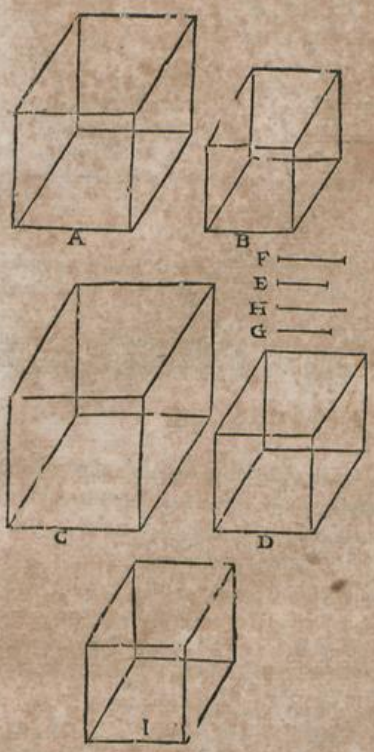
VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea descripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedũ DH, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo IN, descripto à media B. Dico tres A, B, C, esse continue proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex F, L, demissæ esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases DG, IM, æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex constructione: [d] *habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cum DE, ipsi A; IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum.*

d 14. sexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. xxxix.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A,B,C; vt quidem A,ad B, ita C,ad D; constituanturque super A,& B, duo parallelepipeda A,& B,similia, similiterque descripta; item super C,& D, alia duo C,& D,similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia,siue non. Dico esse quoque solida A,B,C,D, proportionalia; Vt quidem solidum A, ad solidum B,ita solidum C,ad solidum D. Inueniantur enim per scholium propos. 11. lib.6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continue proportionales E,F.Item duabus C,D, aliæ G,H.Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A,B,E,F,& quatuor lineæ aliæ C,D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, vt A,ad F,ita C,ad H. Vt autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, & vt C, ad H, ita solidum C,ad solidum D,ex coroll.propos.33.huius lib. Igitur erit vt solidum A,ad solidum B,ita solidum C,ad solidum D. Quod est propositum.



a 12. sexti.
b 27. vnde.
c 9. quin.

SINT iam è contrario solida A,B,C,D, proportionalia. Dico rectas A,B,C,D,esse quoque proportionales: [a] Tribus enim rectis A,B,C,inueniatur quarta proportionalis I, [b] super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B,ita recta C,ad rectam I; erit quoq;, vt iam est ostensum,vt solidum A,ad solidum B,ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C,ad solidum D: Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. [c] Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin.10. huius lib.Sed plana æqualia,& similia habent latera homologa æqualia,per lemma propos. 22. libr. 6. Igitur rectæ I,& D,æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C,ad I,rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C,ad I,vt recta A,ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B,ita recta C,ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone,hoc modo. Ponatur primum vt recta A, ad rectam B,ita recta C,ad rectam D. Dico esse quoque vt solidum A,ad solidum B,ita solidum C, ad solidum D. [d] Cum enim sit proportio solidi A,ad solidum B,triplicata proportionis rectæ A,ad rectam B; Item proportio solidi C,ad solidum D,triplicata proportionis rectæ C,ad rectam D: erunt proportiones solidi A,ad solidum B,& solidi C,ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium,nempe rectæ A,ad rectam B,& rectæ C,ad rectam D. Quod est primum.Rursus ponatur secundo esse vt solidum A,ad solidum B,ita solidum C,ad solidum D, Dico esse quoque,vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [e] Cum enim sit proportio solidi A,ad solidum B,triplicata proportionis rectæ A,ad rectam B. Item proportio solidi C,ad solidum D,triplicata proportionis rectæ C,ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B,& C,ad D,æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ,nimirum solidi A,ad solidum B; & solidi C,ad solidum D,æquales ponuntur. Quod est secundum.

d 33. vnd.
e 33. vnde.

SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidum sumatur bis habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & lineæ secundæ æquale tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia sunt triangula, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. [f] *Cum igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.*

f 15. quint.

XL.

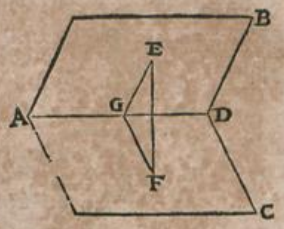
THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum,ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

PLANVM enim AB, rectum sit ad planum AC,sitque eorum communis sectio recta AD; & ab E, puncto plani AB,ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, [a] & ab F,in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; con-

a 12. prim.

FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoq; perpendicularis ad planum AB, ex defi. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3. def. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. def. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum, [b] cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.



b 17. prim.

SCHOLIVM.

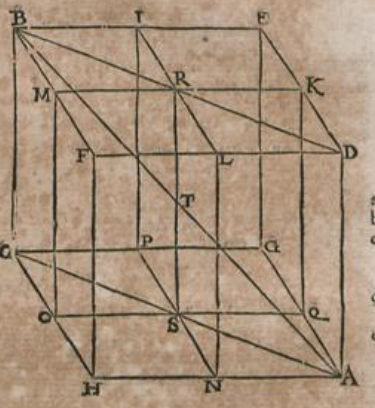
HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem, [c] *ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. huius lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.*

c 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. XXXX.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensæ sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur laaera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, [a] & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS,) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: [e] Ac propterea AS, CS, vnã rectam lineam constituent. Eodẽ modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH. ob parallelogramma AF, FC, [f] ipsæ quoque inter se parallelæ erunt, & æquales. [g] Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; [h] erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. [i] Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: [k] Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariã in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendũ.



a 34. prim.
b 29. prim.
c 4. prim.
d 13. prim.
e 14. prim.
f 9. vnde.
g 33. primi.
h 7. vnd.
i 29. &
15. primi.
k 26. prim.

COROLLARIVM.

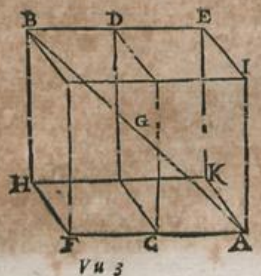
HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

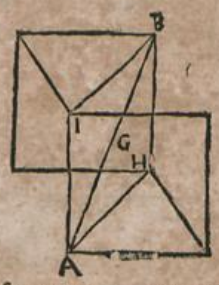
SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planum CD, oppositis planis AE, BF, parallelum. [l] *Et quia plana parallela BF, DC, EA, secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem BA, bifariam in G; secabuntur quoq; latera aduersorum planorum AH, BI, atque adeo & bases AH, BI, bifariam.* [m] *Cum igitur sit vt basis KC, ad basim CH, ita solidum AD, ad solidum CB, erit parallelepipedum AB, sectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*



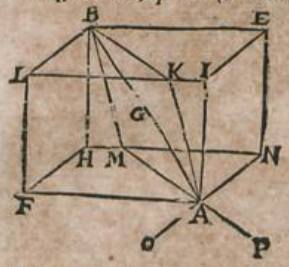
l 17. vnde.
m 25. vnd.

TRANSEAT secundo planum secans AI, BH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, immo per totum diametrum AB; [n] cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI. [o] Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.



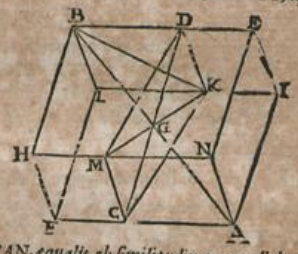
n 7. vnde.
o 28. vnde.
p 16. vnde.
q 34. prim.

TERTIO planum secans AKBM, neq; sit aduersis planis parallelum, neq; per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM; [p] erunt communes sectiones AM, BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, factæ à plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM; [q] ideoq; tam rectæ AK, BM, quam rectæ AM, BK, inter se erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ; [t] ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK. [s] Cum igitur OAP, æqualis sit angulo MAN; æquales quoq; erunt anguli KBL, MAN.) [t] Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales; & tri-angulũ triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN, [u] cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, rectæ MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBI, angulo MAN, est æqualis, vt ostendimus; erit & reliqua IK, reliquæ HM; & reliquus angulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, æqualis. (Est enim tota LI, toti NH, æqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis æquales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum ma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triangula BHM, AIK; & quadrilatera AKLF, BMNE; cum inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quopropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, æquale erit solido contento planis BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. def. huius lib. cum his planis illa sint similia & æqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.



t 4. sext.
u 4. sext.

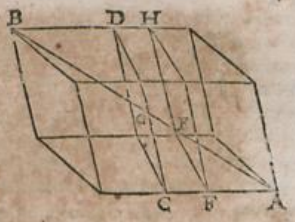
POSTREMO planum secans CD, neq; aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neq; per vllos angulos eorum ductum. sed vtcunq; secet plana opposita AH, BI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM, DK, esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectanturq; rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, [x] inter se sunt parallelæ; [y] Erunt AB, CD, in eodẽ cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. [z] Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, æqualis est: [a] Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem æqualis; & latus BG, lateri AG, æquale, quod AB, bifariam secetur in G, centro; [b] Erit & latus DG, lateri CG, æquale. Cum ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibiq; diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; [c] & angulus BGD, æqualis angulo AGC; [d] erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Est autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN, & angulus KBL, angulo M, AN, æqualis; [e] Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademq; ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum BI, AI; & anguli: EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK. cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. def. huius lib. æquale est solido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.



x 9. vnde.
y 7. vnd.
z 29. prim.
a 15. prim.
b 26. prim.
c 15. prim.
d 4. prim.
e 4. prim.

SED secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire,

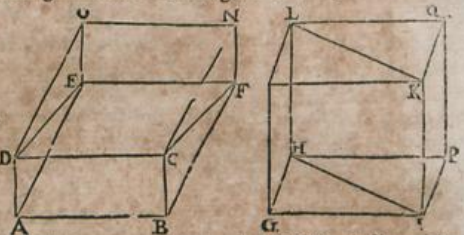
hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariam secari plano GD; Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonstrandum erat.



THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO, GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib. [a] Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. [b] Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atq; propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, ([c] Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaq; si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.



a 34. prim.

b 31. vnd.

c 32. vnde.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, qua duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipeda compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM,

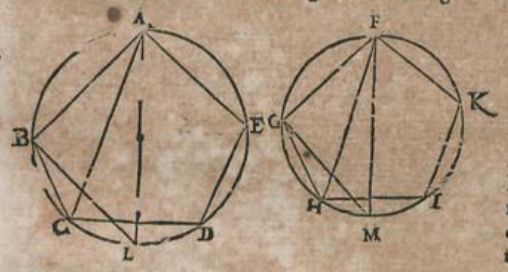
Et Solidorum secundum.

I. THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona similia inter se sunt, vt à diametris quadrata.

SINT duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: [b] Est autem angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales sint, [c] nempe recti in semicirculis existentes; [d] erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. [e] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. [f] Igitur est vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad polygonum FGHIK, super FG; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, vt à diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

a 6. sexti. b 22. tertij.



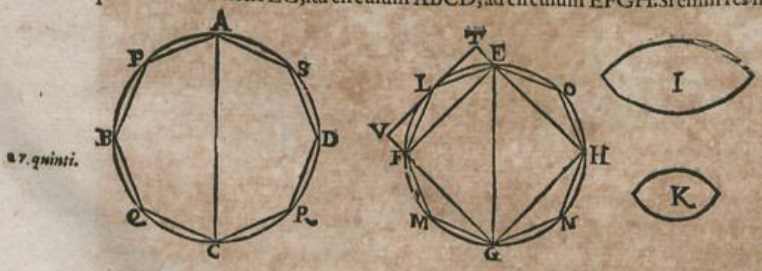
c 31. tertij. d 32. prim. e 4. sexti. f 22. sexti.

II. THEOR. 2. PROPOS. 2.

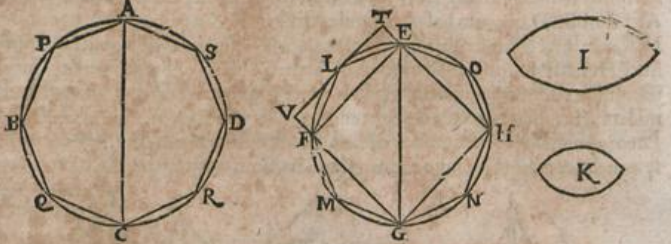
CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quę vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [a] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Si ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur.

a 7. quinti.



batur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circá eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis HE, GF, productus in T, & V.[b] Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quib. sunt; & sic deinceps. Quoniã vero, si à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidiũ, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atq; in hunc modum semper fiat detractio; [c] relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K. simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonũ APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. [d] Quoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. [e] Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.



b 41. primi.

c 1. dec.

d 1. duode.

e 14. quint.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratũ diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinẽ aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH. [f] maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autem circulus ABCD, maior est, & EFGH, minor; eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem, quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neq; minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; [g] sit autem vt circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

f 14. quint.

g 7. quint.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

THEOR.

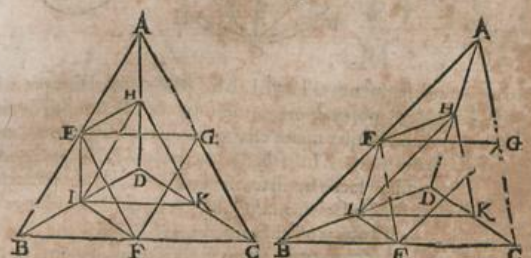
iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti: Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF; huius vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac

a 2. *sext.*



b 9. *vnde.*

proinde proportionaliter, [a] erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC, & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. [b] Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectę HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ; [c] erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratio-

c 10. *vnde.*

d 4. *sexti.* ne æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. [d] Proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt paralle-

e 10. *vnde.* læ, [e] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. [f] Quare

f 4. *sext.* latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll.

g 21. *sexti.* propos. 4. lib. 6. [g] ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqua-

h 34. *prim.* lia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cum similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, [h] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erunt & similia triangula EHG,

i 34. *primi.* IDK, cum sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, [i] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

k 34. *prim.* RVRSVS, [k] quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac

l 15. *vnde.* propterea & similia: [l] Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma

m 34. *pri.* est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. [m] Cum enim rectæ FC, CG, GF, æqua-

n 15. *vnde.* les sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: [n] Sunt autem & parallela, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam vero prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK, & parallelogram-

o 40. *vnd.* mum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. [o] Ipsa inter se æqualia erunt.

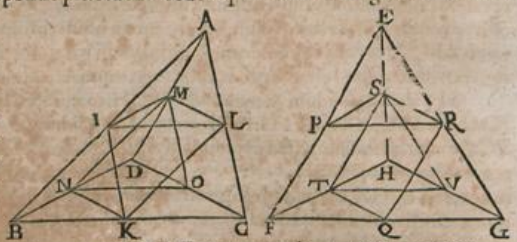
DENIQVE quia prisma EBFGHI, maius est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, necnon pyramidi HIKD, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraque diuiſa & in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa ſit vtraque pyramidum, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idque ſemper fiat; erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

SINT ſuper baſes triangulares ABC,EFG, duæ pyramides ABCD,EFGH, eiuſdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,V, connectanturque rectæ IL,LK,KN,NO, OM,MN,LM,MI,PR,RQ,QT,TV,VS,ST,RS,SP, ita vt pyramis vtraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propoſitio præcedens: eodemque modo intelligantur eſſe diuiſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH, & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraque linea diuiſa eſt bifariam, ſint autem triangula ABC, LKC, ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6.[a] Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, vt mox oſtendemus, atque adeo ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia: Et vt vnum priſma, videlicet IBKLMN, ad vnum priſma PFQRST,[b] ita ſunt duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidum ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps eadem ſemper facta diuiſione. Sed vt illæ baſes ad has, ita eſt LKC, baſis quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQG, quæ his eſt æqualis, & ſimilis, vt in præcedenti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis EPRS, quam priſmata pyramidis MNOD, ad priſmata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum ſint, vt duo priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata pyramidis EFGH,[c] ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hæc illis multitudine ſint æqualia; Erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 22. ſexti.

[b] 12. quint.

[c] 12. quint.

LEMMA.

QVOD autem ſit LKC, ad RQG, ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, [d] *ſecant duas rectas,* [d] 17. vnde. *ſenempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter, ſecatur autem DC, bifariam in O; ſenempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter, ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoq; perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem racabitur quoq; perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur à plano STV, Quare cum totæ perpendiculares potione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur à plano STV, Quare cum totæ perpendiculares potentur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMnantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus.*

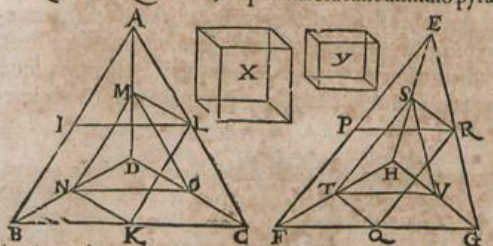
THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidē, vt eſt baſis, ad baſin. Si enim non ita ſit, ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y.

Diuida-

Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata
a 3. duodec. PFQRST, GQRSTV; [a] quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS,
b 1. deci. STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; [b] relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. Sit ergo iã relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, maiora solido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqua-



c 4. duode. lia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. [c] Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, vt basis ABC, ad basin EFG, hoc est, vt pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyd 14. quin. ramis ABCD; [d] erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.

SIT deinde solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, vt basis ABC, ad basin EFG: Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, vt basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius
e 14. quin. ponitur pyramide FFGH, [e] erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, vt basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iã, non posse esse, vt est, basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum X, pyramide EFGH, sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur vt basis ABC, ad basin
f 9. quint. EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; [f] sit autem pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ;
g 9. quint. *Erit q, vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem. g Pyramis ergo constituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.*

COROLLARIVM.

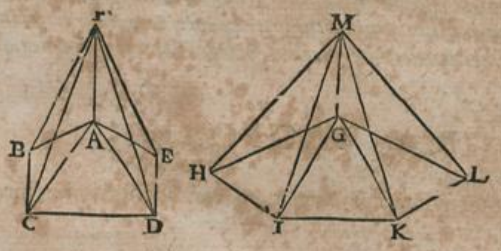
HINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur è conuerso, pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 36. & 31. lib. 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

vj.

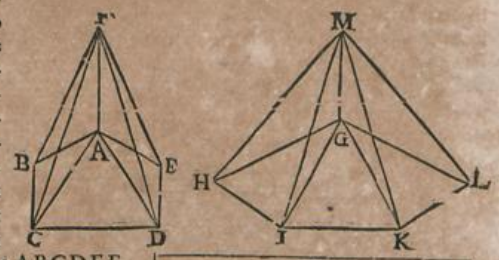
THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases.



SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resolutis enim basib. in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuisa. [a] Quia vero est, vt basis ABC, ad
a 5. duodec. basin ACD, ita pyramis ABCF, ad
b 5. duodec. pyramidem ACDF; erit componendo vt basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: [b] Sed rursus est vt basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt basis

vt basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDE, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt basis GHIKL, ad basim GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt basis GKL, ad basin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. [c] Rursus quoniam est, vt basis ADE, ad basin GKL, ita pyramis AD,EF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit vt basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

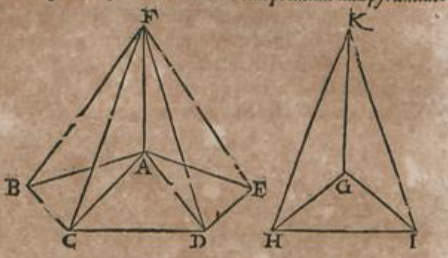


c 5. duodec.

ABCDE	ABCDEF
ADE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygonæ latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem et iam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa. [d] *Quoniam vero est, vt basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt basis ACD, quinta quintitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* [e] *Erit vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo est ostensum:* [f] *& vt basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem;* [g] *Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoq; conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunq; incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat à polygono, eiusq; pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoq; sumere à triangulo eiusq; pyramide, vt dictum est.*



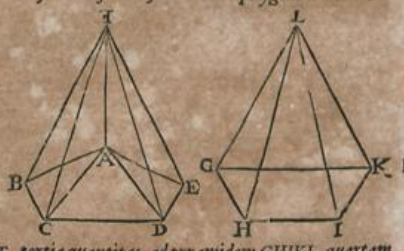
d 5. duodec.

e 24. quin.

f 5. duodec.

g 24. quin.

SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygonæ, sintq; plura latera in vna base quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratum, est vt basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; [h] *Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonstratum est; Et est quoq;, vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante est ostensum;* [i] *Erit etiam vt basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi ABCDE.*



h 24. quin.

i 24. quin.

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vt super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.

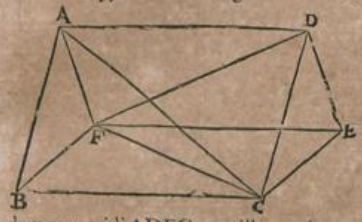
v.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. [a] Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt; [b] estque vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perdendiculari à vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, vt perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF; in tres pyramides æquales est diuisum. Quo circa omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

a 34. prim.
b 5. duode.

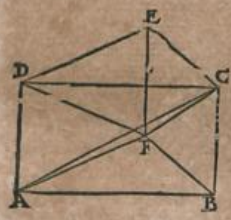


COROLLARIVM.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

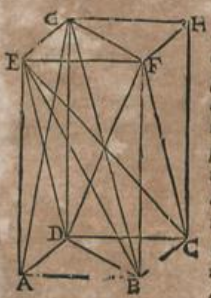
SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, [c] vt demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunq; alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum.

c 7. duode.



SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunq; ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADE, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, vt demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB; [d] Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma; ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basim ABCD, constituta, per coroll. propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

d 12. quint.



QVOD

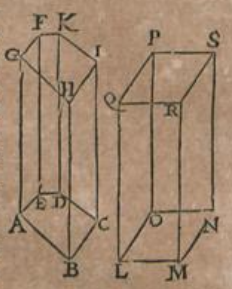
QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singula pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiusmodi pyramis, æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. prop. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM I.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases, inter se sunt, vt bases.



QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ: necnon de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases sint figuræ multilateræ. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusq; basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases; Ac proinde per coroll. prædictum huius propos. quælibet pyramis tertia pars erit sui prismatis.[a] Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum. a 15. quint.

CONVERSO modo. si prismata quæcumcunq; basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM II.

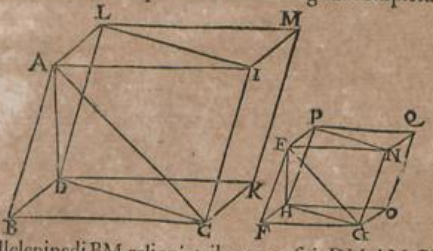
VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO. Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLIVM II.

CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismatibus constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At vero si in prismate talis basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed duæ tertiæ partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit illo, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum. 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ sit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ habet, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ habet tantummodo prismatis diximus. Quæ cum eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis

quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi BM, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, sint æquales, sitq; vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma AL, BK, parallelogrammis FP, FO, similia.[a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ,[b] sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex definit. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN,[c] prismata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla;[d] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [e] Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoq; proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaq; pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

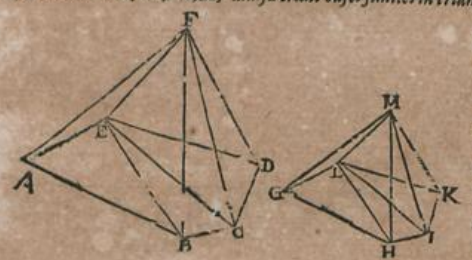


a 24. vnd.
b 24. vnd.
c 15. quint.
d 11. quin.
e 33. vnde.

COROLLARIVM.

EX hoc quoq; est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

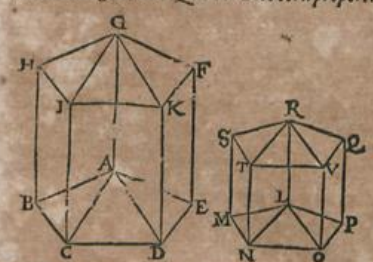
SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIkL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, I, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC, LH, LI,[f] diuisa erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE. similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; [g] *erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EF, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH.* [h] *Quare æquiangula, atq; adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. quarto lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM.* [h] *Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoq; pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemq; proportionem, triplicatam scilicet illius;* [i] *Atque idcirco erit vt vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem,* [k] *cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatã proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.*



f 20. sexti.
g 1. sexti.
h 8. duode. lib. 11.
i 12. quint.
k 8. duod.

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatã proportionẽ homologorũ laterũ. Sint n. duo prismata similia ABCDEFGHIk, LMNOPQRSTV. Dico eorũ proportionẽ esse triplicatã proportionũ homologorũ laterum. Nãsi ex angulis A, & L, ducãtur rectæ AC, AD; LN, LO,[l] *erũt, vt de pyramidib, dictũ est, triãgula ABC, CAD, DEA, triãgulis LMN, NLO, OLP, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducãtur rectæ GI, GK; RT, RV, erũt triãgula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triãgulis ante dictis, similia, cũ omnia p'lana prismatũ opposita similia existant, per definitionẽ prismatis. Quoniã vero ob similitudinẽ prismatũ, parallelogrãma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM; Vt autem CB, ad CA; ita quoq; est NM, ad NL, ob similitudinẽ triangulorũ BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniã angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinẽ prismatũ; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirũ angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD; Conuenit autẽ & rectæ NL, rectæ CA, eo q; anguli MNL, BCA sũt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cũ latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erũt parallelogrãma CG, NR, similia. Atq; & parallelogrãma CH, HA, parallelogrãmis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCI, GH, LMNTRS, similia sunt, ex def. solidorũ similiũ. Nõ aliter ostẽdetur esse similia prismata CDAGIk, NOLRTV; nec nõ prismata AEDkGF, LPOVRQ. Quappter prismata ABCIGH, CDAGIk, AEDkGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, ea, q̃ demonstrauimus ad prop. 34. lib. 11. triplicatã habẽt proportionẽ, singula ad singula, laterũ homologorũ BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorũ ad singula. Ac propterea eodẽ modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIk, LMNO.*



l 20. sexti.

LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

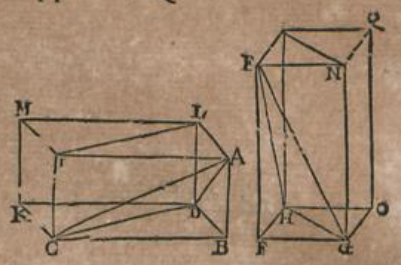
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia: & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. vij.

ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propos dictum est, parallelepipeda BM, FQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla æqualia quoque erunt. [a] Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinē solidi BM: [b] Vt autem basis BI, ad basim FN, ita est triangulum ABC, ad triangulū EFG. Igitur erit quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.



a 34. vnd.

b 15. quint.

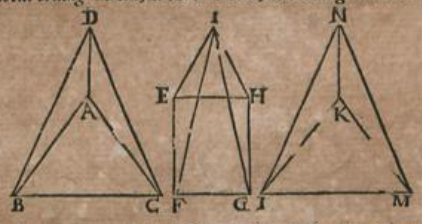
SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; [c] cum sit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintq; eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ; [d] Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

c 14. quint.

d 34. vnde.

SCHOLIVM.

EADEM ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases at q, altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, basin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammū per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super KLM, fiat pyramis KLMN, eiusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares;



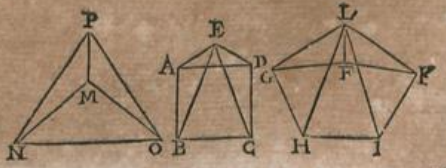
[e] erit vt basis ABC, ad basin KLM, hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium bases & altitudines reciprocantur.

e 19 duodec.

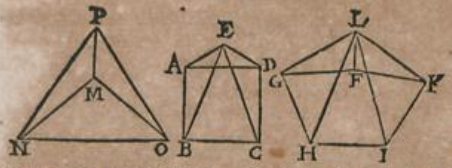
SED reciprocentur iam harum pyramidum bases at q, altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo; cum basis KLM, æqualis sit basi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI, ponuntur autem esse vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoq; vt basis ABC, ad basim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. [f] Quamobrem æquales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis sit pyramidi EFGHI, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod est propositum.

f 9. duodec.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum bases sint multangulæ. Fiat rursus triangulum MNO, æquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Erit q, ex scholio propos. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis est pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonstrauimus, erit vt basis MNO, hoc est, basis ABCD, sibi æqualis, ad basim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGBIKL, ad altitudinem py-



ramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIkL, bases & altitudines reciprocantur.



SED reciprocentur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constituta enim eodem modo figura, cum basi MNO, æqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIk, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIk, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante ostendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIkL: Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis ex scholio propos. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIkL, æqualis erit. Quod est propositum.

OMNIA hæc facile quoque demonstrabuntur conuenire prismatis quibuscunque. Nam si prismata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipsis, & super easdem bases, æquales; cum sint eorum tertiæ partes, ex coroll. propos. 7. huius lib. Vel certæ duæ tertiæ si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, vt in scholio eiusdem propos. ostensum est. Quare, vt modo demonstrauimus, bases harum pyramidum atq; altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ bases & altitudines eædem sint, quæ prismatum; reciprocabuntur quoq; bases prismatum atque altitudines.

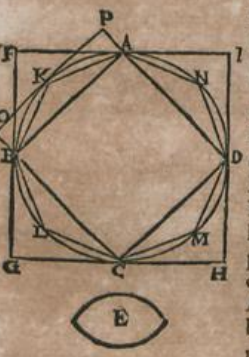
RVRSVS, si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoq; bases, & altitudines pyramidum easdem bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, vt demonstratum est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, vel certe sesquialtera, æqualia quoq; sunt. Quod est propositum.

viij.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus basin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, nō erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quam triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum ABCD, & circa cundē. quadratum FGHI; intelligantur q; super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus;



a 32. vnd.

[a] est que vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidium parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedum basis ABCD, maius erit quam dimidium cylindri, cuius basis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. [b] Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quēadmodum, ad propos. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit quam dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omniū segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam vero si à cylindro, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis ABCD; & à reliquis segmentis plus quā dimidium, nimirum prismata basium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; [c] relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni. Sint iam segmenta cylindri relicta basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.

b 41. prim.

c 1. dec.

SIT deinde cylindrus minor triplo çoni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus

maior

maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri,& magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum ABCD,& circa eundem,quadratum FGHI;intelliganturq; super hæc quadrata,pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD,dimidium est quadrati FGHI,vt ad propos.9. lib.4.demonstrauimus, [d] estq; vt basis ad basin,ita pyramis ad pyramidē eiusdem altitudinis;Erit quoq; pyramis super ABCD,dimidium pyramidis super basin FGHI;ac proinde pyramis super basin ABCD,maior erit dimidio coni,cuius basis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB,BC,CD,DA, bifariam in K,L,M,N,adiunganturq; rectæ AK,KB,BL,LC, CM,MD, DN, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP,tangens circulū in K,quæ parallela erit ipsi AB,vt ad propos.27.lib.3.demonstrauim⁹,occurratq; rectis DA, CB,productis in P,& O,& super AKB,ABOP,intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. [c] Quia ergo triangulū AKB,dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoq; pyramis super basin AKB, dimidiū pyramidis super basin ABOP, [f] cum pyramides habeant proportionem eandem,quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB,maior erit dimidio segmenti coni,cuius basis figura contenta linea recta AB,& peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC,CMD,DNA,& altitudo eadē cum cono & cylindro,maiores,quam dimidia segmentorum coni,quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt,quam dimidia omnium segmētorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB,BL,LC,CM,MD,DN,NA,secentur bifariam,&adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo,constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro,quæ maiores erunt simul,quam dimidia omnium segmentorum coni simul,quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si à cono,cuius basis circulus ABCD,auferatur plus quam dimidium,nempe pyramis super basin ABCD, quam maiorem esse ostendimus,quam dimidium coni, cuius basis est circulus ABCD; & à reliquis segmentis plus quam dimidium,nimirum pyramides basium AKB,BLC,CMD,DNA;atq; in hunc modum semper fiat detractio;ꝑ relinquitur tandem minor magnitudo,quam E,excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium AK, KB,BL,LC,CM,MD,DN,NA, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora,quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri,& magnitudini E,simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta,& ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E,ipsa magnitudo E,quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis,cuius basis polygonum AKBLCMDN,eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca,cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro,triplum sit ipsius pyramidis,vt supra in coroll.propos.7.huius lib. à nobis est demonstratum,erit huiusce modi prisma maius cylindro,pars toto. Quod est absurdum,Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni,propterea que conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri,eandem cum ipso basim habentis,& altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

d 6. duode.

c 41. prim.

f 6. duode.

g 1. dec.

SCHOLIVM.

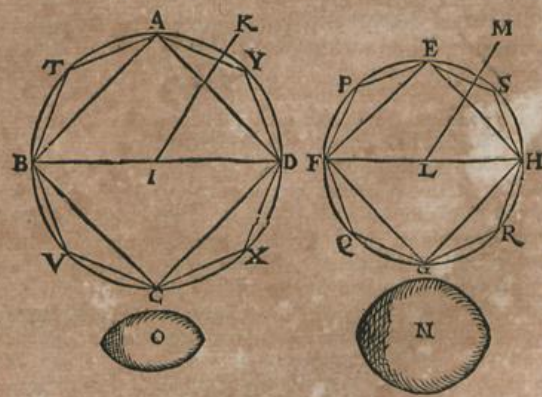
QVAMVIS propositio hæc solum intelligatur de conis & cylindris rectis,cum hos duntaxat Euclides definierit libr. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis,quam scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaq; propositio vniuersè ita proponi poterit.

OMNIS conus siue rectus, siue scalenus,tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti,siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

ix.

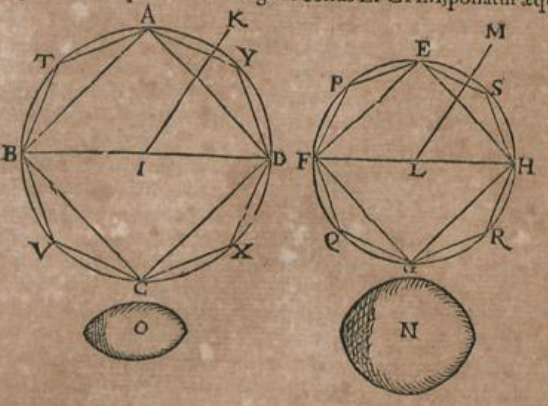
SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt,vt bases.



SINT sub eadem altitudine coni & cylindri,quorum bases circuli ABCD, EFGH,altitudines vero æquales IK,LM. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum,& cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit vt basis ABCD,ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem,nempe ad N, quæ vel maior erit,vel minor cono EFGHM. Si enim esset æqualis. [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N,proportionē eandē; ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basin: quod non conceditur. Sit ergo primū N,minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH,quadratum EFGH,diuidanturq; peripheriæ EF,FG,GH,HE,bifariam in P,Q,R,S,& adiungātur rectæ EP,PF,FQ,&c. Quoniā igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, eiusdem

a 7. quint.

dem altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altiudinis basium EPF, FQG, &c. atque
b 1. dec. in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; [b] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N. [c] & vt polygonum, ad



c 6. duod. polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, mi-
d 14. quin. nor sit cono ABCDK, pars toto, [d] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

SIT Secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulū EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque minor est ostensa; Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N, [e] sit autem, vt conus ABCDK, ad
e 7. quint. N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM, erit quoque vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

[f] QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est
f 15. quin. coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM,) Erit quoque vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodē modo confirmari potest, quo vsi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoq; est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, eb rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifeste indicat, ita vt propositio vniuerse proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se proportionem habent, quam bases.

CONVERTETVR hæc propositio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine, super æquales basses esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

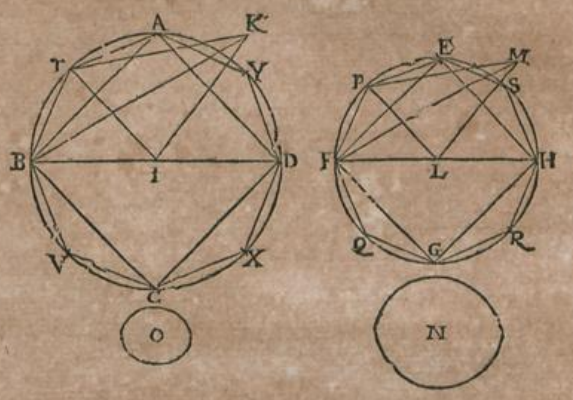
x.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

SINT

SINT similes coni,& cylindri,quorum bases circuli ABCD,EFGH,axes vero LK,LM, & diametri basium BD,FH. Dico conum ad conum,& cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur,habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionē triplicatam diametri BD,ad diametrum FH. Eritq; N,vel minor,vel maior cono EFGHM. Si enim esset æqualis, [a] haberet conus ABCDK,ad conum EFGHM,& ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK,ad conum EFGHM,esset quoque triplicata proportionis diametri BD,ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primum N,minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ,quæ in præcedenti propositione,ita vt rursus pyramis EPFQGRHSM, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB,KT, MF,MP,vt habeantur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK,EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI,PL. Quoniam igitur coni ABCDK,EFGHM,similes ponuntur; erit,ex 24.def.lib.11.ad diameter BD,vt diametrum FH, [b] ac propterea vt semidiameter BI, ad semidiametrum FL,ita axis IK, ad axem LM; Ac permutando vt BI,ad IK,ita FL,ad LM. Cum igitur anguli BIK,FLM,recti sint,ex defin.3.lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea que axes recti ad eorum bases; [c] Erunt triangula BIK,FLM,æquiangula;[d] Ac propterea vt KB,ad BI,ita erit MF,ad FL. Vt autem BI,ad BT,ita FL,ad FP,ob similitudinem triangulorum BIT,FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT,FP,sint æquales,vt in scholio propos. 22.lib.3. ostensum est; sitque vt BI,ad IT,ita FL,ad LP,ob æqualitatem tam linearum BI,IT,quam FL,LP; [e] erunt triangula BIT,FLP,similia.) Igitur ex æquo,vt KB, ad BT, ita MF,ad FP. Rursus quia latera KI,IB, trianguli KIB,æqualia sunt lateribus KI,IT,trianguli KIT,& anguli dictis lateribus comprehensi,recti,ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK,rectus ponatur, ad circulum ABCD, [f] erunt bases KB,KT,æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ MF,MP; Ac propterea rectæ KB,KT,rectis MF,MP, proportionales erunt,cum vtrobiq; sit proportio æqualitatis. [g] Quoniam vero vt kB,ad BT,ita kT, ad eandem BT; Item vt MF,ad FP, ita MP,ad eandem FP: Erat autem vt kB,ad BT,ita MF,ad FP: Erit quoq; vt kT,ad BT; ita MP,ad FP; Et conuertendo vt BT,ad Tk,ita FP,ad PM. Quare cum sit vt Tk,ad kB,ita PN,ad MF,& vt kB,ad BT,ita MF,ad FP; Et vt BT, ad Tk,ita FP, ad PM, veluti ostensum est; habebunt triangula BkT, FMP, latera proportionalia, [h] ideoq; æquiangula erunt; Ac proinde similia,ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYk, EPFQGRHSM inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æqualia, erunt dictę pyramides similes, ex def.9.lib.11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT,FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT,ad FP,ita est,BI,



ad FL,ob similitudinem triangulorum BIT,FLP; [i] Et vt BI,ad FL,ita BD,ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD,FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDk,ad N,earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYk,ad pyramidem EPFQGRHSM,ita conus ABCDk,ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYk,minor sit cono ABCDk,pars toto; [k] erit & pyramis EPFQGRHSM,minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo N, cono EFGHM.

SIT deinde N,maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDk, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD,ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYk, ad pyramidem EPFQGRHSM,triplicatam proportionem earundem diametrorum,vt proxime ostendimus: Erit vt conus ABCDk,ad N,ita pyramis ATBVCXDYk,ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDk, ita pyramis EPFQGRHSM. ad pyramidem ATBVCXDYk. Quare cum ex coroll. proposit. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYk, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc est,diametri FH,ad diametrum BD; habebit quoque N,ad conum ABCDk, proportionem triplicatam diametri FH,ad diametrum BD. Ponatur vt N,ad conum ABCDk,ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM,ad O, proportionem triplicatam diametri FH,ad diametrum BD. Et quia N,maior ponitur quam conus EFGHk, [l] erit quoque conus ABCDk, maior quam O. Quapropter conus EFGHM,ad magnitudinem O,minorem cono ABCDk, proportionem habet triplicatam diametri FH,ad diametrum BD. Quod est absurdum. Ostensum est enim, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius,quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N,cono EFGHM, Sed neq; minor est ostensa. Æqualis igitur est; [m] ac proinde conus ABCDk, eandem habet proportionem ad conum EFGHM,& ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDk,ad N,in triplicata proportione diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDk, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata.

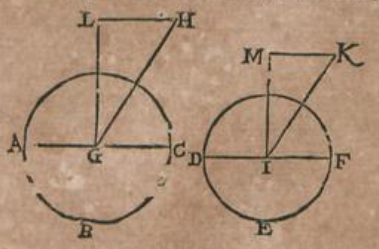
[n] QVONIAM vero,quam proportionem habent coni,eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur,quo vsi sumus in conis,si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri,atque prismata. Smiles igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

SCHO-

a 7. quinti.
b 15. quin.
c 6. sexti.
d 4. sexti.
e 6. sexti.
f 4. prim.
g 7. quinti.
h 6. sexti.
i 11. quinti.
k 14. quinti.
l 14. quinti.
m 7. quin.
n 15. quin.

SCHOLIVM.

QVOD si maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perspicuum est, in secunda parte huius propos. Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.



HÆC porro propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABC, DEF, axes vero GH, Ik. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducanturq; per rectas GH, GL; Item per Ik, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF, quæ diametri basium erunt. Quo-

o 18. vnde. p 38. vnde. *niam igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF, o erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM. ad easdem recta. p Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, k, ad bases demissæ cadent in AC, DF, communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIk, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem &*

q 32. prim. r 29. prim. *anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin 3. lib. 11. q Reliqui igitur, HGL, kIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis erit recta HL, per axiu vertices ducta ipsi AC, parallela; r ideoq; angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K,*

s 4. sext. *æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIk. Triangula igitur GHL, IkM, æquiangula sunt; s atq; idcirco erit vt GH, ad GL, ita Ik, ad IM; & permutando, vt GH, ad Ik, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axem Ik, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, vt diameter*

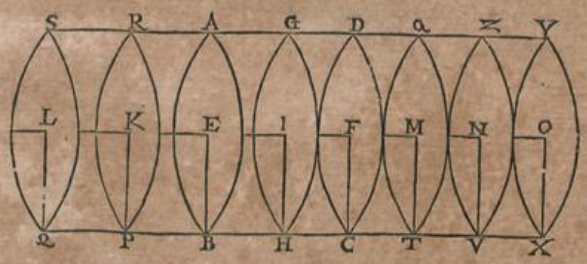
t 12. duode. *AC, ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, similes erunt ex definitione. t Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFk, (ob eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFk, ideoq; proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFk, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.*

xi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

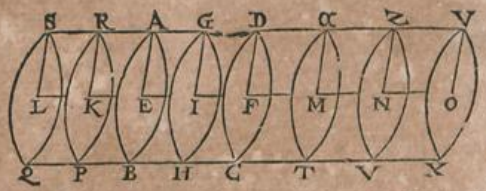
SECETVR cylindrus ABCD, plano GH, parallelo aduersus planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico vt est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem describtus est cylindrus, protractus quantumlibet: Sumanturque in axe producto quotcunq; rectæ EK, KL, æquales ipsi EI; Item quotcunque rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ lH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, describent circulos GH, PQ, QS, Tα, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum SQXY. Quoniam vero tam cylin-



dri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Tα, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) vt ex propos. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit per defin. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axem IF, secundam magnitudinem, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

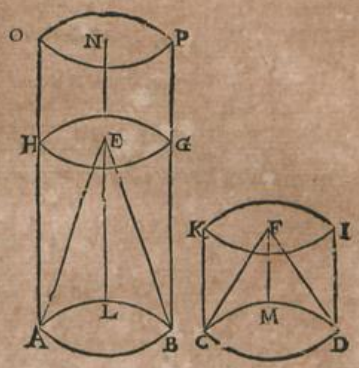


ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoq; in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, & c. vna cum recta S T, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xi.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines. (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, ME. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturq; axis EN, æqualis axi ME, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propos. 11. huius lib. [a] cylindrus AG, ad ipsos eandem habebit proportionem. [b] Est autem cylindrus AG, ad cylindrus HP, vt axis, seu altitudo LE, ad axem, seu altitudinem EN, hoc est, altitudinem MF, sibi æqualem. Igitur & cylindrum AG, ad cylindrum CI, erit quoq;, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.



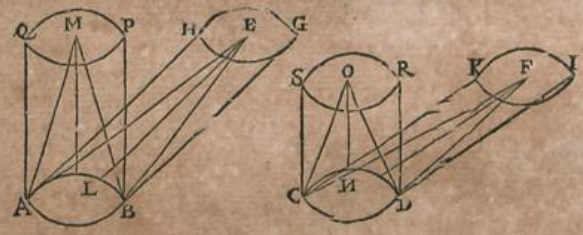
a 7. quint.
b 13. duode.

[c] QVIA vero coni ABE, CDF, sunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; [d] ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. Quod ostendendum erat.

c 10. duod.
d 15. quin.

SCHOLIVM.

HOC idem conuenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint super bases æquales AB, CD, coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, scaleni, quorũ altitudines LM, NO. Dico conũ ABE, ad conũ CDF, & cylindrũ ABGH, ad cylindrũ CDIK, esse, vt est altitudo LM, ad altitudinem NO. Super basin enim AB, construatur cylindrus rectus ABPQ, sub altitudine LM; Item super basin CD, cylindrus CDRS, sub altitudine NO.



[e] *Quoniam igitur est cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo ad LM, altitudinẽ NO: Est autẽ cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Itẽ cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex cor. prop. 11. huius lib. Erit quoq; cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.*

e 14. duod.
f 10. duode.
g 15. quin.

QVONIAM autem coni, [f] cum sint tertiæ partes cylindrorum, [g] eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoq; conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

IDEM, concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ; sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonstrauit: Erit quoq; cylindrus scalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum,

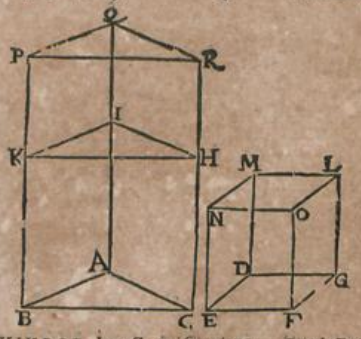
[h] *QVONIAM vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, [i] cum illi horum sint tertiæ partes; Erit etiam conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est.*

h 15. quint.
i 10. duode.

EADEM quoq; hæc propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG, prismata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse

prisma

prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem. Sint namq; insistentes lineæ AI, CH, BK, prismatis ABCHIK, ad basin ABC, perpendiculares, ita vt BK, sit altitudo prismatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, sumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur prisma HIKPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Eruntq; prismata HIKPQR, EL, cum habeant & bases, & altitudines æquales, inter se æqualia, ex coroll. 2. propos. 7. huius libr. k *Ac propterea prisma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25. lib. 11. prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, est vt planum BI, ad planum KQ;* l *Et vt planum BI, ad planum KQ, ita est recta BK, ad KP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma EL, vt BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod est propositum.*



k *7. quin.*

l *1. sext.*

QVOD si insistentes lineæ AI, CH, BK, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, aliud prisma, cuius insistentes sint perpendiculares ad basin, & æquales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cum ex 2. coroll. propos. 7. huius lib. hæc duo prismata æandem habentia altitudinem, & basin, sint æqualia, sitq; prisma constitutum ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.

m *15. quin.* c *10. duode.* m *QVONIAM vero pyramides eandem habent proportionem cum prismatis,* n *quod illæ sint horum tertiæ partes: Perspicuum est, ita quoq; esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.*

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atq; ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HÆC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA quoq; hæc facile conuerti possunt hoc modo.

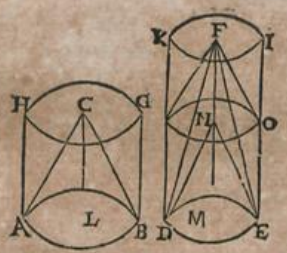
CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales,

NAM alioquin pars æqualis foret toti, vt in conuerso propos. 31. lib. 11. ostensum est.

xii.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.



SINT æquales coni ABCD, DEF. & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes altitudinesve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoq; æquales; erunt & bases æquales, ex corollar. propos. 11. huius libr. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atq; altitudines sunt reciprocæ.

QVOD si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, maior, ex qua abscindatur MN, ipsi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum, vt in scholio propos. 15. libr. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; a erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. b Est autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: c Item vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ sint bases & altitudines.

a *7. quint.* b *11. duode.* c *14. duod.*

IN conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, d cum coni sint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituantur duo coni, vt in figura.

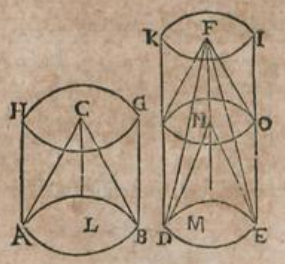
d *10. duod.*

SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit vt basis AB, ad basin, DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

QVOD

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN, [e] Est autem vt basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: [f] Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales: erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrũ DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; [g] Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIk, æqualis erit.

e 11. duodecimi.
f 14. duodecimi.
g 9. quin.



AT vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIk, cum eædem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti eaſdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib inter se quoque erunt æquales.

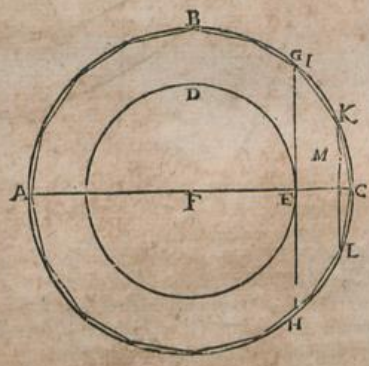
IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

PROBL. 1. PROPOS. 16. xiij.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium Ik, & sic deinceps; [a] relinquetur tandem minor arcus quam CG. Sit igitur iam arcus Ck, arcu CG, minor, & subtendatur recta Ck. Dico rectam Ck, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, [b] quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ Ck, eo quod arcus arcui Ck, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex k, ad AC, demittatur perpendicularis kL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, kME, recti sunt; [c] erunt rectæ GH, kL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta kL, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta Ck, quæ longius à circulo DE, abest, quam kL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri Ck, [d] idcoque æqualiter cum Ck, à centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. Quod erat faciendum.

a 21. dec.
b 29. ter.
c 29. pri.
d 14. ter.



COROLLARIVM.

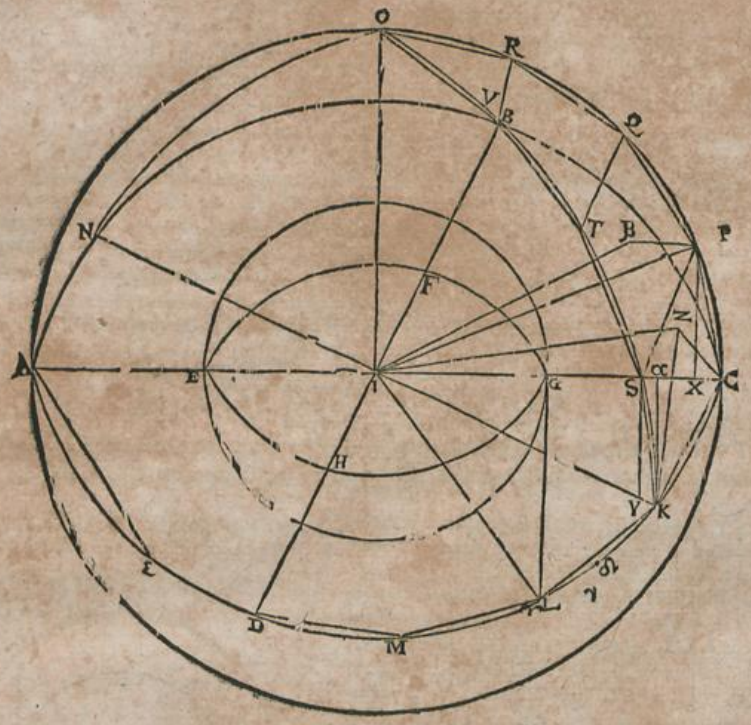
HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea kL, quæ cum ducatur ab extremo puncto k, lateris Ck, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

xiv.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphærę ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphærę plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphærę, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphærę describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex



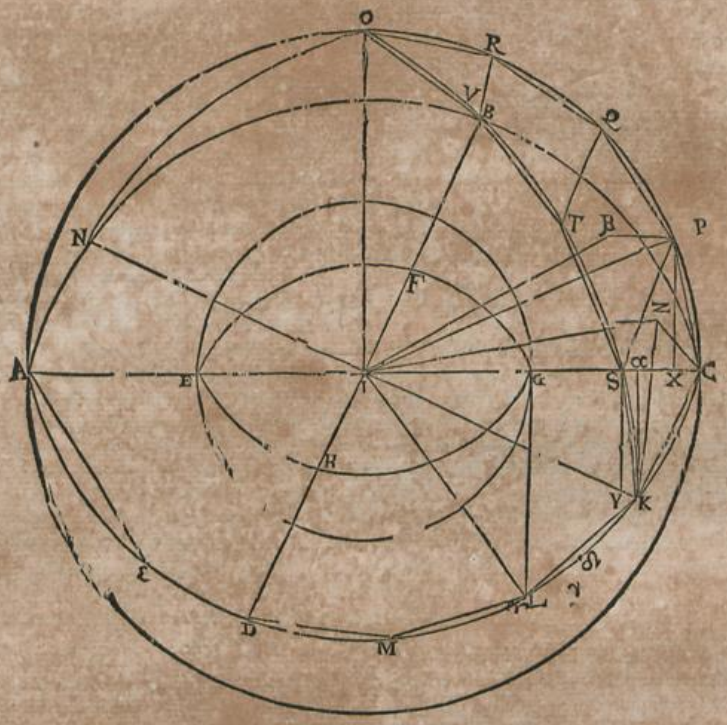
centro sphærarum, ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, sese in cętro I, secantes ad angulos rectos, vt sint quadrātes AB, BC, CD, DA, &c. [a] Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vsque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ Gγ, [b] applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero si arcui Cγ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, [c] latus Cγ, oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidium LK, & sic deinceps; [d] relinquetur tandem arcus minor arcu Cδ, seu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta Aε, hoc est, quam Gγ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tangat circulum EFGH, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet; multo minus recta CK, subtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro KN, [e] erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, [f] quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes sectiones, circulos, vt iam dictū est, quorum semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. [g] quadrantes erunt OC, OK; atque adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; [h] Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittātur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, [i] quæ in cōmunes sectiones AC, NK, cadēt; [k] eruntq; inter se parallelæ.

QVO-

a 16. duodecimi.
b 1. quar. c 19. pri.
d 1. dec.
e 11. undecimi.
f 18. undecimi.
g schol. 21. ter.
h 29. ter. 38. undecimi.
k 6. undecimi.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. [l] & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. [m] Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PY, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY, [n] æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter sese. [o] At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CK, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK. [p] Erunt parallelæ quoque PS, CK, inter se, cum vtraque parallela sit ipsi XY, [q] ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS; in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atque adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem CK, sint parallelæ, totumque quadrilaterum PSTQ, in vno esse plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum QTVR. [r] Est autem & triangulum RVO, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, MO, OD, necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis, inscriptum erit in sphæra maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

l 27. ter.
m 26. pri.
n 33. pri.
o 2. sex.
p 9. duodecimi.
q 7. vndecimi.
r 12. vndecimi.



DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autem perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequenti ostendemus. Quoniam igitur ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; [s] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam vero, vt postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; [t] erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

s 47. pri.
t 12. sec.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis k α. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & A α, maior sit, quam AI, erit A C, minor duplo ipsius A α. Quam ob rem cum sit, [u] vt AC, ad A α, ita rectangulum sub AC, α C, ad rectangulum sub A α, α C, quod bases horum rectangulorum sint A C, A α, & eadem altitudo α C; erit quoque rectangulum sub AC, α C, minus duplo rectanguli sub A α, α C. [x] Est autem rectangulum sub AC, α C, æquale quadrato rectæ CK, & rectangulū sub A α, α C, æquale quadrato rectæ K α; quod recta CK, inter AC, α C, sit media proportionalis; & recta K α, inter A α, α C, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si n. connecteretur

u 1. sex.
x 17. sex.

recta AK, fieret triangulum rectangulum A C K.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC. γ Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Iα, αK. Si ergo ex his demptur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α non tangat sphæram minorem EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta Kα, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius absint à sphæra EFGH, quam punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planũ CKSP, sphæram EFGH.

γ 47. pri.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphæram minorem EFGH, si prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Cγ: z Est autẽ CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, vt mox demonstrabitur; Multo maior erit Gγ, quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC.

z 19. pri.

a 47. pri.

a Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale est quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, sit sphæræ minoris EFGH, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget.

DVCATVR rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, descripti, vt demonstratum est; Connexis autem rectis βP, IP, cum angulis Iβ P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11.

b 47. pri.

b erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia vero & quadratum rectæ IC, (quod æquale est quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia; Est autem quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior sit, quam linea βP, vt postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoq; & linea Iβ, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram, EFGH, existet, quam punctum Z: propterea q; multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget sphæram maiorem EFGH. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

EX ijs, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium, dictorum poliedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoq; polyedrum vnius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, c cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

c 15. quin.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum sunt demonstrata; ideirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, *& angulum* CZK, *in quadrilatero* CKSP, *esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori est vt* IK, *ad* KC, *ita* IY, *ad* YX, *(quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula* ICK, IXY, *similia sint.)*

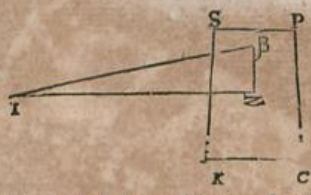


d 14. quin.
e 28. ter.

Est autem IK, *maior, quam* IY; d *erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis sit ostensæ ipsi SP; erit quoque* KC, *maior quam SP. Ac propterea in hac figura, arcus* CK, *maior erit arcu SP. ex scholio propos 28. lib. 3.* e *Quare cum arcus CP,* KS, *arcui* CK, *sint æquales, quod & lineæ* CP, KS, *ipsi* KC, *lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus* CP, KS, *arcu PS, maiores; Atque ideirco quibet arcum C, CP,* KS, *quadrantem circuli* CKSP, *excedet; atque à semicirculo superabitur; ac proinde multo maius segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo sit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum* CKSP. *Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est* Iβ *cadere intra quadrilatera; necnon & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus* CK, *quadrante maior est; angulus* CZK, *obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.*

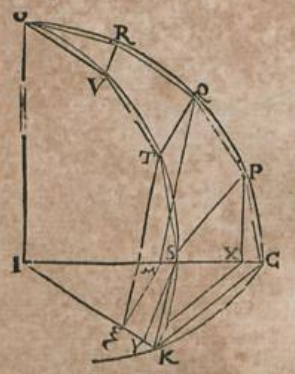
SECVN

SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius a centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. [f] Erit latus illi oppoſitum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo Iθ Z, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius a centro I, diſtat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.



f 19. pri.

TERTIO, ac vltimo probandum eſt, rectam ZC, maiorem eſſe recta βP. Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam PS, maiorem eſſe recta QT. Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo eſt triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, [g] quæ in communes ſectiones IC, IK, cadent, [h] eruntque inter ſeſe parallelæ, vt de rectis PX, ST, dictum eſt. Quod ſi adiungatur recta μξ; erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe & æquales PS, XT. [i] Quia vero μξ, ipſi CK, parallela eſt; quod latera IC, IK, proportionaliter ſint ſecta in μ, & ξ veluti diximus de recta XT; [k] erunt quoq; μξ, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ. Eſt autem IY, maior quam Iξ. [l] Igitur & YX, maior erit quam ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis eſt ipſi XT, maior erit quam QT, quæ æqualis eſt ipſi ξμ.



g 38. vndecimi.
h 6. vndecimi.
i 6. ſex.
k 30. pri.
l 14. quin.

HOC ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egredianturque è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & baſis KC, maior eſt baſe PS; [m] erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam baſes KS, CP, baſibus ST, PQ, ſunt æquales [n] erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta ZC, rectæ βP.

m 25. pri.
n 8. pri.

SIT deinde ZC, minor, quam βP. Et abſcindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipſis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturq; rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, [o] quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris ſectæ ſunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ, ad ρπ. Cum ergo βS, maior ſit quam βρ, [p] erit & SP, maior quam ρπ. Eademque ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, πφ, φπ; Ac propterea cum PS, minor ſit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, ſint æquales; [q] erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quod tam illi, quam hi ſunt quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta ZC, quam βP: Sed neque æqualis eſt oſtenſa; Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.



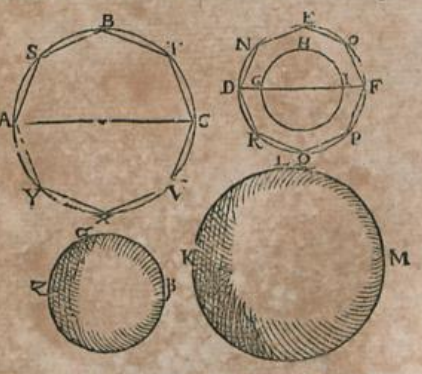


o 2. ſex.
p 14. quin.
q 25. pri.

THEOR. 18. PROPOS. 18. XV.

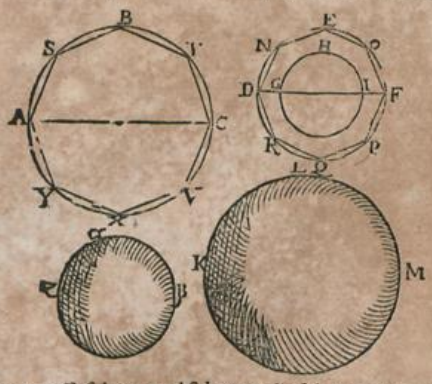
SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum,

SINT duæ ſphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico ſphæram ABC, ad ſphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra ABC, ad aliam ſphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quam DEF, triplicatam proportionẽ diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primũ ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque ſphæra GHI, concentrica ſphæræ DEF. [a] Inſcribatur in ſphæra maiori DEF, polyedrũ DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI; Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Eſt autem per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, maior ſit polyedro ASBTCVXY, [b] erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum



a 17. duodecimi.
b 14. quin.

HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionẽ triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra kLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Z α C. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Z α β, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra kLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, maior quam ſphæra Z α β. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Z α β, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram kLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.



COROLLARIVM.

HINC fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.



EVCLI-

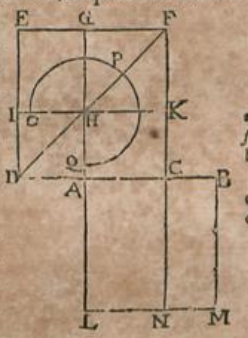
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM,

Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia totius describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Producta autem BA ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectæ AD. Describatur enim super CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrum in H, puncto, per quod ducatur Ik, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, kG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum CM, sub AB, CB, æquale ipsi kG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB, & AH, ipsi AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla: [c] Est autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad Ak, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius Ak. [d] Quoniam autem Ak, ipsi IG, est æquale; erit AN, æquale duobus Ak, IG. Additis igitur æqualibus CM, kG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ AD, erit & gnomon OPQ, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni OPQ, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



a 3. def. sexti.
b 17. sex.
c 1. sex.
d 43. pri.

ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB, duplalineæ AD, ponatur. [e] Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius AD, est dupla, [f] ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cum vtriusque rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectãgulo sub AB, AC.) [g] Quod vero sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. [h] Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratũ rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



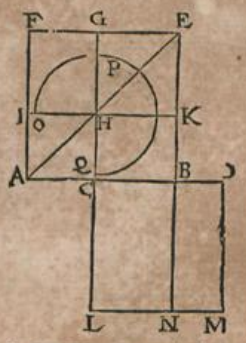
e 2. sex.
f 1. sex.
g 17. sex.
h 4. sec.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, possitque quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD,

quæ, vt post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmensum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus: Est autem & quadratū CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AB, dupla; estque LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. [a] Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: [b] Est autem CK, ipsi HF, æquale. Æquale igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD; estque rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale, ipsi KG, quadrato rectæ CB. [c] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque maius segmentum CB.

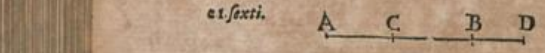


a 1. sex.

b 43. pri.

c 17. sex.

d 4. sec. ALITER. Quoniam quadratū rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; [d] estq; quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarū CB, AC, vna cū rectangulo sub AC, CB, bis; Erunt & quadrata rectarū CB, AC, vna cū rectangulo sub AC, CB, bis, quintuplū quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratū rectæ CB, & rectangulū sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdē quadrati rectæ AC; Est autem & quadratum rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æquale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulū sub AC, CB, bis. æquale sit rectangulo sub CD, CB; (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, [e] ita quoque duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB; cum vtriusque rectanguli eadem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.)



e 1. sexti.

f 2. sec. Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [f] At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD; Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, CB, æquale erit rectāgulo sub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD; [g] ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; segmentum maius CB. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplū possit, &c. Quod erat demonstrandum.

g 17. sex.

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior sit necessario quam CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, [h] *cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.*

h 4 secun.

iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.



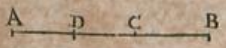
SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum

sit vt

sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, [a] erit rectangulum sub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earum latera HK, IQ, æqualia; [b] ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. [d] Est autem IO, ipsi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus gnomon RST, rectangulo CF, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati PQ; erit etiam gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD.

a 17. sex.
b 34. pri.
c 36. pri.
d 43. pri.

ALITER. Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita CB, [e] erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectę CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum sub AB, BC, quadruplum est quadrati rectę CD; (Nam cum sit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [f] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectę AC: quod, cum ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectę CD; erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectę CD.) Ac propterea rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectę CD, quintuplum quadrati rectę CD. Igitur & quadratum rectę BD, quintuplum erit quadrati rectę CD. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur, minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.



e 6. sec.
f 17. sec.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum,

SI recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum AC, bifariam sectum sit in D; sitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ, ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG: At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, vt supra ostensum est. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB, BC, comprehensum: [g] Ac proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca ex definitione, secta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

g 17. sex.

ALITER, Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita GB, [h] erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulũ sub rectis lineis AB, BC, descriptum, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem eiusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est rectangulum sub AB, BC. [i] Quamobrem erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde secta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

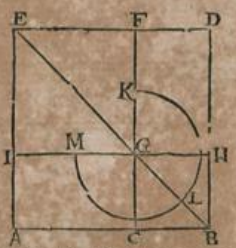
h 6. sec.
i 17. sex.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

V.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectę BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.



a 17. sex.

ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectę AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectę AC, triplum quadrati rectę AC. [c] Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectę AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt [illegible] quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

b 17 sex.
c 7. sec.

SCHOLIVM.

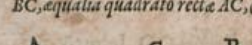
CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI re-

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraque simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon K L M, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac proinde cum æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi IF, æquale. Quapro-
d 17. sex. *pter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, rectæ AC;* d *erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac propterea AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.*

c 7. secun. *ALITER. cum quadrata rectarum A B, BC, tripla sint quadrati rectæ AC;* c *Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplũ quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC. Et proinde rectangulũ sub A B, B C, semel, æ-*

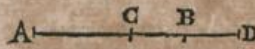


f 17. sex. *quale quadrato rectæ A C.* f *Quare vt prius erit vt A B, ad AC, ita AC, ad C B; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam ac mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Di-
g 8. sec. h 17. sex. *co quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmento.* g *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC:* h *Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex A C; atque adeo rectangulum sub A B, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex A C, quintuplum erit. Quod est propositum.*



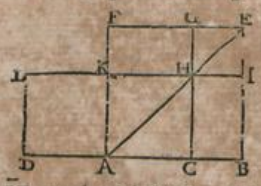
SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur rectæ BD, minori segmento BC, æqualis, sitque quadratum ex
i 8. sec. *AD, quadrati ex A C, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectam esse extrema ac media ratione.* i *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, vna cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadru-*
k 17. sex. *plum quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC.* k *Igitur erit vt A B, ad A C, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, secta est extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

iv.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio recta linea.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum A C, & adiiciatur ei in rectum A D, æqualis maiori segmento A C. Dico rectam B D, secari in A, extrema ac media ratione, esseque maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi B D, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi I K, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. C K, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est vt AB, ad AC, ita



a 17. sex. b 36. pri. AC, ad CB; a Erit rectangulum I F, contentum sub A B, B C, æquale quadrato C K, rectæ A C. b Est autem C K, ipsi A L, æquale. Igitur I F, æquale erit ipsi A L; additoque communi B K, erit rectangulum B L, contentum sub BD, D A, æ-
c 17. sex. quale quadrato BF, rectæ AB; c Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AB.

ALITER. Quoniam est vt A B, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo vt D A, ad A B, ita B C, ad C A; & componendo vt D B, ad A B, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est B D, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHO-

SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmentum AD, & ex maiori segmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam AC, quæ æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figuræ constructione, cum sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD, [d] *erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato communi BK, erit AL, æquale ipsi IF;* [e] *Est autem AL, ipsi CK, æquale. Æquale igitur est IF, contentum sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC;* [f] *Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC, minus vero segmentum recta CB. Quod est propositum.*

d 17. sex. e 36. pri. f 17. sex.

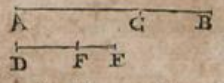
ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [g] *erit quoque ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

g 19. quin.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitque DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse DF. Cum enim sit vt AB, tota ad DE, totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla; [h] *erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE.* [i] *Quoniam vero est, vt AB, ad AC ita DE, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. lineæ secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*



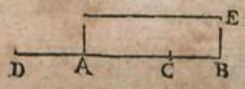
h 19. quin. i 15. quin.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema ac media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [b] Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, nõ habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [c] erũt rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; [d] erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome.

a 1. tertij. dec. b 6. dec.



c 9. dec. d 74. dec.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [e] erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, [f] facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

e 17. sex. f 98. dec.

SCHOLIVM.

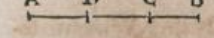
SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. [g] *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD,*

g 3. tertij. dec.

h 6. dec. rum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum; h ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde si à Ra-

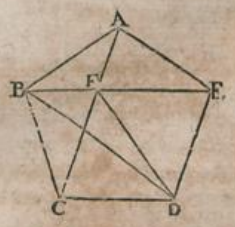


i 74. dec. tionali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; i erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.

viij. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi se intersecant rectæ BE, AC, recta ducatur ED. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; a erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales. b Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD; Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi. c Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; d erunt quoque latera BF, AF, æqualia: Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, trianguli & basis communis FD; e erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, ostensi æquales. Æquales igitur sunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, ostensus sit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipsum pentagonum.



a 4. pri.
b 5. pri.
c 4. pri.
d 6. pri.
e 9. pri.

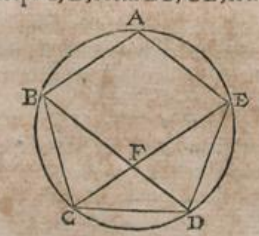
SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD; trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti, æquales, ex hypothesi; f Erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; g Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia ostensa sint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

f 4. pri.
g 5. pri.

viij. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, qui duobus angulis sunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, se mutuo secãtes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maioraq; earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pentagoni. a Descripto enim circulo circa pentagonum; b erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; c Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, d & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: e Est autem & angulus BCE, eiusdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt: f Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. g Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, triãguli CFD. h Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. i Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.



a 14. quar.
b 28. ter.
c 4 pri.
d 32. pri.
e 33. sex.
f 6. pri.
g 27. ter.
h 32. pri.
i 4 sexti.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri, hoc est, BD, parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum. k Quoniam

k 22. dec.

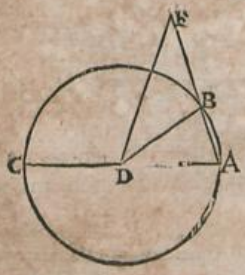
tam

tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC inter se æquales in pentagono æquiangulo: erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales: [l] *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.* l 28. prim.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectum addatur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter AC, coniunganturque rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies: Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) [b] erunt & anguli BDE, BED, æquales: [c] quibus cum æqualis sit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED: [d] Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED. [e] Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC, erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idē angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD, [f] erunt triangula ADE, ABD, æquiangula. [g] Igitur erit vt EA, ad AD, hoc est, ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB sibi æqualis ad BA: Atque idcirco recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estq; maius segmentum EB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.



a 33. sext.
b 5. primi.
c 32. prim.
d 5. primi.
e 32. primi.
f 32. primi.
g 4. sexti.

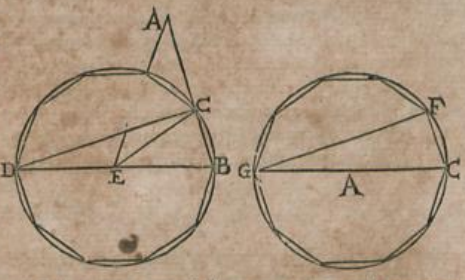
SCHOLIVM.

QVIA vero demonstrauimus ad propos. 5. huius lib. si minus segmentum lineæ diuisæ extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur, maius segmentum secari quoq; extrema & media ratione, eiusq; segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib. ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet:

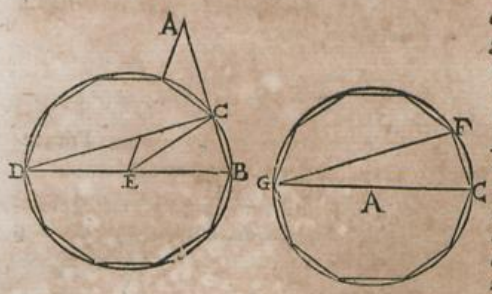
SI lineæ diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

SIT enim AB, diuisa in C, extrema & media ratione, sitque primum AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus segmentum CB, esse eiusdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & est AC, latus hexagoni æquale semidiametro EB, ex coroll propos. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB ad BE, ita EB, ad BC. [h] *ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cum habeāt latera circa cōmunem angulū B, proportionalia; erit q; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rursus quia latera CA, CE, æqualia sunt, nempe latera hexagoni;* [i] *erunt anguli CAF, CEA, æquales;* [k] *quibus cum æqualis sit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A:* [l] *Est autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, simul quadrupli erunt eiusdem anguli A.* [m] *Cum ergo angulus BCE, CBE, æqualis sit externus CED; erit quoque angulus CED, eiusdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis ostensus est angulo A, quadruplus.* [n] *Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus semicirculi BCD, eiusdem arcus BC, quintuplus existet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus est decagoni.*



h 6. sexti.
i 5. primi.
k 32. primi.
l 5. primi.
m 32. pri.
n 33. sext.

SIT deinde CB, minus segmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius segmentum AC, esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus BC, in circulo BCD; ducatur q; diameter BED. Deinde interuallo AC, describatur circulus CFG, cuius diameter CAG; erit q; ex coroll. propos. 15. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, secta est in C, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam ostensum est, minus segmentum CB,



o 31. tertij. p 30. primi.

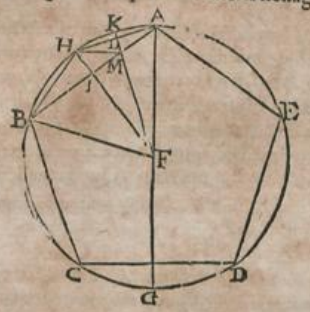
tum CB, latus decagoni eiusdem circuli CFG. Describatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum & æquiangulum BCD; erunt q; latera BC, CF, inter se æqualia. Quoniam vero, si connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, sunt æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quod insistant arcubus similibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoque anguli BCD, CFG, in semicirculis æquales, o nimirum recti: p Erunt quoq; latera BD, CG, inter se æqualia. Quam ob rem cum diametri BD, CG, sint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde, cum recta AC, sit latus hexagoni circuli CFG, erit quoq; eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod est propositum.

x.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vna cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiso deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, secans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, secans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniam igitur arcus AH, BH, æquales sunt; [a] erunt & anguli ipsis insistentes AFH, BFH, æquales. Quare cum latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia sint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipsis contenti æquales quoque; [b] erunt & bases AI, BI, æquales, & anguli AIF, BIF, ideoque recti: Eademq; ratione æquales erunt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus ABCG, AEDG, demantur æquales arcus ABC, AED; relinquetur arcus CG, DG, inter sese æquales, ideoque erit arcus CG, dimidium arcus CD. Est autem & arcus AH, dimidium arcus AB. Igitur cum arcus AB, CD, æquales sint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG, AH, æquales; Ac proinde cum arcus AH, duplus sit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiusdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales sunt, & est arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, eiusdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æque multiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK, BH; [c] Ac propterea totus arcus BG, duplus quoque erit totius arcus BK, [d] & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: [e] Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus est quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, æquales; [f] Ac propterea triangula ABF, FBM, cum habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. [g] Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF, ad BM; [h] ideoq; rectangulum sub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.



a 27. tertij.
b 4. primi.
c 1. quint.
d 33. sexti.
e 20. tertij.
f 32. primi.
g 4. sexti.
h 17. sexti.

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia sunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; [i] erunt & bases AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: [k] Est autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia sint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æqualis erit; [l] Ac propterea triangula ABH, AHM, cũ habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communẽ, æquiangula erunt. [m] Quam ob rẽ erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; [n] ideoque rectangulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostensum est autem & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarum BF, AH. [o] At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

i 4. primi.
k 5. primi.
l 32. primi.
m 4. sext.
n 17. sext.
o 2. secund.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

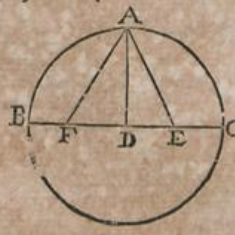
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos:

rectos: Demonstratum enim est, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppositum CD, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoq; latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolomeo tradidimus, qua vna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc à nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF, adiungaturq; recta AF. Dico rectam AF, esse latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, secta sit bifariam in E, eique addita DF, [p] *erit rectangulum sub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoq; quadrato rectæ EA, quæ ipsi EF, est æqualis.* [q] *Est autem quadratũ rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum sub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale est quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum sub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc est quadrato rectæ CD.* [r] *Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF, propterea q; recta CF, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmẽtum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum DF, latus decagoni eiusdem circuli, vt demonstrauimus ad propos. 9. huius lib.* [s] *Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vna cum quadrato lateris decagoni DF, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli;* [t] *Est autem eiusdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF; ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.*



p 6. sec.
q 47. prim.
r 17. sexti.
s 10. tertiyd.
t 47. prim.

THEOR. 11. PROPOS. 11. xij.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem; describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secetq; AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, secet diametrum BH, in K. Abscindatur quoque ex semidiametro FH, quarta eius pars FL: Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoque FL, BF, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, composita, [a] cum sit commensurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.



a 16. dec.

RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat arcum AC, bifariam in B; secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI, AFK, cum habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, [b] æquiangula inter se erunt. [c] Quamobrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA, siue ad FH, ipsi FA, æqualem. [d] Vt autem CA, ad FH, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad FL; Atque componendo, vt CD, CK, simul ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL; [e] Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia vero si AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) [f] maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi [g] CD; Erit quadratum rectæ compositæ ex CD, maiori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratũ rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, [h] ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 32. prim.
c 3. sexti.
d 15. quint.
e 22. sexti.
f 8. tertyd.
g 1. tertyd.
h 6. dec.

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. est quadratum rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25.) [i] habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium vero partium 1. est quadratum rectæ FL, talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25. est quadratum rectæ BL, talium 5. est quadratum rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [k] Erunt rectæ BL, KL, longitudine incommensurabiles: ideoque, cum ostensæ sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali BL, demitur Rationalis KL, potentia tantum commensurabilis; [l] erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit KL.

i 20. sexti.
k 9. dec.
l 74. dec.

IAM vero recta BL, possit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum KL, & N; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ BL, talium 1. fuit quadratum rectæ KL. Erit reliquum quadratum rectæ N, taliũ partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. [m] Quare commensurabilia erunt; propterea quæ rectę ipsæ BL, & N, commensurabiles, saltem potentia; Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) [n] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis longitudine sit commensurabilis Rationali BH: (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) possitq; plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.



m 6. dec.

n 9. dec.

POSTREMO quia recta AB, est media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quod triangulum ABH, [o] habeat angulum BAH, rectum, à quo ducta est AK, ad basin perpendicularis) [p] erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo sub BH, BK. Quocirca cum superficiem contentam sub Rationali BH, & [q] Apotoma quarta BK, possit recta linea AB; [q] Erit AB, linea Minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

o 31. tertij.

p 17. sexti.

q 93. dec.

viij.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico quadratum lateris AB, triplum esse, quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ secet ex coroll. 2. propos. 10. huius lib. arçum BC, bifariam in E, & rectam BC, bifariam quoque, & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus BC, sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres sextas partes totius circuli; arcus vero AB, cum sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit eiusdem circuli. Igitur arcus BE, sexta pars est eiusdem, ac proinde recta BE, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro DE, ex coroll. propos. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale est quadratis rectarum AB, BE, [b] quod angulus ABE, in semicirculo rectus sit; Est autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla sit lineæ BE; erunt quadrata rectarum AB, BE, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ BE; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum est quadrati rectæ BE, quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 47. prim.

b 31. tertij.

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD, posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atque adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propositionis 4. libr. 2. quadruplum est quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex, AE, quadrati ex AB, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propos. 8. lib. 6. vt est AE, ad AB, ita se habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli æquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad basim demissæ potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib. 14. propos. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi potest, semidiametrum DE, bifariam secari in F, à latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BE; si ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. [c] Est autem quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE

c 47. prim.

Igitu

Igitur & talium partium 4.erunt quadrata rectarum BF,FE.Est autem talium partium 3.quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ AB,quadruplum sit quadrati rectæ BF,ex scholio propos.4.lib.2. Est enim AB,dupla ipsius BF.) Igitur talium 1.erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE,hoc est,quadratum rectę DE,sibi æquale,quadruplum erit quadrati rectæ FE.Igitur ex scholio propos.4.lib.2.recta DE,dupla erit ipsius FE.Quocirca DE,bifariam secatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam,& latus oppositum,ac insuper ad angulos rectos:Semidiameter quoque vicissim bifariam,& ad angulos rectos secabitur à latere opposito.

IN circulo ABC,cuius centrum D,triangulum æquilaterum inscribatur ABC.Dico rectam AE, per centrum D, ductam,hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC, & latus BC, necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoq; DE.secari à latere BC,bifariam,& ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD,CD,BE;cum latera AB, AD, æqualia sint lateribus AC,AD,trianguli CAD;& bases BD,CD,æquales quoque:[d] *Erunt anguli BAD,CAD, æquales. Quod est primum.*



d 8. primi.

DEINDE,cum latera AB,AF, trianguli BAF,æqualia sint lateribus AC,AF,trianguli CAF,& anguli ipsis contenti æquales ostensi:[e] *Erunt & bases BF, CF, & angulo ad F, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.*

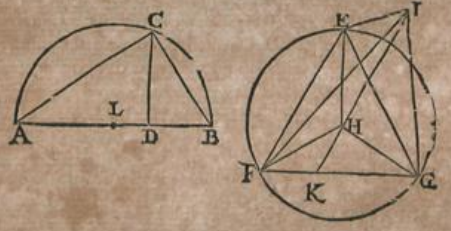
e 4.prim.

POSTREMO,cum anguli BAE,CAE,demonstrati sint esse æquales;[f] *erunt & arcus BE,CE, æquales. Quare cum BEC,* f 26. tertij.
arcus sit tertia pars circumferentiæ,erit BE.sexta pars eiusdem; Ac propterea recta BE,latus hexagoni,atque semidiametro proinde BD,æqualis,ex coroll.propos 15.lib.4.[g] *Igitur anguli BDE,BED,æquales erunt.Quoniam ergo anguli BDE, BFD, tri-* g 5. primi.
anguli DBF,æquales sunt angulis BEF,BFE,trianguli EBF,& latus BF, commune;[h] *Erunt & latera DF, EF, æqualia. Quod* h 26.prim.
est tertium.

PROBL. 1. PROPOS. 13. xiij.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti,& demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datæ sphæræ diameter AB, circa quam semicirculus describatur ABC; & ex AB,auferatur tertia pars BD, vt sit AD, ipsius DB, dupla; at vero AB, eiusdem DB, tripla; & ipsius AD,sesquialtera.Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB;connectantur rectæ AC,BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus EFG, cuius centrum H,in quo triangulum æquilaterum inscribatur EFG,adiunganturque rectæ HF, HG, quæ singulæ æquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi HE, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æquali ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico solidum contentum quatuor triangulis FEG, IEF,IFG,IEG,esse Pyramidē,siue Tetraedrū. Quoniam n. latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipsis contenti,recti,ex hypothesi,& 3.defin.lib. 11.[a] erit basis AC,basi IE,æqualis. Non aliter ostendemus eandē rectam AC, æqualē esse rectis IF,IG.Rursus quia tres lineæ AD,DC, DB, proportionales sunt ex coroll.prop. 8.li.6.erit ex coroll.propos.20.lib.6.vt AD.ad DB,ita quadratū rectæ AD,ad quadratum rectæ DC;& componendo,vt AB,ad DB,ita quadrata rectarum AD,DC,simul ad quadratum rectæ DC: [b] Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectæ AC. Igitur erit quoque vt AB, ad DB, ita quadratum rectæ AC, ad quadratum rectæ DC; Ac proinde cum AB,sit ipsius DB,tripla, erit quoque quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis sit ipsi DC:[c] Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit;& propterea recta AC, rectæ EF.Quare cum recta AC,ostensa quoque sit æqualis rectis IE,IF,IG;erunt quatuor triangula EFG,EFI,FGI, GEI.æquilatera & æqualia inter se.Constituta igitur iam est pyramis,seu Tetraedrum, cuius basis EFG, vertex vero I.Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data,cuius diameter AB;& diametrum sphæræ AB,potentia sesquialteram esse lateris EF,vel AC.

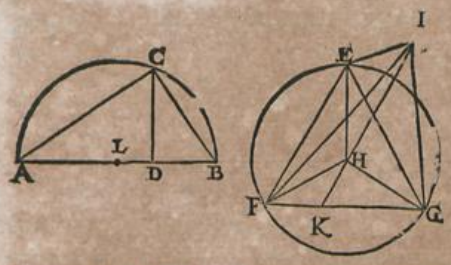


a 4.prim.

b 47.prim.

c 12. tertij. dec.

EXTENDATVR perpendicularis IH, vsq;ad K, vt sit HK,ipsi DB,& tota IK,toti AB,æqualis.Quia ergo tres rectæ AD,DC, DB, proportionales sunt,quibus æquales existunt tres IH, HE, HK; erunt quoq; IH, HE, HK,proportionales.Quare cum HE, sit ad IK,perpendicularis,& media proportionalis inter IH, HK, semicirculus circa IK,descriptus in plano rectarum IK,HE,transibit per E,vt mox ostendetur;Eodemque argumento tam semicirculus circa eandem rectam IK,descriptus in plano rectarum IK,HF,transibit per F, quam semicirculus circa eandem IK, descriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum semicirculorum



circumductus, manente fixa diametro, sphæram describet, quæ constitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc sphæra descripta æqualis sit sphæræ datæ, quod diameter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum sphæra data.

QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem recta AB, sesquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. est AB, talium 2. sit AD. Igitur & quadratum rectæ AB, sesquialterum erit quadrati rectæ AC; Ac propterea cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia sesquialteram esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem ergo constituimus, & data sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

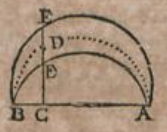
LEMMA.

QVOD autem semicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, descriptus, transeat per E, facile demonstrabitur hoc proposito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico semicirculum circa AB, descriptum transire per D. Nam si transeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propos. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, d æquale erit rectangulo sub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter se æqualia, & ipsæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicirculus per D.

d 17. sexti.

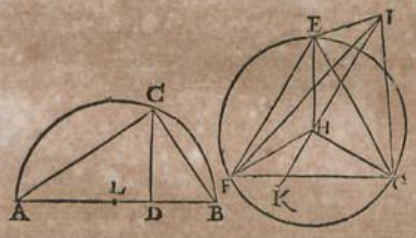


HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura descriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, transire per E, cum HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis descripti. Cum enim diameter sphæræ AB, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. est quadratum rectæ AB: At qualium partium 6. est quadratum rectæ EF, talium partium 2. est quadratum rectæ HE, e quod quadratum rectæ EF, triplum sit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. est quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter sphæræ AB, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE, cum proportio quadratorum sit, quæ 9. ad 2.

f 12. tertij. dec.



COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi ABC, eritque L, centrum quoque sphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro sphæræ ad basin EFG, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis sit ipsi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem est, quod centrum sphæræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem semidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla est ipsius DB; Qualium partium 4. est AD, talium 2. erit DB, ac proinde talium 6. tota AB, & semidiameter AL, talium 3. Quare si AD, est 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, sexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHO.

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturq;, vt hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundum totam soliditatem. Hanc vero praxim, & sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regularia in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.



PROBL. 2. PROPOS. 14. XIV.

OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

SIT sphæræ, quæ constituam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturq; rectæ AC, BC, [a] quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuo secantes in I: eruntq; rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, vt in 4. libr. demonstratum est. Deinde ex I, in vtramq; partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturq; IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex definit. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) [c] Erit & basis EK, basi EH, æqualis; Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphæra diamerri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ AB, potentia duplam esse lateris EF, vel AC.

[a] 4. primi.

[b] 8. primi.

[c] 4. primi.

QVONIAM enim IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defi. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quod tres rectæ KI, IE, IL, æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propos. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB; (Nam cum rectæ AC, EF, æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ FE, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent,) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

QVIA vero quadratum rectæ AB, [d] æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateribus octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

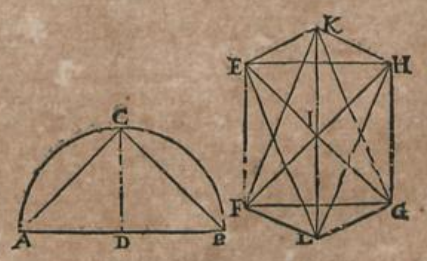
[d] 47. prim.

COROLLARIVM. I

EX dictis manifestum est, in octedrao tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atque proinde, cum K, I, recta sit ad lineas EG, HE: [e] recta quoq; erit ad planum EFGH, per ipsas ductum: [f] idcoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt: Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus,) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri Fk, kH. [g] Ita enim efficitur, vt angulus FkH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.

[e] 4. vnde.

[f] 8. vnde.



[g] 48. pri.

COROLLARIVM. II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero k, & L; altitudines denique ſemidiametri Ik, IL: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHk, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM. III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. [h] Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. [i] Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri ſphæræ. Igitur cum talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.

h 13. tertij dec.

i 14. terijd.

COROLLARIVM. IV.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ FG; & in quadrato ELGk, recta Ek, rectæ GL: [k] Erit planum EHk, per EH, Ek, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.

k 15. vnde.

SCHOLIVM.

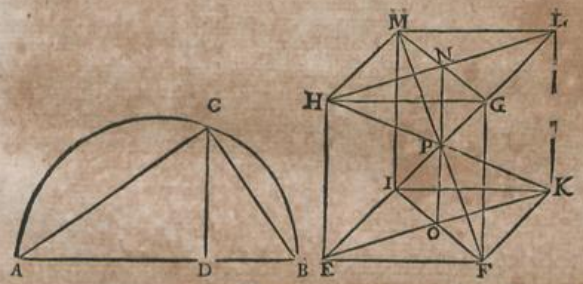


QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſeſe complicatis componetur octaedrum ſecundum totam ſoliditatem, vt ait Albertus Durerus.

xiiii.

PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM conſtituere: & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.



SIT ſphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectátur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſup quod erigantur perpendiculares EI, Fk, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extrema coniungantur rectis Ik, kL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, Fk, ad planum EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, Fk, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. [b] Igitur & EF, Ik, parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammum eſt EFkI; In quo, cum lineæ EI, Ik, kF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: [c] Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIk, FkI, æquales ſint oppoſitis angulis rectis kFE, IEF. Igitur EFkI, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt FkLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IkLM, quadratum erit, [d] cum ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quod eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFkI, GHML, diametri Ek, FI, GM, HL, per quas ducantur plana EkLH, FIMG, [f] Quia igitur tam planum EkLH, quam FIMG, cubum bifariam ſecat; vtrumq; per centrũ cubi tranſibit, ex ſcholio prop. 39. l. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdem propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EkLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cum enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, Ek; [g] perpendicularis quoque erit ad planum Ek, ideoque & ad rectam Ek, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt HEk. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EkLH, nec non & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EkLH, FIMG,) & æqualia, quod latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, Hk, FM, GI, æquales, vt

a 6. vnde.

b 33. prim.

c 34. prim.

d 24. vnde.

e 15. vnde.

f 28. vnde.

g 4. vnde.

les, vt constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphæram describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ diametri AB, ita demonstrabitur.

Cum quadratum rectæ EK, [h] æquale sit quadratis æqualibus rectarum EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL, [i] Est autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EkLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ kL, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius BD, sit tripla: erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphæræ æquales existunt.

h 47. prim.
i 47. prim.

Quia vero ostensum est quadratum diametri EL triplum esse quadrati lateris cubi kL, manifestum est, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

EX demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, sesque mutuo bifariam in centro sphęrę secare. Atque eadem ratione rectas, quę centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, Hk, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHMI, EFkI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales sunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (k Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, l quæ parallelę sunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum EFkI, GHML, m & angulus OPF, æqualis est oppositio ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cęteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

k 20. prim.
l 16. vnde.
m 15. prim.

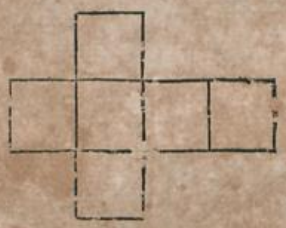
COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphęrę, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. [n] Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratū lateris tetraedri: [o] Qualium vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphærę descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi vero BC. [p] Perspicuum autem est, diametrum sphęrę AB; posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus.

n 13. tertij dec.
o 15. tertij dec.
p 47 prim.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia confi-ciantur sex quadrata inter se æqualia disponanturque, vt hæc figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida octo angulos solidos continens instar tessaræ cuiuspiam, vt constat.



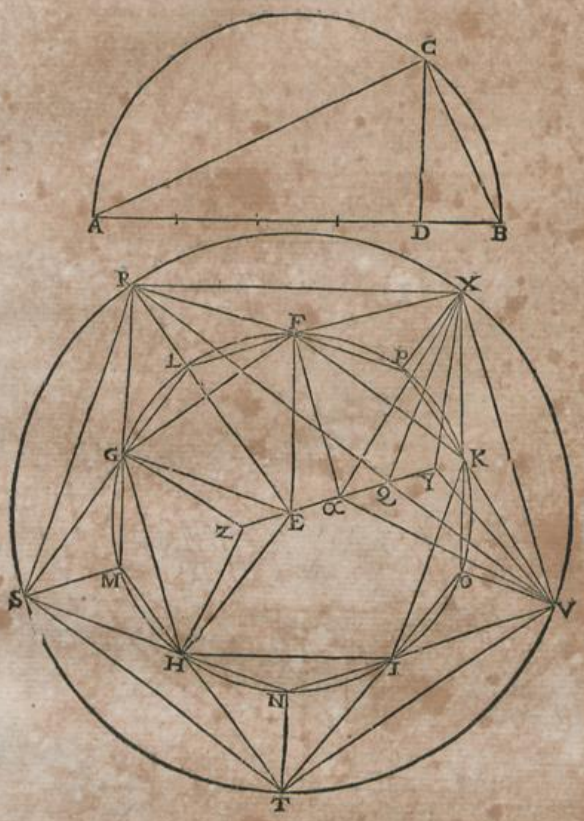
PROBL. 4. PROPOS. 16. xvi.

ICOSAEDRVM constituere: & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

SIT sphęrę, quę prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectę AC, BC. Ad interuallū rectę EF, quę ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIk. Post hęc diuisis arcubus FG, GH, HI, Ik, kF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectę FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIk, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quę æquales ponantur semidiametro EF, seu rectę BC. Eruntq; omnes inter se æquales; [b] sed & parallelę sunt. Igitur rectę, quę illas coniungunt, nempe EL, QR, EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus.) [c] binę inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoq; erūt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectę BC. [d] Quia vero planum per rectas QR, QS, ductū parallelū est plano FGHIk, per rectas EL, EM, ducto: eademq; ratione planū per rectas QS, QT, ductū parallelū est plano eidem FGHIk, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autē planū per rectas QR, QS, cum plano per

a 11. quar.
b 6. vnd.
c 33. prim.
d 15. vnde.

no per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vna planum per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planũ per QT, QV, cum hoc plano efficere vnũ planũ; necnon planũ per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æ-
c 6. vndec. qualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis AS, ST, TV, VX, XR. c Quia igitur LR, P-
f 33. prim. X, æquales sunt, & parallelæ; si concipiatur duci recta LP; f erunt quoq; LP, RX, æquales & parallelæ; g Ac
g 28. tertij dec., proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prosus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK. XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK, & est LF, latus de-
h 10. tertij dec. cagoni h erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: i Est autem
i 47. prim. eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. libr. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia; cum eorum omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramq; partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; k erit quadratum lateris
k 10. tertij dec. pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; l Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ X-
l 47. prim. Y, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non diximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.



DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ α F, α X, α V. Quoniam igitur latera α Q, QV, trianguli α QV, æqualia sunt lateribus α Q, QX, trianguli α QX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RST-
m 4. prim. VX: Sunt autem & anguli α QV, α QX, æquales, nempe recti, ex definit. 3. lib. 11. m Erunt & bases α V, α X, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ α R, α S α T, æquales & inter se, & ipsis α V, α X. Rursus quia latera α Q, QX, trianguli α QX, æqualia sunt lateribus α E, EF, trianguli α EF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuisa sit bifariã in α: Sunt autẽ & anguli α QX, α EF,

α EF æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. n Erunt quoque baſes α X, α F, æquales: eodemque modo ſi ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, oſtendentur α G, α H, α I, α K, æquales ipſi α X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiuſdem circuli; o erit QZ. diuiſa in E, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens E α, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta α Z, p quintuplum poteſt eius, quod ex E α, deſcribitur, quadrati: Poteſt autẽ & recta α F, quintuplum ciuſdem quadrati rectæ E α. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum ſit quadrati rectæ α E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius E α; erunt quadrata rectarum EF, E α, ſimul quintupla quadrati rectæ E α. q Cum ergo quadratis rectarum EF, E α, æquale ſit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ α F, quintuplum quadrati rectæ E α.) Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum, α Z, α F, ac proinde rectæ ipſæ α Z, α F, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam ſecetur in α, (propterea quod ſi æqualibus α E, α Q, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Z α, Y α, æquales fiunt.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icoſaedri æquales. Quocirca ſphæra deſcripta circa diametrum ZY, ex centro α per omnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſphæræ diametri AB.

n 4. primi.

o 9. tertij.

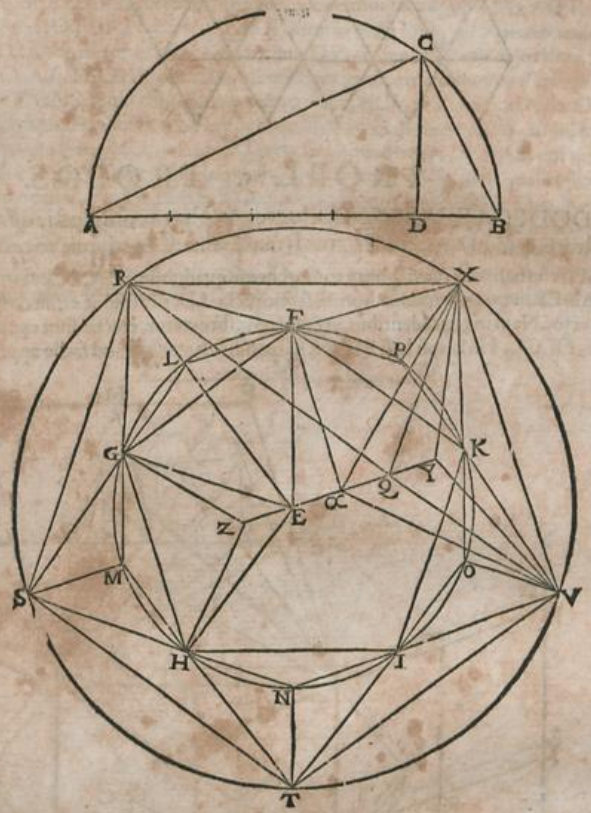
p 3. tertij. dec.

q 47. prim.

r 15. quint.

r CVM enim ſit vt α Z, ad α E, ita YZ, dupla ipſius α Z, QE, duplam ipſius α E; s Ac propterea vt quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; ſit autem quadratum rectæ α Z, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ α E: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc eſt, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis ſit poſita ſemidiametro EF, hoc eſt, rectæ BC: Eſt autem & ciuſdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6 ſit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Ac proinde exiſtente AB, quintupla ipſius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia ſunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & ſphæræ circa ipſas æquales erunt.

s 22. ſexti.



QVONIAM denique diameter ſphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendẽdum eſt latus Icoſaedri eſſe lineam Irrationalem, quæ minor vocatur.) poteſtque quintuplum quadrati rectæ BC, hoc eſt, rectæ illi æqualis EF; erit quoq; ſemidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. t erunt commenſurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, u Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur conſtituimus, & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor, quod erat faciendum.

t 6. dec.

u 11. tertiæ dec.

COROLLARIVM. I.

EX dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potentia quintuplam ſemidiametri circuli quinq; latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutum eſt, & qui per quinq; Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum enim eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati rectæ BC, hoc eſt, ſemidiametri EF.

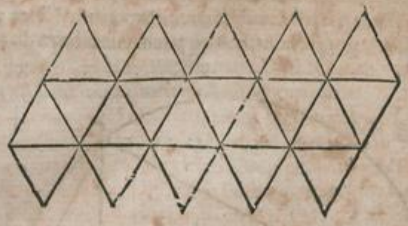
COROL-

COROLLARIVM. II.

ITEM manifestum est, sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ, diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM. III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus HL, IP: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.



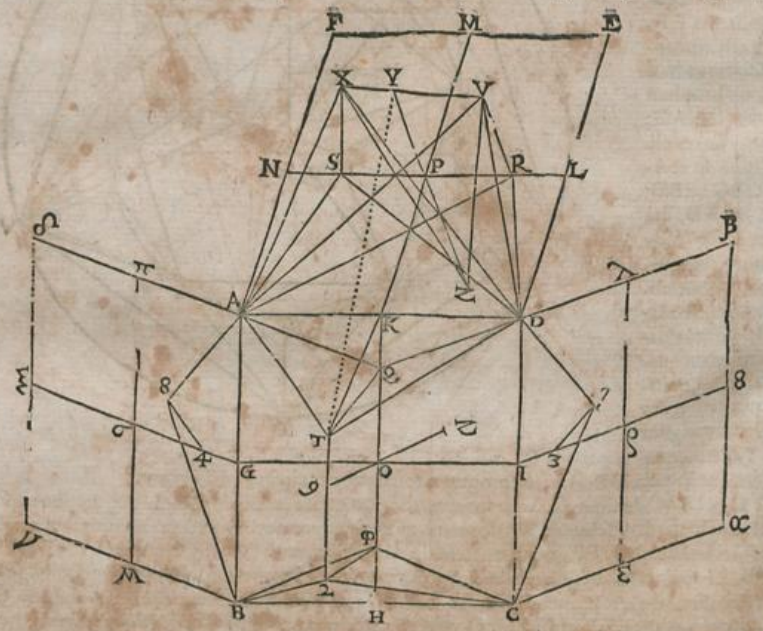
SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

xvii. PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit communis horum sectio recta AD, (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipsi basi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositio-



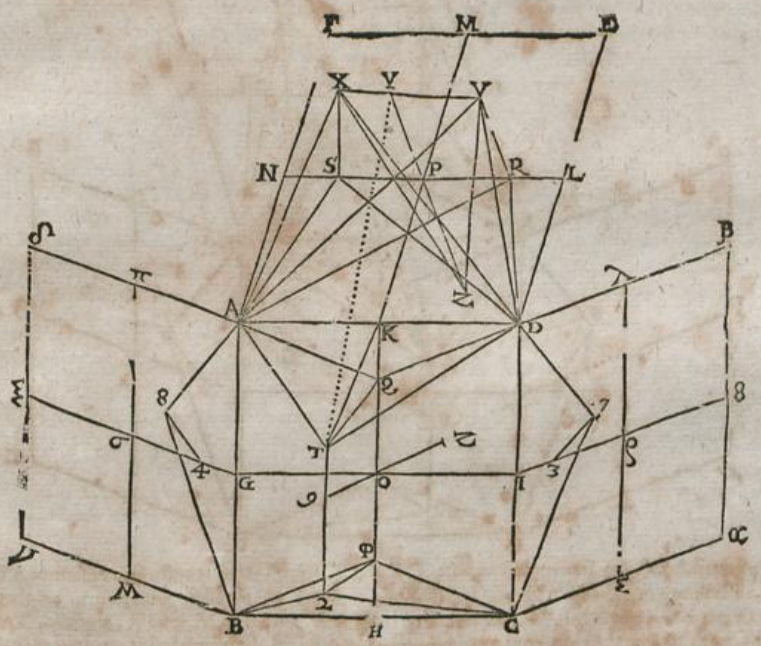
a 18. vnde. nis 15. huius lib. [a] Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin EFGH.) Diuisis itaq; cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui problematis lib. 4. Secentur Ok, PL, PN, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico AT DVX, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentab 6. vnde. gonum ATDVX, sit in vno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX, sint ad quadratum ADEF, rectæ, [b] ipsæ erunt parallelæ; Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS, quibus æquales sunt positæ, æquac 33. prim. lia sunt, cum & lineæ sectæ PL, PN, æquales sint.) [c] erunt quoque contingentes rectæ RS, VX, æquales & pad 33. primi. rallelæ: [d] Est autem & AD, eidem RS, siue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelæ sunt & æquales. [e] Igitur e 9. vnde. & AD, VX, parallelæ sunt; [f] Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipsis erunt plano; idf 7. vnde. eoque

decoque trapezium AD, VX, in vno existet plano: Est autem & triangulum ATD, in vno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio ADVX. Ex P, namque ducatur PY, parallela ipsi RV, [a] quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta sit RV: Et connectantur rectæ KT, KY. Quoniam igitur est vt OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob sectionē rectæ OK: Est autē KP, ipsi OK, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & PY, ipsi OQ, (cum æqualis sit ipsi RV, quæ posita fuit æqualis ipsi OQ, maiori segmento;) erit quoque vt KP, ad PY, ita OQ, hoc est, QT, illis æqualis, ad QK. Quare cum triangula PKY, QTK, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, composita, [b] ita vt homologa latera sint parallela, nempe PK, & QT, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum ABCD; & PY, QK, inter se, quod vtrumq; rectum sit ad quadratum ADEF: [c] Erunt reliqua latera KY, KT, in rectam lineam collocata; [d] Ac propterea recta TY, in vno erit plano, ideoq; planum ATD, & planum ADVX, vnum planum constituent, perrectas TY, AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in vno existit plano.

a 8. vnd.
b 6. vnde.
c 32. sexti.
d 1. vnde.

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia sint lateribus AK, KQ, trianguli AKQ: (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, segmenta minora rectarū æqualium sectarum,) & anguli ANS, AKQ, recti, si ducatur recta AQ, [e] erunt bases AS, AQ, æquales. Rursus cum latera AS, SX, trianguli ASX, sint æqualia lateribus AQ, QT, trianguli AQT: (Nam rectæ AS, AQ, ostensæ sunt æquales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex de-fi. 3. lib. 11. [f] Erunt quoque bases AX, AT, æquales. Quod si ducatur recta DQ, ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT, si vero ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV; æqualia: quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. [g] Quadrata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ, PS, hoc est, quadrati rectæ SX: Est autem quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ SX. [h] Cum ergo quadratis rectarum AN, NS, æquale sit quadratum rectæ AS; erit quoq; quadratum rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul quadrupla eiusdem quadrati rectæ SX. [i] Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplum quoque erit quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ XY; [k] Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cum igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ XY, ex scholio propos. 4. libr. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsi æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

e 4. primi.
f 4. prim.
g 4. tertijd.
h 47 primi.
i 47. prim.
k 34. prim.



QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eiq; addita PR, æqualis maiori segmento PS; [l] erit quoq; NR, secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit NP. [m] Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati rectæ NP, hoc est, quadrati rectæ AN: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectæ AN. [n] Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla sunt quadrati rectæ AN. [o] Cum ergo quadratis rectarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius AN. Æqualia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, AX,

l 3. tertijd.
m 4. tertijdecim.
n 47. prim.
o 47. pri.

AV,DX,inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA,TD, trianguli TAD,æqualia sunt lateribus DV,VX,
a 8.primi. trianguli DXV; & bases AD,DX,æquales quoque: [a] Erunt & anguli ATD,DVX,æquales. Non secus ostendetur angulus DVX,æqualis angulo AXV. Ac proinde,cum in pentagono æquilatero ATDVX,tres habeantur
b 7.tertijd. anguli æquales ATD,DVX,AXV, [b] ipsum erit æquiangulum.

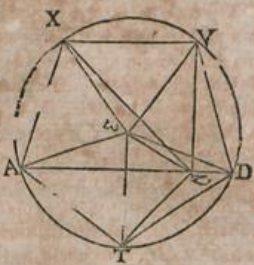
QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata Cαβ D, Bγδ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD,AB,quorum singula latera bifariam secentur in ε θ, λ,I, μ, ξ, π,G,punctis,quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ,σ. Secentur deinde OH,OK, ϱ l. σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q 3,4,ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores,perpendiculares φ2, QT, 37,48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3ϱ, 46, coniunganturque rectæ T2,2C,C7,7D, DT,TA,A8,8B,B2, demonstrabimus eadem ratione,pentagona T2, C7 D, T2, B8, A, æquilatera esse & æquiangula,& æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cohærentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphęra comprehendi,qua & cubus,& præcedentes figurę comprehenduntur,hac arte demonstrabimus.

INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur,nempe planum ADEF,& eius oppositum,planis ductis per rectas KM,LN. Item planum ABCD, & eius oppositum,planis per rectas GI,HK,ductis,&c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana
e 19.vnde. cubi quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD; [c] Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum YP, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM,LN,ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9 OZ; erit ipsa communis sectio planorum, quæ per rectas GI,HK,ducuntur. [d] Quia vero
d 19.vnde. dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis,ex coroll.1.prop.15.huius l. Punctum igitur Z, centrum erit sphęrę circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Do-
e 6. vnde. decaedri ductas, sic fiet perspicuum,ducta recta ZX. [e] Quoniam parallelæ sunt KP. OZ, quod vtraq; re-

cta sit ad planum ABCD; Item parallelæ sunt OK, ZP, quod vtraque recta sit ad planum ADEF; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PZ, ipsi PR, æqualis. Tota ergo Z-
f 4. tertijdeo Y,toti NR,æqualis erit. [f] Quare cum quadrata rectarum NR. PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod
g 47.prim. NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoq; quadrata rectarū ZY,PY,hoc est, quadrata rectarum ZY,YX,simul tripla quadrati rectæ PZ: (Est.n. XY,æqualis ipsi PS,hoc est,ipsi PY:) [g] Estaūt quadratis rectarū ZY,YX,æquale quadratū rectæ ZX. Igitur & quadratū rectæ ZX,triplū erit quadrati rectæ ZP,hoc est, quadrati dimidii lateris cubi. At quia eiusdē quadrati dimidii lateris cubi triplū est quoq; quadratū semidiametri sphæræ
h 15.quint. cubū comprehendentis: (h Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidiū lateris; [i] Ac proinde
i 22.sexti. vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratū dimidii lateris. [k] Cum
k 15.tertijd. ergo quadratū diametri triplū sit quadrati lateris; erit quoq; quadratum semidiametri triplum quadrati dimidii lateris.) Æquale igitur est quadratum rectæ ZX, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi; Ac propterea ZX, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera ZY,YX, trianguli ZYX,æqualia sint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim P-
l 4.primi. Y, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelam VX, perpendicularis.) [l] Erunt bases

ZX, ZV,

ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpendicularis demittatur Zω, connectanturque rectæ ωA, ωT, ωD, ωV, ωX. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ ZA, æquale est quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectæ ZA, ZX, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Zω, ωA, quadratis rectarū Zω, ωX, æqualia; Ac proinde dempto cummuni quadrato rectæ Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarū ωA, ωX, ideoq; rectæ ipsæ ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ωV, ωD, & inter se, & ipsis ωA, ωX, æquales, quod & rectæ ZV, ZD, æquales sint ostensæ rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ, [b] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ωT, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarum Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT. [c] Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ ZA; his vero quadratum rectæ ZT; Erunt æqualia quadrata rectarum ZA, ZT; propterea que & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX: Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



a 47. primi.

b 9. tertij.

c 47. primi.

POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: [d] erit quoq; vt NL, dupla ipsius NP, ad RS, duplam ipsius PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR; Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadratro diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) [e] Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

d 15. quint.

e 6. tertijd.

COROLLARIVM. I.

CVM ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis AV, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

Quoniam vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, [f] facit maius segmentum latus pentagoni: [g] ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

f 8. tertijd.

g 5. tertijd.

COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoq;, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, T2, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB: aliaq; quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallelæ sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, à lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ, vt demonstratum est, se mutuo interfecant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; & YP, 9O, æquales maioribus segmentis æqualibus PS, OQ; Erunt totæ YZ, 9Z, æquales: Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seque bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo kOZP, angulus OZP, rectus est, cum opponatur recto OKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM. IV.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictū est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi: Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ: erit ZY secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY: [h] ideoque vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.

h 15. quint.

SCHOLI M.

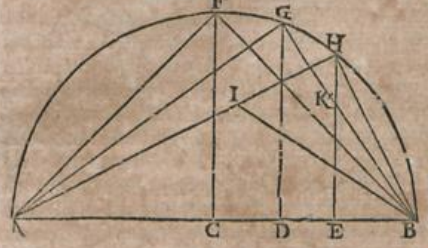


QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturq;, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter se complectentur.

xviii. PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH, Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH, connectaturque recta BI. Postremo BG, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarũ, dico AG, esse latus pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, deniq; latus dodecaedri. Quoniam enim AG, media proportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex cor. prop. 20 eiusdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera: cum talium partium 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG; [a] Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri.

a 13. tertij decim.

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propos. 8. lib. 6 Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. prop 20. l. 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ BA, duplum quadrati rectæ AF. [b] Quarecum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

b 14. tertij decim.

DEINDE cum BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus coroll. l. 6. Sit autem AB ipsius BD, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. [c] Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

c 15. tertij d.

PRÆTEREA quia, ex eisdem corollariis, BH, est media proportionalis inter AB, BE, atq; idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Est autem, ex constructione AB, ipsius BE, quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinq; latera Icosaedri ambientis ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Erit BH, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli; Est autem HI, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. [d] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde [e] cum quadratum rectæ BI, æquale sit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem. [f] Quam ob rem BI, latus est Icosaedri.

d 10. tertij decim.
e 47. pri.
f 16. tert. d.

DENIQVE cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius segmentum lati Dodecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. prop. 17. huius lib. Expositæ ergo sunt latera quinq; figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

Quod vero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit diametrũ sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perspicuum est, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratum lateris Tetraedri; talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & deniq; quadratũ lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi; nec non ex sphæræ diametro descripta proportionẽ inter se habent, quam numerus ad numerũ, [g] Ac propterea diameter sphęræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphęrę ponatur esse Rationalis, erunt quoq; prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt constat ex cor. propos. 24. lib. 8. [h] Erunt huiusmodi lineæ, nimirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus octaedri, & latus cubi longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

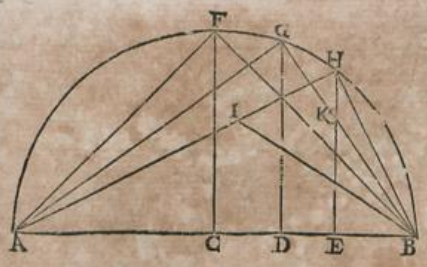
Diamet. 6. *Tetraed.* 4. *Octaed.* 3. *Cub.* 2.

g 6. dec.

h 9. dec.

At vero latera Icosaedri, & dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorũ, cum latera priorum sint diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorũ eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoq; ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum. ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

SED



SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namq; credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, [i] erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, [k] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorē, ex eo. [l] quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sint lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

i 104. dec.

k 106. dec.

l 16. tertiæd.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphæræ, ideoq; Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia, & inter se, & diametro, reliquisq; lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD; [m] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ AB, talium 3. est quadratum rectæ BG; [n] quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoq; 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia sint quadrato rectæ BG. Igitur si auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum est quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [o] erit numerus, ad quē 9. habent proportionem quintuplā, minor quā 2. Quare quadratū rectæ GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoque recta GD, maior quā recta BH. Rursus quia diameter sphæræ AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, maius esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atq; adeo cum quadratū rectæ AB, noncuplū sit ostensum quadrati rectæ BD, erit idem quadratū rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdū. quintuplū enim est demonstratū. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB: Sed neq; maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectę AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quam duæ tertiæ, hoc est, quā AD, erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neq; æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam BD. Itaque cum rectæ GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [p] Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis rectarum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoq; erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.

m 20. sext.

n 15. tertiæ dec.

o 10. quin.

p 47. prim.

MAIVS deniq; esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK. hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, maius rectangulo sub BG, GK, atq; adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK: [q] Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK, (Nam cū sit vt BG, ad BK, ita Bk, ad GK; [r] erit quadratū rectæ BK, æquale rectangulo sub BG, GK, ideoq; duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atq; idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH, (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoq, tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnum quadratum rectæ BH, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectę BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. Quod est absurdum, cum illa quinq; his sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quam recta Bk; Ac propterea cum BI, maior sit quam BH, multo maior erit BI. latus videlicet Icosaedri, quam Bk, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendū.

q 2. sec.

r 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter se æqualibus, hac fere ratione.

Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris constat pyramidis angulus.

Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque, angulus Icosaedri;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. prop. 32. l. 1. Erũt eiusmodi anguli sex, duodecim tertias
12. vnde. *partes vnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. Nam solidus omnis angulus minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.*

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autẽ quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus. n. recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex plurib. quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus deniq; pentagonis æquilateris & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum. n. quinq; anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad prop. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoq; ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis nullus solidus angulus confici potest. Cum. n. vnus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod continet vnum rectum, & insuper recti quintam partem; erũt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac, ppterea multo minus ex pluribus, q̃ quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex aliis figuris æquilateris & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad prop. 32. lib. 1. est demonstratum; ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; at q; idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam trib. angulus solidus cõficietur, neq; propterea ex aliis polygonis. Quilibet. n. tres maiores sunt quatuor rectis. Quamobrem perspicuum est, præter d. quinq; figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

NAM si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI vero quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinq; talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti eiusmodi triangulis contentum.

QVOD si tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex eiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona æquilatera & æquiangula, inter se æqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ sunt omnes baseis in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionẽ vnius lateris Regularis solidi, sumendũ est dimidiũ omniũ laterum, vt numerus laterũ Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20 triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ sunt omnes baseis in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, dividendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6 quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoq; octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si deniq; 12 pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & Octaedrum reciproca esse, quod ad baseis attinet, & ad angulos solidos. Nam quot baseis in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet sex baseis, & octo angulos solidos: octaedrum vero octo continet baseis, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti baseis, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baseis possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor baseis, totidemq; solidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTII DECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM DECIMVM,

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij vero, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique nostro ob disciplinæ societatem commendatus longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumque dissererent aliquando descripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscriptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea non rectè tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accuratè complectebatur de re proposita, ex eiusque problematis indagatione magnam equidem cæpi voluptatem. Illud certe ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum vel maximè in Geometria versatus, scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris benevolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, vt proœmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi asscribuntur: Duo vero subsequentes à plerisque Hypsicli Alexandrino & rectè, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quam soliditate: In posteriori vero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorū Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinq; corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones vnius in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuersum disserere, proponendo varia theoremata, atq; problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quam pluribus theorematibus, problematibusque locupletauit; verumetiam integrum librum, qui ordine decimus sextus est, adiunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutuæ Icosaedri & Dodecaedri facile intelligi potest ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

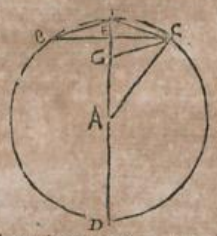
QVONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem

ordine, & inter se, & à Francisco Flussate, ideoq; & à nobis discrepant; annotauimus in margine ordinem vtriusq; duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemq; in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

1. ## THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusq; lineæ simul; & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineæ compositæ ex latere hexagoni & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in vtramq; partem, vt perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi EF; connectantur rectæ AC, CG, CF, BF.[a] Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti;[b] erunt bases CF, BF, æquales;[c] ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntque anguli contenti recti;[d] erunt & bases CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars est semicircumferentiæ DCF, cum sit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partiũ 1. arcus CF, qualium 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CF.[e] Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF:[f] Est autem angulus CFD, dimidiũ anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF:[g] Atqui angulus CGF, externus, æqualis est internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli CGF, vt ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA;[h] ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Est autem CG, recta ostensa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duæ simul AF, FC, duplæ erunt ipsius AE, atque ideireo è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.



a 3. tertij. b 4. primi. c 28. tertij. d 4. primi. e 33. sext. f 20. tertij. g 32. prim. h 5. primi.

COROLLARIVM I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta hæc linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quæ ex centro perpendicularis est ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

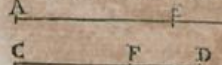
COROLLARIVM II.

HINC quoq; fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem esse vtriq; lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim vt in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis est dimidio lateris hexagoni & dimidio lateris decagoni simul: Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

iv. ij. ## THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

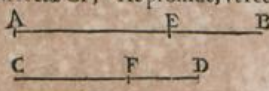
SECENTVR binæ rectæ AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim sit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB; & vt CD, ad CF, ita CF, ad FD;[a] erit rectangulum sub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE, & rectangulum sub CD, FD, æquale quadrato rectæ CF. Quam ob rem erit vt rectãgulum sub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita rectangulum sub CD, FD, ad quadratum rectæ CF, (est enim vtrobiq; æqualitatis proportio.) Ac propterea, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub AB EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, ad quadratum rectæ CF: & componendo, vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, & quadratum rectæ AE, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, & quadratum rectæ CF, ad quadratum



a 17. sexti.

dratum rectæ CF:[b] Sed quod quater continetur sub AB, EB, vna cum quadrato rectæ AE, æquale est quadrato lineæ compositæ ex AB, EB; Et quod quater continetur sub CD, FD, vna cum quadrato rectæ CF, æquale est quadrato lineæ compositæ ex CD, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineæ compositæ ex AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositæ ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF, [c] Ac proinde, vt recta composita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD, ad rectam CF. Et componendo vt composita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc est dupla ipsius AB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD, & recta CF, id est, dupla ipsius CD, ad rectam CF, Et permutando, vt dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita AE, ad CF; [d] Vt autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita est AB, ad CD. Erit ergo vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; Ac propterea, cum sit vt tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; [e] erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, vt tota ad totam. Quare vt AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum vtraque proportio eadem sit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit vt AE, ad EB, sic CF, ad FD, & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

b 8. secun.



c 2. secund.

d 15. quint.

e 19. quint.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

QVONIAM enim [f] latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; [g] & recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni. [h] sit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad maius, quæ maioris segmenti rectæ angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. Quod est propositum.

f 9. tertijd.

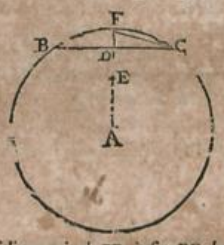
g 8. tertijd.

h 2. quartidecim.

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ductæ; minus vero segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F. [i] Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF, latus hexagoni, minus vero segmentum FC, latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisam, ita AE, maius segmentum ad AF, maius segmentum; & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum: [k] Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AE, semidiametri, & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum AE, æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.



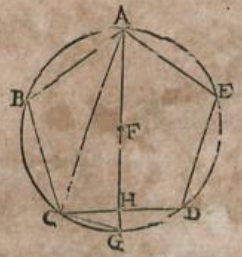
i 9. tertijdec.

k 1. quartidec.

PROBL. 3. PROPOS. 3. ij. iv.

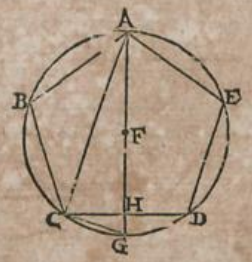
SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoque recta subtensa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla est rectæ FG; erit ex scholio prop. 4. lib. 2. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: [a] Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla sunt quadrati re-



a 47. prim.

ctæ FG;



b 10. tertij decim.

ctæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiusdem rectæ FG:[b] Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoq; quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur, quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti: eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti.[c] Perspicuum est autem quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri FG, &c.

c 3. quartidecim.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

o. iij.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione: maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi AB;[a] eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum BA. Ponitur autem & AB, secta in C, similiter. [b] Igitur erit vt BD, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, tota ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt BD, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, maius segmentum ad AD, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est AB, erit & AC, eiusdem circuli latus decagoni.

a 9. tertij.



b 2. quarti decim.

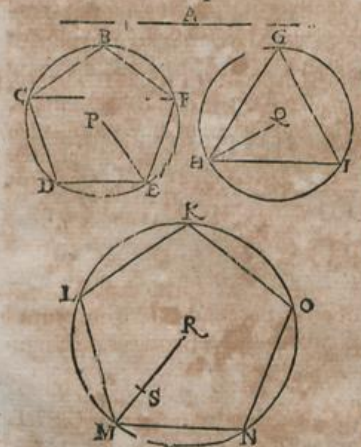
ALITER. Adiungatur ipsi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori segmento AC;[c] eritque tota recta BD, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipsi AD, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

c 5. tertij.

ij. v.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.



a 13. tertij decim.

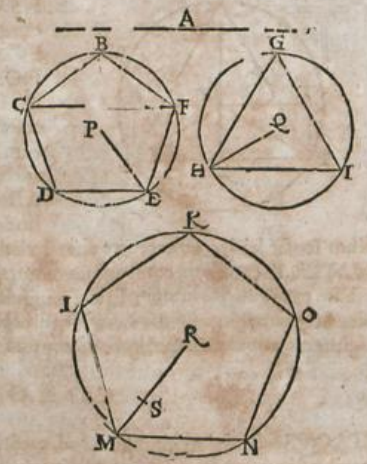
b 4. quartidecim.

c 2. quartidecim.

IN sphæra, cuius diameter A. intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO,[a] ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoque quodlibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secenturq; RM, extrema ac media ratione in S;[b] eritque maius segmentum RS, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. BF, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi CF, secti extrema ac media ratione;[c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum; Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo, per ea, quæ demonstrata sunt in scholio propos. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati

rectæ

rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [c] Quia vero quadratũ rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoq; quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc ostensa sint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, ([f] cũ quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; [g] sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinq; quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH,) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; Ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandum.



e 10. tertij decim.

f 3. quæ decim.

g 12 tertij d.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

iij. vi.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cum bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. [a] Quoniam vero & rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoq; erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



a 42. primi.

ALITER. Facta eadem figuræ constructione, [b] cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigesies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcirco triangulum FCD, sumptum sexagies æquale erit superficiei Dodecaedri.

b 41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

iij. vij.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

EX centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorũ æqualia, & basis vnius basibus aliorũ æqualis.

Duca-



Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. [a] Quoniam vero rectangulum BG, duplum est trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula æqualia sint vni triangulo Icosaedri; Atq; adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

a 41. prim.

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, [b] cum rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eo quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

b 41. prim.

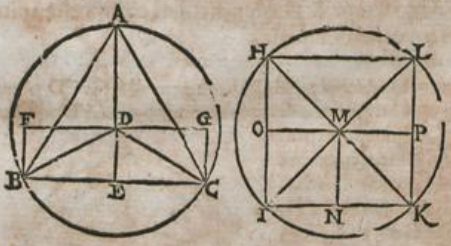
COROLLARIVM.

ITAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. [c] Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; [d] Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoq; sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. [e] Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

c 6. quartidec.
d 7. quartidecim.
e 15. quint.

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, Octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, vel quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectan-



f 41. primi.

gulum BG, sexies sumptum, æquale esse superficiei, Tetraedri. [f] *Quoniam enim rectangulum BG, duplum est trianguli DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cũ igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.*

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies sumptum, æquale esse superficiei Octaedri. [g] *Cum enim rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum æquale viginti quatuor huiusmodi triangulis: Sed viginti quatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies sumptum æquale est superficiei Octaedri.*

g 41. prim.

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipsi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum sub OI, hoc est, sub MN, & IK, sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi. [h] *Quoniam enim rectangulum IP, duplum est trianguli MIK, hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale viginti quatuor eiusmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.*

h 41. prim.

ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (sunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, sit dimidium lateris HI, nempe æqualis ipsi MN,) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

iv.
viij.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti, æquale est dicto pentagono.

IN

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterũ ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint AH: Angulum vero A, subtendens recta BE, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI, & vna IE, ita vt BI, sint quintupla ipsius IE. Dico rectangulum comprehensum sub AH, BI, æquale esse pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, continet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum sit semidiameter; erit AH, ipsius AF, sesquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam KB, quam KE, tres sextas rectæ BE; atque adeo cum BI, contineat quinque, continebit KI, duas: Ac proinde & KB, ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; [a] atq; idcirco rectangulum sub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo sub medijs AF, KB. [b] Est autem rectangulum sub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eangem habeant basin AF, & eandem altitudinem BK, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta. Igitur & rectangulum sub AH, KI, duplum erit eiusdem trianguli ABF: [c] Est autem & rectangulum sub AH, KI, duplum rectanguli sub AH, IE; propterea quod & basis KI, dupla est basis IE, (continet enim KI, duas sextas partes ipsius BE, & IE, vnam.) eademque semper altitudo AH. Igitur æqualia sunt triangulum ABF, & rectangulum sub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum est trianguli ABF, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum vero sub AH, BI, quintuplum est rectanguli sub AH, IE; quod & basis BI, quintupla sit basis IE, eademque semper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH, BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus; &c Quod erat demonstrandum.



a 16. sex.
b 41 pri.
c 1. sex.
d 1. sex.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, si pentagonum ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, ([e] comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum inscripti, nimirum sub BI, æquale est pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

e 5. quar. tidec.

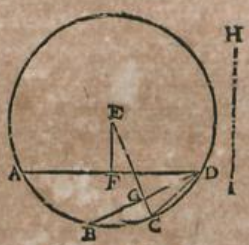
THEOR. 9. PROPOS. 9.

iv. viij.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, [a] circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulũ Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & trianguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD perpendiculares EF, EG; Sit denique H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione, maius segmentum est EF, ex scholio propos. 2. huius lib. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; [c] Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF; æquale erit rectangulo sub medijs BD, EG. [d] Quia vero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, latitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectangulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cum ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulum sub BD, EG, ad rectangulũ sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoq; vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaq; Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

a 5. quar. tidec.



b 2. quar. tidec.
c 16. sex.
d 1. sex.

ALITER. [e] Circumscribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icosaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. cuius quinque sextæ partes sint BK. Dico rursus esse, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim rectangulum sub AI, BK, æquale est pentagono ABCDE, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectangulum sub AI, IE, æquale est triangulo AFG, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum FG, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectanguli: erit vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI,

e 5. quar. tidec.



f 31. sex. IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG. f Est autem vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita BK, ad IF, cum bases sint BK, IF, & altitudo eadem semper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, æque multiplicentur per numerum 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, æque multiplicentur per numerum 20. g erit quoque vt pentagonum ABCDE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK, duodecies sumpta ad rectam IF, vigesies sumptam: Atqui recta BK, duodecies sumpta æquialet lateri cubi BE, decies sumpto; (Nam cum BK, contineat quinque sextas partes ipsius BE, continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta vero IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eo quod FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi



g schol. 22. quin.

h 15. quin. BE, decies sumptum ad latus Icosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, h cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

iv. ix.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam vero AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media ratione, a est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus est Hexagoni; b poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri, vt est BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. c Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum est quadrati semidiametri AB: d Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eo quod BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; e Erit vt tota AB, ad maius segmentum BF, f Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratũ rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoq; vt quadratũ rectæ BG, ad quadratũ rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratũ rectæ M: Et permutando, vt quadratũ rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratũ rectæ M; g Ac propterea erit vt recta BG, ad rectã BK, ita recta BF, potens totã AB, & maius segmentum AC, ad rectã M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. Cum igitur proposita latera D, E, cubi & Icosaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.



a 4. quartidec. b 10. tertijdec. c 11. tertijdec. d 4. tertijdec. e 2. quartidecim. f 22. sex. g 22. sex.

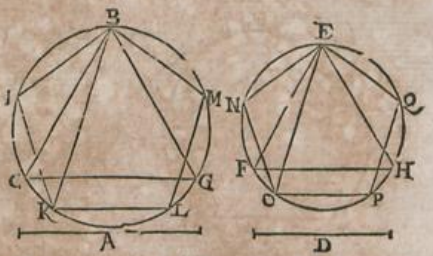
SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ, connectanturque rectæ BK, CK, EO,

CK, EO, FO. h *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem* h 5. quar. *dem sphæræ; & ponitur BCG triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. rectæ BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit rectæ EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circumferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmentorum similium, æquales inter se, quam anguli BKC, EOF, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulum.* i *Quare erit vt BK, hoc est, rectæ* i 4. sex. *A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est, rectæ D, illi æqualis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum.*



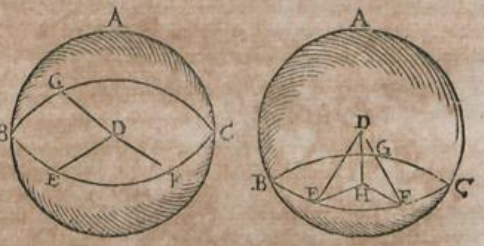
PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.



TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; k *erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam* k 47. pri. *quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit; eiusque centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.*

COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter à centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. præcedentis

lemmatis in ipſorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. 47. pri. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter diſtant à centro E.



SED iam æqualiter diſtent circuli AB, DC, à centro ſphæræ E. Dico ipſos eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius, oſtendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia eſſe quadratis rectarum EG, GC: Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur diſtare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit; atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, ſemidiametri ſcilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

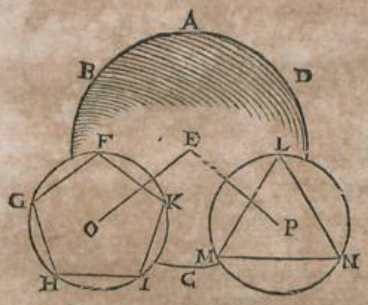
iv. x.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri; in vna eademque ſphæra.

IN ſphæra ABCD, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum FGHIK: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra ABCD, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangunt; ſi per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in ſphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN; Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro ſphæræ diſtabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales ſunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter oſtendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icoſaedri deductæ æquales. Quare ſi ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & baſes ipſarum æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemque modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. [b] Quoniam autem eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriuſque eadem ſit altitudo; Erunt quoque per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt, (ſicut modo diximus) vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: [c] Atque ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atque adeo ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum:

a 3. quartidec.



b 6. duodecimi.

c 9. quartidec.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, [d] ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra: [e] Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemque ſphærę, vt eſt linea potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: [f] Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra: Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri: & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. & lineæ potentis totā quamcunq; ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentū maius ad po-

d 9. quartidec.

e 10. quartidec.

f 11. quartidec.

ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius: & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, esse inter se æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

o. xj.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, sesquitertium esse quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales sunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia sunt; ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. [c] Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia sint quadrata rectarum AD, BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD; Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ AB, partium 4. sesquitertium est quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod ostendendum erat.



a 25. pri.
b 6. pri.
c 47. pri.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD, & CD, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli ACD: & basis BD, basi CD, æqualis: [d] Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id est, angulus BAC, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD.

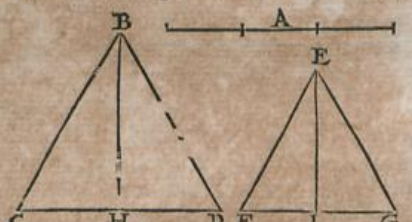
d 8. pri.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

o. xiij.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphæræ diameter Rationalis A. Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphæra, esse Mediam. Sit enim BCD, vnum triangulum Tetraedri, & EFG, octaedri illius sphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera opposita CD, FG, perpendiculares BH, EI. [a] Quoniam igitur quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri BC, [b] & duplum quadrati lateris Octaedri EF; habebunt quadrata rectarum, A-BC, EF, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. [c] ideoq; commensurabilia erunt. Quare lineæ ipsæ A, BC, EF, commensurabiles existent saltem potentia; Atq; adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.



a 13. tertijdec.
b 14. tertijdec.
c 6. dec.

RVRSVS, [d] quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, sesquitertium est; habebunt tam quadrata rectarum BC, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter se, quã numeri 4. 3. [e] ideoq; tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipsæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commensurabiles existent. Est autem & tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia videlicet toti, commensurabilis. [f] Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, ostensæ sint Rationales, erunt quoque BH, EI, Rationales. [g] Quoniam vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. [h] cum ostensum sit tallium partium 1. esse tam quadratum CH, quam quadratum FI, qualium 3. est tam quadratum BH, quam quadratum EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commensurabiles: [i] Ac proinde tam rectangulum sub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum CD, FG, duplæ sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo BCD, sit commensurabilis; (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars.) Item tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis; (Est enim triangulum EFG, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. Quod erat ostendendum.

d 12. quartidec.
e 6. dec.
f 12. dec.
g 9. dec.
h 12 quartidec.
i 22. dec.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Ra-

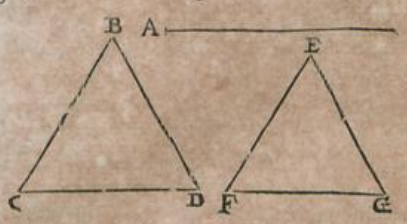
rit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus sit Rationale: perspicuum est, quod infertur.

o. xiv.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri vero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; At vero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficiei Tetraedri. [a] Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; [b] duplum vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD; & talium 3. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, sesquitertium est quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG. ([c] quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum BCD, sesquitertium est trianguli EFG.



a 13. tertijdec.

b 14. tertijdec.

c 20. & 19. sex.

RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum BCD, sesquitertiũ esse trianguli EFG; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulum EFG; Efficitur, vt triangulum EFG, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24. At triangulum BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphærę inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

o. xv.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadat in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphærę rectæ DEF, incidens in basim ABC, circulo inscriptam ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & DF, perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphærę ad eius superficiem æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. [a] Igitur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, [b] eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; [c] Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, si considerentur triangula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; [d] erit F, centrum basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.



a 8. pri.

b 13. pri.

c 4. pri.

d 9. ter.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit; efficitur vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. Quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

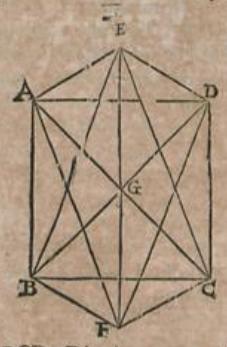
o. xvj.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentũ octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in sphæra descriptum, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphærę. Ductis enim ex G, centro sphærę ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quę æquales sunt,

les sunt, cum sint semidiametri sphærę, ductæ videlicet è centro ad superficiem sphærę: [a] quoniam quadratum diametri sphærę duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri AG, ex scholio propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphærę, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cum ergo quadratum rectæ AG, æquale sit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectę AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; [b] Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. [c] Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ; [d] atque adeo rectæ AC, BD, sese secantes in G, in vno existent plano; [e] Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis A B C D, vertices vero E, & F; quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia, & basi communi ABCD. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphærę. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB; æquale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis semidiametrorum A G, EG; [f] Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, [g] ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe ad basin pyramidum. Quare EG, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, sint semidiametri sphærę æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia AC, est diameter sphærę; [h] erit eius quadratum, duplũ quadrati lateris AD; Ac propterea æquale duobus quadratis laterum AD DC. [i] Quare angulus ADC, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere octaedri AB; [k] constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphærę. Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.



a 14. tertijdec.
b 48. pri.
c 14. pri.
d 2. undecimi.
e 7. undecimi.
f 48. pri.
g 4. undecimi.
h 14. tertijdec.
i 48. pri.
k 12. tertijdec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione octaedri. Verumtamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

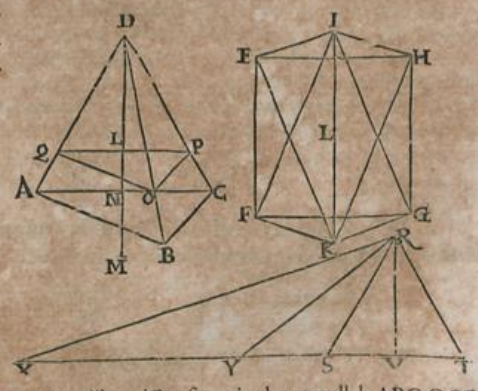
o. xvij.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente viginti septem sexagesimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphærę.

VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium latdris tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

SIT Tetraedrum sphærę ABCD, & octaedrum EFGHIK, in vna eademque sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphærę DM, incidens in basin ABC, ad punctum N. [a] Erit igitur N, centrum basis ABC, & DN, perpendicularis ad eandem basin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum sphærę & basin tetraedri, est sexta pars diametri & tertia semidiametri, per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit DL, semidiameter talium partium 3. qualium 1. est LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde, ex schol. propos. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum plano ABC; [b] Eruntq; rectę QO, OP, PQ, parallelę rectis AB, BC, CA; Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, [c] cũ anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulũ ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoq; simile ipsi ABC: Sunt autẽ & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. [d] Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3.



a 15. quartidec.
b 16. undecimi.
c 10. undecimi.
d 17. undecimi.

(cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, [c] cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex propos. 2. lib. 8. Rursus [f] quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.

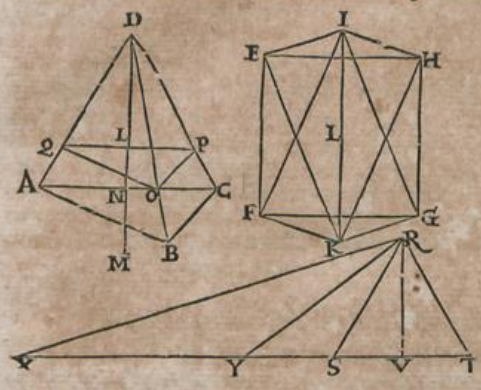
c 8. duodec. f 20. sex.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP; demittaturque ex R, ad ST, perpendicularis RV. [g] Eritque latus RT, hoc est DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

g 12. quartidec.

RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturque TX, bifariam in Y, vt sit TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia) ac propterea qualium TY, est 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum sub recta RV, (quæ potest viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris DC,) & sub recta TY, (quæ continet octo nonas partes eiusdem lateris) ad quadratum diametri sphæræ.

h 1. sex. i 41. pri. k 7. quin. l 1. sex.



CVM enim ductis rectis RX, RY, [h] triangulum RTX, duplum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis TY: [i] Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo sub RV, TY. [k] Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum sub RV, TY, ad idem triangulum RST: [l] Est autem triangulum RTX, ad triangulum RST, vt basis TX, ad basin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub RV, TY, ad triangulum RST, hoc est, ad triangulum DQP, siue QOP, sibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum sub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD: At vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri sphæræ DM, ita est pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nam cum DN, recta sit ad planum ABC, recta quoque erit ad planum QOP, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque sphæræ semidiameter DL, altitudo erit pyramidis seu tetraedri QOPD: [m] Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum basis communis quadratum EFGH, dimidium quadrati diametri sphæræ, & altitudines æquales semidiametri sphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines: Quare ex scholio propos. 5. lib. 12. erit vt basis QOP, ad basin EFGH, ita Pyramis QOPD, ad pyramidem EFGHI; Ac propterea per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt basis QOP, ad duplum basis EFGH, hoc est, ad quadratum diametri sphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc est, ad Octaedrum EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub RV, potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & sub TY, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri sphæræ DM, ita pyramis, seu tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

m 16. quartidec.

SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, seu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, [n] *cum recta RT, sit potentia sesquitertia rectæ RV; erit RV, potentia subsesquitertia ipsius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rursus quia TT, fuit talium partium 32. qualium 27. ST, seu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TT, superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare constat, esse quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum sub RV, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub TT, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

n 12. quartidec.

o. xvij.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa: tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.



SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamque bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scilicet perpendicularis est è centro ad basin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia sint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (è centro enim ducuntur) sit autem & basis AB, basi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem

dem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum est trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB, triangulo ABC; & rectangulum sub DE, EB, triangulo BDC, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum basis trianguli BDC, dupla sit basis BE, vtriusque rectanguli; Erit quoque rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: [a] Est autem vt rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdem altitudinis EB, ita basis AE, ad basin DE. Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sex.

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cum enim AE, tripla sit ipsius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

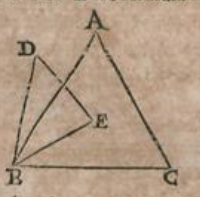
EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

o. xvij.

SI octaedrum sphæræ inscribatur: erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphæra, cuius centrũ D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ DB. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum ABC, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; [a] quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. [b] Quia vero quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare [c] cum quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 14. tertijdec.

b 12. tertijdec.

c 47. pri.

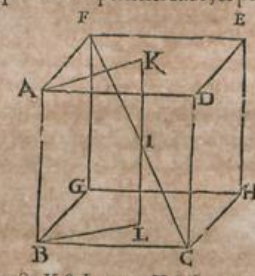
THEOR. 20. PROPOS. 20.

o. xviij.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: Perpendicularis autem a centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo IK perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. [a] Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi. Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.

PRODVCTA autem KI, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, [b] quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam vero perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K. & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cum KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.



a 15. tertijdec.

b 6. vndecimi.

c 16 vndecimi.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, solidũ, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. [d] Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: [e] Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

d 15 tertijdec.

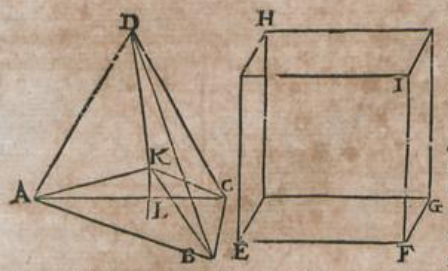
e 31. vndecimi.

ALITER

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphęræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphærę: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, *contentum planis* ABC, ABD, ACD, BCD, *solidum autem* EFGH, *contentum sub* EI, *tertia parte superficiei corporis* ABCD, *& sub altitudine* FG, *quæ æqualis sit perpendiculari* KL, *ductæ ex centro* K, *ad basin* ABC. *Dico solidum* EFGH, *æquale esse dato corpori regulari* ABCD. *Nam ductis ex centro* K, *rectis* KA, KB, KC, KD, *ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint, ipsi æqualiter à centro distabunt, per lemma 2. propos. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex* K, *centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero prisma contentum sub basi* ABC, *& altitudine* KL, *triplum est pyramidis* ABCK, *per coroll. 1. propos. 6. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine* KL, *tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine* KL, *(nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis* ABCD. *Quamobrem cum idem prisma triplum sit prismatis* EFGH, *quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida* EFGH, ABCD, *æqualia. Quod est propositum.*



THEOR. 21. PROPOS. 21.

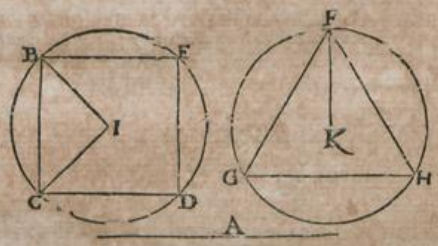
IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrū, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc est, circulos BCDE, FGH, ipsa circumscribentes, esse æquales. Sint enim rectæ ex centris IB, KF. [a] Quia igitur quadratum diametri A, triplū est quadrati lateris cubi BC, & quadratū lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nā ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadratum; [b] Ac proinde quadratū rectæ BC, æquale erit quadratis rectarū BI, IC. Quare cū rectarum quadrantē æqualiū BI, IC, æqualia sint quadrata: duplū erit quadratū rectæ BC, quadrati rectæ BI.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus [c] quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris Octaedri FG, & quadrati lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

a 15. tertij dec.

b 47. pri.

c 14. tertij dec. d 12. tertij dec.



COROLLARIVM.

HINC fit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. [e] qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphærę ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod est propositum.

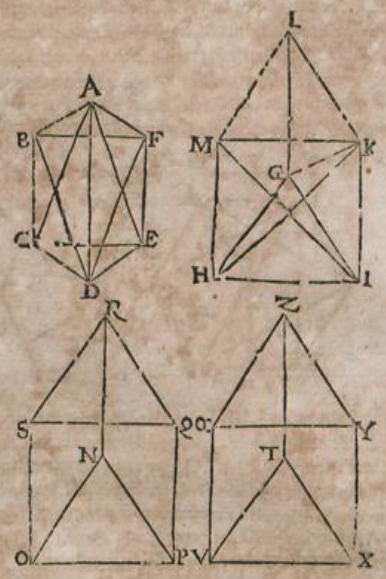
e 21. quartidec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphęra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HL. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD, in BDFA, cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDE; & in DEFA, cuius basis DEF;

DEF; quæ quidem omnes baſes infra quadratum BCEF, exiſtunt continentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyramidum conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtunt, [a] inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum conti- a 8. pri.



neantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Conſtituatur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZ α, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. [b] Quoniam igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZ α, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex ijs, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZ α. Quia vero priſma TVXYZ α, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZ α, quod octaedro æquale eſt, eadem quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplũ tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri. Eſt autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarũ coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. idcoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod demonſtrandum erat. b 12. quint. tidec.

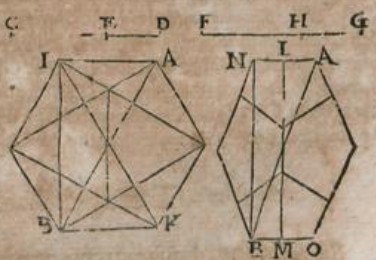
COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. [c] Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram. c 18. tertiidec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

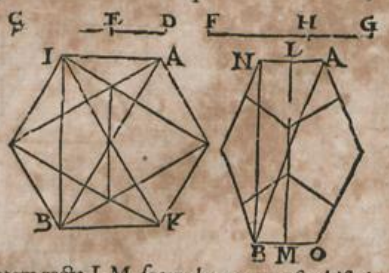
SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphærę, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptum Icoſaedrum AIBk, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita AI, Bk, connectãtur recta IB, quæ ſubtendet vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF; erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia in ſuperficiem ſphæræ, in quo recta RH, latera oppoſita RX, HI, coniungens angulum RSH, ſubtendit) clariuſque patebit ex conſtructione Icoſaedri, quam ad finem lib. 16. ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia vero AI, Bk, latera oppoſita parallela ſunt, per corol. 13. propoſ. 16. lib. 3. [a] erũt anguli AIB, IBk, æquales duob⁹ rectis; Ac proinde, cũ ſint inter ſe æqua-



a 9. pri.

se æquales. (Ducta enim alia diametro IK; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & b 8 pri. bases quoque AB, IK, æquales; b Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; c ideoq; quadratum rectæ pro- c 47. pri. positæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB; Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuisæ extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuisæ; (Nam IB, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est IA, latus Icod 8. tertij- saedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, d maius dec. segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE, maius segmentum ipsi IA, lateri Icosaedri. c 2. quar- e Cum enim sit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; f erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, tidec. f 22. sex. ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ IA: Ostensa sunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; g Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum.



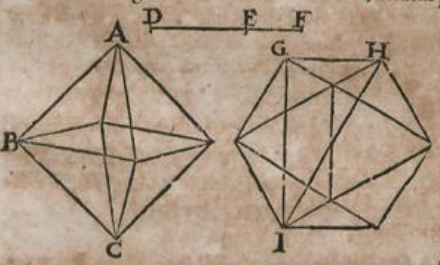
g 14. quin.

RVRSVS latera Dodecaedri opposita AN, BO, secentur bifariã in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipsa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. h erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: h 33. pri. Est autem recta LM, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. i 47. pri. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit. i Ac proinde quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale sit positũ quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, sit minus segmentum ipsius FG, sectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmentum ipsius NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstrauimus, CE, maius segmentum æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecadri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit. Quod erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; a erit a 8. tertij- dec. GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; b Ac proinde composita recta ex GI, GH, b 5. tertij- dec. secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione; c Quia vero quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratũ diametri HI ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarũ GI, GH, ad quadrata rectarũ DE, EF: d Est autem quadratũ diametri HI, duplũ quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarũ GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarũ GI, GH, ad quadrata rectarũ DE, EF, ita est quadratũ rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (e Nam cum sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. f Erit quoq; vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



d 14. tertijdec.

c 2. quartidec.

f 22. sex.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD, sitque recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua AD, vel AC, latus est, Dodecaedri. Cum n. per corol. 2. prop. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum AC, vel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti BC, nempe lateris cubi: [a] Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ. [b] Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.



a 4. tertijd.

b 14. tertijdec.

COROLLARIVM.

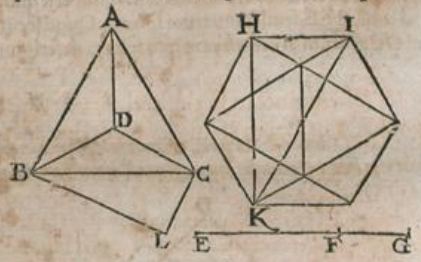
[c] QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri. vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum BC,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in quo Octaedrum descriptum fuerit.

c 18. tertijdec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ; latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoque HI, latus Icosaedri HIK, eiusdem sphæræ. Dico HI, rectam potentia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta IK, diameter. [a] Quia igitur HI, est maius segmentum rectæ HK, diuisæ extrema ac media ratione; [b] Erit quoque composita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusq; segmentum HK, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCL, ita vt BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG, sit æqualis, [d] Eritq; angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur posse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG: Est autem & angulus IHK, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus; [e] Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [f] Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt. [g] Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CL. [h] Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FG. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.



a 8. tertijd.

b 5. tertijd.

c 22. prim.

d 48. pri.

e 2. quarti dec.

f 6. sexti.

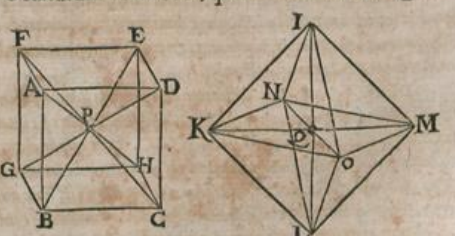
g 4. sexti.

h 13. tertijdec.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines. (Cum enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. [a] Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratũ, & Octaedri triangulũ; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & Octaedri à centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales

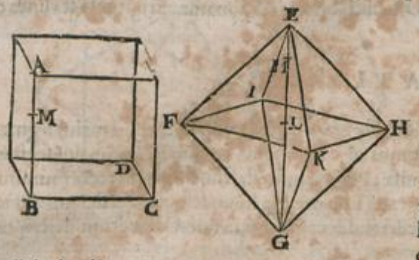


a 21. quartidec.

erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoque rursus, ex eodem scholio, vt cubus ad octuplum Pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

SINT rursus in eadem sphæra cubus ABCD, & octaedrum EFGHIK, sitque diameter sphæræ, seu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM ; Item ex semidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. [b] sesquialterum est quadrati BD, lateris cubi BC : Est autem & recta AB, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases IFKH, BD, & altitudines AB, BM: [c] Ac propterea parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basim BD, & sub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rursus quia recta EL, rectæ EN, tripla est; erit & parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplum parallelepipedi super eandem basim, & sub altitudine EN, vt in scholio prop. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo super basim IFKH, & sub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla sit altitudinis EN. [d] Item Octaedrum EFGHIK, duplum est pyramidis IFKHE. Æquale igitur erit parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita est AB, ad EL. (Cum enim sit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale est ostensum cubo ABCD: Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine LN, æquale est Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

b 18. tertiidecim. c 34. vnd.

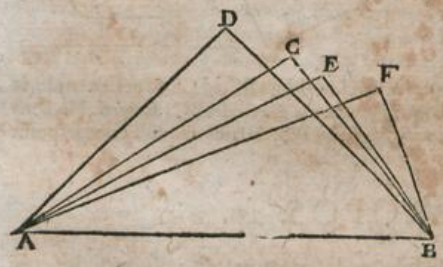


d 16. quartidecim.

SCHOLIVM.

QVIA demonstratum est, [e] *diametrum sphæræ, in qua omnia quinq; corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt, si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. fit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri datæ auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in scholio prop. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratũ 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphæræ ponatur AB, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB ; Vel si constituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia: ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC; Erit recta AC, latus Tetraedri.*

e 13. tertiidecim.



f 14. tertiidec.

RVRSVS [f] *cum ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium sit quadrati diametri AB; Vel si constituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis, secundum doctrinam scholij propos. 33. lib. 6. rectam AD, latus esse Octaedri.*

g 15. tertiid.

DEINDE, [g] *quoniam docuimus, diametrum sphæræ potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars sit quadrati diametri AB; Vel si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB, posit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC; Quemadmodum è contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.*

h 23. quartidecim.

PRÆTEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum ; [h] *Maius segmentum est latus Icosaedri; illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea; Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6 demonstrata sunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarũ AE, BE,*

AE,BE,proportionem habentium,quam recta quæuis extrema ac media ratione diuisæ ad maius segmentum; Rectam minorem BE,esse Icosaedri latus.

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; [i] *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ,cuius diameter prior linea: Liquet.si quadrato diametri AB,constituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunq; recta linea extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum;Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.* i 23. quartidec.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt. Sequentes autem quinq; propos.ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus,ad hunc,qui sequitur,modum. Ad finem deinde lib.16.nonnulla alia adjiciemus,quæ ad eorundem quinq; corporum Regularium in sphæra descriptionem,eorundemq; comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor,ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quarta ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A,B,C,D,continue proportionales;necnon quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E,secundæ ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A,ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B,ad rectam A; [a] habeat autē & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A:Erit vt recta C,ad rectam A,ita quadratum rectæ B,ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F,ad rectam A, ita quadratum rectæ E,ad quadratum rectæ A; Et conuertendo,vt recta A,ad rectam F,ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A,vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ, A ad quadratum rectæ E,vt recta A,ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B,ad quadratum rectæ E: vt recta C, ad rectam F: [b] Est autem proportio quadrati rectæ B,ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B,ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B,ad rectam E. Quod est primum.



a 20. sexti.

quadr. B, Recta C,
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

b 20. sexti.

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin.10.lib.5.proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [c] habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A,ita cubus rectæ B,ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B,ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B,ad cubum rectæ E,vt recta D,ad rectam G: [d] Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B,ad rectam E.Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B,ad rectam E.Quod est secundum.Itaque si sint quatuor lineæ rectæ,&c. Quod demonstrandum erat.

c 33. vnde.

Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.

d 33. vnde.

SCHOLIVM.

HOC idem demonstrauimus ad propos.10. lib. 8. de quot cunq; numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo,eodemq; numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum BC, recta perpendicularis AD, quæ bifariam secabit latus BC, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea BD, dimidium est lateris AB. [a] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter AD, & BD. Dico quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris AB, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub AD, BD, æquale sit triangulum ABC, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [b] Sit autem eidem rectangulo sub AD,BD,æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum ABC,& quadratum rectæ E. [c] Quoniam vero quadratum lateris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB,ad rectam E,Conflat,quadratum lateris AB,ad triangulum ABC, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB,ad rectam E. Quam ob rem,quadratum lateris trianguli æquilateri,&c. Quod erat demonstrandum.



a 13. sexti.

b 17. sexti.

c 20. sexti.

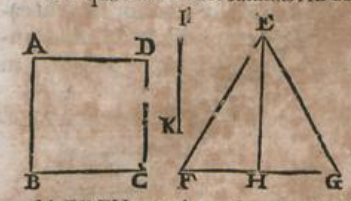
COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris: æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter AD, DB, æquale esse triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiusuis ABCD, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppositum FG, deducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem EH. Posita enim inter EH, FH, media proportionali IK; [a] cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum sit quadrati lateris cubi AB; [b] sit autem & duplum rectanguli sub latere EF, & dimidio eius FH, eo quod dictum quadratū, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum sub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; [c] Ac propterea AB, media proportionalis erit inter EF, FH, hoc est; tres rectæ FH, AB, EF, continue erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales, ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit FH, [d] erit proportio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, secundæ ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectæ IK, hoc est, ad triangulum EFG, (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratum rectæ IK, æquale triangulo EFG,) [e] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulum Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.



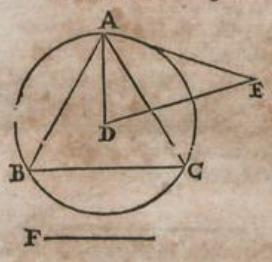
a 28. tertij dec.
b 1. sexti.
c 17. sexti.
d 28. quart dec.
FH.
AB. IK.
EF. EH.
e 20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est, seu altitudinis ipsius: Axis vero, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, seu axis Tetraedri DE, latusque cubi eiusdem sphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, esse potentia sesquialterum axis DE: Axem vero DE, potentia sesquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum [a] descripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur AD, semidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc est, lateris AB, [b] æquale est quadratis rectarum AD, DE, [c] & triplum quadrati semidiametri AD; Fit, vt posito quadrato lateris AB, seu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

QVONIAM vero latus Tetraedri AB, [d] potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris AB; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.



a 5. quar.
b 47. prim.
c 12. tertij.
d 18. tertij dec.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratū diametri sphæræ talium partium est 9. [e] quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, [f] cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

e 13. tertij d.
f 20. sexti.

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet [g] tam latus Trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

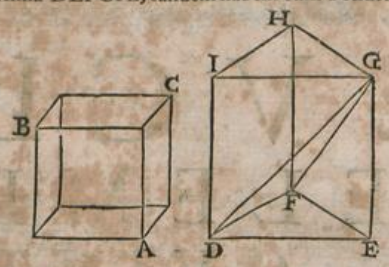
g 12. quar tidec.

THEOR.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [a] Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictã, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoq; erit eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.



[a] 30. quarti.

COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens, & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM DECIMVM.

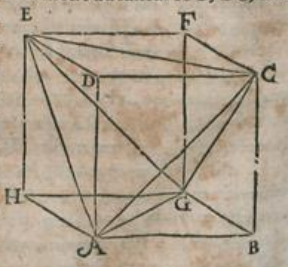
ET SOLIDORVM QVINTVM, vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

i. IN dato cubo pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC. ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quod potentia duplæ sint laterum æqualium quadratorum, vt in scholio proposit. 47. lib. 1. demonstrauimus, perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

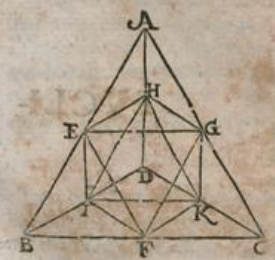


PROBL. 2. PROPOS. 2.

ij. IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, HGE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC, Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: [a] æquales erunt bases EH, GH. Eadem que ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt EIGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 4. prim.



COROL

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE: necnon in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: [b] Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem poramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

b 8. *duod.*

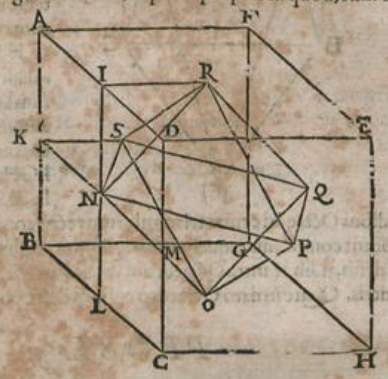
PROBL. 3. PROPOS. 3. iii.

IN dato cubo octaedrum inscribere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ cõnectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectę ex dictis centris ductę ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex prædicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremo si præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, super planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum est: item & anguli contenti, æquales propterea quod, cum NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis est recto angulo KAF, in quadrato AG, eademq; ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterũ, hac lege, vt quælibet duę ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas esse ad I, dimidiũ lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoq; duæ rectæ NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC, AG, quorum centra existunt puncta N, & S, &c. [c] Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

a 10. *vnde.*

b 4. *primi.*



ALITER. [c] In cubo dato inscribatur pyramis; [d] In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumq; erit quod proponitur. Cum enim ex demonstratione prop. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonstratione propos. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri; perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi; atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

c 1. *quinti.*

d 2. *quinti decc.*

COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo descripti NQ, RO, (si ducerentur,) se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ quidam coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese muruo bifariam, vt docuimus cor. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

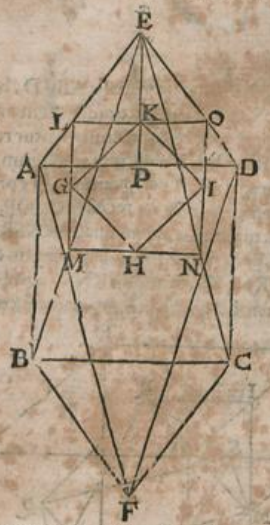
PROBL. 4. PROPOS. 4. iv.

IN dato octaedro cubum inscribere.

DATVM octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlices vertices sunt sex anguli octaedri, & quælibet duæ octaedrum constituunt; sit vna carum pyramis ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC; CED, DEA, ex coroll. propositi. 4.

lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habent communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. [a] Quia vero ducta recta EK, P, tripla est rectæ KP, [b] Est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erũt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumq; constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, [d] parallelum est plano ABCD, [e] ipsa, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, Ek, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoq; ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED per coroll. propos. 12. libr. 13. [f] Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoq;, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [g] æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, kG, centra G, H, I, k, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; [h] cum enim anguli LkG, GkI, IkO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LkG, IkO, per coroll. 2. propos. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus GkI; Eademque ratione recti erunt anguli kGH, HIk. quadratum erit GHIk, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octoedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus, Quod faciendum erat.

[a] 18. quarti sidec.
[b] 2. sexti.
[c] 10. vnde.
[d] 15. vnde.
[e] 15. vnde.
[f] 4. prim.
[g] 4. prim.
[h] 13. prim.



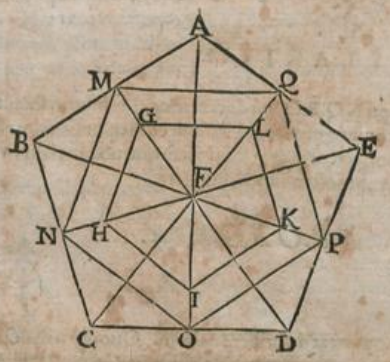
v.
vi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum videlicet bases sunt pentagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices vero duodecim anguli Icosaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra G, H, I, k, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, Ik, kL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex scholio propos. 12. libr. 13. bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia sint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, Fk, FL, nimirum semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonstratũ est;

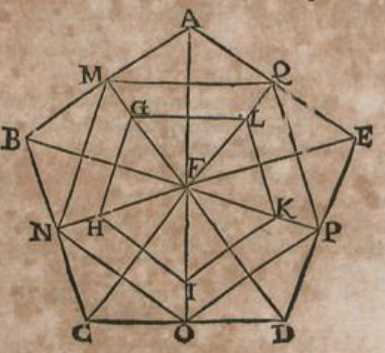
[a] 4. prim.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.



[d] Erunt

[d] Erunt & rectæ GH,HI,IK,KL,LG,æquales. [e] Rursus quia tam anguli AMQ,QMN,NMB,quam anguli BNM,MNO,ONC,æquales sunt duobus rectis. [f] Sunt autem anguli AMQ,NMB,angulis BNM, ONC,æquales; Erunt reliqui anguli QMN,MNO,æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP,OPQ,PQM, & inter se,& hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ,in plano pentagoni ABCDE,existens. Denique cum rectæ FM,FN,FO,FP,FQ, æquales proportionaliter secentur in G, H,I,K,L,quod & FG,FH,FI,FK,FL,ex centris,æquales sint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL,duplæ sunt ipsarum GM,HN,IO,KP,LQ,ex coroll. propos. 18. lib. 14. [g] parallelæ erunt GH, HI, Ik, kL, LG, ipsis MN, NO,OP,PQ,QM; [h] Ac propterea anguli LGH,GHI,HIk, IkL,kLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter se æquales erunt. [i] Quia vero plana per rectas GH,HI,& per HI,Ik,ducta parallela sunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto conueniuntq; in recta HI, ipsa vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Eodemque modo ostendemus plana per Ik,kL, & per kL,LG, necnon per LG,GH,ducta idem planum constituere cum plano per GH,HI, Ik, ducto. Quocirca GHIkL, pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia æqualia inter se erunt. Quamobrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidem ex defin.31.lib. 11. in Icosaedro erit descriptum, cum viginti anguli dodecaedri in centris viginti basium Icosaedri consistant. Quapropter in dato Icosaedo Dodecaedrum describimus. Quod erat faciendum.

d 4. prim. e 13. prim. f 4. primi. g 2. sexti. h 10. vnde. i 15. vnde.



COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. libr. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum æqualium bases Icosaedri circumscribentium, atque adeo eorundem distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lemma. 2. eiusdem propos. 10. libr. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri.

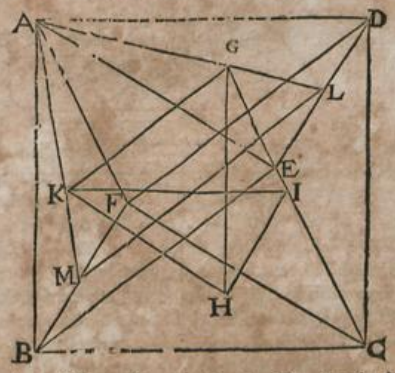
PROBL. 6. PROPOS. 6.

o. v.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro ABCDEF. In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur G,& H,centra triangulorum ex aduerso sibi respondentium AED,BEC; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I,& k, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quæ quidem centra coniungantur sex rectis GH, GI, Gk, HI, Hk, Ik, vt fiat pyramis HIkG. Deinde ex A, demittantur per centra G,k, rectæ AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in L,& M, per scholium propos. 12. lib. 13. coniungaturque recta LM. [a] quæ ipsi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterum DE, BF, popositorum in quadrato EF. Quoniam vero rectæ AL, AM, sectæ sunt proportionaliter in G,& k, punctis, quod AG, Ak, duplæ sint ipsarum GL, kM, ex coroll. propos 18. lib. 14. [b] Erunt Gk, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. prop. 4. lib. 6. triangula ALM, AGk, similia. [c] Quare erit vt AL, ad LM, ita AG, ad Gk; & permutando vt AL, ad AG, ita LM, ad Gk. Est autem AL, ipsius AG, sesquialtera; [d] quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius Gk. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, k, coniungentium sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde, rectos pyramidem HIkG, componentes, inter se esse, æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrũ constitui: quod; cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem describimus. Quod erat faciendum.

a 33. primi. b 2. sexti. c 4. sexti. d 18. quarti. videc.



ALITER [e] In octaedro dato inscribatur cubus, [f] & in cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; & in angulis cubi collocentur quoq; anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

e 4. quarti. dec. f 1. quinti. dec.

COROL-

COROLLARIVM. I.

g 9. vnd. h 15. vnde. QVIA vero ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM, [g] ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse: [h] Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelum esse: Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallelas, binis nimirum singula: Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas videlicet binis oppositis.

COROLLARIVM II.

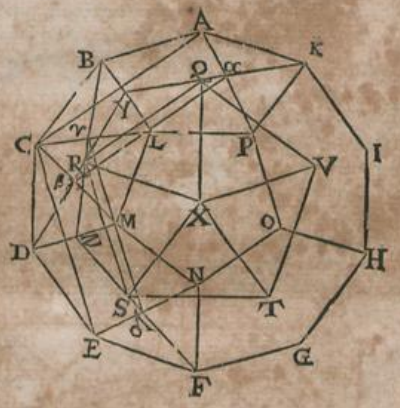
PRÆTEREA cum octaedrum circumscribat: & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, vt constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis tetraedri in ea sphæra descripti per coroll. 1. propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectum, quæ centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deductæ.

o. vii.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autē & rectæ eædē YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant, ([a] constat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) [b] Igitur A α, C β, parallelæ sunt rectæ BY, [c] atque adeo & inter se parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM, [d] quæ æquales sunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. [e] Rectæ ergo ipsas connectentes AC, $\alpha\beta$, æquales erunt & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur FZ, EZ, connectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æquales esse ipsas CE, $\gamma\delta$. [f] Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & $\alpha\beta$ $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint, (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, [g] atque adeo æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, distantiæ sunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æqualium, [h] ideoque æquales: Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt,) [i] Erunt quoque anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; [k] æquales quoq; erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula constituantur: (Haber enim dodecaedrum viginti angulos solidos,) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



a 18. tertij. b 28. primi. c 9. vnde. d 4. prim. e 33. prim. f 4. prim. g 14. tertij. h 14. tertij. i 8. primi. k 4. prim.

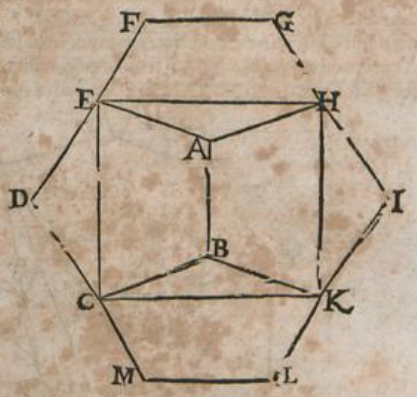
o. viii.

PROBL. 8. POPROS. 8.

IN dato Dodeçaedro cubum describere.

PRO-

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inſcribendus ſit cubus, ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, cõuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABKIH, ſecundũ latus idẽ cõmune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. In his vero pentagonis ſubtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC, quod æquilaterum erit. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia ſint, angulosque contineant æquales, ex hypotheſi; [a] æquales erunt baſes EH, HK, KC, CE. [b] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt ex circulo pentagonum ABCDE, circum ſcribente arcus æquales; Erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademque ratione parallelæ erunt AB, HK. [c] Quare & EC, HK, inter ſe parallelæ erunt; [d] Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipſas connectunt, parallelæ erunt, [e] in eodẽq; cum ipſis plano; ideoq; parallelogrammum erit EHKC; quod oſtendimus eſſe æquilaterum. Quia vero planum ECKH, productum communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. prop. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, deſcriptum; [f] Erunt tam anguli oppoſiti E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; [g] Ac propterea cum oppoſiti E, & K, ſint æquales, necnon & oppoſiti C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans ſuos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis ſimiliter octo angulis octo aliæ rectæ ſubtendantur eodem ordine; conſtitutum erit ſolidum ſex quadratis contentum; quæ cum ſint æqualia, [h] eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehenſos ſubtendentia æqualia ſunt; cubum conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiuſque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a 4. primi.
b 28. tertij.
c 9. vnde.
d 33. primi.
e 7. vnde.
f 22. tertij.
g 34. prim.
h 4. primi.

COROLLARIVM.

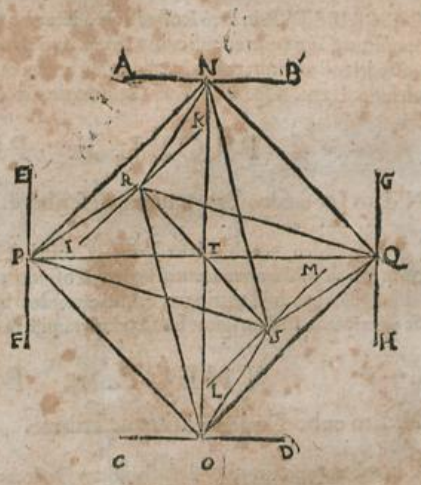
HINC fit, rectam, quæ ſubtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, CE, ipſi AB, eſſe parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

O. ix.

IN dato Dodecaedro octaedrum deſcribere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 3. propoſ. 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes æquales erunt, ſeque mutuo in T, centro ſphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propoſ. 17. libr. 13. atq; adeo æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. [a] Quocirca duodecim rectæ ſubtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales ſunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cũ dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, conſtituentque octaedrum intra Dodecaedrum deſcriptum, cum ſex anguli octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex conſtructione. In dato igitur Dodecadro octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 4. primi.

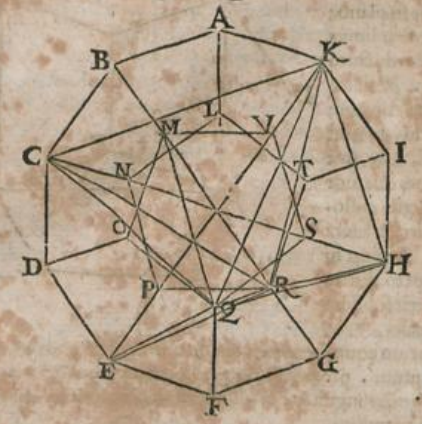
PROBB. 10. PROPOS. 10.

D. x.

IN dato Dodecaedro pyramidem deſcribere.

SIT

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At vero k, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, R Q, vt sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM,
a 17. tertij decim. & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; a quoniam dodecaedrum in sphæra describitur; si planum
b 31. tertij trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. libr. 14. b Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus rectos esse angulos C-
c 47. prim. RH, KRE, KQE, RQM, CQH. c Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum C-K, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum kR, RE, & quadratis rectarum kQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, Q-H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium kH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectę cum subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, d æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum Ck, CR, Rk, kQ, RQ, & C-Q; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CkR, CkQ, kRQ, RCQ æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CkRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, k, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.



d 4. prim.

d 8. quintidecim. ALITER. e In proposito Dodecaedro cubus describatur; f & in hoc cubo pyramis, factumque erit,
f 1. quintidec. quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant, perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaq; in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

O.
xi.

PROBB. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

a 5. quintdecim. a DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrum; b & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit,
b 8 quindecim. quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedrii in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

O.
xii.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

a 11. quintidec. IN dato Icasaedro a cubus describatur, b & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur.
b 1. quintidecim. c Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi congruant, ma-
c 11. quintidec. nifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; d Ac proinde pyramidem in Ico-
d 1. quintidec. saedro esse descriptam, In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

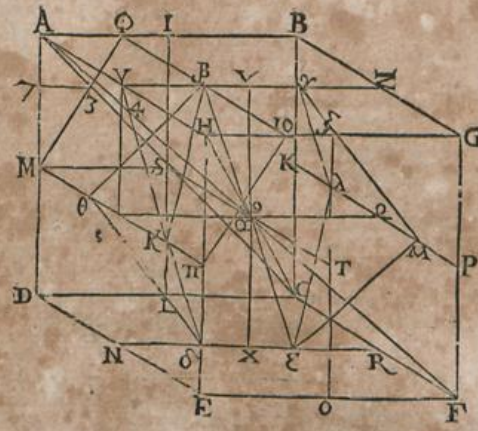
THEOR. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, k, L,
Ducatur in figura recta Ha-C. M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mπ, kP, NR, nusquam inter se occuntibus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed vna duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ϱ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ϱQ, quæ se mutuo in centro α, bifariam secant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, suntq; lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mπ, secentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt sint maiora segmenta, Yβ, Zγ, Mθ, πκ, ductis rectis Yϱ, Yκ, βθ, βκ. Quoniam ergo Yϱ, YV, dimidio lateris cubi sunt
a 4. tertij dec. æquales; & ϱκ, βV, segmenta minora rectarum æqualium YV, ϱπ, æqualia quoque: a Sunt autem quadrata rectarum

ctarum YV, βV, tripla quadrati rectæ YC; Erunt & quadrata rectarum Yφ, φκ, tripla eiusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yφ, φκ, æquale sit quadratum rectæ Yκ, [c] quod angulus Yφκ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [d] recta est ad planum AE, per rectas AY, Yφ, ductum, rectus erit angulus CYκ, ex defin. 3. lib. 11. [e] Ac propterea quadratum rectæ Cκ, æquale quadratis rectarum Yκ, YC, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ, (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ YC, cum quadratum rectę Yκ, triplum sit ostensum quadrati rectę Yβ.) Ideoque [f] cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta Cκ, rectę Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplę proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet; Est autem & θκ, dupla ipsius φκ, quod minora segmenta θρ, κρ, rectarũ æqualium Mρ, πφ, æqualia sint, [g] Erit igitur vt Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipsius Yβ ad θκ duplã ipsius ρκ: Est autẽ Yβ, maius segmentum ad ρκ, rectam minori segmento βV, æqualem, vt tota ad maius segmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde θκ, erit maius segmentum rectæ βκ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus θκ, maius esse segmentum rectæ βθ, extrema ac media ratione sectę, si nimirum ducatur recta Yθ. Quare æquales erunt Cθ, βκ, constituentes triangulum Isosceles Cθκ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum Cθκ, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

b 47. prim.
c 29. prim.
d 4. vndec.
e 47. prim.
f 20. sexti.
g 15. quint.

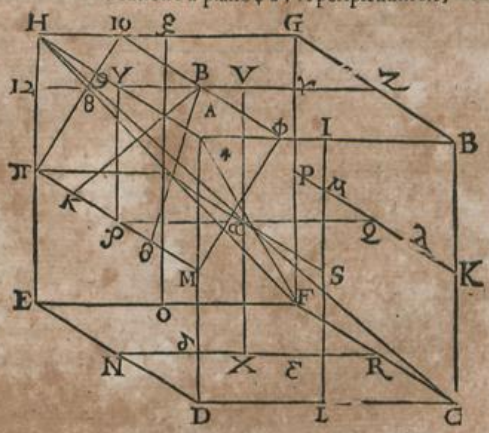


INTELLIGATVR iam planum trianguli βθκ, extendi, (ducta per β recta βφ ipsi Mπ, parallela,) per parallelas Mπ, φ10. vt sit planum extensum φπ, occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aφ, parallela, connectaturq; MS, [h] quæ parallela est vtrique Aφ, 73. Quoniam igitur per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A73. simile est triangulo AMS; [i] ac proinde vt AM, ad MS, ita est A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad Aφ, ita M7. ad 73. Est autem Aφ, maius segmentũ rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione. ([k] quod æquales sint Aφ, YC, necnon & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7A, maius segmentum erit rectæ M7. extrema ac media ratione sectæ; [l] Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M7. [m] Atqui vt M7. ad 7A, ita est S3. ad 3A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusq; segmentum est S3. [n] Quia vero Sα T, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per Sα T planum ducatur parallelum plano φπ, ducto per Mπ, [o] secabuntur rectę AS, Aα, in easdem rationes, in punctis 3. & 4. cum planum φπ, rectas AS, Aα, secet in 3. & 4. at planum per Sα T, ductum plano φπ, parallelum easdem secet in S, & α. Atque ideirco, cum AS secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aα, semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmentum erit α4.

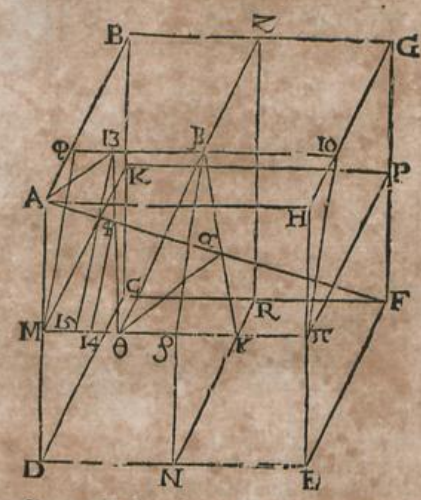
h 33. primi.
i 4. sexti.
k 34. prim.
l 5. tertiid.
m 2. sexti.
n 33. pri.
o 17. vnde.

IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro cubi HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano φπ, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratum AC, locum quadrati HF; & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, sine hac inuersione probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura; (Hæc deest in figura, quam tamẽ quilibet ducere poterit) quam planum φπ, secet in 9. prope punctum H; intelligaturq; per rectam AH, planum plano φπ, parallelum. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H; & 4, 9; (Nam planũ φπ, eas secat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano φπ, parallelum easdem secat in A, & H;) [p] erit vt α4. ad 4A, ita α9, ad 9H. Cum ergo α A, secta sit in 4, extrema & media ratione, erit quoq; αH, similiter secta, quæ demonstratio locum etiã habet in hac quidẽ cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur θ4, β4, 49, κ9, rectilineũ β4θ49, in plano φπ, existens, pentagonũ esse æquilaterũ, & æquiangulum.

p 15. vnde.



INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum βθκ siue planum φπ, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano φπ, recta coniuncta θ4. extendatur vsque ad rectam φ10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & iunctis rectis MK, [a] planum MP, parallelum est plano AG, (quod & rectæ PK, KM, parallelæ sint rectis GB, BA,) [b] secatque cubum bifariam; ideoque per centrum α, transit, per ea quæ in scholio propos. 39. lib. 11. ostensa sunt; si per rectas α4, A, θ413. planum extendatur, [c] fient αθ, A13. communes sectiones planorum MP, AG, parallelæ; Ac proinde triangula αθ4. 1, α34. æquiangula erunt; [d] Eritq; vt α4 ad 4A, ita θ4. ad 413. Quare cum αA, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostendimus; eodem modo erit secta 313. in 4. Rursus plano NZ, per centrum α, transeunti, parallelum ducatur planum per punctum 4. ex schol. propos. 15. lib. 11. secans φπ, recta 4, 14. [e] Est autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. [f] Rectæ igitur αA, ρM, in easdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρM, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusque erit segmentum 14 M, ideoq; æquale minori ρ3, ipsius Mρ. Quare cum ex ρ14. maiori segmento ipsius ρM, auferatur ρθ, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ρ14. diuisa in θ, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ρ3. Postremo recta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, [g] secabuntur rectæ θ13. 315. proportionaliter; Ac proinde & 315. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit 314. [h] Quapropter erit vt ρ3, maius segmentum ad 314. minus, ita θ14. maius ad 14. 15. minus: Vtautem 314. ad 14. 15. ita est tota 315. ad θ14. maius segmentum. Igitur erit vt ρ3, ad θ14. ita 315. ad eandem 314. Ac propterea rectæ ρθ, vel ρκ & 315. æquales erunt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, secantur plano φπ, [i] erunt communes sectiones βρ, 4. 14. parallelæ, ideoq; & 13. 15. βρ, parallelæ erunt, [k] angulusque externus βρκ, interno 13. 15 3. æqualis. Cum igitur & latera βρ, ρκ, lateribus 13. 15. 15θ, sint æqualia. [l] æquales erunt quoque rectæ βκ, 13θ. Ac proinde & earum segmenta maiora θκ, θ4, (Ostensum enim est θκ, esse maius segmentum ipsius βκ.) æqualia erunt. Eadem arte & C4, ipsi βγ, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triangulum Icosceles formetur super basim βγ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemq; modo eisdem θκ, Cγ, æquales erunt κ9. C9. Æquilaterum ergo est pentagonum β4θκ9, quandoquidem βγ, θκ, rectæ æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, æquales sunt YV, ZV, πρ, Mρ. Sed & æquiangulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP; bina ipsi βθκ, similia, & æqualia construantur; (Ita enim ad Mπ, duo huiusmodi triangula vides βθκ, δθκ.) & ipsorum beneficio duodecim pentagona ipsi β4θκ9, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis lineis Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirum in singulis, octo vero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris Aα, & Hα, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cum non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

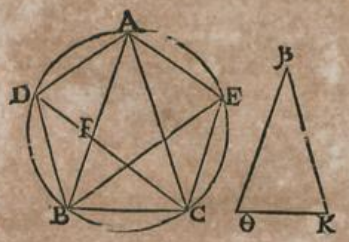


LEMMA.

QVOD autem triangulum βθκ, cuius basis θκ. maius segmentum existat vtriusq; lateris βθ, βκ. extrema ac media ratione diuisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Icosceles ABC, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuisisq; angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentq; se mutuo rectæ AB, CD, in F. a *Quoniam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentum est AF, æquale lateri BC;* b *Erit vt AB, tota ad maius suum segmentum BC, ita βθ, tota ad maius suum segmentum θκ, tota ad maius suum segmentum: θκ; Eodemque modo, vt tota AC; ad maius segmentum CB, ita Cκ, tota ad maius segmentum κθ: Est autem quoq; vt AB, ad AC ita βθ, ad βκ, vtrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur βθκ, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesq; erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β; A; propterea que vterq; angulorum θ κ, duplus erit anguli β; & triangula βθκ, ABC, similia.*

a 28. tertij.

b 2. quartidec.



PENTA-

PENTAGONVM vero β 4. θ κ 9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum β θ κ, circulus β A θ κ B; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex iis, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam rectæ A θ, A C, quam rectæ 4 ϑ, 4 β, æquales sunt rectæ θ κ cum & β 4 ϑ κ 9, & β A θ κ B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ A, ϑ 4, quam duæ C A, 4 C æquales; quod fieri non posse demonstratum est proposit. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo β θ κ circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4, θ κ 9, æquiangulum est.

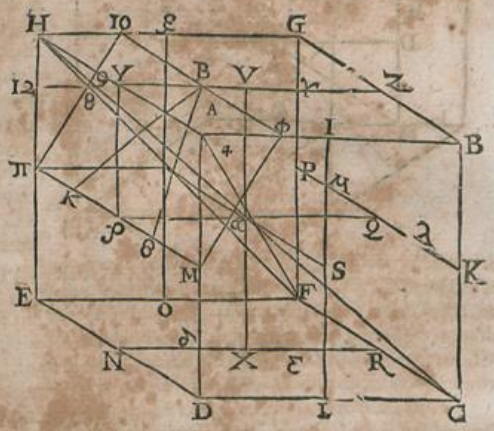


SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.



DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri C ε, intelligaturque coniuncta recta γ ε, [a] æqualis existens & parallela lateri cubi V X, quod ad V γ, X ε, æquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus est; [b] rectus quoq; erit angulus β γ ε, ad γ, constitutus, [c] Ac proinde quadratum diametri β ε, æquale erit quadratis laterum C γ, γ ε, nempe Dodecaedri, & cubi.

a 33. primi.
b 29. prim.
c 47. prim.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, [d] cum sit vt Y X, ad β V, ita Y Z, dupla ipsius Y V, ad β γ, duplam ipsius C V; Sit autem C V, minus segmentum ipsius Y V, sectæ extrema ac media ratione. Erit & C γ, minus segmentum lateris cubi Y Z, secti extrema ac media ratione; composita vero ex Y β, γ Z, hoc est, recta C κ, (quæ dupla fuit ostensa ipsius Y C, ideoq; composita ex Y C, γ Z, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione C γ, esse latus Dodecaedri, [e] & C κ, seu C θ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 θ.

d 15. quint.
e 8. quintidec.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi Y Z, componitur ex latere Dodecaedri β γ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Y β, γ Z, quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim Y Z, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. [f] Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris Y Z, secti extrema ac media ratione: Erit β δ existens quoque maius segmentum eiusdem lateris Y Z, & æqualis duabus Y β, γ Z, simul, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateri Y Z, circumscripti

f 8. tertiid.

IV.

RECTA duo angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi latere θ κ, oppositi, [g] æqualis est rectæ V X, (quod & β V, δ X, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

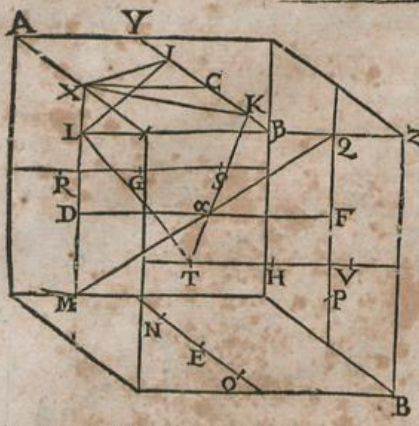
g 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium centra C,D,E,F,G,H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquam inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I,K; L,M; N,O; P,Q; R,S; T,V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I.K,T, & R: R, cum L,M,I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN; TVR, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim, subtendantur vndecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; [a] & anguli contenti, recti, quod XC, parallela sit ipsi AY; [b] Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per def. 4. lib 11. recta quoque erit ad lineas XI, XK; Ac propterea, cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, trianguli LXK, & anguli contenti, recti; [c] æquales erunt bases LI, LK. Rursus [d] quoniam quadratum rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum vero rectæ XL, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus quadratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI, ([e] Cum enim quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoque quadrati rectæ CI; Ac propterea, cum eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectæ KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum LI, IK, idcoque & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterum igitur est triangulum IKL, lateri cubi AG, substratum.

a 29. prim.
b 4. primi.
c 4. prim.
d 47. prim.
e 4. tertij d.



Non aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim tritriangulo LMT; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

f 33. primi. g 47. prim. h 29. prim.

DVCTA enim recta LQ, [f] quæ lateri cubi DF, parallela est, & æqualis, quod & DL, FQ, parallelæ sint, & æquales; [g] manifestum est, quadratum diametri QM, æquale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptum est, [h] cum angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, rectus sit.

II.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, ad & angulos secantibus.

i 4. primi.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, sese q, per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta α P. Quoniam latera α F, FQ, trianguli α FQ, æqualia sunt lateribus α F, F P, trianguli α F P, angulosque comprehendunt rectos, [i] æquales erunt rectæ α Q, α P. Eademq; ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM

CVM enim CI, sit maius segmentum rectæ CΥ; [k] sitq; vt CI, ad CΥ, ita KI, dupla ipsius CI, ad βΥ, duplam ipsius CΥ; [l] erit quoq; KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βΥ. Si enim alia recta, quam KI, esset maius segmentum rectæ βΥ, esset βΥ, ad illam rectam, vt CΥ, ad CI, hoc est, vt βΥ, ad KI, diuersam ab illa recta. quod est absurdum.

[k] 15. quint.
[l] 2. quartidec.

IV.

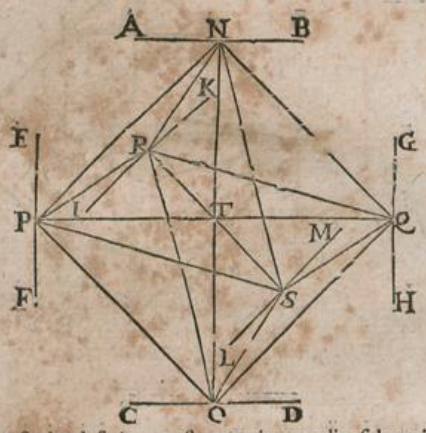
ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fiunt duo triangula inter se aqualia, angulosque alternos habentia æquales ex 4. propos. l. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare quælibet latera opposita parallela erunt; [m] Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.

[m] 15. vnde.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.



EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturq; rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum sint rectarum æqualium dimidia) angulosque continent rectos, vt dictum est; [a] Æquales erunt bases NS, NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hisce duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoque Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descriptum est, cum eius anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaq; Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

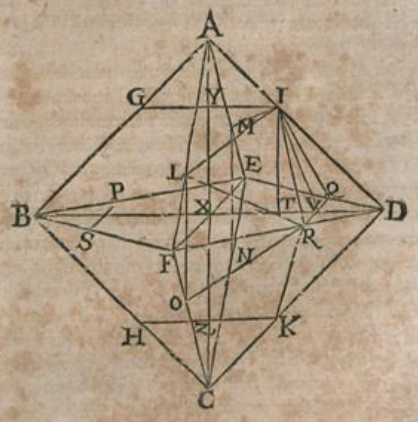
[a] 4. prim.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoq; est Octaedri.

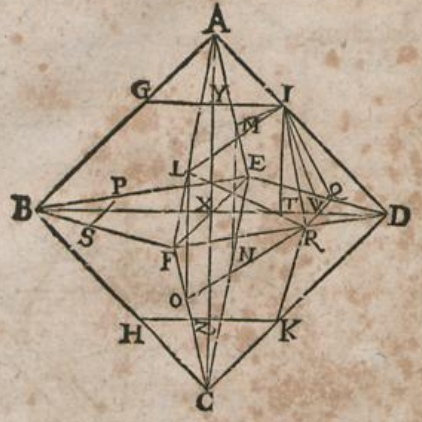
PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.



DATVM Octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum sit, A B C D E F. Cum à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantum duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati A B C D, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuere,) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati EBFD; (Nam latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos E, F, iam accepta sunt,) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non

omnes ductæ sint in figura, adeuitandam linearum confusionem. Quæ autem sint hæc quinq; puncta proxima, pulchre indicat octaedrũ materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctũ acceptum est, pyramidem constituunt; alia autẽ duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorũ octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum est. Vt quia punctum acceptũ est R, in latere DF, q̃ cum tribus DE, DA, DC, pyramidem constituit in vertice D, est commune triangulis octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinque puncta horum quinque laterum ductæ sunt lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, se se in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quarum AC, BD, secant rectas GI, RQ in Y, & V; connectaturque recta IV, agaturque IT, parallela ipsi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, trianguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, trianguli DRI; (Sunt enim DQ, DR, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cum sit, [b] vt BG, ad GA, ita DI, ad IA; [c] erit GI, rectæ BD, parallela. Eademque ratione QR, ipsi EF, parallela; [d] Ac proinde vt DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est vt AX, ad XD, ita AY, ad YI, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualem; ideoque GI, rectam bifariam in Y, similiterque QR, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, trianguli DQR, (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) anguloſque comprehendant rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; [e] Æquales erunt bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostendentur rectæ HK, PS, MN, LO, quę nimirum subtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, complectunturq; duo segmẽta laterum minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. Est autem XY, rectæ XV, æqualis, (cum ambæ sint maiora segmenta æqualium rectarum XA, XD,) [f] & YI, rectæ XT; erit XT, maius segmentum ipsius XV, & idcirco TV, segmentum minus eiusdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc est, ipsius IT, [g] (cum & recta IT, æqualis sit ipsi XY) & TV, minoris segmenti, [h] tripla sunt quadrati rectæ XT, maioris segmenti; Atq; adeo quadratum rectæ IV, [i] æquale existens quadratis rectarum IT, VT, triplum est eiusdem quadrati rectæ XT, hoc est, rectæ RV, quæ æqualis est ipsi XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cum RV, YI, dimidia sint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipsi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: [k] At quadratis rectarum IV, VR, æquale est quadratum rectæ IR, [l] quod anguli IVR, IVQ, comprehensi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & subtensi basibus æqualibus IR, IQ, æquales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ, VR; Ac propterea cum eiusdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR; Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipsæ æquales: Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est IQR. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triangula simile sitũ cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS; HPS, NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium sint æqualia inter se. quod tamen hac etiam ratione demonstrabimus. Cum enim in quolibet horũ triangulorũ vnum latus subtendat angulũ rectum quadrati comprehensum duobus segmentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua subtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos singulos duobus segmentis laterum Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa trinagula æqualia, per corollar. propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, subtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehensos minoribus segmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia sunt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic vero segmentis AL, AI, maiore & minore quoq;. Non secus latera IR, GL, æqualia erũt. Æqualia igitur sunt triangula IQR, GIL, per coroll. propos. 8. lib. 1. Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterũ est. Eademq; est ratio de cæteris habenda. Atq; hęc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur, reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videli-



a 4. primi.
b 12. quarti-dec.
c 2. sexti.
d 4. sexti.
e 4. primi.
f 34. primi.
g 34. prim.
h 4. tertiyd.
i 47. prim.
k 47. prim.
l 8. primi.

videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED, GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorũ lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo æquilatero ADE, maius segmentum lateris AD, sit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, ostensa æqualis rectæ GI, quæ duplum potest minoris segmenti AI, [l] cum quadratum rectæ GI, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perspicuum est, & rectam IQ, duplum posse eiusdem segmenti minoris AI. [l] 47. prim.

COROLLARIVM II.

RVRSVS sit, cum octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namq; Octaedri superioris triangulum AED, in quo collocatum est triangulum Icosaedri IMQ, sitque C, centrum trianguli AED, ex quo rectæ educantur CA, CE, CD: CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia sunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quod hæc latera sint ex centro, & maiora segmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus: Erunt bases CM, CQ, æquales. Non secus demonstrabimus CI, æqualem esse lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.



COROLLARIVM III.

NON difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O: cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia sint lateribus XF, FO, trianguli XFO, (Nam XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterum æqualium Octaedri sectorum extrema ac media ratione) angulosque complectantur æquales, semirectos videlicet: (cum AC, EF, diametri sint quadratorum ABCD, EAFC: ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) [m] Æquales erunt & bases XG, XO. Eodemque argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri. [m] 4. prim.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

[a] INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; [b] & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum. [a] 16. quinti. [b] 5. quinte. cim.

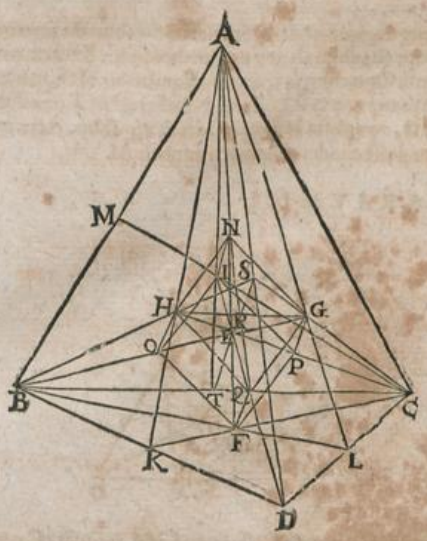
PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data pyramide cubum describere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectæ educãtur AEF, BEG, CEH, DEI, quę cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariã, & ad angulos rectos, ex schol. prop. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoq; rectæ ex solidis angulis per centrum E, demissæ AF, BG, CH, DI, bifariã in N, O, P, Q, punctis quorũ quodlibet cũ trib. proximis centris [a] 15. quinti.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0599-5

centris basium (centris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita vt relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse. Cum enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quod FK, FL, cum perpendiculares sint ad BD, CD, ex centro F, ductæ ostendant æquales distantias rectarum æqualium
b 4. primi. BD, CD, à centro F,) angulosque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [b] Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABD, ACD,) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; [c] Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendetur æquales rectæ QG, QH, si rectæ ducantur DG, DH, nec non & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namq; FT, FK, distantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABC, ABD;) angulosque contineant æquales: [d] Æquales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.



c 4. primi.

d 4. prim.

ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter octaedrii in pyramide descripti, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrabimus, transibit T, per E, centrum pyramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri.
c 18. quarti dec. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per scholium propos. 12. lib. 13. [c] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secantur,
f 2. sexti. [f] atque idcirco HG, parallela est lateri BC, secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC,) proportionaliter; ideoque & RS, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE.
g 15. quarti dec. Rursus [g] quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4. recta DI, ideoque eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, tri-
h 2. sexti. anguli AED, proportionaliter secentur, [h] recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars est trianguli AED,) proportionaliter. ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE, tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, à rectis HG, NQ; Atque idcirco &
i 2. vndec. ipsæ HG, NQ, in eodem sese puncto intersecabunt. [i] Quare in eodem sunt plano, propterea que & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ; Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

CVM ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, simile triangulo SBC, ex corollar
k 2. sexti. propositione 4. lib. 6. [k] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Est autem SH, tertia pars ipsius SB: Igitur & HG, tertia pars erit lateris BC. Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH,
l 8. primi. QH; [l] Æquales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. recti erunt, ideoque quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent, qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis: quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

ALITER. In data pyramide describatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori

priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([m] cum enim rectæ EG, EH, parallelæ sint rectis BC, BD, [n] erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris) sit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. [o] Et quia dicta quatuor bases octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

m 2. sexti. n 15. vnde. o 17. vnde.

COROLLARIVM I.

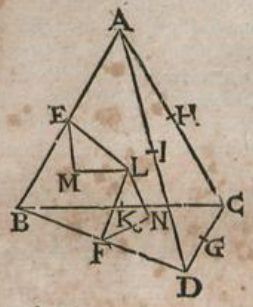
CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum basis GNHQ, ducta dimidium sit lateris cubi, vt constat: Recta RS, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, ostensa sit tertia pars ipsius ST; perspicuum est, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis AD, BC, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi RS.

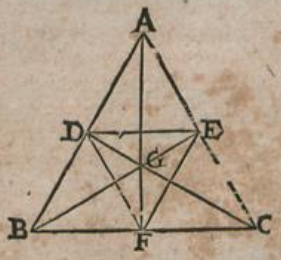
LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primum pyramis ABCD, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniam latera LM, ME. trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma 2. propos. 10. li. 14. Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11.



p AEquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti. p 4. primi.

SIT deinde in base pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri; q erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF. Quod est propositum.



q 4. sexti.

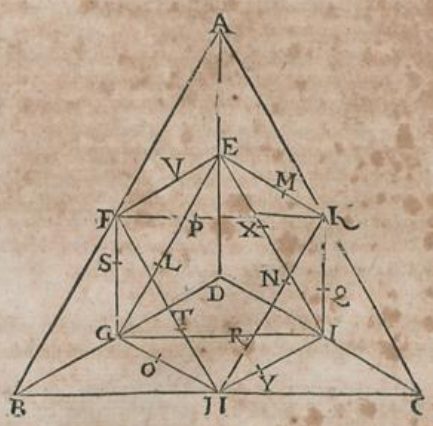
PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATÆ pyramidi ABCD, [a] inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumatur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorũ octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK, HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dictis

a 2. quartidecim.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0601-8



in dicto octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data pyramide Dodecaedrum describere.

a 19. quin. decim. b 5. quin decim. c 8. quinti. decim. d 18. quin tidec.

PYRAMIDI datæ [a] inscribatur Icosaedrum, [b] & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus: consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde [c] quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [d] quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiamsi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

xiij.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphæræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter à centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinq; solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersum viginti inscriptiones: vnum dunt axat Dodecaedrum impropriè describitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide describitur, vt ex propos. 19. huius lib. est manifestum. Nam, vt proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt definit. 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque solida regularia, vnum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta: [a] *In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde* [b] *Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro* [c] *describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est.* [d] *Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.*

a 16. quin. dec. b 5. quinti. dec. c 8. quinti. decim. d 1 quintidec. e 1. quintidec. f 8. quintidec.

NEQVE vero prætereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem [e] *sphæra comprehendi.* [f] *Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant,* [e] *conueniantque omnes*

anguli

anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat, sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atq; pyramidem, cum sphæræ illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro & pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basium Icosaedri propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesue quinque solidorum regularium vnius in alio, quot quot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 5. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. describimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVM DECIMVM.

QVO VARIÆ SOLIDORVM REgularium sibi mutuo inscriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Francisco Flussate Candalla adiectum, & de quinque corporibus.

LIBER TERTIVS.

QVEMADMODVM libro 14. tradita sunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem sphæra descriptarum, quarum quidem descriptionem libro 13. exposuit Euclides; ita etiam Franciscus Flussas Candalla hoc lib. 16. inter se comparat easdem figuras regulares sibi mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inscriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartus decimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri possit tractatio hæc quinq; corporum regularium, si liber hic decimus sextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cum enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. docuimus Dodecaedrum, cubusque in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, vt AE, maius segmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D; proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.

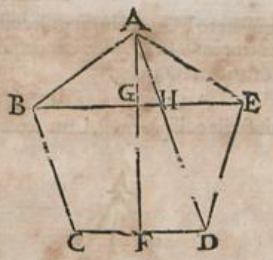


THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur à recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, subtendente angulum A, secari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ secet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD. ex scholio propos. 8. lib. 13. est parallela, [a] secabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: [b] Atqui AD, in H, secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentum DH. Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.

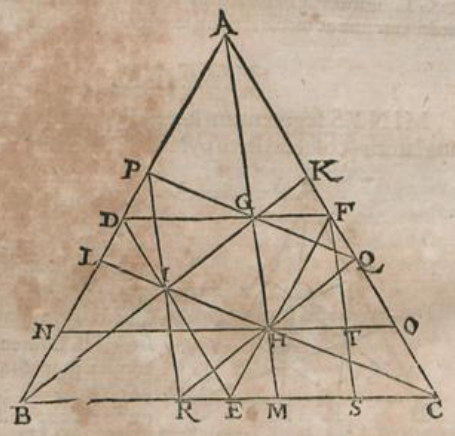


a 2. sex.
b 18. tertijdec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit ABC, cuius latera secentur bifariã in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, constituentes GHI, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas suis sectionibus producere triangulum Icosaedri GHI, hoc est, rectam BK, transire per puncta G, I; & rectam CL, per puncta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipsi BC, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, simile, ex coroll. propos. 4 lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis est rectæ FH, maiori segmento rectæ FE, seu DF, ipsi æqualis: (Est enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs scilicet æqualium laterum eiusdem trianguli comprehensos; [a] ideoque æqualia sint.) [b] Est autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, [c] propterea quod FH, DF, parallelæ sunt rectis AB, BC, seu NO. Igitur recta NO, composita ex NH, tota & HO, maiori segmento, [d] secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ BC, NO, DF, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonstrauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam AM, transire per puncta GH. Haud secus ostendemus BK, per puncta G, I; & CL, per puncta HI, transire, si per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB; Atque idcirco rectæ BK, CL, AM, suis sectionibus producent triangulum Icosaedri GHI.



a 4. pri.
b 34. pri.
c 2. sexti.
d 5. tertiydec.

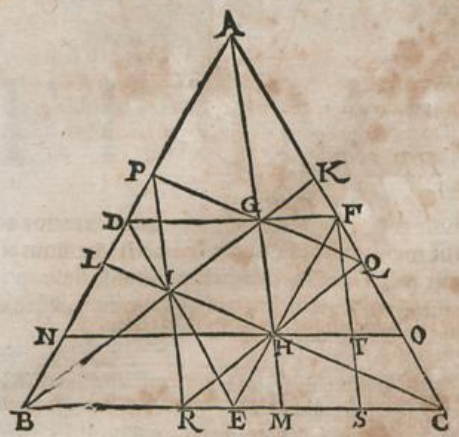
AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis est rectæ DF, seu rectæ FE, cuius maius segmentum fuit FH, hoc est FO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius segmentum rectæ AF; [e] ac proinde tota AO, secta in F, extrema ac media ratione: [f] Est autem vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntque maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, segmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia vero est, [g] vt AQ, maius segmentum ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus segmentum erit lateris AB, maiusque reliqua BP, ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, secabit latera CB, BA, extremá ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniã vero singula latera trianguli PQR, cum subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, [h] æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL; secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex ijs, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, [i] secans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam secatur in G. Eademq; est ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptũ est

e 5. tertiydecimi.
f 2. sexti.
g 2. quartidec.
h 4. pri.
i 2. sexti.

triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri G H I. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cũ enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli F E C, quod triangulo DEF, est æquale, recta FS, parallela rectæ AM, secans M C, HO, in S, & T. [k] Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; [l] sitque M S, ipsi G F, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF: Ac propterea cũ totæ DF, EC, æquales sint: erit quoque, reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC, in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde [m] quia FE, FS, similiter secantur: secatur autem F E, extrema ac media ratione. secabitur & FS, in T, extrema ac media ratione: maiusque segmentum erit F T, recta, [n] æqualis existens lateri Icosaedri G H, ob parallelogrammum GT. Igitur F T, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.

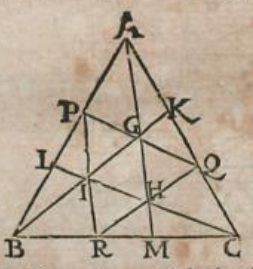


k 2. sex.
l 34. pri.
m 2. sex.
n 34. pri.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, basim Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptũ triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli latera trianguli ABC, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propos. præcedenti demonstratum est. Dico A P, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim PQ, dupla sit potentia minoris segmenti A P, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod P Q, recta dupla sit rectæ P G, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit P Q, potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. [a] Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, [b] cum diametro potentia sit commensurabile. [c] Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit: Atque adeo [d] cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile: (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri.) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

a 13. tertij dec.
b 6. dec.
c 6. tertij dec.
d 6. dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentes bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. [a] Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

a 2. sex.

DENIQVE [b] quia diameter sphæræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri coniungat centra basium oppositarum, vt in

b 14. tertij dec.

vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

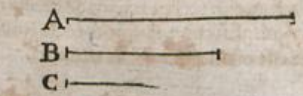
LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus Dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [a] existat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. [a] 5. sextidecimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex ijs, quæ in propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A, & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit eiusdem lateris cubi. Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.



THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in eo descripti.

CVM enim per ea, quæ in propos. 18. lib. 15. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC,) [a] Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. quadratum lateris Pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum. [a] 20. sext.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15. [a] Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autē lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentū est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat. [a] 8. sextidecimi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.

VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta, (qualis fuit ibi recta GI, subtendens angulum rectum GAI, minoribus segmentis AG, AI, comprehensum;) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare, [a] cum hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 47. pri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triangula vero ad E, verticem ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK,

MN,Nk, rectis AB,BC,CD,DA,parallelæ. Quod si coniungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: [a] Atqui vt EO ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum kLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, descriptum; [b] cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.

a 2. sexti.



b 33. prh.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribunturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectę, quę potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib. 15. eiusque scholio: Et in bifarijs sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. [a] Atqui diameter sphæræ, seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

a 14. ter- vijdec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectę lineæ diuisę extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectę lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. Minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus, (quod tota linea maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

PRÆTEREA, cum constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus: Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod demonstrandum erat.

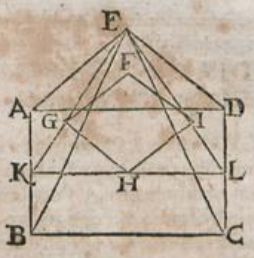
THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptę Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triãgula autem ad verticem E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintq; horum triangulorũ centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo descripta, describitur quoq; in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. exposuimus; Estq; latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta

diame-

diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæq; EK, EL, sesquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propos. 18. lib. 14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit vt EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutãdo, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI, ideoq; cum EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.



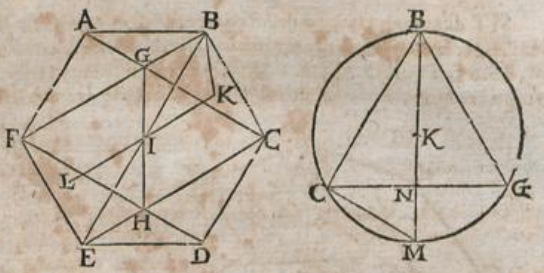
a 2. sex.

b 33. prh.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrum I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4. propos. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, cadens ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. prætati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, vt constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit KL, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrũ Icosaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, transeant, erit I, quoque centrum cubi inscripti, ideoque IK, IL, semidiametri æquales: Coniuncta autem KB, semidiametro circuli triangulum BCG, circumscribentis, erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [a] Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum existens quadrati semidiametri BI, vt in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris BK, KI, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, ([b] quod triplum est quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icosaedri BE, remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri BC. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extensaque Bk, vsque ad M, quæ secet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum k, ducta perpendicularis est ad CG, per ea, quæ ostendimus in scholio propos. 12. lib. 13. [c] erit recta BC, potentia sesquitertia rectæ BN, vt autem BC, ad BN, ita est BM, ad BC, quod BC, sit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll propos. 8. lib. 6. [d] cum angulus BCM, rectus sit in semicirculo existens. Recta igitur BM, potentia quoque sesquitertia est rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, sesquitertium est quadrati lateris BC. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



a 47. pri.

b 15. tertij. dec.

c 12. quar. tidec.

d 31. ter.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi kL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectę lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti;

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti, [a] duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. tertij dec.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

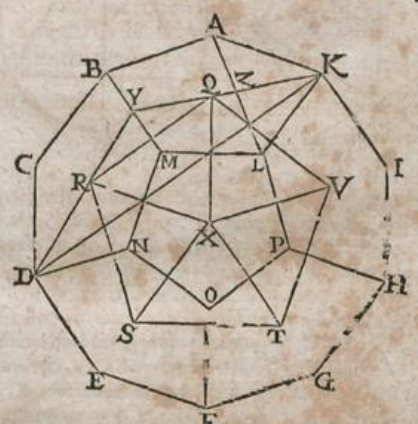
CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. eademque sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circumdantis: [a] Potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basim Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & suiipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum.

a 13. ter. huius.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atq; extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinq; triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti componentia angulum solidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. lib. 15. A duob⁹ angulis pentagonorũ D, K, in communem basim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. conuenient in puncto Y. Quod si subtendatur recta AL, angulo K, secabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ, per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositum describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodẽ scholio propos. 13. lib. 15. Quoniã vero latera YD, YK, triangula YDK, proportionaliter secantur in R, & Q; (sunt n. RD, QK, semidiametri circulorum æqualium æquales; nec non & YR, YQ, distantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipsi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, simile per coroll. propos. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY, [d] Vt autem DK, tota ad totam KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. sexti. dec.

b 2. sex.
c 4. sex.
d 2 quarti dec.

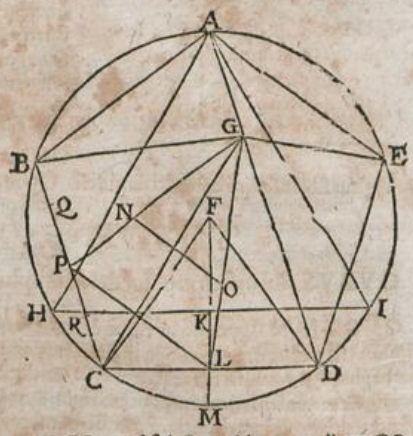
THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex ijs, quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, nec non & duo arcus ABH, AEI, cum sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; proptereaque rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, [a] secans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; coniunganturque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demonstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit Dodecae-

a 3. ter.

decaedri in Icosaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum KM, sectum quoq; in L, à minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ suiipsius segmento LM. Quoniam vero iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo lib. 4. ideoque similis illi; erunt triangula FCD, FPL, (si recta duceretur FP,) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmento dimidij ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoq; rectam LP, minore segmento dimidij ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, propotionaliter secantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14.) [b] parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile ex coroll. propos. 4. lib. 6. [c] Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est CR, per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.



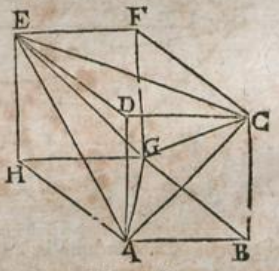
b 2. sex.

c 4. sex.

THEOR. 20. POPROS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non residunt quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis CEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & similibus triangulis, dimidijs scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nam exempli causa, pyramis ABCG, basim habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. [a] Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est, pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, propterea que cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.



a 32. vn-decimi.

ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. [b] Cubus vero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.

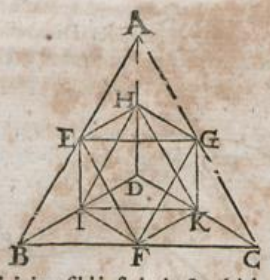
b 32. quar tidec.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplã. Cum enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt propos. 3. lib. 15. demonstratũ est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK, quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis similibus, æqualibusq; numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basib' pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraq; habeant æqualia, nempe dimidia laterũ æqualium eiusdẽ pyramidis ABCD, ex constructione

a 2. duodecimi.



propoſ.2. lib.15. [a] Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cum octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum triplicata, vt in his numeris 1.2.4.8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIkGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

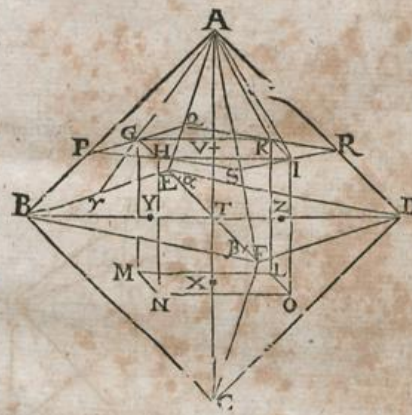
QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ.3. lib.15. [a] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, [b] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 20 ſextidec.
b 21. ſextidec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.

IN octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit GHIkLMNO, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum. Aſſumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, k, I, H, centra quatuor baſium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum conſtituentes PQRS, vt in propoſ.4. lib.15. eſt demonſtratum: [a] quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis exiſtens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. propoſ.14. lib.13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi GI, MO, in punctis V, X, per ſcholium propoſ.14. lib.11. Eſt autem V, centrum quadrati PQRS; [b] (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela ſecent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [c] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin.3. lib.11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ, proptereaque & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIk, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib.4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, k, I, H, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ.4. lib.15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ.18. lib.14. [d] Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: nec non VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum per coroll. 1. propoſ.15. lib.13. rectę centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſeſe bifariam ſecent in centro. Iam vero quoniam VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla autem fuit & AV, ciuſdem VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIkA, ductis rectis AI, Ak, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll.1. propoſ.7. lib.12. cum vtriuſque eadem ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX: [e] Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIkA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIk, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulis illius.) [f] proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterum, quod & recta Aγ, [g] proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquial-



a 15. vndecimi.
b 17. vndec.
c 47. pri.
d 17. vndec.
e 6. vndec.
f 8. duodec.
g 2 ſex.

quialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum GO, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. [h] Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

h 11. sexti decimi.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

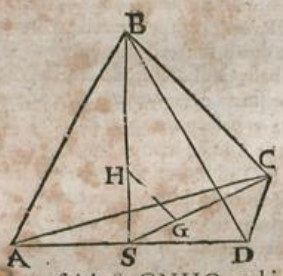
QVONIAM vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; [a] Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. sexti decimi.
b 20. sexti decimi.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G, H, centra duarum basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ sint rectarum HS, GS, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur BS, CS, [a] parallelæ erunt BC, HG, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo BCS, simile. [b] Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutando, vt BC, ad HG, ita CS, ad GS: [c] Est autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit basis GNHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABCD, circumscribentis; GH, vero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionē diametri quadratorum, quam latera; (Est enim vt diameter vnius, quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio vtraque sit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cum vtrobique sit proportio dupla.) [d] Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, [e] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi ABDC, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [f] cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.



a 2. sexti.
b 4. sexti.
c 18. quarti decimi.
d 22. sexti.
e 33. vndecimi.
f 20. sexti decimi.

COROLLARIVM.

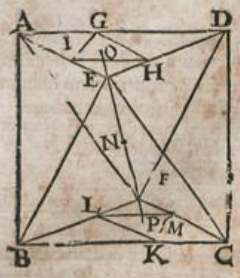
IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

IN octaedro ABCDEF, concipiatur deſcriptum Icoſaedrum. Dico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cum enim, vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur; ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, kLM, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atq; ex N, centro octaedri, nec non & Icoſaedri (idem enim vtriuſq; eſt centrum, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15. ad baſim ADE, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, trianguli ADE, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli GHI, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cum ergo plana oppoſita ADE, BCF, parallela ſint, ex coroll. 4. propoſitionis 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſitionis 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo kLM, cadet. Quare OP, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis NO: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri. At vero priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis ON, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo vero ON; per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis ADE, & altitudo OP, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri: Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit & tertia pars priſmatis ſuper baſim A D E, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli ADE, altitudo vero eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſim ADE, & ſub altitudine OP; cum per ea, quæ docuimus ad propoſ. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo OP, alterius autem baſis tertia pars baſis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia ſint octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis GHI, altitudo vero O P, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: proptereaque triplum huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis GHI, altitudo autem eadē O P, æquales eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim GHI, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma ſcilicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI, altitudo vero eadem OP; Atque idcirco duo priſmata, quorum vnius baſis tripla ſit trianguli GHI, altitudo autem O P, alterius vero baſis tertia pars baſis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icoſaedro in dicto octaedro deſcripto. Iam vero, cum duo illa priſmata octaedro æqualia, ad duo hæc priſmata, Icoſaedro æqualia ſint per ea, quæ oſtendimus ad propoſ. 7. lib. 12 vt baſes priſmatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes, (cum vnius baſis ſit A D E, nempe tres tertiæ partes ipſius A D E, complectens, alterius vero baſis tertia pars ipſius A D E,) ad baſes priſmatum Icoſaedro æqualium decem tertias partes trianguli G H I, comprehendentes; (cum vnius baſis tripla ſit trianguli G H I, nimirum nouem tertias partes ipſius G H I, continens; alterius vero baſis tertia pars ipſius G H I.) Sint autem vt quatuor tertiæ partes trianguli A D E, ad decem partes tertias trianguli G H I, [a] ita duæ tertiæ partes ipſius A D E, nempe dimidium quatuor tertiarum ad quinq; tertias partes ipſius GHI, hoc eſt, ad dimidiū decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipſius ADE, ad quinq; tertias partes ipſius GHI, ita quoq; ſint, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. ſex tertiæ partes ipſius ADE, (hoc eſt, duæ baſes octaedri triplum duarū tertiarum vniūs baſis conſtituentes, cum ſex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipſius G H I, (id eſt, ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum vnius baſis complectentes, cum quindecim tertias partes complectantur,) Erunt quoque duo illa priſmata, octaedro æqualia, hoc eſt, ipſummet octaedrum, ad duo hæc priſmata Icoſaedro æqualia, nempe ad ipſummet Icoſaedrum, vt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quocirca octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quod erat demonſtrandum.



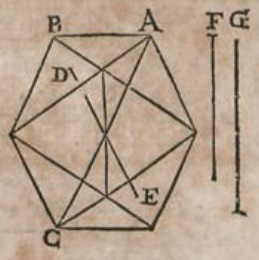
[a] 15. quin.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum in Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum A B C, in quo recta D E, coniungat centra baſium oppoſitarum: diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectam DE. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; Erit D E, diameter Dodecaedri in Icoſaedro ABC, deſcripti

scripti, cum copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri AC, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum ABC, descripto, cum vtriusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra Icosaedrum videlicet, ABC, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri ABC ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri DE, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis sunt demonstrata; nimirum ex proportionibus Icosaedri ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri AC, ad Dodecadrum diametri DE, in Icosaedro ABC, descriptum. Cum ergo Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi;



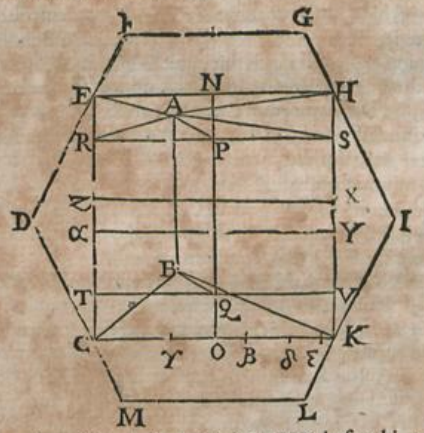
([a] Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icosaedrum ABC, eiusdem diametri est, vt G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur erit Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosaedro videlicet ABC, descriptũ, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestũ est, proportionem Icosaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrũ diametri DE, componi quoq; ex proportione F, lateris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 17. quartidec.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK. His vero pentagonis inscriptum sit quadratum cubi ECKH, super quod consistat pars Dodecaedri cubũ circumscribentis, solidum scilicet CBKHAE, constans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, [a] triangula sunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia sint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia sunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABCDE, ABKIH, per hypothesin, & triangula ex ipsis ablata CDE, HIK, [b] æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique est basis cubi inscripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque solida huic similia, & æqualia, per 10. defin. lib. 11. super reliquas quinque cubi bases; ita vt Dodecaedrũ superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum inscriptum circumstantibus conflatum, æqualem esse parallelepipedo, cuius quidem basis deficit à CEHK, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi CK, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentũ minus existit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela est lateri pentagoni AB, & in quam cadunt perpendiculares AP, BQ, demissæ in planum EK, vt constat ex demõstratis propos. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX, VR, XS, figuræ propos. 17 lib. 13.) Erit vtraq; recta AB, BQ, maius segmentum lateris cubi NO, vel HK, & vtraq; AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propos. 17. lib. 13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT, SV, maiora segmenta laterum EC, HK; atq; adeo ER, CT, simul, & HS, KV, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, constituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propos. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales sint; consistentque extra solidum ABTVSR. [c] Quoniam autem AS, ipsi BV, & AR, ipsi BT, æqualis est, & parallela, cum coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [d] parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cum latera vnius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentũ duobus aduersis trian-



[a] 4. pri.

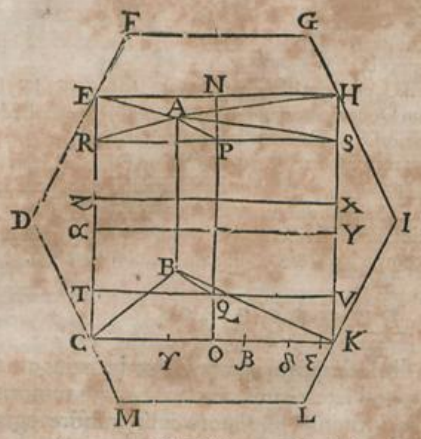
[b] 4. pri.

[c] 33. pri.

[d] 15. undecimi.

triangulis æqualibus similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, prisma est, ex definitione.

IAM vero, cum ostensum sit rectas HS, KV, minus segmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriusque HS, & KV; & ipsius VX, minoris segmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia vero pars sit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales sunt ostensæ; [c] vtriusque vero earum dupla est pyramis super basem TX, & sub eadem altitudine PA, vel QB, constituta, [f] quod & basis TX, dupla sit basis CV, vel RH; Æqualis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVkB, simul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis sit ipsi VX, vt demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. [g] quod & basis TY, duas partes tertias complectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVkB; Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBkHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoq; à base cubi deficientem rectangulo αX, contento sub latere cubi αY, & sub XY, tertia parte minoris segmēti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis à base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim Ck, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque Cβ, maius segmentum, & βk, minus bifariam in γ, δ,; atque ex βk, abscindatur βε, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars maioris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βk, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmenti; quia βk, maior est, quam dimidium maioris segmenti Cβ. Cum enim sit, vt Ck, ad Cβ, ita Cβ, ad βk, sit autem Ck, minor, quam dupla ipsius Cβ, quod Cβ, sit ipsius maius segmentum; erit quoque Cβ, minor, quam dupla ipsius βk, hoc est, erit βk, maior, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, vt tota Ck, ad maius segmentum Cβ, ita maius segmentum Cβ, ad minus βk; [h] erit quoque vt CO, dimidia ipsius Ck, ad Cγ, vel βε, dimidiam ipsius Cβ, ita Cγ, vel βε, ad βδ, dimidiam ipsius βk; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum Cγ, vel βε, & minus βδ. Quare & βδ, minus segmentum secabit βε, maius segmentum extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. eritque maius segmentum βδ, minus autem δε; Ac propterea rursus δε, minus segmentum secabit rectam δk maiori segmento βδ, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit εk. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi Ck, minore segmento εk, rectæ δk, vel sibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum, à base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.



c 6. duodec.
f 1. sex.
g 1. sex.
h 15. quin.

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inscripti deficere duobus parallelepipedis; quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati

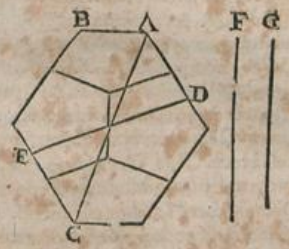
lateris

lateris cubi minus est segmentũ, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atq; idcirco, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At vero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri, Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum ABC, collocato describetur, cum eandem habeant diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icosaedro eiusdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto, Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex Diametro DE, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex corol. propos. 17. lib. 12.[a] Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icosaedrum eiusdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 11. quarti decim.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

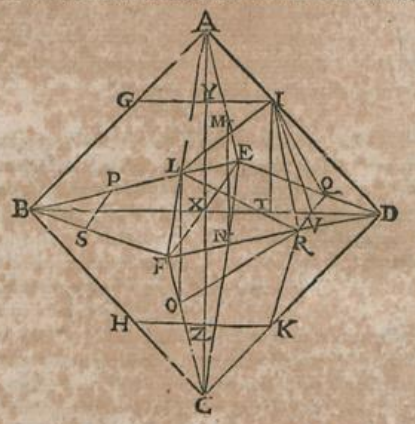
QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est,[a] cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tũ demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectẽs. Quamobrem Dodecadrum pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 25. sexti decim.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propos. 16. lib. 15: vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus Octaedri sunt imposita, secâtia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; ltć rectâ IT, perpendicularē ad BD, æqualē esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico Octaedrum ABCDEF, superare Icosaedrū sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri QR, altitudo vero IT, maius segmentum semidiametri AX. Cum enim in quatuor basibus Octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum solidum Octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus Octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri QIR, KQR, & commune triāgulum DQR, constituentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum AX, secta est à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoque secta est CX, à recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, [a] erit ea, æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT. Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in Octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos Octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrum prædictum: ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ, (Cum DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum Octaedri, angulumque contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale est tribus pyramidibus earum duodeçim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui Octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde Octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 34. prim.

COROLLARIVM

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrū imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: [b] Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet IT, seu YX: Fit, vt Octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, [c] (quod pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri) superet duplum Icosaedri in Octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

[b] 31. sexti dec.

[c] 22. sexti dec.

DE QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM DESCRIptione in data sphæra, ex Pappo Alexandrino.

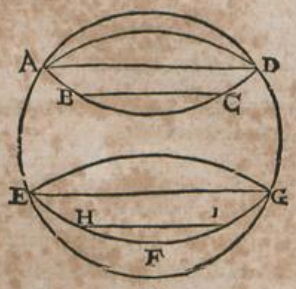
QVONIAM Euclides libro 13. quinq; corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde vero eadem à sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cum eius ratio multo clarior videatur, & facilior quā constructio illa ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodē Pappo lemmata nonnulla præmittēda sunt, quorū aliqua etsi per elemēta sphærica Theodosii demonstran-

monſtrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere cenſeri poſſumus; quippe cum propoſitiones ſphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poſſint. Incitandis autem Theodoſii propoſitionibus ſequemur ordinem noſtrorum commentariorum, quos in eadem elementa conſcripſimus. Hinc ergo initium ſumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli ABCD, EFG; ſitque primum in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda ſit diameter parallela. Ducatur, vt in ſcholio propoſ. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum AD, planum rectum ad circulum ABCD, [a] *faciens in ſphæræ ſuperficie circulum AEGD. Quoniam igitur circulus AEGD, circulum ABCD, biſariam, & ad angulos rectos ſecat, erit circulus AEGD, maximus, tranſibitque per polos circuli ABCD, ex ſchol. propoſ. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG,* [b] *cum paralleli eoſdem polos habeant;* [c] *ideoq; eum biſariam ſecabit. Communis ergo ſectio EG, eius diameter erit:* [d] *quæ cum ſit ipſi AD, parallela, patet propoſitum.*



a 1. 1. Theod.

b 1. 2. Theod.

c 15. 1. Theod.

d 16. vnde.

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, non ſit eius diameter, cui ducenda ſit diameter parallela in circulo EFG. [e] *Ducatur ipſi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime oſtendimus. Quoniam igitur vtraque BC, EG, eidem AD, parallela eſt, ex conſtructione,* [f] *ipſæ quoq; BC, EG, inter ſe parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.*

e 31. primi.

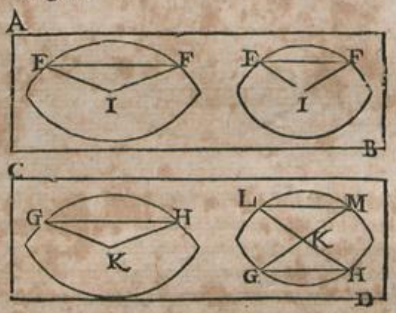
f 9. vndeci.

EADEM ratione rectæ BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, à diametro EG, diuerſa, quæ ipſi BC, æqualis ſit, ſi modo BC, maior non ſit diametro EG. Nam ſi in circulo EFG, ducatur ipſi BG, parallela HI, & æqualis, vt ad propoſ. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

LEMMA II.

SI in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abſcindant arcus ſimiles; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelę duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

IN planis parallelis AB, CD, deſcripti ſint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, primum parallelæ ſint, ad eaſdem partes centrorum I, K, auferanturq; arcus ſimiles EF, GH, ac tandem iungantur ad centra rectæ EI, FI, GK, HK. Dico tam EI, GK, quam FI, HK, parallelas eſſe. Quoniam enim arcus EF, GH, ſimiles ſunt, erunt anguli I, K, æquales, ex ſcholio propoſ. 22. lib. 3. [a] *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* [b] *Cum ergo tam illi, quam hi, ſint inter ſe æquales; erit tam angulus E, angulo G, quam angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ EF, GH, parallelæ ſunt, & rectæ EI, GK, ad eaſdem partes plani per EF, GH, ducti efficiunt cum ipſis æquales angulos E, G; erunt ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 16. lib. 11. demonſtrauimus, EI, GK, parallelæ; Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.*



a 32. prim.

b 1. prim.

DEINDE ſint DF, GH, parallelæ, non ad eaſdem partes centrorum I, K. Dico tam EI, HK, quam FI, GK, eſſe parallelas. Productis enim GK, HK, iungatur recta LM. Et quia latera GK, HK, lateribus LK, MK, ſunt æqualia, [c] *angulosq; ad verticem K, æquales continent;* [d] *erunt & baſes GH, LM, & anguli H, I, æquales & anguli G, M.* [e] *Igitur arcus GH, LM, æquales ſunt,* [f] *& rectæ GH, LM, inter ſe parallelæ: Ac proinde cum vtraque EF, LM, ipſi GH, ſit parallela,* [g] *erunt & EF, LM, parallelæ inter ſe. Quia igitur EF, LM, parallelæ ſunt abſcindentes ad eaſdem partes centrorum arcus ſimiles EF, LM; (Nam cum arcus GH, ſit arcui EF, ſimilis, erit quoq; arcus LM, qui arcui GH, æqualis eſt, eidem arcui EF, ſimilis) erunt tam EI, LK, hoc eſt, EI, HK, quam FI, MK, hoc eſt, FI, GK, parallelæ. Quod eſt propoſitum.*

c 14. prim.

d 4. primi.

e 28. tertij.

f 27. prim.

g 9. vndec.

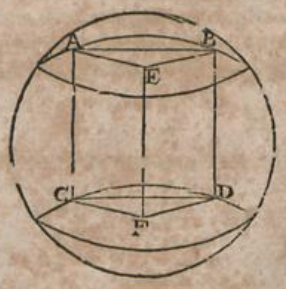
LEMMA III.

SI in ſphæra ſunt duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectę harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, in quibus ſint duæ rectæ æquales & parallelæ AB, CD, ad eaſdem partes centrorum, quarum extrema iungantur ad eaſdem partes rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ ſunt; [a] *erunt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Quare cum AB, CD, ſint etiam æquales;* [b] *æquales quoque erunt ac parallelæ AC, BD, quod eſt primum.*

a 7. vnde.

b 33. primi.



EX centris deinde E, F, ductis rectis EA, EB, FC, FD, iunctaque recta EF; erunt tam AE, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem.[c] Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales.[d] Quoniam vero circuli AB, CD, paralleli circa eosdem polos sunt,[e] recta per eorum polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum sphæra incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, nimirum recta per eorum polos extensa. Quod est absurdum. Haberent enim illæ rectæ segmentum commune EF.[f] Igitur EF, ad plana circulorum AB, CD, recta est;[g] Ac propterea & vtraque AC, BD, ipsi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.

c 33. prim.
d 1. 2. Theod.
e 10. 1. Theod.
f 10. 1. Theod.
g 8. vndec.

HÆC demonstratio locum etiam habet; quando parallelæ AB, CD. sunt circulorum diametri, sed tunc EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, vt patet.

LEMMA IV.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales; Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, & in iis duæ rectæ parallelæ & æquales AB, CD, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad easdem partes iungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD, BC, in centro sphæræ se intersecare, ideoq; diametros esse sphæræ inter se æquales. Quoniam enim AB, CD, parallelæ sunt;[a] *erunt AD, BC, in eodem cum ipsis plano; ac proinde se mutuo intersecabunt, vt in puncto H: quod dico esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis EA, EG; FD, FG.*[b] *Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem æquales sunt:*[c] *Item tam alterni anguli BAD, CDA, quam alterni ABC, DCB; æquiangula erunt triangula ABG, CDG.*[d] *Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: Item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cum ergo AB, CD, ponantur æquales,*[e] *erunt quoque tam BG, CG, quam AG, DG, inter se æquales. Rursus quia AE, DF, semidiametri circulorum æqualium æquales sunt; sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,*[f] *ideoque anguli alterni EAD, FDA, æquales; erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, æqualia, angulosque comprehendent æquales.*[g] *Igitur & bases EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales sunt.*[h] *Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallelæ AE, DF,*[i] *& EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, GF, in rectum & continuum constituta, propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, vt in præcedenti lemmate demonstrauimus,*[k] *perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales sint ostensæ, erit G, centrum sphæræ,*[l] *propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter à centro sphæræ absunt; inæqualiter vero abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales. Quod est primum.*

a 7. vnde.
b 15. primi.
c 29. prim.
d 4. primi.
e 14. quin.
f 19. primi.
g 4. primi.
h 7. vndec.
i 2. vnde.
k 10. 1. Theod.
l 6. 1. Theod.



SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales,[m] *manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares ita ostendetur. In circulo CD, ad rectã CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quæ igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erunt,*[n] *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales sunt,*[o] *ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erũt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EC, EA, & ad vtramque FD, FB, vt ostendimus,*[p] *perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC. per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti:*[q] *ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.*

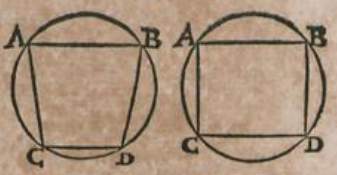
m 33. prim.
n 31. tertij.
o 9. vndec.
p 4. vnde.
q 8. vnde.

LEM-

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt: Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solum æquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis AC,BD. Dico AC,BD, æquales eſſe. Quia enim parallelæ ſunt AB,CD; [a] *erunt AC,BD, in eodem cum ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano,* [b] *fiat in sphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ ſint AB,CD; erunt ex ſcholio propoſ.27.lib.3. arcus AC,BD, æquales* [c] *ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod ſi parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABCD, in circulo habeat duo oppoſita latera AB,CD, parallela, & æqualia; erit ex ſcholio propoſ.31.lib.3. ABDC; parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A,B,D,C, recti erunt. Quod eſt propoſitum.*



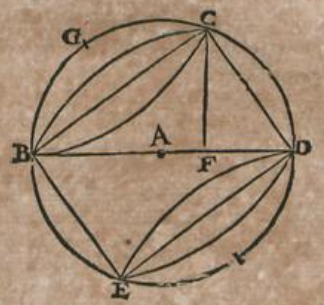
a 27. vndec.
b 1. 1. Theod.
c 29. tertij.

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter sphæræ ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera.

SIT sphæræ centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum B C D E, cuius diameter BD, ex coroll.1. propoſ.1.lib.1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipſius FD, dupla ſit; erit BD, talium partium 3. qualium 2. eſt BF; ac proinde BD, ipſius BF, ſeſquialtera eſt. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungantur rectæ BC, DC, ductaque DE, ipſi BC, parallela, connectatur recta BE. [a] *Et quoniã tam duo anguli BCD, EDC, quam duo BED, CBE, duobus rectis æquales ſunt* [b] *eſtque tam BCD, quam BED, rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex ſcholio propoſ.34. lib.1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum eſt;* [c] *ideoq; rectæ BC, DE, æquales ſunt. Diuiſo iam arcu BC, bifariam in G, erit quoq; arcus EGD, diuiſus bifariam in G, quod ex ſcholio propoſ.27.lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales ſint. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circuli in ſuperficie sphæræ deſcribantur tranſeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quam GE, GD;* [d] *qui paralleli erunt, cum eoſdem habeant polos.* [e] *Et quia circulus maximus BCDE, per polos ſecat circulos BC, ED, bifariam; erunt BC, ED, diametri ipſorum, quæ cum æquales ſint oſtenſæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim ex coroll.propoſ.8.lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continue proportionales ſunt; erit ex coroll.propoſ. 20.lib.6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC. Eſt autem BD, ipſius BF, ſeſquialtera, vt oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeo & quadrati ex DE, ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriuſq; diametri BC, DE, potentia ſeſquialtera eſt. Quod eſt propoſitum.*

HIS demonſtratis, hoc modo in sphæra data deſcribemus quinque corpora regularia.

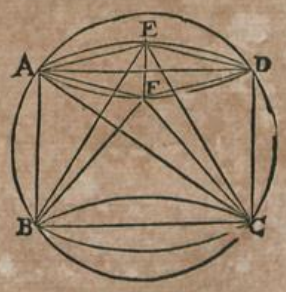


a 29. primi.
b 31. tertij.
c 34. prim.
d 2. 2. Theod.
e 15. 1. Theod.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

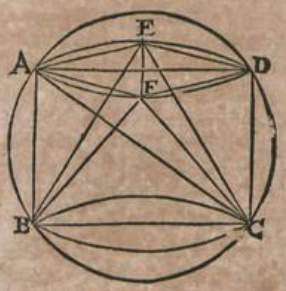
IN data sphæra Pyramidem deſcribere.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, [a] *qui eos ad angulos rectos, ac bifariam ſecabit, ac proinde cum eis communes ſectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, ſecans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, eſſe pyramidem, hoc eſt, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, eſſe æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter ſphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, deſcriptum, vt conſtat ex propoſ.6.lib. 4. Itaq; quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ AC, ſeſquialterum eſt quadrati ex AD, diametro circuli; ſi ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC,* [b] *æquale ſit quadrati ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus ſit, ex definit.3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Eſt autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex ſcholio propoſ.47.lib.1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex DC. DF;* [c] *quibus cum æquale ſit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin.3.lib. 11. rectus ſit; erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea q, quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc eſt, ipſi BC, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoq; BCF, triangulum eſt æquilaterum.*



a 35. 1. Theod.
b 47. prim.
c 47. prim.

d 47. prim.



RVRSVS quia quadratum ex AD quadrati ex DC, duplum eſt oſtenſum; eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE, æqualia erunt quadrata ex DC, DE: [d] *quibus cum æquale ſit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex deſin. 3. lib. 11. rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo ſunt quadrata ex CE, AD, propterea que recta CE, rectæ AD, hoc eſt, rectis BC, EF, æqualis eſt, atque adeo & rectæ CF, quæ ipſi BC, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam eſt, & ipſi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonſtrabimus, triangulum BEF, eſſe æquilaterum, & ipſis BCF, FCE, æquale. Ex quo ſequitur & BCE, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipſi BC, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt EBCF, ex deſin. 26. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cum eius anguli ſolidi E, B, C, F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM

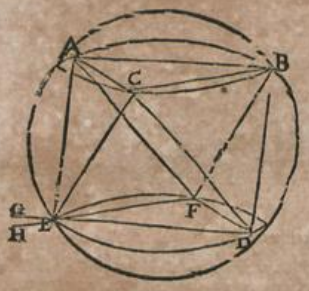
HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Nam latus pyramidis eſt æquale diametro AD, vt oſtendimus, & ex conſtructione diameter ſphæræ potentia eſt ſeſquialtera diametri AD.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra Octaedrum deſcribere.

a 2. quart.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, ita vt ſphæræ diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera. [a] *Deſcripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur per primum lemma, rectæ AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diuerſas partes centrorum; quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero DEF, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex ſchol. propoſ. 16. lib. 11. Cum enim parallelæ ſint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ ſint AB, GE, & BC, EH, ad eaſdem partes plani per AB, GE, ducti; erunt quoque BC, HE, hoc eſt, BC, EF, parallelæ, ex illo ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipſi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, Octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ AB, DE, æquales ſunt & parallelæ ad diuerſas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, BE, (quas tamen confuſionis vitandæ gratia non duximus) diametri ſphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares, ad ipſas AB,*



b 47. prim.

DE. [b] *Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Poſito autem quadrato ex diametro ſphæræ BE, 6. to quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At poſito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, eſt 3. quod ex coroll. 1. propoſ. 12. lib. 13. diameter circuli potentia ſit ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD, eſt 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia ſunt, & rectæ ipſæ DE, BD, æquales. Eſt autem DE, ipſi AB, per conſtructionem, & BD, ipſi AE, per 4. lemma æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, conſtituentque quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti ſint ex eodem 4. lemmate.*

RVRSVS quia BC, EF, parallelæ ſunt & æquales ad diuerſas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad eaſdem partes, diametri ſphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BF, CE, æquales inter ſe, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rurſus, vt prius, quadratum BCEF. Non aliter oſtendemus, ACDF, quadratum eſſe; cum iunctæ rectæ AD, CF, ſint quoq; ſphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, conſtructa ſint ſuper latera æqualia AB, BC, CA, nimirum ſuper latera trianguli æquilateri, cum AB, latus ſit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erunt omnia triangula octo ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter ſe æqualia. Octaedrum ergo eſt AD, ex deſi. 27. lib. 11. & in data ſphæra deſcriptum, cum eius anguli ſolidi A, B, D, E, C, F, ſphæræ ſuperficiem attingant. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris Octaedri in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex BE, diametro ſphæræ duplum eſſe quadrati ex DE, latere Octaedri.

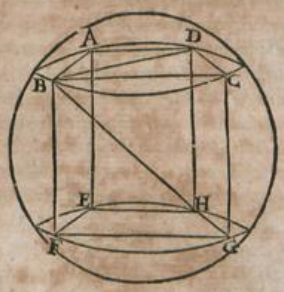
PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data ſphęra cubum deſcribere.

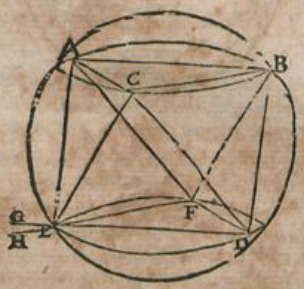
DESCRI-

DESCRIBANTVR *ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales ac paralleli ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ.* [a] *Deſcripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, ducatur per 1. lemma rectæ AD in circulo EFGH parallela EH, & æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo EFGH, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum AD, EH, æqualitatem: parallela vero, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Nam quia parallelæ ſunt AD, EH, ſuntque anguli æquales ADC, EHG, nimirum recti; erunt quoque DC, HG, parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per AD, EH, ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ AE, BF, CG, DH, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico AG, eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, eſſe quadrata, & æqualia. Ductis n. rectis BH, BD, erit ex lemmate 4. BH, diameter ſphæræ; at BD, diameter circuli ABCD, quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniã igitur per conſtructionem, quadratũ ex BH, ſeſquialterũ eſt quadrati ex BD; quadratum autẽ ex BD, quadrati ex BC, duplum ex ſchol. propoſ. 47. lib. 1. ſi ſtatuatur quadratum ex BH, 3. erit quadratum ex BD, 2. & quadratum ex DC, 1. atque adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplum erit. Rurſus quia quadratũ ex BH, eſt 3. & quadratũ ex BD, 2.* [b] *eſtque quadratum ex BH, æquale quadratis ex BD, DH, quod angulus BDH, ex deſin. 3. lib. 11. rectus ſit, erit quadratum ex DH, 1. Quadratum igitur ex BH, triplum eſt quadrati ex DH. Fuit autem idem quadratum ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo ſunt quadrata ex DC, DH, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. Cum ergo oppoſitis lateribus GH, CG, æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti ſint, ex deſin. 3. lib 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata oſtendentur: Sed & AC, EC, quadrata ſunt ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt AG, ex deſin. 25. lib. 11. & in data ſphæra deſcriptus, cum eius anguli ſolidi A, B, C, D, E, F, G, H, ſuperficiem ſphæræ contingant. Quod eſt propoſitum.*

a 6. quarti.



b 47. prim.



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ BH, triplum eſſe quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis eſt circulo ABC, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.

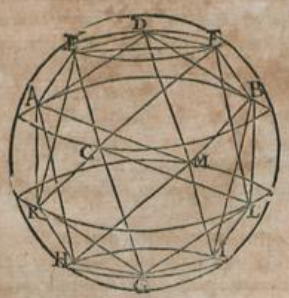
REPERIATVR [a] *recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti: Fiatque ex corollario propoſ. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdam lineæ, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrum, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data,* [b] *accommodetur in eo recta, quæ inuentæ ſemidiametri ſit dupla, cum hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam ſi per eam rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,* [c] *faciet id circulum ABC, in ſphæra cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde* [d] *inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat datæ ſphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiatque vt 3. ad 1. ita per coroll. propoſit. 6. lib. 10. quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo ABC, parallelus; quod fiet, ſi in eodẽ illo circulo maximo accõmodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela priori circuli diametro, ex iis, quæ ad prop. 1. lib. 4. demonſtrauimus, & per eã rectã planum extẽdatur priori circulo parallelum, hoc*

a 12. ſexti.

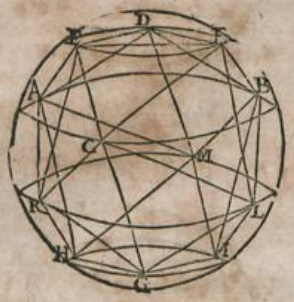
b 1. quinti.

c 1. 1. Theod.

d 12. ſexti.



lum, hoc est, ad dictum circulum maximum rectum, ex scholio propos. 18. lib. 11. Nam per idem scholium, planum hoc erit cir-
c 1. t. Theod. culo ABC, parallelum, [c] faciet q; in sphæra circulum DEF, cuius semidiameter semidiametro inuentæ æqualis est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alij duo æquales ac paralleli describantur GHI, KLM, quod facile fiet, si illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. f. 2. quart. [f] Descripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in circulo ABC, descripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis. Ac denig; huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipsi EF, hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, descripti. Cōpletis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt singula latera singulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipsi DF; at BC, MK, GI, ipsi DE, quod probabitur ex scholio prop. 16. lib. 11. vt in problemate secundo ostendimus parallelas esse BC, EF, ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea tringula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notauimus. Postremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorū ad viciniora quinq; puncta ducantur quinq; lineæ rectæ, videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF; ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico DG, esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit prop. 16. lib. 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.



SIT igitur in sphæra descriptum Icosaedrum DG, duodecim angulos statuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinq; rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales sunt, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F, ac propterea pentagonum E, A, M, B, F, in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera sint æqualia, vtpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex ijs, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum & æquiangulum erit A K C F D, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinque latera Icosaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: & GIMAK, ob latera quinq; Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG. Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinq; rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinq; æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinque latera Icosaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icosaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK, ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangula q; inter se æqualia constituantur. Quoniam vero recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pen-
g 15. vnde. h 1. 1. Theod. tagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB. [g] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela sunt, [h] faciuntque circulos parallelos in sphæra DEF; ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipsi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipsi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipsi EF, in
i 9. vndec. pentagono GLFEK. [i] Igitur EF, HI, cum sint eidem iunctæ AB, vel KL, parallelæ inter se parallelæ sunt. Eademque ratione DE, GI, cum sint eidem iunctæ BC, vel KM, parallelæ, inter se parallelæ erunt; propterea que plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra DEF, ABC, KLM, GHI, parallelis inter se sunt: & tam circuli DEF, GHI, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quam circuli ABC, KLM, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, constituuntur: quippe cum latera hæc sint rectæ subtendentes angulos pentagonorum æqualium.

QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad easdem partes extrema k, B, parallelarum kL, AB, in parallelis circulis, non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus BAk rectus ex 4. lemmate, quod kA, [k] connectat ad easdem partes extrema k, A, earundem parallelarum; [k] erit quadratum diametri kB, æquale duobus quadratis ex AB,
k 47. primi. Ak. Rursus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2.
l 10. tertij d. lib. 14. erit AB, iuncta ad EF, vel Ak, ipsi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco [l] cum latus pentagoni posßit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphæræ kB, (quæ ambas AB, Ak, potest vt ostendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus est hexagoni, & Ak, vel EF, latus decagoni. Quare sphæræ diameter kB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eam, quam latus penta-
m 12. tertij decim. goni habet ad latus decagoni: [m] Ac proinde cum tam AB, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla est semidiametri initio inuentæ, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

HIS demonstratis facili negotio concludemus, solidam figuram à nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus

latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum; adeo vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro D-G, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: [n] ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni: n 20. prim.

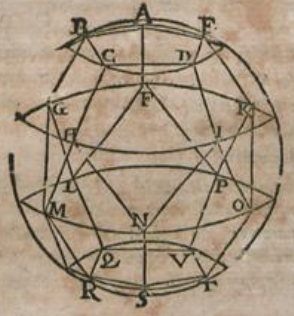
COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphęræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniã enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum AB. [o] Est autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ iunctæ AB, quod AB, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. o 12. tertiidecim.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propos. ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita vt semidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, sint potentia subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum FGHIK, LMNOP, potentia sint subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri CD, ad easdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis lateri pentagoni eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Rectæ autem HI, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad easdem centrorum partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autẽ pentagonis in hisce tribus circulis, (quorũ tamen latera, vt confusionẽ vitaremus, nonduximus, sed eorũ tantũ extrema puncta notauimus.) erunt singula latera eorũ singulis laterib. pentagoni ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallelæ ductæ sunt: quod demonstrabitur, vt in probl. 2. ostendimus parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erũt ipsi BC, &c. Postremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propos. 17. lib. 13.) suos 20. angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos describimus, quinos videlicet in singulis circulis, atq; in eo situ, quo eadem 20. puncta notauimus.



SIT ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio prop. 8. lib. 13. demonstrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & Ik, lateri DE, in pentagono DEkOI; & kF, ipsi AE, in pentagono AEkPF; & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FK, parallelæ sunt; [c] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quod hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propos. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, sint parallela; atque adeo, ex eodem scholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E; & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra [d] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemque modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL, [e] quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

c 15. vnde.

d 1. 11. Theod.

e 4. primi.

DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [f] erunt quoque ipsæ iunctæ ND, MB, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant. [g] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quod vtraque lateri DI, sit parallela. [h] Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus est, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ sunt ostensæ. Non secus ostendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.

f 9. vndec.

g 33. prim.

h 15. vnde.

RVRSVS quoniam iuncta recta EF, OV, cum ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æquidistent, [a] parallelæ sunt; nec non & inter se æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant, [b] erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano est, [c] cum EF, OV, in eodem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo, [d] propterea quod planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propos. 31. lib. 3. demonstrauimus, cum in eo quadrilatero opposita latera æqualia sint, quadrilaterum rectangulum est EFVO; ac proinde cum omnia latera æqualia sint, subtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, rectæ iunctæ FG, quod æquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoq; qualium partium 1. statuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata simul eorundem partium 3. Quibus [e] cum æquale sit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter sphæræ est; (Nam cum æquales sint iunctæ FG, ON, subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. libr. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter sphæræ.) erit quoque quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est [f] quadratum rectæ FG, hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit. [f] Est autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri sphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni; [g] atq; adeo vt diameter sphæræ ad rectam FG, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod FG, sit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appositæ formulæ apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoq; vt diameter sphæræ ad latus trianguli, hoc est, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

a 9. vnd.
b 33. primi.
c 7. vnde.
d 1. 1. Theod.
e 47. pri.
f 12. tertij.
g 12. sexti.

Diam. sphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta FG, subtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus triāguli in circulo FGHIK, ad lat. trianguli in circulo BCDE; erit quoq; vt lat. triāguli in circulo FGHIK, ad lat. trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad lat. decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proxime demonstratum est. Igitur ex æquo erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoq;, vt diameter sphæræ ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni: erit vterque circulus DFF, GHI, figuræ antecedentis propos. vtrique circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ æqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

Diam. sphæræ.	Lat. pentago.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexago.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratu, nullo negotio probabimus, solidam figuram AS, à nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum A B C D E, omnes eius anguli solidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo ABCDE, figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoq; est lib. 14. propos. 5.

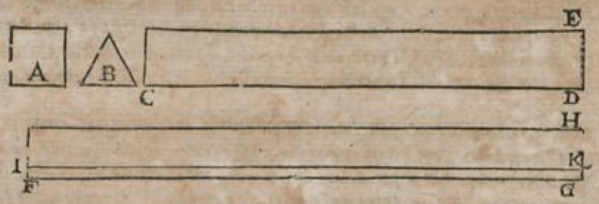
MANIFESTVM quoq; est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri & angulos solidos Dodecaedri.

SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonstrauimus, facile etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in vna eademq; sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse maius. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hac corpora construxisse, cum post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum constituerit. Ita enim semper à minoribus ad maiora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

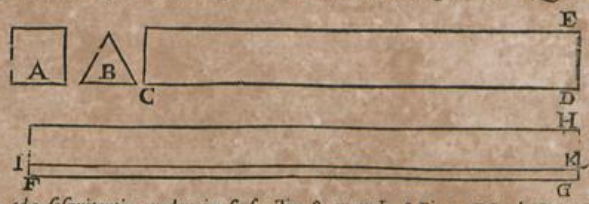
SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul.



ht. sexti.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum sit lateris quadrati A, & latus DE, lateri eiusdē quadrati æquale: Erit q; rectangulum CE, octuplum quadrati A, [h] cum sit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus F G, decuplum sit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius bāsim demissæ, hoc

hoc est, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi GH, hoc est, altitudini trianguli B, [a] vigecuplum est trianguli B; Ei autem triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. rectangulum FH, quippe cum basis FG, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est, rectangulum FH, maius esse rectangulo CE. [b] Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus DE, potentia sesquitertium est eius perpendicularis, hoc est, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod FG, sit 10. & CD, 8. hoc est, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Est enim maior proportio 25. ad 16. supernoncupartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3. sesquitertia, quod maior sit fractio $\frac{9}{16}$, quam $\frac{1}{3}$. [c] Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK, eritque maior quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH; [d] ac proinde maior erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipsi FG, parallela, erit vt IK, ipsi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK. [e] Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, æquale: ideoque EH, maius, quam CE. Quod est propositum.



a 1. sexti.
b 12. quartidec.
c 12. sexti.
d 10. quint.
e 14. vel 16. sexti.

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

[f] QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæræ descripta superficiei cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt: Duo vero eadem quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæræ descriptis, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæræ æqualia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæræ. Quod est propositum.

f 20. quartidec.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis è centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta.

NAM [g] quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoq; vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumq; solidum ita intra sphæram constituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis è centro sphæræ ad basim Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis sit perpendiculari cubi; [h] quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoque æqualiter à centro distent; erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.

g 13. tertijd.
h 21. quartidec.

IV.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæra semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam obrem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, ac octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato; erit quoq; Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATVM QVINQVE CORPORVM Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro, quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, [i] vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum: [k] est autem latus cubi latere Icosaedri maius, maius quoq; erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.

i 11. quartidec.
k 18 tertijd.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basim cubi demissa, vt in 3. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoq; est; erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentum maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum Icosaedrum sit æquale, & hoc cubo; maius quoq; erit Icosaedrum, quam cubus. Quod est propositum.

III. CV-

III.

CVBVS Octaedro maius est.

QVONIAM est,[a] vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius. (Nam[b] cum latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multo maius semidiametro sphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.

a 27. quartidec.
b 18 tertijd.

IV.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis Octaedri minor est base Tetraedri,[a] quod basis Tetraedri ad basem Octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in Octaedro, & cubo. Est autem & superficies Octaedri superficie Tetraedri maior,[b] cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Octaedri cadente, & tertia parte superficiei Octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex schõlio propos. 20. lib. 14. illud solidum Octaedro sit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoq; Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

a 24. quartidec.
b 14. quardecim.

ALITER. Quoniam est,[c] vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam[d] quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoq; multo minorem tripla;[c] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoq; Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

c 12. quardecim.
d 18 tertijd.
c 10. quint.

ALITER.[f] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectangulum sub linea potente $\frac{2}{3}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea contente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

f 17. quartidec.

ALITER.[g] Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam[h] cubus ad octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, quæ cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam.) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.

g 32. quartidec.
h 27. quartidec.

EODEM prorsus ordine se mutuo superant conuexæ superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri. Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Cõuexa superficies cubi superficie Octaedri maiõr: Octaedri deniq; superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

QVONIAM enim[i] est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius,[k] vt supra demonstratum est. Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.

i 9. quartidecim.
k 18. tertijdec.

SVPERFICIEM vero Icosaedri maiorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremate quarto ante comparationem solidi tatum quinq; corporum Regularium.

DEINDE[l] quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoq; superficies cubi superficie Octaedri maior.

l 27. quartidecim.
m 14. quartidecim.

DENIQVE[m] quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.

n 18 tertijd.

VIDES igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus; ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. Nam[n] vt supra demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atq; soliditas, vt hic demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Deniq; quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra describta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atq; ab Euclide descripta, se mutuo superant,[o] vt supra ostensum est, ita contrario ordine earundem superficies conuexæ, atq; soliditates se mutuo superant, vt hoc loco demonstrauimus.

o 18. tertijdec.

CÆTERVM prætereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4. Mathematicarum collectionum; soliditates videlicet quinq; corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atq; idcirco, non in eadem sphæra constructa, longè aliter se habere, quam à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius sit.

INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS DVArum basium cuiuscunque solidi regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

I.

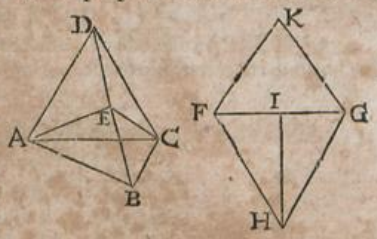
ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT pyramis ABCD, cuius latere BD, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppositis rectæ ducantur AE, & CE; quæ cum perpendiculares sint ad BD, communem sectionem planorum ABD, CBD, in quibus existunt. (a Sunt enim in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, basium ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. libr. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur FGH: triangulum æquilaterum super rectam FG, lateri pyramidis æqualem constructum, atq; idcirco

a 28. primi.

triangu-

triangulo cuicunq; pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, conſtituatur ſuper FG, triangulum FGK, habens vtrumq; latus FK, GK, æquale perpendiculari HI, hoc eſt, vtriq; perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem eſſe angulo inclinationis AEC, baſium ABD, CBD. Cum enim latera KF, KG, æqualia ſint lateribus EA, EC; & baſis FG, baſi AC; *a* Æquales erunt anguli FKG, AEC. Dico inſuper angulum inclinationis ACE, acutum eſſe. *b* Cum enim latus AD, vel illi æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.



a 8. primi.

b 12. quartidecim.

COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia ſint æqualia.

II. ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; ſectum in G, rectę ducantur BG, DG, quę cum perpendiculares ſint ad AE, communem ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtunt, *c* (quod in triangulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoq; triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta KL, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri deſcripti, triangulum OMN, habens vtrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc eſt, vtriq; perpendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus GB, GD; & baſis MN, baſi BD; *d* Æquales erunt anguli MON, BGD. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum. *e* Cum enim diameter octaedri BD, dupla ſit potentia lateris AB: *f* latus vero AB, potentia ſeſquitertium rectæ BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemq; 3. quadratum rectæ *BG*; ideoq; ambo ſimul quadrata rectarum *BG*, *DG*, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris *BD*, in triangulo *GBD*, maius eſt quadratis ſimul laterum *GB*, *GD*; Ac propterea angulus *BGD*, obtuſus erit, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 2. oſtendimus.



c 6. primi.

d 8. prim.
e 14. terti. decim.
f 12. quartidec.

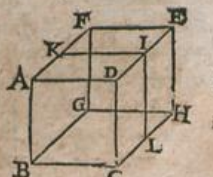
COROLLARIVM.

HINC ſit, omnes inclinationes baſium octaedri æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, DG, ſubtendanturque ab octaedri diametris, cuiuſmodi eſt BD; *g* omnes inter ſe æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & diametri octaedri eoſdem ſubtendentes ſint æquales.

g 8. primi.

III. ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus *ABCDEFGH*, in quo ſecetur latus *DE*, bifariam in I, necnon & latera illi oppoſita in quadratis AE, EC, commune latus illud *DE*, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectę ducantur IK, IL; *h* quę cum æquales, ac parallelæ ſint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter ſe necnon & IE, LH, inter ſe æquales exiſtant, & parallelę) ideoque *i* anguloſ rectos ad latus *DE*, efficiant. continebunt KIL, angulum inclinationis baſium AE, EC, ex definit. 6. lib. 11. Quoniam vero rectę IK, IL, parallelę exiſtentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, *k* angulum KIL, æqualem



h 33. prim.

i 29. prim.

k 10. vnde.

qualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basiũ cubi.

COROLLARIVM. I.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, inuenire.



ESTO pyramis ABCDEF, vna ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum ABCDE, ex quinque Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F. Diuiso itaq; latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonstratis in probl. 2. huius scholii, perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE, angulum inclinationis basium ABF, AEF, per 6. def. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens vtramque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtriq; perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basiũ ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; *a* Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB; *b* erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemq; modum AE, maius erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoq; erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita vt rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorsus includant. *c* Angulus ergo O, maior erit angulo BAE; At hic obtusus est (cum enim quinq; anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. libr. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintam. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior.) Multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE.

a 8. primi.
b 19. primi.
c 21. primi.

COROLLARIVM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationũ contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, EG, subtendanturque à rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE: *d* omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, *e* æquales erunt.

d 8. primi.
e 4. primi.

V.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.



CVM per ea, quæ ostendimus in propos. 8. libr. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum idem latus commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK. His porro pentagonis inscriptum sit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiso autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, secantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipsi AB, sint parallelæ, ex scholio propos. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis basium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte construemus. super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulũ QRSTV, hoc est, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta subtendatur VS, *f* æqualis existens rectæ EC, cum

f 4. prim.

cum & latera TV,TS,lateribus DC,DE,æqualia sint,angulosque contineant æquales. Diuisa deinde recta QR, bifariam in X,ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea-que perpendicularis ad VS,cum VS,sit parallela ipsi QR, ex schol. prop. 8. lib. 13. Ac postremo super recta VS,triangulum fabricetur VZS,habens vtrumq; latus ZV,ZS,perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS,æqualem esse angulo inclinationis ONP. Du-ctis enim rectis NE,NH,VX; cum latera EA,AN,æqualia sint lateribus H-A,AN: Item lateribus VQ,QX, angulosque comprehendant æquales; *a* Æquales erunt & bases NE,NH,VX,& anguli ANE,ANH,QXV; ideoq; & residui ex rectis,anguli videlicet ENO,HNP,VXY,æquales erũt. Quo-niam igitur anguli ENO,EON, trianguli ENO,æquales sunt angulis HN-P,HPN,trianguli HNP; nec non & angulis VXY,VYX,trianguli VXY; (sunt enim EON,HPN,VYX,ostensi recti.) Et latus NE,lateribus NH,V-X,æquale demonstratum; *b* Æqualia erunt reliqua latera NO, OE,reli-quis lateribus NP,PH; Item lateribus XY,YV. Quare rectæ ZV,ZS,æqua-les existentes ipsi XY,rectis NO,NP,æquales erunt. Iam vero, quia OE,P-H,æquales sunt,ac parallelæ; *c* erit quoque recta coniuncta OP, æqualis & parallela ipsi EH,ideoque æqualis ipsi EC, hoc est,rectæ VS. Quam ob rem,cum latera ZV,ZS,lateribus NO,NP,æqualia sint; basis item VS, basi OP; *d* æqualis erit angulus VZS,angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ON-P,inclinationis,esse obtusum. Nam ducta recta B α, ipsi NO,parallela; cum sit quoque NB,ipsi O α, parallela, ex scholio propos. 8. lib. 13. Parallelogrammum erit NO α B, *e* ideoq; recta B α, ipsi NO,æqualis. Quia vero BC,latus pentagoni oppositum angulo C α B, qui rectus est, (*f* æqualis nimirum interno CON,) maius est latere B α, hoc est recta NO, vel vtraque ZV,Z-S,quæ ipsi NO,ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV,TS,maiores duabus rectis, ZV,ZS. Cadit igitur punctum Z,intra triangulum TVS,ita vt rectæ TV,TS, rectas ZV, ZS, includant omnino: Atq; proinde angul⁹ VZS,ideoq; illi æqualis ONP,maior est angulo pentagoni T: Hic vero cũ sit pẽtagoni angulus,paulo ante,cũ de inclinatione basiũ Icosaedri agerem⁹,demõstra-tus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoq; obtusus.



a 4. primi.

b 26. prim.



c 33. prim.

d 8. primi.

e 34. prim.

f 29. prim.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his,omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ℰ medio puncto lateris Dodecaedri ad duo late-ra cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt NO,NP,subtendanturq; à rectis, quæ cubi inscripti lateri-bus sunt æquales, vel certe quę rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt,cuiusmodi est recta OP,lateri cubi inscripti EH,quod angulum pentagoni EAH,subtendit, æqualis: Erunt omnes inter se æqua-les,cum & omnes illæ perpendiculares,quæ ipsos continent,æquales sint: nec non & rectæ illæ omnes, quæ eos-dem subtendunt,latera videlicet cubi,inter se etiam sint æquales.

g 8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

QVID INSINGVLIS XV. LIBRIS AGAT EVCLIDES.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN primo libro disputat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesque tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera, ipsa inter se comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma transit, eorumque ortum declarat: & symptomata, quæ in ipsis sunt, demonstrat. Postea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem ostendit, & quonam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Denique de iis, quæ in triangulis rectangulis à lateribus describuntur, quadratis; quam habeat proportionẽ, quod à subtendente rectum angulum describitur, ad ea, quæ à comprehendentibus ipsum fiunt.

IN secundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. Deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarantur. Postea de quadratis, quæ à lateribus obtusangulorum, & acutangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quæ à subtendentibus obtusum, & acutum angulum fiunt, ad ea, quæ à comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

IN

IN tertio libro agitur, de iis, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis: itemque de angulis qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

IN quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus, & circumscriptionibus.

IN quinto de analogiis.

IN sexto de proportionibus figurarum inter sese: de figuris similibus, & reciprocis: de rectis lineis proportionalibus; de parallelogrammorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiant parallelogrammis similibus, vel excedant: quomodo recta linea terminata, extrema ac media ratione secetur: de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemq; Sectorum, in circulis æqualibus.

IN septimo agitur de numeris primis, & compositis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur: de numerorum parte, & partibus: de numeris multiplicibus: de proportionalibus: & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

IN octauo de numeris deinceps proportionalibus; de numeris planis: de quadratis: de cubis, & solidis: de similibus planis, & similibus solidis.

IN nono item de similibus planis: de cubis, & solidis: & de numeris deinceps proportionalibus siue ab vnitate, siue simpliciter: de numeris primis: de numeris paribus: de imparibus. de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus: de numeris perfectis.

IN decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itemq; de rationalibus, & irrationalibus.

IN vndecimo primum agitur de rectis lineis, quatenus ad solida corpora referuntur, videlicet quando sint in vno plano; quando rectæ, seu perpendiculares ad planum; quando parallelæ: quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendicularis ducatur. Deinde vero de planis simul disserit, tum de solidis angulis. Postremo de solidis parallelepipedis, & nonnulla de Prismatibus.

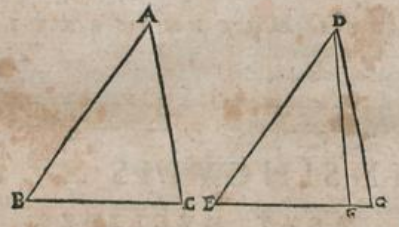
IN duodecimo de pyramidibus, & prismatibus: postea de conis, & cylindris: demum de sphæris.

IN tertiodecimo de constitutione quinq; figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellant: videlicet tetraedri, vel Pyramidis hexaedri, vel cubi octaedri, dodecaedri & Icosaedri: ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de iis, quæ accidunt rectæ lineæ extremæ ac mediæ ratione sectæ: de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo æquilatero.

IN quartodecimo de dodecaedri, & Icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione.

IN quintodecimo & vltimo de inscriptione quinq; figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.

Hæc figura omissa est libro primo, propos. 24. Num. 2.



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0632-0
DFG

p: 308 sub def: 309 de planis, æqualibus quidem circumferentiis, non vero æquali area gaudentibus.

58

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0633-6

177738

AB 177.738

Sb

ULB Halle
007 396 791
3

VD 17

Universitäts- und Landesbibliothek
Sachsen-Anhalt

urn:nbn:de:gbv:3:1-596476-p0635-7

DFG